دانشگاه پیام نور

آمار و احتمال ۲

(رشتهٔ آمار)

دکتر نرگس عباسی   دکتر علی شادرخ   دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

فهرست

فصل اوّل

تابع‌های متغیرهای تصادفی

۱-۱ مقدمه

در این فصل به مسأله‌ی یافتن توزیع‌های احتمال یا چگالی‌های تابع‌هایی از یک یا چند متغیر تصادفی می‌پردازیم. بدین معنا که مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n و توزیع احتمال یا چگالی متغیر تصادفی $Y=u(X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$ مورد توجه است. این رابطه به‌معنی این است که مقادیر متغیر تصادفی Y به‌وسیله‌ی معادله‌ی $y=u(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ به مقادیر Xها بستگی دارند.

برای حل این نوع مسأله چندین روش موجود است. روش‌هایی که سه بخش آینده مورد بحث قرار خواهند گرفت؛ **روش تابع توزیع**، **روش تبدیل متغیرها**، **روش تابع مولد گشتاورها** نامیده می‌شوند. اگرچه در بعضی از وضعیت‌ها هر سه روش را می‌توان به‌کار برد، ولی در اکثر مسائل یکی از روش‌ها بر بقیه ترجیح دارد (استفاده از آن آسان‌تر از استفاده از سایرین است). این امر مثلاً، در مواردی که تابع u، تابعی خطی از متغیرهای تصادفی مستقل $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n باشد درست است، و روش تابع مولد گشتاورها ساده‌ترین نتیجه‌گیری‌ها را دارد.

روش‌های مختلفی که در این فصل مورد مطالعه قرار می‌گیرند، در فصل دوم برای به‌دست آوردن چندین توزیعی که در استنباط آماری اهمّیت بنیادی دارند به‌کار می‌روند.

۱-۲ روش تابع توزیع

یک روش سرراست به‌دست آوردن چگالی احتمال تابعی از متغیرهای تصادفی پیوسته عبارت است از اینکه ابتدا تابع توزیع آن و سپس با مشتق‌گیری، چگالی آن را پیدا کنیم. بنابراین، اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n متغیرهای تصادفی پیوسته با چگالی احتمال مفروضی باشند، چگالی احتمال $Y = u(X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$ چنین به‌دست می‌آید که ابتدا عبارت

$$F(y) = P(Y \leq y) = P[u(X_۱, X_۲, \ldots, X_n) \leq y],$$

را برای احتمال‌ها تعیین می‌کنیم و با مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}.$$

مثال ۱-۱. اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۶x(۱-x) & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال $Y = X^۳$ را بیابید.

حل. فرض می‌کنیم $G(y)$، مقدار تابع توزیع Y را به‌ازای y نشان دهد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^۳ \leq y) \\ &= P(X \leq y^{۱/۳}) \\ &= \int_۰^{y^{\frac{۱}{۳}}} ۶x(۱-x)dx \\ &= ۳y^{\frac{۲}{۳}} - ۲y \end{aligned}$$

و در نتیجه به‌ازای $۰ < y < ۱$،

$$g(y) = ۲(y^{-\frac{۱}{۳}} - ۱)$$

و سایر جاها، $g(y) = ۰$. در بخش بعدی خواهیم دید که این نتیجه را با روش دیگری می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۱–۲. اگر $Y = |X|$، نشان دهید که

$$g(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y) & y > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن $f(x)$، مقدار چگالی احتمال X به‌ازای x و $g(y)$ مقدار چگالی احتمال Y به‌ازای y است. این نتیجه را برای تعیین چگالی احتمال $Y = |X|$ نیز که در آن X، توزیع نرمال استاندارد دارد به‌کار برید.

حل. به‌ازای $y > ۰$، داریم

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(|X| \le y) \\ &= P(-y \le X \le y) \\ &= F(y) - F(-y) \end{aligned}$$

و بعد از مشتق‌گیری

$$g(y) = f(y) + f(-y)$$

چون $|x|$ نمی‌تواند منفی باشد، به‌ازای $y < ۰$، $g(y) = ۰$؛ مقدار $g(۰)$ را به دلخواه مساوی ۰ قرار می‌دهیم. پس می‌توانیم بنویسیم

$$g(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y) & y > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد و $n(y; ۰, ۱)$ معرف چگالی احتمال نرمال استاندارد باشد و $Y = |X|$، نتیجه می‌شود که به‌ازای $y > ۰$

$$\begin{aligned} g(y) &= n(y; ۰, ۱) + n(-y; ۰, ۱) \\ &= ۲n(y; ۰, ۱), \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $g(y) = ۰$. کاربرد مهمی از این نتیجه در مثال ۱–۹ داده شده است.

مثال ۱–۳. اگر توزیع توأم $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت

$$f(x_۱, x_۲) = \begin{cases} ۶e^{-۳x_۱ - ۲x_۲} & x_۲ > ۰, x_۱ > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

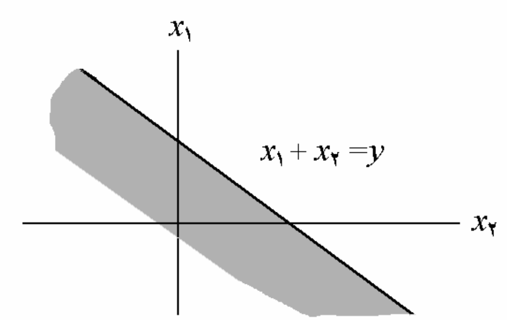
باشد، تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = X_۱ + X_۲$ را پیدا کنید.

حل. اگر از چگالی توأم روی ناحیه‌ی هاشور خورده‌ی شکل ۱-۱ انتگرال‌گیری کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$F(y) = \int_0^y \int_0^{y-x_2} 6e^{-3x_1-2x_2} dx_1 dx_2$$
$$= 1 + 2e^{-3y} - 3e^{-2y}$$

و اگر نسبت به y مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$f(y) = \begin{cases} 6(e^{-2y} - e^{-3y}) & y > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$



شکل ۱-۱. نمودار مثال ۱-۳

تمرین

۱-۱. اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، و $Y = X^2$، پیدا کنید

الف) تابع توزیع Y،

ب) چگالی احتمال Y.

۱-۲. اگر X توزیع نمایی با پارامتر θ داشته باشد، برای تعیین چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \ln X$، روش تابع توزیع را به‌کار برید.

۱-۳. اگر X دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ باشد، برای یافتن چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \sqrt{X}$، روش تابع توزیع را به‌کار برید.

۱-۴. اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} ۴xye^{-(x^۲+y^۲)} & y > ۰,\ x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد و $Z = \sqrt{X^۲ + Y^۲}$، پیدا کنید

الف) تابع توزیع Z،

ب) چگالی احتمال Z.

۱-۵. اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که چگالی نمایی با پارامترهای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ دارند، از روش تابع توزیع استفاده کرده، چگالی احتمال $Y = X_۱ + X_۲$ وقتی

الف) $\theta_۱ \neq \theta_۲$،

ب) $\theta_۱ = \theta_۲$،

را بیابید.

۱-۶. با رجوع به دو متغیر تصادفی تمرین ۱-۵، نشان دهید که اگر $\theta_۱ = \theta_۲ = ۱$، متغیر تصادفی

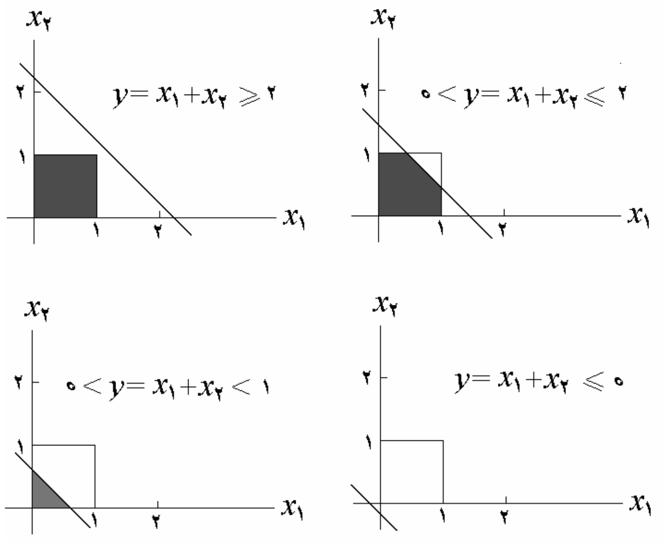
$$Z = \frac{X_۱}{X_۱ + X_۲}$$

دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ است.

۱-۷. اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند که چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ دارند، با مراجعه به شکل ۱-۲ برای تابع توزیع $Y = X_۱ + X_۲$ عباراتی بیابید وقتی که

الف) $y \leq ۰$،　ب) $۰ < y < ۱$،　ج) $۱ < y < ۲$،　د) $y \geq ۲$،

چگالی احتمال Y را نیز پیدا کنید.



شکل ۱-۲. نمودار تمرین ۱-۷

۱-۸. اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & y>0, x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد و $Z=\frac{X+Y}{2}$، چگالی احتمال Z را با روش تابع توزیع بیابید.

۱-۳ روش تبدیل: یک متغیره

حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان بدون به‌دست آوردن تابع توزیع در بدو امر، توزیع احتمال چگالی تابعی از یک متغیر تصادفی را تعیین کرد. در حالت گسسته مادامی که رابطه‌ی بین مقادیر X و $Y=u(X)$ یک‌به‌یک است واقعاً مشکلی وجود ندارد؛ آنچه باید انجام دهیم جایگذاری مناسب است.

مثال ۱-۴. اگر X تعداد شیرهایی باشد که در چهار پرتاب یک سکه‌ی همگن به‌دست می‌آیند، توزیع احتمال $Y=\frac{1}{1+X}$ را پیدا کنید.

حل. اگر فرمول توزیع دوجمله‌ای را با $n=۴$، و $\theta=\frac{۱}{۲}$ به‌کار بریم، درمی‌یابیم که توزیع احتمال X به‌صورت

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

است. در این صورت اگر رابطه‌ی $y=\frac{۱}{۱+x}$ را برای گذاشتن مقادیر Y به‌جای X به‌کار بریم، توزیع احتمال Y به‌صورت

y	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$
$g(y)$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

به‌دست می‌آید.

اگر می‌خواستیم که مستقیماً جایگذاری را در فرمول توزیع دوجمله‌ای با $n=۴$ و $\theta=\frac{۱}{۲}$ انجام دهیم، می‌توانستیم مقدار $x=\frac{۱}{y}-۱$ را به‌جای x در

$$f(x)=\binom{۴}{x}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴},\qquad x=۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

قرار دهیم و نتیجه بگیریم که

$$g(y)=f\left(\frac{۱}{y}-۱\right)=\binom{۴}{\frac{۱}{y}-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴},\quad y=۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵}.$$

توجه کنید که در مثال قبل احتمال‌ها بدون تغییر ماندند؛ تنها اختلاف در آن است که در نتیجه‌ی کار، احتمال‌ها به‌جای مقادیر متناظر X، به مقادیر مختلف Y وابسته‌اند. روش تبدیل متغیر(یا تعویض متغیر) در حالت گسسته و مادامی که رابطه یک‌به‌یک است، کلاً همین است. اگر تبدیل یک‌به‌یک نباشد می‌توانیم نظیر مثال زیر عمل کنیم.

مثال ۱–۵. با مراجعه به مثال ۱–۴، توزیع احتمال متغیر تصادفی $Z=(X-۱)^{۲}$ را پیدا کنید.

حل. با محاسبه‌ی احتمال‌های $h(z)$ متناظر با مقادیر مختلف Z، به‌دست می‌آوریم

$$h(\circ) = f(۲) = \frac{۶}{۱۶}$$

$$h(۱) = f(۱) + f(۳) = \frac{۴}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۸}{۱۶}$$

$$h(۴) = f(\circ) + f(۴) = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۲}{۱۶}$$

و بنابر این

z	۰	۱	۴
$h(z)$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۴}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

برای اجرای روش تبدیل متغیر در حالت پیوسته، فرض خواهیم کرد تابعی که به‌صورت $y = u(x)$ داده می‌شود مشتق‌پذیر و به‌ازای تمام مقادیر در برد X که برای آنها $f(x) \neq \circ$، صعودی یا نزولی باشد، به‌قسمی‌که تابع وارون که به‌صورت $x = \omega(y)$ داده می‌شود به‌ازای آنها مقادیر متناظر y موجود و به‌جز در جاهایی که $u'(x) = \circ$، مشتق‌پذیر باشد (توجه کنید برای پرهیز از نقاطی که به‌ازای آنها $u'(x)$ ممکن است صفر باشد، معمولاً نقاط دو سر بازه‌ها را که به‌ازای آنها چگالی‌های احتمال صفر نیستند منظور نکرده‌ایم. این شیوه‌ای است که در سراسر این کتاب از آن پیروی خواهیم کرد). تحت این شرایط می‌توانیم قضیه‌ی زیر را ثابت کنیم.

قضیه‌ی ۱-۱. فرض می‌کنیم $f(x)$ مقدار چگالی احتمال متغیر تصادفی X، به‌ازای x باشد. اگر تابعی که به‌صورت $y = u(x)$ داده شده است مشتق‌پذیر و به‌ازای تمام مقادیر برد X که برای آنها $f(x) \neq \circ$، صعودی یا نزولی باشد، آنگاه برای این مقادیر x، معادله‌ی $y = u(x)$ را می‌توان به‌صورتی یکتا برحسب x حل کرد تا $x = \omega(y)$ به‌دست آید، و چگالی احتمال $Y = u(X)$ برای مقادیر y نظیر، به‌صورت زیر است.

$$g(y) = \begin{cases} f[\omega(y)].|\omega'(y)| & \text{به شرط } u'(x) \neq \circ \\ \circ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

خواننده اثبات این قضیه را می‌تواند با مراجعه به منبع [۱۳] صفحه‌ی ۲۶۰ الی ۲۶۲ مورد مطالعه قرار دهد.

مثال ۱–۶. اگر X دارای توزیعی نمایی به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=\sqrt{X}$ را بیابید.

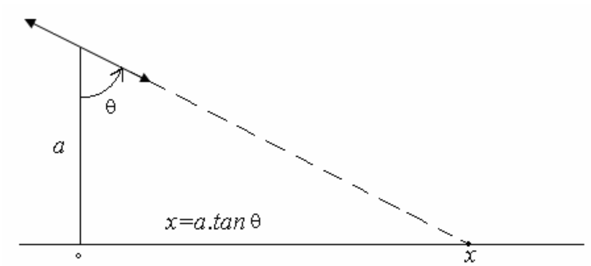
حل. معادله‌ی $y=\sqrt{x}$، که X و Y را به‌هم مربوط می‌کند، دارای وارون یکتای $x=y^2$ است که نتیجه می‌دهد $\omega'(y)=\frac{dx}{dy}=2y$. بنابر این مطابق قضیه‌ی ۱–۱، به‌ازای $y>0$

$$g(y)=e^{-y^2}\,|2y|=2ye^{-y^2}.$$

چون احتمال به‌دست آوردن یک مقدار Yی مساوی با صفر یا کوچکتر از آن، نظیر احتمال به‌دست آوردن یک مقدار X مساوی با صفر یا کوچکتر از آن، برابر صفر است، نتیجه می‌شود که چگالی احتمال Y به‌صورت

$$g(y)=\begin{cases} 2ye^{-y^2} & y>0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

است.



شکل ۱–۳. نموداری برای مثال ۱–۷

مثال ۱–۷. اگر پیکان دوسویه‌ی شکل ۱–۳ حول مرکز خود طوری چرخانده شود که متغیر تصادفی Θ دارای چگالی یکنواخت

$$f(\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

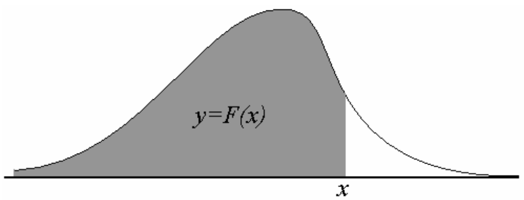
باشد، چگالی احتمال X، طول نقطه‌ای که امتداد پیکان محور x را قطع می‌کند، تعیین کنید.

حل. همان‌طور که از شکل پیداست، بستگی بین x و θ به‌صورت $x = a.\tan\theta$، به‌قسمی که

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{a^{۲} + x^{۲}}$$

و بنابر قضیه‌ی ۱-۱، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{۱}{\pi}.\left|\frac{a}{a^{۲} + x^{۲}}\right| \\ &= \frac{۱}{\pi}.\frac{a}{a^{۲} + x^{۲}}, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$



شکل ۱-۴. نموداری برای مثال ۱-۸

مثال ۱-۸. اگر $F(x)$ مقدار تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته‌ی X به‌ازای x باشد، چگالی احتمال $Y = F(X)$ را بیابید.

حل. همان‌طور که در شکل ۱-۴ دیده می‌شود، مقدار Y متناظر با هر مقدار خاص X به‌وسیله‌ی مساحت زیر منحنی، یعنی مساحت زیر نمودار چگالی X واقع در سمت چپ x داده می‌شود. اگر از $y = F(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$$

و بنابر این به شرط $f(x) \neq ۰$،

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{f(x)}$$

از قضیه‌ی ۱-۱ نتیجه می‌شود که به‌ازای $\circ < y < 1$،

$$g(y) = f(x).\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 1$$

و می‌توانیم بگوییم که Y دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = \circ$ و $\beta = 1$ است.

تبدیلی را که در این مثال انجام دادیم **تبدیل انتگرال احتمال** می‌نامند. این نتیجه نه‌تنها اهمیت نظری دارد، بلکه شبیه‌سازی مقادیر مشاهده شده‌ی متغیرهای تصادفی را تسهیل می‌کند.

وقتی شرایط زیربنایی قضیه‌ی ۱-۱ برقرار نباشد، ممکن است با مشکلات جدی روبه‌رو شویم، که گاهی نظیر مثال زیر راهی ساده برای رفع مشکل به‌کار بریم.

مثال ۱-۹. اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، چگالی احتمال $Z = X^2$ را بیابید.

حل. چون تابع داده شده‌ی $z = x^2$، به‌ازای مقادیر منفی x، نزولی و به‌ازای مقادیر مثبت x صعودی است، شرایط قضیه‌ی ۷-۱ برقرار نیستند. اما تبدیل X به Z را می‌توان در دو مرحله انجام داد: ابتدا چگالی احتمال $Y = |X|$ را می‌یابیم و آنگاه چگالی احتمال $Z = Y^2 (= X^2)$ را پیدا می‌کنیم.

ما قبلاً تبدیل $Y = |X|$ را که مربوط به مرحله‌ی اول است در مثال ۱-۲ مطالعه کردیم؛ در واقع ما در آنجا نشان دادیم که اگر X توزیع نرمال استاندارد داشته باشد، آنگاه $Y = |X|$ به‌ازای $y > \circ$ دارای چگالی احتمال

$$g(y) = 2n(y; \circ, 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

و $g(y) = \circ$، در سایر جاهاست. برای مرحله‌ی دوم، تابعی که به‌صورت $z = y^2$ داده شده است به‌ازای $y > \circ$، یعنی برای تمام مقادیر y که به‌ازای آنها $g(y) \neq \circ$، صعودی است. لذا می‌توانیم قضیه‌ی ۱-۱ را به‌کار بریم و چون

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$$

به‌ازای $z > ۰$ به‌دست می‌آوریم

$$h(z) = \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}z} \left| \frac{۱}{۲} z^{-\frac{۱}{۲}} \right|$$
$$= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} z^{-\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}z},$$

و در سایر جاها، $h(z) = ۰$. توجه کنید چون $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$، توزیعی که برای Z به‌دست می‌آید، توزیع خی‌دو با $\nu = ۱$ است.

۱–۴ روش تبدیل: چند متغیره

روش این بخش را می‌توان برای پیدا کردن توزیع متغیری تصادفی نیز که تابعی از دو یا چند متغیر تصادفی است، به‌کار برد. مثلاً، فرض کنید که توزیع توأم دو متغیر تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ را داده باشند و بخواهیم توزیع متغیر تصادفی $Y = u(X_۱, X_۲)$ را تعیین کنیم. اگر بستگی بین y و $x_۱$ با ثابت ماندن $x_۲$، یا بستگی بین y و $x_۲$ با ثابت ماندن $x_۱$ این امکان را به ما بدهد، می‌توانیم در حالت گسسته، نظیر مثال ۱–۴ عمل کنیم و توزیع توأم Y و $X_۲$، یا $X_۱$ و Y را بیابیم و سپس مجموع این توزیع را روی مقادیر متغیر تصادفی دیگر پیدا کنیم تا توزیع حاشیه‌ای Y به‌دست آید. در حالت پیوسته، ابتدا قضیه‌ی ۱–۱ را با نوشتن فرمول تبدیل به‌صورت

$$g(y, x_۲) = f(x_۱, x_۲).\left|\frac{\partial x_۱}{\partial y}\right|$$

یا به‌صورت

$$g(x_۱, y) = f(x_۱, x_۲).\left|\frac{\partial x_۲}{\partial y}\right|$$

به‌کار می‌بریم. در این دو رابطه، $f(x_۱, x_۲)$ و مشتق‌های جزئی باید برحسب y و $x_۲$، یا $x_۱$ و y بیان شوند. سپس برحسب متغیر دیگر انتگرال می‌گیریم تا چگالی حاشیه‌ای Y به‌دست آید.

مثال ۱-۱۰. اگر X_1 و X_2 متغیرهای مستقلی باشند که توزیع‌های پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 دارند، توزیع احتمال متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$ رابیابید.

حل. چون X_1 و X_2 مستقل‌اند، توزیع توأم آنها برای $x_1 = 0,1,2,\ldots$ و $x_2 = 0,1,2,\ldots$، با

$$f(x_1, x_2) = \frac{e^{-\lambda_1}(\lambda_1)^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2}(\lambda_2)^{x_2}}{x_2!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1)^{x_1}(\lambda_2)^{x_2}}{x_1!\,x_2!}$$

داده می‌شود. چون $y = x_1 + x_2$ و بنابراین $x_1 = y - x_2$، پس می‌توانیم به‌جای x_1 قرار دهیم $y - x_2$، که برای توزیع توأم Y و X_2، به‌ازای $y = 0,1,2,\ldots$، و $x_2 = 0,1,\ldots,y$ عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم

$$g(y, x_2) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_2)^{x_2}(\lambda_1)^{y-x_2}}{x_2!(y-x_2)!}$$

سپس با مجموع‌یابی روی x_2 از ۰ تا y، به‌دست می‌آوریم

$$h(y) = \sum_{x_2=0}^{y} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_2)^{x_2}(\lambda_1)^{y-x_2}}{x_2!(y-x_2)!}$$

که بعد از فاکتورگیری از $e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$ و ضرب عبارت در $y!$ و تقسیم آن بر $y!$ به‌صورت

$$h(y) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \cdot \sum_{x_2=0}^{y} \frac{y!}{x_2!(y-x_2)!}(\lambda_2)^{x_2}(\lambda_1)^{y-x_2}$$

درمی‌آید. با تشخیص اینکه از بسط دوجمله‌ای $(\lambda_1 + \lambda_2)^y$ به مجموع بالا می‌رسیم، سرانجام داریم

$$h(y) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^y}{y!} \qquad y = 0,1,2,\ldots$$

و بنابر این نشان داده‌ایم که مجموع دو متغیر تصادفی مستقل که دارای توزیع پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند، توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ دارد.

مثال ۱-۱۱. اگر چگالی توأم $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت

$$f(x_۱, x_۲) = \begin{cases} e^{-(x_۱+x_۲)} & x_۱ > ۰, x_۲ > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، تابع چگالی $Y = \frac{X_۱}{X_۱+X_۲}$ را بیابید.

حل. چون وقتی $x_۲$ صعود می‌کند و $x_۱$ ثابت می‌ماند، y نزول می‌کند، برای یافتن چگالی توأم $X_۱$ و Y می‌توانیم قضیه‌ی ۱-۱ را به‌کار بریم. چون $y = \frac{x_۱}{x_۱+x_۲}$ نتیجه می‌دهد که $x_۲ = x_۱.\frac{۱-y}{y}$ و بنابراین

$$\frac{\partial x_۲}{\partial y} = -\frac{x_۱}{y^۲}$$

نتیجه می‌دهد که به‌ازای $x_۱ > ۰$ و $۰ < y < ۱$

$$g(x_۱, y) = e^{-x_۱/y}\left|-\frac{x_۱}{y^۲}\right| = \frac{x_۱}{y^۲}.e^{-x_۱/y}$$

سرانجام با انتگرال‌گیری برحسب $x_۱$ و تعویض متغیر انتگرال به $u = \frac{x_۱}{y}$، به‌ازای $۰ < y < ۱$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_۰^\infty \frac{x_۱}{y^۲}.e^{-x_۱/y}dx_۱ \\ &= \int_۰^\infty u.e^{-u}du \\ &= \Gamma(۲) \\ &= ۱ \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $h(y) = ۰$. پس متغیر تصادفی Y دارای توزیع یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ است.

مثال قبل را می‌توان با روش کلی نیز حل کرد. در این روش کار را با توزیع توأم دو متغیر تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ و تعیین توزیع توأم دو متغیر تصادفی جدید

$Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ شروع می‌کنیم. در این صورت می‌توانیم توزیع حاشیه‌ای Y_1 یا Y_2 را به‌وسیله‌ی مجموع‌یابی یا انتگرال‌گیری به‌دست آوریم.

این روش عمدتاً در حالت پیوسته به‌کار می‌رود، که در آن به قضیه‌ی زیر که تعمیم مستقیم قضیه‌ی ۱–۱ است نیاز داریم.

قضیه‌ی ۱–۲. فرض می‌کنیم $f(x_1, x_2)$ مقدار چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی X_1 و X_2 در (x_1, x_2) باشد. اگر تابع‌های داده شده‌ی $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ و $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ نسبت به x_1 و x_2 دارای مشتق جزئی بوده و به‌ازای همه‌ی مقادیر برد X_1 و X_2 که برای آنها $f(x_1, x_2) \neq 0$، تبدیلی یک به یک را نشان دهد آنگاه برای این مقادیر x_1 و x_2، معادلات $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ و $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ را می‌توان به‌صورت یکتا برحسب x_1 و x_2 حل کرد تا $x_1 = \omega_1(y_1, y_2)$ و $x_2 = \omega_2(y_1, y_2)$ به‌دست آیند، و برای مقادیر متناظر y_1 و y_2، چگالی احتمال توأم $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ به‌صورت

$$g(y_1, y_2) = f[\omega_1(y_1, y_2), \omega_2(y_1, y_2)].|J|$$

داده می‌شود. در اینجا، J، موسوم به **ژاکوبی** تبدیل، دترمینان

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

است. در سایر جاها، $g(y_1, y_2) = 0$.

این قضیه را اثبات نمی‌کنیم، ولی اطلاعات مربوط به ژاکوبی و کاربردهای آن را می‌توان در اکثر کتاب‌های حسابان پیشرفته یافت. ژاکوبی‌ها عمدتاً در رابطه‌ی با انتگرال‌های چندگانه، مثلاً، وقتی می‌خواهیم مختصات قائم را به مختصات قطبی یا به مختصات کروی تغییر دهیم به‌کار می‌روند.

مثال ۱–۱۲. با مراجعه به متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 در مثال ۱–۱۱، مطلوب است

الف) چگالی توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$،

ب) چگالی حاشیه‌ای Y_2.

حل. الف) از حلّ $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2}$ برحسب x_1 و x_2 به‌دست می‌آوریم $x_1 = y_1 y_2$ و $x_2 = y_1(1-y_2)$، و نتیجه می‌گیریم که

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1$$

چون تبدیل یک‌به‌یک است و ناحیه‌ی $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ در صفحه‌ی x_1x_2 را، به توی ناحیه‌ی $y_1 > 0$ و $0 < y_2 < 1$ در صفحه‌ی y_1y_2 می‌نگارد می‌توانیم قضیه‌ی ۱–۲ را به‌کار بریم و نتیجه بگیریم که به‌ازای $y_1 > 0$ و $0 < y_2 < 1$

$$g(y_1, y_2) = e^{-y_1} |-y_1| = y_1 e^{-y_1}$$

و در سایر جاها، $g(y_1, y_2) = 0$.

ب) با استفاده از چگالی توأم حاصل از قسمت الف و انتگرال‌گیری نسبت به y_1، به‌ازای $0 < y_2 < 1$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} h(y_2) &= \int_0^\infty g(y_1, y_2)\, dy_1 \\ &= \int_0^\infty y_1 e^{-y_1}\, dy_1 \\ &= \Gamma(2) \\ &= 1, \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $h(y_2) = 0$.

مثال ۷–۱۳. اگر چگالی توأم X_1 و X_2 به‌صورت

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است

الف) چگالی توأم $Y = X_1 + X_2$ و $Z = X_2$،

ب) چگالی حاشیه‌ای Y.

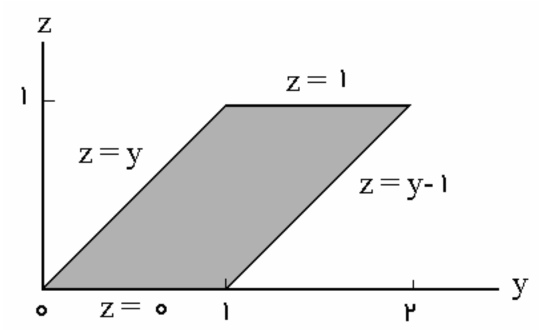
حل. الف) با حلّ $y = x_1 + x_2$ و $z = x_2$، به‌دست می‌آوریم $x_1 = y - z$ و $x_2 = z$، بنابر این

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

چون، تبدیل یک‌به‌یک است و ناحیه‌ی $0 < x_1 < 1$ و $0 < x_2 < 1$ در صفحه‌ی x_1x_2 را به ناحیه‌ی $z < y < z+1$ و $0 < z < 1$ در صفحه‌ی yz می‌نگارد (شکل ۱–۵ را ببینید)، می‌توانیم قضیه‌ی ۱–۲ را به‌کار بریم و برای $z < y < z+1$ و $0 < z < 1$ به‌دست آوریم

$$g(y, z) = 1 . |1| = 1$$

و در سایر جاها، $g(y, z_2) = 0$.

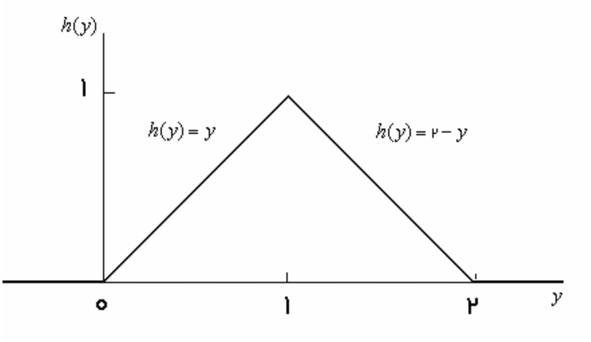


شکل ۱–۵. فضای نمونه‌ای انتقال یافته برای مثال ۱–۱۳

ب) با انتگرال‌گیری نسبت به z به‌طور جداگانه، $y \leq 0$، $0 < y < 1$، $1 < y < 2$ و $y \geq 2$، به‌دست می‌آوریم

$$h(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^y 1\, dz = y & 0 < y < 1 \\ \int_{y-1}^1 1\, dx = 2 - y & 1 < y < 2 \\ 0 & y \geq 2 \end{cases}$$

و برای اینکه تابع چگالی را پیوسته کنیم، قرار می‌دهیم، $h(1) = 1$. بنابراین نشان داده‌ایم که مجموع متغیرهای تصادفی داده شده، دارای چگالی احتمال مثلثی است که نمودارش را در شکل ۱-۶ ارائه داده‌ایم.



شکل ۱-۶. چگالی احتمال مثلثی

تا اینجا، تنها تابع‌هایی از دو متغیر تصادفی را در نظر گرفتیم، امّا روش مبتنی بر قضیه‌ی ۱-۲ را می‌توان به آسانی به توابعی از سه یا بیشتر از سه متغیر تصادفی تعمیم داد. مثلاً، اگر چگالی احتمال توأم سه متغیر تصادفی X_1، X_2 و X_3 را داده باشند و بخواهیم چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $Y_1 = u_1(X_1, X_2, X_3)$، $Y_2 = u_2(X_1, X_2, X_3)$ و $Y_3 = u_3(X_1, X_2, X_3)$ را بیابیم، روش کلی همان روش بالاست، ولی در این حالت، ژاکوبی دترمینان 3×3 زیر است.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

به محض اینکه چگالی احتمال توأم سه متغیر تصادفی جدید تعیین شد، می‌توانیم چگالی حاشیه‌ای هریک از دو متغیر تصادفی و یا هریک از آنها را با انتگرال‌گیری بیابیم.

مثال ۱–۱۴. اگر چگالی احتمال توأم X_1، X_2، و X_3 به‌صورت

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)} & x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است

الف) چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$، $Y_2 = X_2$، و $Y_3 = X_3$،

ب) چگالی حاشیه‌ای Y_1.

حل. الف) از حلّ دستگاه معادلات $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$، $y_2 = x_2$، و $y_3 = x_3$ برحسب x_1، x_2 و x_3، به‌دست می‌آوریم $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$، $x_2 = y_2$، و $x_3 = y_3$. لذا نتیجه می‌شود،

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

و چون تبدیل یک‌به‌یک است، به‌ازای $y_2 > 0$، $y_3 > 0$، و $y_1 > y_2 + y_3$،

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &= e^{-y_1}.|1| \\ &= e^{-y_1} \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $g(y_1, y_2, y_3) = 0$.

ب) از انتگرال‌گیری نسبت به y_2 و y_3 به‌دست می‌آوریم که به‌ازای $y_1 > 0$،

$$\begin{aligned} h(y_1) &= \int_0^{y_1} \int_0^{y_1 - y_3} e^{-y_1} dy_2 dy_3 \\ &= \frac{1}{2} y_1^2 . e^{-y_1} \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $h(y_1) = 0$. توجه کنید که نشان داده‌ایم مجموع سه متغیر تصادفی که دارای توزیع گاما با $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ هستند، متغیری تصادفی است که توزیع گاما با $\alpha = 3$ و $\beta = 1$ دارد.

تمرین

۱-۹. اگر X دارای توزیع فوق هندسی با $k=۳$، $N=۶$، و $n=۲$ باشد، توزیع احتمال Y، تعداد موفقیت‌ها منهای تعداد شکست‌ها را بیابید.

۱-۱۰. با رجوع به تمرین ۱-۹، توزیع احتمال متغیر تصادفی $Z=(X-۱)^۲$ را بیابید.

۱-۱۱. اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با $n=۳$ و $\theta=\frac{۱}{۳}$ باشد، توزیع احتمال

الف) $Y=\frac{X}{۱+X}$،

ب) $U=(X-۱)^۴$،

را بیابید.

۱-۱۲. اگر X دارای توزیع هندسی با $\theta=\frac{۱}{۳}$ باشد، فرمولی برای توزیع احتمال متغیر تصادفی $Y=۴-۵X$ به‌دست آورید.

۱-۱۳. اگر $X=\ln Y$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، چگالی احتمال Y را که توزیع **لگ-نرمال** می‌نامند، بیابید.

۱-۱۴. اگر $F(x)$ مقدار تابع توزیع متغیر پیوسته X در x باشد، آنگاه میانه‌ی X، که آن را با $\tilde{\mu}$ نشان می‌دهند به‌قسمی است که $F(\tilde{\mu})=\frac{۱}{۲}$. با رجوع به تمرین ۱-۱۳، نشان دهید که $\tilde{\mu}=e^{\mu}$.

۱-۱۵. اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & ۰<x<۲\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال $Y=X^۳$ را بیابید. نمودارهای چگالی‌های احتمال X و Y را نیز رسم کنید و مساحت‌های زیر دو منحنی را که به‌ترتیب نمایش $P(\frac{۱}{۲}<X<۱)$ و $P(\frac{۱}{۸}<Y<۱)$ هستند مشخص کنید.

۱-۱۶. اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}\frac{kx^۳}{(۱+۲x)^۶} & x>۰\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد که در آن k ثابت است، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \frac{۲X}{۱+۲X}$ را بیابید. توزیع Y را مشخص کنید، و سپس مقدار k را تعیین کنید.

۱–۱۷. اگر توزیع احتمال توأم متغیرهای $X_۱$ و $X_۲$ برای $x_۱ = ۱, ۲, ۳$ و $x_۲ = ۱, ۲, ۳$ به‌صورت $f(x_۱, x_۲) = \frac{x_۱ x_۲}{۳۶}$ باشد، پیدا کنید

الف) توزیع احتمال $X_۱ X_۲$،

ب) توزیع احتمال $X_۱ / X_۲$.

۱–۱۸. با رجوع به تمرین ۱–۱۷ پیدا کنید

الف) توزیع توأم $Y_۱ = X_۱ + X_۲$ و $Y_۲ = X_۱ - X_۲$،

ب) توزیع حاشیه‌ای $Y_۱$.

۱–۱۹. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع نرمال استاندارد دارند، نشان دهید که $Z = X + Y$ نیز توزیع نرمال دارد. میانگین و واریانس این توزیع نرمال چه هستند؟

۱–۲۰. اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} ۱۲xy(۱-y) & ۰ < y < ۱, ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = XY^۲$ را با استفاده از قضیه‌ی ۱–۱ برای تعیین چگالی احتمال توأم Y و Z، و سپس انتگرال‌گیری برحسب y، به‌دست آورید.

۱–۲۱. دو متغیر تصادفی مستقل $X_۱$ و $X_۲$ را در نظر بگیرید که هر دو دارای توزیع کوشی

$$f(x) = \frac{۱}{\pi(۱ + x^۲)}, \quad -\infty < x < \infty$$

هستند. چگالی احتمال $Y_۱ = X_۱ + X_۲$ را با استفاده از قضیه‌ی ۱–۱ برای تعیین چگالی احتمال توأم $X_۱$ و $Y_۱$ و سپس انتگرال‌گیری برحسب $x_۱$، به‌دست آورید. توزیع $Y_۱$ را مشخص کنید.

۱-۲۲. تمرین ۱-۲۱ را با استفاده از قضیه‌ی ۱-۲ برای تعیین چگالی احتمال توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ سپس یافتن توزیع حاشیه‌ای Y_1، مجدداً حل کنید.

۱-۲۳. دو متغیر تصادفی X و Y را که چگالی احتمال توأم آنها به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0, y > 0, x + y < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه‌ی ۱-۱ چگالی احتمال $U = Y - X$ را بیابید.

۱-۲۴. تمرین ۱-۲۳ را با استفاده از قضیه‌ی ۲-۲، برای تعیین چگالی توأم $U = Y - X$ و $V = X$ و سپس یافتن چگالی حاشیه‌ای U، مجدداً حل کنید.

۱-۲۵. فرض کنید که X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پیوسته باشند که چگالی احتمال توأم آنها به‌صورت

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4xy & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. چگالی احتمال توأم $Y_1 = X_1^2$ و $Y_2 = X_1 X_2$ را بیابید.

۱-۲۶. فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پیوسته باشند که چگالی احتمال توأم آنها به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. چگالی احتمال توأم $Z = X + Y$ و $W = X$ را بیابید.

۱-۲۷. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند که هر دو توزیع گامای همانند دارند.

الف) چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $U = \frac{X}{X+Y}$ و $V = X + Y$ را بیابید.

ب) چگالی حاشیه‌ای U را بیابید و آن‌را مشخص کنید.

۱–۵ روش تابع مولد گشتاور

تابع‌های مولد گشتاور در تعیین توزیع احتمال یا چگالی تابعی از متغیرهای تصادفی، وقتی تابع مزبور ترکیبی خطی از متغیرهای تصادفی مستقل است، می‌تواند نقش مهمی داشته باشد. روش مورد نظر مبتنی بر این قضیه است که تابع مولد گشتاورهای مجموع n متغیر تصادفی مستقل برابر حاصل‌ضرب تابع‌های مولد گشتاورهای آنهاست، یعنی

قضیه‌ی ۱–۳. اگر X_1، X_2، ...، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند و مجموع آنها $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، آنگاه

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

که در آن $M_{X_i}(t)$ مقدار تابع مولد گشتاورهای X_i به‌ازای t است.

برهان. با استفاده از این واقعیت که متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، داریم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1).f(x_2).\cdots.f_n(x_n)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{Yt}) \\
&= E[e^{(X_1+X_2+\cdots+X_n)t}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)t} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t} f_1(x_1) dx_1 . \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2 t} f_2(x_2) dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_n t} f_n(x_n) dx_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)
\end{aligned}$$

که قضیه را برای حالت پیوسته اثبات می‌کند. برای اثبات قضیه در حالت گسسته تنها باید به‌جای همه‌ی انتگرال‌ها، مجموع‌ها را قرار دهیم.

توجه کنید که اگر بخواهیم برای به‌دست آوردن توزیع احتمال یا چگالی متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ قضیه‌ی ۱–۳ را به‌کار بریم، باید شناسایی توزیع

احتمال یا چگالی متناظر با $M_Y(t)$ قادر باشیم و به قضیه‌ی یکتایی درباره‌ی تناظر بین تابع‌های مولد گشتاورها و توزیع‌ها یا چگالی‌های احتمال استناد کنیم.

مثال ۱–۱۵. توزیع احتمال مجموع n متغیر تصادفی $X_۱$، $X_۲$،...، و X_n را که به ترتیب توزیع پواسون با پارامترهای $\lambda_۱$، $\lambda_۲$،...، و λ_n دارند بیابید.

حل. با توجه به تابع مولد توزیع پواسون برای هریک از متغیرهای تصادفی

$$M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - ۱)}$$

و لذا برای $Y = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$ به‌دست می‌آوریم

$$M_Y(t) = \prod_{i=۱}^{n} e^{\lambda_i(e^t - ۱)} = e^{(\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n)(e^t - ۱)}$$

که به‌سهولت می‌توان تشخیص داد که $M_Y(t)$ تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n$ است. بنابراین توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل از توزیع پواسون با پارامتر λ_i دارند، توزیعی پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n$ است.

مثال ۱–۱۶. اگر $X_۱$، $X_۲$،...، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند که توزیع نمایی با پارامتر θ دارند، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$ را بیابید.

حل. چون توزیع نمایی، توزیع گاما با $\alpha = ۱$ و $\beta = \theta$ است، پس

$$M_{X_i}(t) = (۱ - \theta t)^{-۱}$$

و بنابر این

$$M_Y(t) = \prod_{i=۱}^{n} (۱ - \theta t)^{-۱} = (۱ - \theta t)^{-n}.$$

با تشخیص اینکه تابع مولد گشتاورهای Y، تابع مولد گشتاورهای گاما با $\alpha = n$ و $\beta = \theta$ است، نتیجه می‌گیریم که توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل که توزیع نمایی با پارامتر θ دارند، توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = n$ و $\beta = \theta$ است.

قضیه‌ی ۱–۳ راهی آسان و ظریف برای به‌دست آوردن تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای فراهم می‌کند. فرض کنید که X_1، X_2،…، و X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که همگی توزیع برنولی $f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$، به‌ازای $x=0,1$ دارند بنابراین

$$M_{X_i}(t)=e^{0.t}(1-\theta)+e^{1.t}\theta=1+\theta(e^t-1)$$

لذا قضیه‌ی ۱–۳ نتیجه می‌دهد

$$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n}\left[1+\theta(e^t-1)\right]=\left[1+\theta(e^t-1)\right]^n$$

که به‌آسانی تشخیص داده می‌شود که تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است. البته $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$، تعداد موفقیت‌ها در n امتحان است، زیرا X_1 تعداد موفقیت‌ها در اولین آزمایش، X_2 تعداد موفقیت‌ها در دومین آزمایش، ...، X_n تعداد موفقیت‌ها در nامین آزمایش است. همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، این نگرشی سودمند به توزیع دوجمله‌ای است.

تمرین

۱–۲۸. با استفاده از این واقعیت که اگر k متغیر تصادفی مستقل، توزیع هندسی با پارامتر یکسان θ داشته باشند مجموع‌شان متغیری تصادفی است که توزیع دوجمله‌ای منفی را با پارامترهای θ و k دارند، تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای منفی را بیابید.

۱–۲۹. اگر n متغیر تصادفی مستقل، توزیع گامای یکسان با پارامترهای یکسان α و β داشته باشند، تابع مولد گشتاورهای مجموع آنها را بیابید و در صورت امکان توزیع این مجموع را مشخص کنید.

۱–۳۰. اگر n متغیرهای تصادفی مستقل X_i، توزیع‌های نرمال با میانگین‌های μ_i و انحراف معیار σ_i داشته باشند، تابع مولد گشتاورهای مجموع آنها را بیابید و توزیع متناظر، میانگین و واریانس آن را مشخص کنید.

۱–۳۱. تعمیم زیر از قضیه‌ی ۱–۳ را ثابت کنید.

اگر X_1، X_2، …، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند، و

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

آنگاه

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_it)$$

که در آن $M_{X_i}(t)$ مقدار تابع مولد گشتاور X_i به‌ازای t است.

۱–۳۲. نتیجه‌ی تمرین ۱–۳۱ را به‌کار برید و نشان دهید که اگر n متغیر تصادفی X_i توزیع‌های نرمال با میانگین‌های μ_i و انحراف معیارهای σ_i داشته باشند، آنگاه

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

توزیع نرمال دارد. میانگین و انحراف معیار این توزیع چه هستند؟

فصل دوّم

توزیع‌های نمونه‌گیری

۲-۱ مقدمه

آمار عمدتاً به نتایج و پیشگویی‌های حاصل از برآمدهای شانسی می‌پردازد که در آزمایش‌ها و تحقیقاتی که به‌دقت طرح‌ریزی شده‌اند، پیش می‌آیند. در حالت متناهی، این برآمدهای شانسی تشکیل زیرمجموعه، یا نمونه‌ای از اندازه‌گیری‌ها یا مشاهداتی از مجموعه‌ی بزرگتری به‌نام **جامعه** را می‌دهند. در حالت پیوسته، برآمدهای شانسی معمولاً مقادیر متغیرهای تصادفی هم‌توزیع‌اند که این توزیع را **توزیع جامعه**، یا جامعه‌ی نامتناهی مورد نمونه‌گیری می‌نامیم. کلمه‌ی «نامتناهی» به‌این معنی است که، از لحاظ منطقی، حدی بر اعداد متغیرهای تصادفی که مقادیر آنها قابل مشاهده است، متصور نیست.

همه‌ی این اصطلاحات در اینجا تا حدودی برخلاف عرف و عادت به‌کار رفته‌اند. اگر به‌عنوان بخشی از یک آزمایش، قرار شود پزشکی پنج فرد مبتلا به دیابت را از بین ۴۰ نفر انتخاب و سپس آنها را مورد آزمایشی خاص قرار دهد، فردی غیراهل فن ممکن است نمونه را متشکل از پنج فردی بداند که او انتخاب کرده است. در زبان روزمره، اصطلاح «نمونه» به‌همین صورت به کار می‌رود. در آمار ترجیح داده می‌شود که به نتیجه‌ی آزمایش پنج فرد به‌عنوان نمونه‌ای از جامعه‌ای نگریسته شود که مرکب از وزن ۴۰ نفر است. به این ترتیب، هم جامعه و هم نمونه از اعداد تشکیل شده‌اند.

همچنین فرض کنید که برای برآورد کردن متوسط عمر مفید نوعی معین از ترانزیستور، مهندسی ده عدد از این ترانزیستورها را انتخاب می‌کند، برای مدت زمانی آنها را مورد آزمایش قرار می‌دهد، و زمان از کار افتادن هریک از آنها را یادداشت می‌کند. اگر این زمان‌های از کار افتادن، مقادیر متغیرهای تصادفی باشند که دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، گوییم که این داده‌ها نمونه‌ای از جامعه‌ی نمایی را تشکیل می‌دهند.

قابل تصور است که نتایج هر نمونه‌ای به طرزی معتبر قابل تعمیم درباره‌ی جامعه‌ای که از آن حاصل شده است، نیست. در واقع، اغلب روش‌های استنباط که در این کتاب مورد بحث واقع می‌شوند، مبتنی بر این فرض است که با یک **نمونه‌ی تصادفی** سروکار داریم. در عمل اغلب با نمونه‌هایی تصادفی از جامعه‌هایی سروکار داریم که متناهی امّا به‌قدر کافی بزرگ‌اند به‌طوری که گویی نامتناهی‌اند. در نتیجه، بخش اعظم نظریه‌ی آماری و اغلب روش‌هایی که مورد بحث قرار خواهیم داد، شامل نمونه‌هایی از جامعه‌هایی نامتناهی‌اند، و در اینجا بحث را با تعریفی از نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نامتناهی آغاز می‌کنیم. بعداً در بخش ۲–۳ به نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های متناهی خواهیم پرداخت.

تعریف ۲–۱. اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند، گوییم که تشکیل یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را می‌دهند که توسط توزیع مشترک آنها مشخص می‌شود.

اگر $f(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$ مقدار تابع توزیع توأم به‌ازای مجموعه‌ای از مقادیر $(x_۱,x_۲,\dots,x_n)$ باشد، داریم

$$f(x_۱,x_۲,\dots x_n)=\prod_{i=۱}^{n} f(x_i)$$

که در آن $f(x_i)$ مقدار توزیع جامعه در x_i است.

ملاحظه نمائید که تعریف ۲–۱ در مورد نمونه‌گیری باجایگذاری از یک جامعه‌ی متناهی نیز حکم‌فرماست، نمونه‌گیری بدون‌جایگذاری از جامعه‌های متناهی را در بخش ۲–۳ مورد بحث قرار می‌دهیم.

استنباط‌های آماری معمولاً بر **آماره**ها متکی هستند، یعنی بر متغیرهای تصادفی که تابع‌هایی از یک مجموعه‌ی متغیرهای تصادفی مانند X_1، X_2، ...، X_n اند، که نمونه‌ای تصادفی تشکیل می‌دهند. موارد نوعی از آنچه «آماره» می‌نامیم، میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای هستند.

تعریف ۲–۱. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی تشکیل دهند، آنگاه

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

میانگین نمونه‌ای و

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

واریانس نمونه‌ای نامیده می‌شود.

این تعاریف، به صورتی که در اینجا داده شده‌اند، تنها در مورد نمونه‌های تصادفی به‌کار می‌روند، ولی میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای را می‌توان، به‌همین نحو، برای هر مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n تعریف کرد.

معمولاً اصطلاحات «نمونه‌ی تصادفی» یا «آماره»، «میانگین نمونه‌ای»، و «واریانس نمونه‌ای» را در مورد مقادیر متغیرهای تصادفی، به‌جای خود متغیرهای تصادفی، نیز به‌کار می‌برند. از لحاظ شهودی، این امر معقول‌تر است و با کاربرد محاوره‌ای آن مطابقت دارد. مثلاً ممکن است مقادیر

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

را برای داده‌های نمونه‌ای مشاهده شده محاسبه کنیم و به این آماره‌ها، میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای اطلاق کنیم. در اینجا، x_i، $\bar{x}$، و s^2 مقادیر متغیرهای تصادفی متناظر X_i، $\bar{X}$، و S^2 هستند. در واقع فرمول‌های مربوط $\bar{x}$ و s^2 حتی زمانی که با هر نوع داده و نه لزوماً داده‌های نمونه‌ای سروکار داریم، به‌کار می‌روند که در این صورت $\bar{x}$ و s^2 را صرفاً میانگین و واریانس می‌نامیم.

باید متوجه بود که در اینجا $\bar{X}$ و S^2 را صرفاً به عنوان مثال‌هایی از آماره‌ها معرفی کرده‌ایم و آماره‌های متعدد دیگری موجودند که بعداً در این فصل و فصل‌های آتی معرفی خواهند شد.

۲-۲ توزیع میانگین

چون آماره‌ها، متغیرهای تصادفی هستند، مقادیر آنها از نمونه‌ای به نمونه‌ی دیگر تغییر می‌کند، و مرسوم است که به توزیع آنها، توزیع‌های نمونه‌گیری اطلاق شود. قسمت اعظم باقی‌مانده‌ی این فصل به توزیع‌های نمونه‌ایی که نقش مهمّی در کاربرد دارند، اختصاص می‌یابد.

ابتدا در حالتی که تنها برخی فرض‌های کاملاً کلی درباره‌ی ماهیت جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری است، به مطالعه‌ی قسمتی از نظریه‌ی **توزیع‌های نمونه‌گیری میانگین** می‌پردازیم.

قضیه‌ی ۲-۱. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی که میانگین آن μ و واریانس آن σ^2 است تشکیل دهد، آنگاه

$$E(\bar{X})=\mu, \quad \mathrm{var}(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}.$$

برهان. با فرض $Y=\bar{X}$ و با استفاده خاصیت خطی بودن امید ریاضی، به‌دست می‌آوریم

$$E(\overline{X})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu=n(\frac{1}{n}\mu)=\mu,$$

زیرا $E(X_i)=\mu$. همچنین با توجه به مستقل بودن X_1، X_2، ...، X_n، داریم

$$\mathrm{var}(\overline{X})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2=n(\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

مرسوم است که $E(\overline{X})=\mu$ را به صورت $\mu_{\overline{X}}$ و $\mathrm{var}(\overline{X})$ را به صورت $\sigma^2_{\overline{X}}$ می‌نویسند، و به $\sigma_{\overline{X}}$ **خطای معیار میانگین** اطلاق می‌کنند. فرمول خطای معیار میانگین، $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، نشان می‌دهد که انحراف‌معیار توزیع $\overline{X}$ با افزایش n، **اندازه‌ی نمونه**، کاهش می‌یابد. این بدان معنی است که وقتی n بزرگتر می‌شود و ما واقعاً اطلاعات بیشتری (مقادیر متغیرهای تصادفی بیشتری) را به‌دست می‌آوریم، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که مقادیر $\overline{X}$ به μ، کمیتی که قصد برآورد آن را داریم، نزدیک‌تر شوند. اگر به قضیه‌ی چبیشف مراجعه کنیم، این مطلب را می‌توانیم به‌طور صوری‌تر به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه‌ی ۲-۲. به‌ازای هر ثابت مثبت c، احتمال اینکه $\overline{X}$ مقداری بین $\mu-c$ و $\mu+c$ اختیار کند، حداقل

$$1-\frac{\sigma^2}{nc^2}$$

است. وقتی $n\to+\infty$، این احتمال به یک میل می‌کند.

این قضیه، که **قانون اعداد بزرگ** نامیده می‌شود، اصولاً از لحاظ نظری اهمیت دارد. نتیجه‌ای که از لحاظ عملی بسیار مهم‌تر است، **قضیه‌ی حدمرکزی**، یکی از مهم‌ترین قضایای آمار است، که به توزیع حدی میانگین استاندارد شده‌ی n متغیر تصادفی، وقتی $n\to+\infty$، می‌پردازد. ما این قضیه را تنها درحالتی که n متغیر تصادفی، نمونه‌ای از جامعه‌ای هستند که تابع مولد گشتاورهای آن موجود است، مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ی ۲-۳ (قضیه‌ی حدّ مرکزی) اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند که دارای میانگین μ، واریانس $\sigma^۲$، و تابع مولد گشتاورهای $M_X(t)$ است، در این صورت توزیع حدی

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

وقتی $n \to +\infty$، توزیع نرمال استاندارد است.

گاهی، قضیه‌ی حدمرکزی به غلط چنین تعبیر می‌شود که به موجب این قضیه وقتی $n \to +\infty$، $\overline{X}$ به توزیع نرمال میل می‌کند. چنین تعبیری درست نیست زیرا $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{var}(\overline{X}) = ۰$، از سوی دیگر برطبق قضیه‌ی حدمرکزی، تقریب توزیع $\overline{X}$ با توزیع نرمال به میانگین μ و واریانس، $\frac{\sigma^۲}{n}$، وقتی n بزرگ باشد، مجاز است. در عمل، وقتی $n \geq ۳۰$، از این تقریب بدون توجه به شکل جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری استفاده می‌شود. برای مقادیر کوچک n استفاده از این تقریب، سوال برانگیز است. با این حال قضیه‌ی ۲-۴ زیر را ببینید.

مثال ۲-۱. یک دستگاه خودکار فروشنده‌ی نوشابه‌ی لیوانی را طوری تنظیم کرده‌اند که مقدار نوشابه‌ای که (بعد از هر فشار دکمه) از آن خارج می‌شود، متغیری تصادفی با میانگین ۲۰۰ میلی‌لیتر و انحراف‌معیار ۱۵ میلی‌لیتر است. مطلوب است احتمال اینکه متوسط (میانگین) مقدار نوشابه‌ای که در یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی ۳۶ از آن خارج می‌شود، حداقل ۲۰۴ میلی‌لیتر باشد.

حل. بنابرقضیه‌ی ۲-۱، توزیع $\overline{X}$ دارای میانگین $\mu_{\overline{X}} = ۲۰۰$ و انحراف معیار $\sigma_{\overline{X}} = \frac{۱۶}{\sqrt{۳۶}} = ۲/۵$ است، و بنابر قضیه‌ی حد مرکزی، این توزیع تقریباً نرمال است. چون

$$z = \frac{۲۰۴ - ۲۰۰}{۲/۵} = ۱/۶$$

از جدول ۳ نتیجه می‌شود که

$$P(\overline{X} \geq ۲۰۴) = P(Z \geq ۱/۶) = ۰/۵۰۰۰ - ۰/۴۴۵۲ = ۰/۰۵۴۸.$$

جالب توجه است که وقتی جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری نرمال است، توزیع $\overline{X}$، صرف نظر از اندازه‌ی n، نرمال است.

قضیه‌ی ۲-۴. اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی نرمالی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، توزیع نمونه‌گیری آن، توزیعی نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n}$ است.

برهان. بنابر قضیه‌ی ۱-۲، X_iها نمونه‌ی تصادفی هم‌توزیع با X هستند پس می‌توان نوشت که

$$M_{\overline{X}}(t) = M_{\sum_{i=۱}^{n} X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=۱}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

و چون تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$، به صورت

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$$

است، نتیجه می‌گیریم که

$$M_{\overline{X}}(t) = [e^{\mu \frac{t}{n} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{t}{n}\right)^۲ \sigma^۲}]^n$$

$$= e^{\mu t + \frac{۱}{۲} t^۲ \left(\frac{\sigma^۲}{n}\right)}.$$

بی‌درنگ دیده می‌شود که این تابع مولد گشتاورها، تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n}$ است. لذا بنابر یکتایی تابع مولد گشتاورها قضیه ثابت می‌شود.

۲-۳ توزیع میانگین: جامعه‌های متناهی

اگر آزمایشی متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه‌ای متناهی با عناصر $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ باشد، این مجموعه را **جامعه‌ای متناهی با اندازه‌ی** N می‌نامند. در تعریفی که ذیلاً می‌آید، فرض خواهد شد که از جامعه‌ای متناهی با اندازه‌ی N بدون‌جایگذاری نمونه‌گیری می‌کنیم.

تعریف ۲-۳. اگر X_1 اوّلین مقدار استخراج شده از جامعه‌ای متناهی با اندازه N، X_2 دومین مقدار استخراج شده، ...، X_n، nامین مقدار استخراج شده باشد و توزیع احتمال توأم این n متغیر تصادفی به‌ازای هر nتایی مرتب از مقادیر این متغیرها با عبارت

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

داده شده باشد، آنگاه گوئیم که X_1، X_2،...، X_n یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ی متناهی مفروض تشکیل می‌دهند.

مانند تعریف ۲-۱، نمونه‌ی تصادفی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است، امّا در اینجا نیز مرسوم است که اصطلاح «نمونه‌ی تصادفی» به مقادیر متغیرهای تصادفی، یعنی اعداد واقعی استخراج شده هم اطلاق شود.

از توزیع احتمال توأم تعریف ۲-۳ نتیجه می‌شود که احتمال مربوط به هر زیرمجموعه‌ی n عنصری از N عنصر جامعه‌ی متناهی (بدون رعایت ترتیب برای مقادیر استخراج شده) عبارت است از

$$\frac{n!}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} = \frac{1}{\binom{N}{n}}.$$

این عبارت اغلب به عنوان تعریفی دیگر یا به عنوان معیاری برای انتخاب نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای متناهی با اندازه‌ی N داده می‌شود: هر یک از $\binom{N}{n}$ نمونه‌ی ممکن باید احتمال‌های یکسان داشته باشند.

همچنین از توزیع توأم بالا نتیجه می‌شود که توزیع حاشیه‌ای X، به‌ازای $r=1,2,\ldots,n$ عبارت است از

$$f(x_r)=\frac{1}{N};\quad x_r=c_1,c_2,\ldots,c_N$$

و میانگین و واریانس این توزیع یکنواخت گسسته را میانگین و واریانس جامعه‌ی متناهی می‌نامیم. بنابر این

تعریف ۲–۴. میانگین و واریانس جامعه‌ی متناهی $\{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$ عبارتند از

$$\mu=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\frac{1}{N},\quad \sigma^2=\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)^2\cdot\frac{1}{N}.$$

سرانجام از توزیع احتمال توأم تعریف ۲–۳ نتیجه می‌شود که توزیع حاشیه‌ای توأم هر دو تا از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n به‌ازای هر جفت عناصر جامعه‌ی متناهی با عبارت

$$g(x_r,x_s)=\frac{1}{N(N-1)}$$

داده می‌شود. بنابر این می‌توانیم نشان دهیم که

قضیه‌ی ۲–۵. اگر X_r و X_s، rامین و sامین متغیرهای تصادفی از نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n باشند، که از جامعه‌ی متناهی $\{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$ استخراج شده‌اند، آنگاه

$$\operatorname{cov}(X_r,X_s)=-\frac{\sigma^2}{N-1}.$$

برهان. بنابر تعریف کوواریانس

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_r,X_s)&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{N(N-1)}(c_i-\mu)(c_j-\mu)\\ &=\frac{1}{N(N-1)}\cdot\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(c_j-\mu)]\end{aligned}$$

و چون

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(c_j-\mu)=\sum_{j=1}^{N}(c_j-\mu)-(c_i-\mu)=-(c_i-\mu),$$

لذا

$$\operatorname{cov}(X_r,X_s)=-\frac{1}{N(N-1)}\cdot\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)^2=-\frac{1}{N-1}\cdot\sigma^2.$$

با استفاده از این نتایج، اینک قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم که متناظر با قضیه‌ی ۲-۱ برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های متناهی است.

قضیه‌ی ۲-۶. اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای متناهی به اندازه‌ی N با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه

$$E(\overline{X})=\mu,\quad \operatorname{var}(\overline{X})=\frac{N-n}{N-1}.\frac{\sigma^2}{n}.$$

برهان. مشابه‌ی برهان قضیه‌ی ۲-۱،

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu,$$

و

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\overline{X})&=\operatorname{var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)\\&=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i)+2\sum\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-2\sum\sum_{1\le i<j\le n}\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2-2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right]\\&=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}.\end{aligned}$$

جالب توجه است که تفاوت دو فرمولی که برای $\mathrm{var}(\overline{X})$ در قضیه‌های ۲–۱ و ۲–۶ به‌دست آمده‌اند تنها در عامل $\frac{N-n}{N-1}$، است که عامل تصحیح جامعه‌ی متناهی نامیده می‌شود. در واقع، وقتی N در مقایسه با n بزرگ باشد، تفاوت بین دو فرمول $\mathrm{var}(\overline{X})$ عموماً ناچیز است، و وقتی از جامعه‌ی متناهی بزرگی نمونه استخراج می‌شود، فرمول $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ اغلب به عنوان تقریب مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک قاعده‌ی کلی این است که از این تقریب مادام که نمونه شامل بیش از ۵ درصد جامعه نباشد، استفاده کنند.

تمرین

۲–۱. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نامتناهی باشد، آنگاه به‌ازای $r=1,2,\ldots,n$،

$$\mathrm{cov}(X_r-\overline{X},\overline{X})=0.$$

۲–۲. نشان دهید که اگر X_{11}، X_{12}، ...، X_{1n_1}، X_{21}، X_{22}، ...، X_{2n_2} متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری که n_1تای اوّل نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2، و n_2تای دیگر نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 را تشکیل دهند، آنگاه

الف) $E(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=\mu_1-\mu_2$،

ب) $\mathrm{var}(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

۲–۳. با رجوع به تمرین ۲–۲ نشان دهید که اگر دو نمونه از جامعه‌های نرمال استخراج شده باشند ، آنگاه $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ متغیری تصادفی است که توزیع نرمال با میانگین $\mu_1-\mu_2$ و واریانس $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ دارد.

۲-۴. اگر X_1، X_2، $\cdots$، X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع‌های برنولی با پارامتر θ دارند آنگاه $\overline{X}$ نسبت موفقیت‌ها در n آزمایش است، که آن را با $\hat{\Theta}$ نشان می‌دهیم. تحقیق کنید که

الف) $E(\hat{\Theta}) = \theta$،

ب) $\operatorname{var}(\hat{\Theta}) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$.

۲-۵. اگر اوّلین n_1 متغیر تصادفی تمرین ۲-۲ دارای توزیع برنولی با پارامتر θ_1 و n_2 متغیر تصادفی دیگری دارای توزیع برنولی با پارامتر θ_2 باشد، با نمادهای تمرین ۲-۴، نشان دهید که

الف) $E(\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2) = \theta_1 - \theta_2$،

ب) $\operatorname{var}(\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2) = \dfrac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \dfrac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$.

۲-۶. اگر نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی که متشکل از اعداد صحیح ۱، ۲، ...، N است، انتخاب شود، نشان دهید که

الف) میانگین توزیع $\overline{X}$، $\dfrac{(N+1)}{2}$ است .

ب) واریانس توزیع $\overline{X}$، $\dfrac{1}{n}\dfrac{(N+1)(N-n)}{12}$ است .

ج) میانگین واریانس توزیع $Y = n\overline{X}$ عبارتند از

$$E(Y) = \frac{n(N+1)}{2}, \qquad \operatorname{var}(Y) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}.$$

۲-۷. میانگین و واریانس جامعه‌ای متناهی را که مرکب از ۱۰ عدد ۱۵، ۱۳، ۱۸، ۱۰، ۶، ۲۱، ۷، ۱۱، ۲۰، ۹ است، پیدا کنید .

۲-۸. نشان دهید که واریانس جامعه متناهی $\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ را می‌توان به صورت

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2}{N} - \mu^2$$

نوشت.

۲-۹. چند نمونه متفاوت به اندازه‌ی $n=۳$ را می‌توان از جامعه‌ای با هر یک از اندازه‌های زیر استخراج کرد (دو نمونه وقتی متفاوت‌اند که حداقل در یک مقدار متفاوت باشند)؟

الف) $N=۱۲$،

ب) $N=۲۰$،

ج) $N=۵۰$.

۲-۱۰. احتمال هر نمونه‌ی ممکن چقدر است هرگاه

الف) نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n=۴$ از جامعه‌ای متناهی به اندازه‌ی $N=۱۲$ استخراج شود؟

ب) نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n=۵$ از جامعه‌ای متناهی به اندازه‌ی $N=۲۲$ استخراج شود؟

۲-۱۱. اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n=۳$ از جامعه‌ای متناهی به اندازه‌ی $N=۵۰$ استخراج شود، احتمال اینکه عنصر خاصی از جامعه در نمونه منظور شود، چقدر است؟

۲-۱۲. برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی برای خطای معیار میانگین چه وضعی پیش می‌آید درصورتی که اندازه‌ی نمونه

الف) از ۳۰ به ۱۲۰ افزایش یابد؟

ب) از ۸۰ به ۱۸۰ افزایش یابد؟

ج) از ۴۵۰ به ۵۰ کاهش یابد؟

د) از ۲۵۰ به ۴۰ کاهش یابد؟

۲-۱۳. مقدار عامل تصحیح $\frac{N-n}{N-۱}$ جامعه متناهی را برای

الف) $n=۵۰$ و $N=۲۰۰$،

ب) $n=۵۰$ و $N=۳۰۰$،

ج) $n=۲۰۰$ و $N=۸۰۰$،

پیدا کنید.

۲-۱۴. یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $n=۱۰۰$ از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین $\mu=۷۵$ و واریانس $\sigma^{۲}=۲۵۶$ انتخاب شده است. اگر از قضیه‌ی چبیشف استفاده کنیم، با چه احتمالی می‌توانیم حکم کنیم که مقدار به‌دست آمده برای $\overline{X}$ بین ۶۷ و ۸۳ قرار می‌گیرد؟

۲-۱۵. تمرین ۲-۱۴ را با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی به‌جای قضیه‌ی چبیشف، مجدداً حل کنید.

۲-۱۶. نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=۸۱$ از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین $\mu=۱۲۸$ و انحراف معیار $\sigma=۶/۳$ اختیار شده است. با چه احتمالی می‌توانیم حکم کنیم که مقدار به‌دست آمده برای $\overline{X}$ بین ۱۲۶/۶ و ۱۲۹/۴ قرار نخواهد گرفت، در صورتی که از

الف) قضیه‌ی چبیشف،

ب) قضیه‌ی حد مرکزی،

استفاده کنیم.

۲-۱۷. قسمت(ب) تمرین ۲-۱۶ را، با فرض اینکه جامعه نامتناهی نبوده و متناهی با $N=۴۰۰$ باشد، مجدداً حل کنید .

۲-۱۸. نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۶۴ از جامعه‌ای نرمال با $\mu=۵۱/۴$ و $\mu=۶/۸$ اختیار شده است. مطلوب است اینکه میانگین نمونه

الف) بیشتر از ۵۲/۹،

ب) بین ۵۰/۵ و ۵۲/۳،

ج) کوچکتر از ۵۰/۶.

۲-۱۹. یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه ۱۰۰ از جامعه نرمال با $\sigma=۲۵$ اختیارشده است. مطلوب است احتمال اختلاف بین میانگین نمونه و میانگین جامعه ۳ یا بیشتر باشد.

۲-۲۰. نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه‌ی ۴۰۰ از هریک از دو جامعه با میانگین‌های برابر و انحراف معیارهای $\sigma_{۱}=۳۰$ و $\sigma_{۲}=۳۰$ اختیار شده‌اند. با استفاده از قضیه‌ی

چبیشف و نتایج تمرین ۲–۲ با احتمال حداقل ۰/۹۹، درباره مقدار به‌دست آمده برای $\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲$ چه حکمی می‌توانیم بکنیم؟ (منظور از استقلال آن است که نمونه‌ها در شرایط تمرین ۲–۲ صادق باشند.)

۲–۲۱. با فرض اینکه دو جامعه‌ی تمرین ۲–۲۰ نرمال باشند، از نتیجه‌ی تمرین ۲–۳ استفاده کرده، k را طوری پیدا کنید که

$$P(-k < \overline{X}_۱ - \overline{X}_۲ < k) = ۰/۹۹.$$

۲–۲۲. نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه $n_۱ = ۳۰$ و $n_۱ = ۵۰$ از دو جامعه‌ی نرمال با میانگین‌های $\mu_۱ = ۷۸$ و $\mu_۲ = ۷۵$ و واریانس‌های $\sigma_۱^۲ = ۱۵۰$ و $\sigma_۲^۲ = ۲۰۰$ اختیار شده‌اند. از نتایج تمرین ۲–۳ برای یافتن احتمال اینکه میانگین نمونه‌ی اوّل از میانگین نمونه‌ی دوّم حداقل به‌قدر ۴/۸ بیشتر باشد، استفاده کنید.

۲–۲۳. نسبت واقعی خانواده‌ها در شهری معین، که مالک محل سکونت خود هستند، ۰/۷۰ است. اگر ۸۴ خانواده در این شهر به تصادف مورد پرسش قرار گیرند و جواب‌های آنها به این سوال که صاحب‌خانه یا مستاجرند، به عنوان مقادیر متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های برنولی یکسان به پارامتر $\theta = ۰/۷۰$ تلقی شود، با چه احتمالی می‌توانیم حکم کنیم که مقدار به‌دست آمده برای نمونه‌ای، یعنی $\hat{\Theta}$، بین ۰/۶۴ و ۰/۷۶ قرار می‌گیرد، به شرط استفاده از نتیجه‌ی تمرین ۲–۴ و

الف) قضیه‌ی چبیشف،

ب) قضیه‌ی حد مرکزی

۲–۲۴. نسبت واقعی مردهایی که طرح مالیاتی خاصی را تأیید می‌کنند ۰/۴۰ و نسبت متناظر برای زنان ۰/۲۵ است. $n_۱ = ۵۰۰$ مرد و $n_۲ = ۴۰۰$ زن به تصادف مصاحبه شده‌اند و جواب‌های فرد فرد آنها به عنوان مقادیر متغیرهای مستقل با توزیع‌های برنولی با پارامترهای مربوطه $\theta_۱ = ۰/۴۰$ و $\theta_۲ = ۰/۲۵$ تلقی می‌شود. با استفاده از قضیه‌ی چبیشف، با احتمال اینکه حداقل ۰/۹۳۷۵ درباره‌ی $\hat{\Theta}_۱ - \hat{\Theta}_۲$، اختلاف بین نسبت‌های نمونه‌ای جواب‌های موافق، چه حکمی می‌تواند کرد؟

۲-۴ توزیع خی‌دو

اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه X^2 دارای توزیع خاصی است که آن را **توزیع خی‌دو** می‌نامیم، و این دلیلی برای مهمّ بودن نقشی است که توزیع خی‌دو در مسائل نمونه‌گیری از جامعه‌های نرمال دارد. توزیع خی‌دو اغلب با «توزیع χ^2» نشان داده می‌شود که در آن χ حرف کوچک یونانی خی است. برای نشان دادن مقادیر متغیرهای تصادفی نیز که توزیع خی‌دو دارند از χ^2 استفاده می‌کنیم، امّا از نشان دادن متغیرهای تصادفی نظیر X^2 که در آن X حرف بزرگ یونانی خی است، خودداری می‌کنیم. این کار از تکرار این مطلب که در هر حالت آیا X متغیری تصادفی با مقادیر x یا متغیر تصادفی با مقادیر χ است، جلوگیری می‌کند.

متغیر تصادفی X دارای توزیع خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}x^{\frac{\nu-2}{2}}e^{-x/2} & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد. میانگین و واریانس توزیع خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی به ترتیب عبارت‌اند از: ν و 2ν، و تابع مولد گشتاورهای آن به صورت زیر است.

$$M_X(t)=(1-2t)^{-\nu/2}.$$

توزیع خی‌دو خواص ریاضی متعددی دارد که در قضیه‌های ۲-۷ تا ۲-۱۰ بیان می‌شوند.

قضیه‌ی ۲-۷. اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه X^2 دارای توزیع خی‌دو با $\nu=1$ درجه‌ی آزادی است.

به طور کلی می‌توان نشان داد که

قضیه‌ی ۲–۸. اگر X_1، X_2، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های نرمال استاندارد باشند، آنگاه

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

دارای توزیع خی‌دو با $\nu = n$ درجه‌ی آزادی است.

برهان. با استفاده از تابع مولد گشتاورها که در بالا داده شده، با $\nu = 1$، و قضیه‌ی ۲–۷، نتیجه می‌گیریم که

$$M_{X_i^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

بنابر این

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i^2}(t) = \prod_{i=1}^{n} (1-2t)^{-\frac{1}{2}} = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

می‌توان تشخیص داد که این تابع مولد، تابع مولد توزیع خی‌دو با $\nu = n$ درجه‌ی آزادی است.

دو خاصیت دیگر توزیع خی‌دو در قضایای زیر داده می‌شوند.

قضیه‌ی ۲–۹. اگر X_1، X_2، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع های خی‌دو و به ترتیب با ν_1، ν_2، ...، ν_n درجه‌ی آزادی باشند، آنگاه

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

دارای توزیع خی‌دو با $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ درجه‌ی آزادی است.

برهان. با استفاده از تابع مولد گشتاورهای، می‌توان توزیع Y را تعیین کرد:

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} (1-2t)^{\frac{-\nu_i}{2}} = (1-2t)^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} \nu_i}{2}}$$

و قضیه اثبات می‌شود.

قضیه‌ی ۲-۱۰. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل باشند به طوری که X_1 دارای توزیع خی‌دو با ν_1 درجه‌ی آزادی، و $X_1 + X_2$ دارای توزیع خی‌دو با $\nu > \nu_1$ درجه‌ی آزادی باشد، آنگاه X_2 دارای توزیع خی‌دو با $\nu - \nu_1$ درجه‌ی آزادی است.

برهان. تعریف می‌کنیم $W = X_1 + X_2$ پس

$$M_W(t) = M_{X_1+X_2}(t)$$

$$(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t)$$

$$(1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} = (1-2t)^{-\frac{\nu_1}{2}} M_{X_2}(t)$$

در نتیجه

$$M_{X_2}(t) = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}} / (1-2t)^{-\frac{\nu_1}{2}} = (1-2t)^{-\frac{\nu-\nu_1}{2}}.$$

توزیع خی‌دو دارای کاربردهای مهمّی است که بسیاری از آنها در فصل‌های بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند. مهم‌ترین آنها، خواصی هستند که، مستقیم و غیرمستقیم، مبتنی بر قضیه‌ی زیرند.

قضیه‌ی ۲-۱۱. اگر $\overline{X}$ و S^2 میانگین و واریانس نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه

۱. $\overline{X}$ و S^2 مستقل‌اند،

۲. متغیر تصادفی $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع خی‌دو با $n-1$ درجه‌ی آزادی است.

برهان. با انجام مراحل زیر می‌توان اثبات استقلال $\overline{X}$ و S^2 را انجام داد.

ابتدا نشان دهید دو متغیر تصادفی $X_i - \overline{X}$ و $\overline{X}$ مستقلند. بنابراین به‌ازای $i = 1,2,\ldots,n$ متغیرهای تصادفی $(X_i - \overline{X})^2$ و $\overline{X}$ مستقلند در نتیجه $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ از $\overline{X}$ مستقل می‌شود. اثبات‌های دیگری نیز وجود دارد (ازجمله تمرین ۲-۲۹).

برای اثبات قسمت دوّم، با اتحاد

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2$$

شروع می‌کنیم که تحقیق آن در تمرین‌ها آورده‌ایم. حال اگر هر جمله را بر σ^2 تقسیم کنیم و به‌جای $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ قرار دهیم $(n-1)S^2$، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2.$$

تا آنجا که به سه جمله‌ی این اتحاد مربوط می‌شود، از قضیه‌ی ۲–۸ می‌دانیم که جمله‌ی واقع در سمت چپ معادله، متغیری تصادفی با توزیع خی‌دو با n درجه‌ی آزادی است. همچنین، بنابر قضایای ۲–۴ و ۲–۷ جمله‌ی دوّم سمت راست برابری متغیری تصادفی است که توزیع خی‌دو با ۱ درجه‌ی آزادی است. حال چون $\bar{X}$ و S^2 مستقل‌اند، نتیجه می‌شود که دو جمله‌ی سمت راست معادله مستقل‌اند، و از قضیه‌ی ۲–۱۰ نتیجه می‌گیریم که $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ متغیری تصادفی دارای توزیع خی‌دو با $n-1$ درجه‌ی آزادی است.

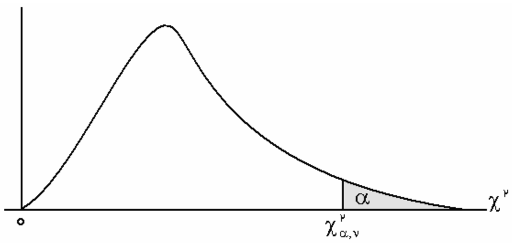
چون توزیع خی‌دو در موارد کاربردی مهمّ بسیاری مطرح می‌شود، جداول مبسوطی برای انتگرال تابع چگالی آن تهیه شده است. جدول ۴ در پایان کتاب حاضر مشتمل بر مقادیر $\chi^2_{\alpha,\nu}$ به‌ازای $\nu=1, 2, 3, \ldots, 30$ و

$$\alpha=0/0995, 0/99, 0/975, 0/95, 0/05, 0/025, 0/01, 0/005$$

است، که در آن $\chi^2_{\alpha,\nu}$ به‌گونه‌ای است که مساحت واقع در طرف راست و در زیر منحنی خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی (شکل ۲–۱ را ببینید) برابر α است. یعنی $\chi^2_{\alpha,\nu}$ چنان است که اگر X متغیری تصادفی دارای توزیع خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی است، آنگاه

$$P\left(X\geq\chi^2_{\alpha,\nu}\right)=\alpha$$

وقتی ν بزرگتر از ۳۰ باشد، از جدول ۴ نمی‌توان استفاده کرد و معمولاً احتمال‌های مربوط به توزیع خی‌دو را به صورتی که در تمرین‌های ۲–۲۶ و ۲–۲۷ عمل شده، با استفاده از توزیع‌های نرمال تقریب می‌زنیم.



شکل ۲–۱. توزیع خی‌دو

مثال ۲–۲. فرض کنید که ضخامت قطعه‌ای که در یک نیمه هادی به‌کار می‌رود، بعد بحرانی آن باشد، و همچنین فرض کنید که فرآیند ساختن این قطعه‌ها در صورتی که تغییرات واقعی بین ضخامت‌های قطعه‌ها انحراف معیاری نابیشتر از $\sigma = ۰/۶۰$ اینچ داشته باشد، تحت کنترل تلقی شود. برای اینکه فرآیند تحت نظارت باشد، نمونه‌هایی تصادفی به اندازه‌ی $n = ۲۰$ به صورت دوره‌ای انتخاب می‌شوند و فرآیند «خارج از کنترل» قلمداد می‌شود اگر احتمال آنکه S^2 مقداری مساوی با مقدار مشاهده شده‌ی نمونه یا بزرگتر از آن اختیار کند، ۰/۰۱ یا کمتر باشد (با وجود اینکه $\sigma = ۰/۶۰$). در صورتی که انحراف معیار یک نمونه‌ی تصادفی دوره‌ای $s = ۰/۸۴$ اینچ باشد، در مورد فرآیند تولید چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

حل. فرآیند تولید «خارج از کنترل» اعلام می‌شود در صورتی که $(n-1)S^2/\sigma^2$ با $n = ۲۰$ و $\sigma = ۰/۶۰$ بیشتر از $\chi^2_{۰/۰۱,۱۹}$ باشد. چون

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{۱۹(۰/۸۴)^2}{(۰/۶۰)^2} = ۳۷/۲۴$$

بزرگتر از ۳۶/۱۹۱ است، فرآیند خارج از کنترل اعلام می‌شود. البته، در این تحلیل فرض می‌شود که نمونه را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ی نرمال تلقی کرد.

۲-۵ توزیع تی

در قضیه‌ی ۲-۴ نشان دادیم که برای نمونه‌های تصادفی استخراج شده از جامعه‌ی نرمالی با میانگین μ و واریانس $\sigma^{۲}$، متغیر تصادفی $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^{۲}}{n}$ است؛ به عبارت دیگر

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است. این نتیجه بسیار مهمّ است، امّا مشکل اصلی در کاربرد آن، نامعلوم بودن σ، انحراف معیار جامعه، در اغلب کاربردهای واقعی است. این امر مستلزم آن است که به‌جای σ، برآوردی را که معمولاً مقدار انحراف معیار نمونه‌ای S است، قرار دهیم. نظریه‌ای که بدین ترتیب حاصل می‌شود، به توزیع دقیق $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ برای نمونه‌های تصادفیی که از یک جامعه‌ی نرمال استخراج شده‌اند، منجر می‌شود.

برای به‌دست آوردن این توزیع نمونه‌گیری، مساله‌ای کلی‌تر که در قضیه‌ی زیر بیان می‌شود، می‌پردازیم.

قضیه‌ی ۲-۱۲. اگر Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل باشند، Y دارای توزیع خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی، و Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه توزیع

$$T=\frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

دارای تابع چگالی

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{\nu+۱}{۲})}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{\nu}{۲})}\left(۱+\frac{t^{۲}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+۱}{۲}}, \qquad -\infty<t<+\infty$$

است.

برهان. چون Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، چگالی توأم آنها به‌ازای $y>۰$ و $-\infty<z<+\infty$ به صورت

$$f(y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\frac{v}{2}}}y^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

است و در سایر جاها، $f(y,z)=0$. در این صورت برای استفاده از روش تبدیل متغیر معادله‌ی $t=\frac{z}{\sqrt{y/\nu}}$ را برحسب z حل می‌کنیم و $z=t\sqrt{y/\nu}$ به‌دست می‌آید. بنابراین $\frac{\partial z}{\partial t}=\sqrt{y/\nu}$. در نتیجه چگالی توأم Y و T به صورت

$$g(y,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)2^{\frac{v}{2}}}y^{\frac{v-1}{2}}e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)} & -\infty<t<\infty,\quad y>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

است. با انتگرال‌گیری روی y به کمک تبدیل متغیر $\omega=\frac{y}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)$، سرانجام چگالی T به صورت زیر به‌دست می‌آید

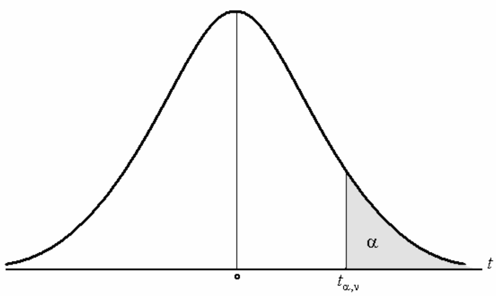
$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}},\quad -\infty<t<\infty.$$

اصطلاحاً توزیع $T=\frac{Z}{\sqrt{Y/v}}$، را توزیع تی، t، با ν درجه‌ی آزادی می‌نامند. توزیع t ابتدا به وسیله‌ی گوست معرفی شد که آثار علمی خود را با نام مستعار «استودنت» چاپ می‌کرد، زیرا شرکتی که او را استخدام کرده بود، به کارکنان خود اجازه‌ی چاپ آثارشان را نمی‌داد. بنابراین توزیع t به **توزیع tی استودنت** نیز معروف است. توزیع t توزیعی متقارن است و به‌ازای درجه‌ی بزرگ، حد آن به صورت توزیع نرمال می‌شود.

برای توزیع t، به خاطر اهمّیتی که دارد، جداول جامعی تهیه شده است. مثلاً جدول ۵، شامل مقادیر $t_{\alpha,\nu}$ به‌ازای $\alpha = ۰/۱۰, ۰/۰۵, ۰/۰۲۵, ۰/۰۱, ۰/۰۰۵$ و $\nu = ۱,۲,...,۲۹$ است، که در آن $t_{\alpha,\nu}$ چنان است که مساحت واقع در سمت راست آن در زیر منحنی توزیع t با ν درجه‌ی آزادی (شکل ۲-۲ را ببینید) برابر α است. یعنی $t_{\alpha,\nu}$ به‌گونه‌ای است که اگر T متغیری تصادفی، دارای توزیع t با ν درجه‌ی آزادی باشد، آنگاه

$$P(T \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha.$$

این جدول شامل مقادیر $t_{\alpha,\nu}$ به‌ازای $\alpha > ۰/۵۰$ نیست، زیرا چگالی حول $t = ۰$ متقارن است، و بنابراین، $t_{\alpha,\nu} = t_{۱-\alpha,\nu}$. وقتی ν برابر ۳۰ یا بیشتر باشد، احتمال‌های مربوط به توزیع t معمولاً با استفاده از توزیع‌های نرمال تقریب زده می‌شوند.



شکل ۲-۲. توزیع t

از جمله کاربردهای متعدد توزیع t، که برخی از آنها در فصل‌های پنجم تا هفتم بررسی خواهند شد، کاربرد اصلی آن (که دلیل به وجود آمدن آن است) مبتنی بر قضیه‌ی زیر است.

قضیه‌ی ۲-۱۳. اگر $\overline{X}$ و $S^۲$ میانگین و واریانس نمونه ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند، آنگاه

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

دارای توزیع t با $n-۱$ درجه‌ی آزادی است.

برهان. بنابر قضیه های ۲–۱۱ و ۲–۴، متغیرهای تصادفی

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ ,\qquad Y=\frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma^{۲}}$$

به ترتیب دارای توزیع خی‌دو با $n-۱$ درجه‌ی آزادی و توزیع نرمال استانداردند. به علاوه چون این توزیع‌ها بنابر قسمت ۱ قضیه‌ی ۲–۱۱ مستقل‌اند، با جایگذاری در فرمول T در قضیه‌ی ۲–۱۲ نتیجه می‌شود که

$$T=\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^{۲}/\sigma^{۲}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

و بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.

مثال ۲–۳. میانگین مصرف بنزین یک موتور، در ۱۶ کارکرد آزمایشی یک ساعته، ۱۶/۴ گالن و انحراف معیار آن ۲/۱ گالن بوده است. این ادعا را که میانگین مصرف بنزین این موتور حداقل ۱۲/۰ گالن در ساعت است، آزمون کنید.

حل. با جایگذاری $n=۱۶$، $\mu=۱۲/۰$، $\overline{x}=۱۶/۴$، و $s=۲/۱$ در فرمول t، در قضیه‌ی ۲–۱۳ به‌دست می‌آوریم

$$t=\frac{\overline{x}-\mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{۱۶/۴-۱۲/۰}{\dfrac{۲/۱}{\sqrt{۱۶}}}=۸/۳۸.$$

چون جدول ۵ نشان می‌دهد که احتمال به‌دست آوردن مقداری بزرگتر از ۲/۹۴۷ برای t به‌ازای ۱۵ درجه‌ی آزادی، ۰/۰۰۵ است، احتمال به‌دست آوردن مقداری بزرگتر از ۸ باید قابل صرف‌نظر کردن باشد. لذا، این نتیجه‌گیری که میانگین مصرف بنزین این موتور در ساعت از ۱۲/۰ بیشتر است، معقول به نظر می‌رسد.

۲–۵ توزیع اف

توزیع دیگری که در رابطه با نمونه‌گیری از جامعه‌های نرمال، نقش مهمّی دارد، توزیع اف است که به یاد سررانلد فیشر، یکی از برجسته‌ترین آماردانان این سده، نامگذاری

شده است. این توزیع بدواً به عنوان توزیع نمونه‌گیری نسبت دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع خی‌دو، که هر یک بر درجه‌ی آزادی مربوط به خود تقسیم شده‌اند، مورد مطالعه قرار گرفت، و ما این توزیع را به همین شیوه ارائه می‌کنیم.

قضیه‌ی ۲-۱۴. اگر U و V متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع های خی‌دو با ν_1 و ν_2 درجه‌ی آزادی دارند، آنگاه

$$F=\frac{U/v_1}{V/v_2}$$

متغیری تصادفی با توزیع اف است، یعنی متغیری تصادفی که چگالی احتمال آن با

$$g(f)=\frac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\ \Gamma(\frac{v_2}{2})}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\cdot f^{\frac{v_1}{2}-1}\left(1+\frac{v_1}{v_2}f\right)^{-\frac{1}{2}(v_1+v_2)}$$

برای $f>0$ و $g(f)=0$ درسایر جاها داده می‌شود.

برهان. چگالی توأم U و V به‌ازای $u>0$ و $v>0$ با

$$f(u,\upsilon)=\frac{1}{2^{v_1/2}\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)}\cdot u^{\frac{v_1}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2^{v_2/2}\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\cdot\upsilon^{\frac{v_2}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^{(v_1+v_2)/2}\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\cdot u^{\frac{v_1}{2}-1}u^{\frac{v_2}{2}-1}e^{-\frac{n+v}{2}}$$

و $f(u,v)=0$ در سایر جاها داده می‌شود. در این صورت، برای استفاده از روش تبدیل متغیر، معادله‌ی

$$f=\frac{u/v_1}{\upsilon/v_2}$$

را برحسب u حل می‌کنیم و $u=\frac{v_1}{v_2}\times\upsilon f$، و در نتیجه $\frac{\partial u}{\partial f}=\frac{v_1}{v_2}\upsilon$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، چگالی توأم F و V به‌ازای $f>0$ و $v>0$،

$$g(f,\upsilon)=\frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1/2}}{2^{(v\ +v_2)/2}\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\cdot f^{\frac{v_1}{2}-1}\upsilon^{\frac{v\ +v_2}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{v_1 f}{v_2}+1\right)}$$

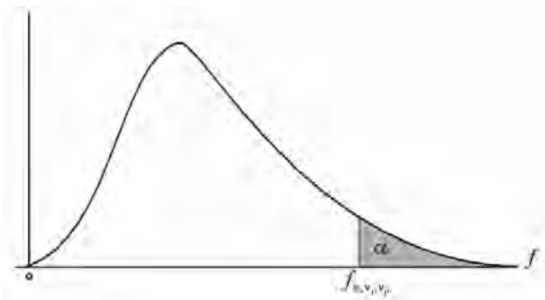
و $g(f,v)=0$ در سایر جاهاست. حال، انتگرال‌گیری روی v با جایگذاری، $w=\frac{v}{2}(\frac{v_1}{v_2}f+1)$، سرانجام برای $f>0$،

$$g(f)=\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\cdot f^{\frac{v_1}{2}-1}\left(1+\frac{v_1}{v_2}f\right)^{-\frac{1}{2}(v_1+v_2)}$$

و $g(f)=0$ را در سایر جاها به‌دست می‌آوریم.

احتمالات مربوط به توزیع اف به‌طور معمول قابل محاسبه نیست لذا جداول مبسوطی برای آن تهیه شده است. مثلاً، جدول ۶ شامل مقادیر f_{α,v_1,v_2} به‌ازای $\alpha=0/05$ و $\alpha=0/01$ و برای مقادیر مختلف v_1 و v_2 درجه‌ی آزادی است، که در آن f_{α,v_1,v_2} چنان است که مساحت واقع در طرف راست آن و در زیر منحنی توزیع اف با v_1 و v_2 درجه‌ی آزادی (شکل ۲-۳ را ببینید) برابر α است. یعنی f_{α,v_1,v_2} طوری است که

$$P(F\geq f_{\alpha,v_1,v_2})=\alpha.$$



شکل ۲-۳. توزیع F

کاربردهای مهم قضیه‌ی ۲–۱۴ در مسائلی پیش می‌آیند که در آنها به مقایسه‌ی واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2ی دو جامعه‌ی نرمال علاقه‌مند باشیم، مثلاً در مسائلی که بخواهیم نسبت $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ را برآورد یا فرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را آزمون کنیم. ما چنین استنباط‌هایی را بر مبنای نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه و قضیه‌ی ۲–۱۱ قرار می‌دهیم که به‌موجب آن

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \quad , \quad \chi_2^2 = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$$

متغیرهای تصادفی‌اند که توزیع‌های خی‌دو با n_1-1 و n_2-1 درجه‌ی آزادی دارند. منظور از «نمونه‌های تصادفی مستقل» آن است که n_1+n_2 متغیرهای تصادفی که دو نمونه‌ی تصادفی را تشکیل می‌دهند، مستقل‌اند در نتیجه دو متغیر تصادفی خی‌دو نیز مستقل‌اند و از جایگذاری مقادیر آنها به‌جای U و V در قضیه‌ی ۲–۱۴ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه‌ی ۲–۱۵. اگر S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانس‌های نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌ی n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 باشند، آنگاه

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$$

متغیری تصادفی با توزیع اف با n_1-1 و n_2-1 درجه‌ی آزادی است.

در فصل پنجم، این قضیه را در مورد مسأله‌ی برآورد نسبت $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، وقتی این دو واریانس جامعه‌ای نامعلوم باشند، به‌کار خواهیم برد. همچنین، در فصل ششم نحوه‌ی آزمون کردن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را شرح خواهیم داد. آزمون‌های دیگری مبتنی بر توزیع اف در

روش‌های تحلیل واریانس عرضه شده‌اند. چون همه‌ی این کاربردها مبتنی بر نسبت واریانس‌های نمونه‌ای است، توزیع اف را **توزیع نسبت واریانس** هم می‌نامند.

تمرین

۲–۲۵. نشان دهید که برای نمونه‌های تصادفی به اندازه n از جامعه‌های نرمال با واریانس توزیع نمونه‌گیری $S^۲$ دارای میانگین $\sigma^۲$ و واریانس $\frac{۲\sigma^۴}{(n-۱)}$ است (فرمولی کلی برای واریانس توزیع نمونه‌گیری $S^۲$ در مورد نمونه‌های تصادفی استخراج شده از هر جامعه‌ای را که گشتاورهای دوّم و چهارم متناهی دارد، می‌توان در کتاب کرامر که در فهرست مراجع پایان کتاب داده شده است، پیدا کرد).

۲–۲۶. نشان دهید که اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع خی‌دو با $v=۱$ درجه آزادی و $Y_n = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$، آنگاه توزیع حدی

$$Z = \frac{\frac{Y_n}{n}-۱}{\sqrt{۲/n}}$$

وقتی $n \to \infty$ توزیع نرمال استاندارد است.

۲–۲۷. براساس نتیجه‌ی تمرین ۲–۲، نشان دهید که اگر X متغیر تصادفی خی‌دو با v درجه آزادی و v بزرگ باشد، آنگاه توزیع $\frac{X-v}{\sqrt{۲v}}$ را می‌توان با توزیع نرمال استاندارد تقریب زد.

۲–۲۸. از روش تمرین قبل استفاده کرده، مقدار تقریبی این احتمال را که متغیری تصادفی، دارای توزیع خی‌دو با $v=۵۰$ درجه آزادی، مقداری بزرگتر از ۶۸/۰ اختیار کنید.

۲–۲۹. (برهان استقلال $\overline{X}$ و $S^۲$ برای $n=۲$) اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع نرمال استاندارد باشد، نشان دهید که

الف) چگالی توأم $X_۱$ و $\overline{X}$ به‌ازای $-\infty < x_۱ < \infty$ و $-\infty < x_۲ < \infty$،

$$f(x_1, \bar{x}) = \frac{1}{\pi} e^{-\bar{x}^2} e^{-(x_1 - \bar{x})^2}$$

است.

ب) چگالی توأم با $U = |X_1 - \bar{X}|$ به‌ازای $u > 0$ و $-\infty < \bar{x} < +\infty$ با

$$g(u, \bar{x}) = \frac{2}{\pi} . e^{-(\bar{x}^2 + u^2)}$$

داده می‌شود، زیرا $f(x_1, \bar{x})$ به‌ازای $\bar{x}$ ثابت، حول $\bar{x}$ متقارن است.

ج) $S^2 = 2(X_1 - \bar{X})^2 = 2U^2$،

د) چگالی توأم $\bar{X}$ و S^2 به‌ازای $S^2 > 0$ و $-\infty < \bar{x} < +\infty$ با

$$h(s^2, \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{x}^2} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (s^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}s^2} .$$

۲-۳۰. نشان دهید که برای $\nu_2 > 2$ میانگین توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه‌ی آزادی برابر با $\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ است.(با توجه به این حقیقت که برای متغیر تصادفی مانند V که دارای توزیع خی‌دو با ν_2 درجه‌ی آزادی است $E(\frac{1}{V}) = \frac{1}{\nu_2 - 2}$)

۲-۳۱. تحقیق کنید که اگر X دارای توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه‌ی آزادی باشد و $\nu_2 \to \infty$، توزیع $Y = \nu_1 X$ به توزیع خی‌دو با ν_1 درجه‌ی آزادی میل می‌کند.

۲-۳۲. تحقیق کنید که اگر T دارای توزیع t با ν درجه‌ی آزادی باشد، آنگاه $X = T^2$ دارای توزیع F با $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = \nu$ درجه‌ی آزادی است.

۲-۳۳. اگر X دارای توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه‌ی آزادی باشد، نشان دهید که $Y = \frac{1}{X}$ دارای توزیع F با ν_2 و ν_1 درجه‌ی آزادی است.

۲-۳۴. از نتیجه‌ی تمرین ۲-۳۳ استفاده کرده و نشان دهید که

$$f_{1-\alpha, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{f_{\alpha, \nu_2, \nu_1}}.$$

۲-۳۵. تحقیق کنید که اگر Y دارای توزیع بتا با $\alpha = \frac{\nu_1}{2}$ و $\beta = \frac{\nu_2}{2}$ باشد، آنگاه

$$X = \frac{\nu_2 Y}{\nu_1 (1 - Y)}$$

دارای توزیع F با v_1 و v_2 درجه‌ی آزادی است.

۲–۳۶. نشان دهید که توزیع F با ۴ و ۴ درجه‌ی آزادی با

$$g(x)=\begin{cases} 6x(1+x)^{-4} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده می‌شود و از این چگالی استفاده کرده این احتمال را پیدا کنید که برای نمونه‌ی تصادفی مستقل به اندازه $n=5$ از جامعه‌های نرمال با واریانس یکسان، S_1^2/S_2^2 مقداری کمتر از $\frac{1}{2}$ یا بیشتر از ۲ اختیار کند.

۲–۳۷. با انتگرال‌گیری از چگالی خی‌دوی مناسب، احتمال آن را پیدا کنید که واریانس یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی ۵ از توزیع نرمال با $\sigma^2=25$ بین ۲۰ و ۳۰ قرار گیرد.

۲–۳۸. این ادعا که واریانس یک توزیع نرمال $\sigma^2=25$ است، در صورتی که به اندازه ۱۶ بیشتر از ۵۴/۶۶۸ یا کمتر از ۱۲/۱۰۲ باشد، رد خواهد شد. احتمال اینکه این ادعا حتی اگر $\sigma^2=25$ رد شود، چقدر است؟

۲–۳۹. این ادعا که واریانس یک توزیع نرمال $\sigma^2=4$ است، در صورتی که واریانس نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۹ بیشتر از ۷/۷۵۳۵ باشد، رد خواهد شد. احتمال اینکه این ادعا حتی برای $\sigma^2=4$ رد شود، چقدر است؟

۲–۴۰. نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۲۵ از توزیعی نرمال دارای میانگین $\bar{x}=47$ و انحراف معیار $s=7$ است. اگر مبنای تصمیم خود را بر آماره‌ی قضیه‌ی ۲–۱۳ قراردهیم، آیا می‌توانیم بگوییم که اطلاعات داده شده این حدس را که میانگین جامعه $\mu=42$ است، تأیید می‌کند؟

۲–۴۱. نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۱۲ از توزیعی نرمال دارای میانگین $\bar{x}=27/8$ و انحراف $s^2=3/24$ است. اگر مبنای تصمیم خود را بر آماره‌ی قضیه‌ی ۲–۱۳ قراردهیم، آیا می‌توانیم بگوییم که اطلاعات داده شده این حدس را که میانگین جامعه $\mu=28/5$ است، تأیید می‌کند؟

۲-۴۲. اگر S_1 و S_2 انحراف‌های معیار نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازه‌ی $n_1 = 61$ و $n_2 = 31$ از جامعه‌های نرمال با $\sigma_1^2 = 12$ و $\sigma_2^2 = 18$ باشند، مقدار $P(S_1^2 / S_2^2 > 1/16)$ را پیدا کنید.

۲-۴۳. اگر S_1^2 و S_2^2 واریانس‌های نمونه‌ای تصادفی مستقل با اندازه $n_1 = 10$ و $n_2 = 15$ از جامعه‌های نرمال با واریانس‌های برابر باشند، مقدار $P(S_1^2 / S_2^2 > 4/03)$ را پیدا کنید.

۲-۵ آماره‌های ترتیبی

نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌های نامتناهی با چگالی پیوسته را در نظر بگیرید. فرض کنید که مقادیر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n را بسته به بزرگی آنها مرتب کنیم و کوچکترین مقدار xها را به عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_1، بزرگترین مقدار بعد از آن را به عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_2، بزرگترین مقدار بعد از آن را به عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_3، ...، و بزرگترین آنها را به عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_n تلقی کنیم. به متغیرهای تصادفی $Y_i;\ i = 1, 2, \ldots, n$ **آماره‌های ترتیبی** اطلاق می‌شود. به‌ویژه Y_1 اوّلین آماره‌ی ترتیبی، Y_2 دوّمین آماره‌ی ترتیبی، Y_3 سومین آماره‌ی ترتیبی، و به‌همین ترتیب الی آخر. (ما این بحث را به جامعه‌های نامتناهی با چگالی‌های پیوسته محدود می‌کنیم تا احتمال برابر شدن هر دو تا از xها برابر صفر باشد.)

برای تصریح بیشتر، حالتی را در نظر بگیرید که در آن $n = 2$ و رابطه‌ی بین مقادیر X_1 و X_2 و Y_1 و Y_2 چنین است:

$$y_1 = \begin{cases} x_1 & x_1 < x_2 \\ x_2 & x_2 < x_1 \end{cases}, \quad y_2 = \begin{cases} x_2 & x_1 < x_2 \\ x_1 & x_2 < x_1 \end{cases}$$

به همین نحو، به‌ازای $n = 3$ رابطه‌ی بین مقادیر متغیرهای تصادفی مربوط چنین است:

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{وقتی} \qquad y_3 = x_3\,, \quad y_2 = x_2\,, \quad y_1 = x_1,$$
$$x_1 < x_3 < x_2 \quad \text{وقتی} \qquad y_3 = x_2\,, \quad y_2 = x_3\,, \quad y_1 = x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_3 < x_2 < x_1 \quad \text{وقتی} \qquad y_1 = x_3\,, \quad y_2 = x_2\,, \quad y_3 = x_3,$$

حال فرمول چگالی احتمال rامین آماره‌ی ترتیبی را برای $r = 1, 2, \ldots, n$، استخراج می‌کنیم.

قضیه‌ی ۲-۱۶. برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌های نامتناهی که دارای مقدار $f(x)$ در x است، چگالی احتمال rامین آماره‌ی ترتیبی Y_r به‌ازای $-\infty < y_r < +\infty$ چنین است

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{+\infty} f(x)dx\right]^{n-r}.$$

برهان. فرض کنید که محور حقیقی به سه بازه‌ی تقسیم شده است، یکی از $-\infty$ تا y_r، دوّمی از y_r تا $y_r + h$ (که در آن h ثابت مثبتی است)، و سومی از $y_r + h$ تا $+\infty$. در این صورت چون جامعه‌ای که از آن نمونه می‌گیریم، دارای مقدار $f(x)$ در x است، احتمال اینکه، $r-1$ تا از نمونه‌ها در اوّلین بازه قرار گیرند، یکی در بازه‌ی دوّم قرار گیرد، و $n-r$ تا در بازه‌ی سوم قرار گیرند، طبق فرمول توزیع چندجمله‌ای عبارت است از

$$\frac{n!}{(r-1)!\,1!\,(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1}\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx\right]\left[\int_{y_r+h}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-r}$$

با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین در حسابان داریم

$$\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx = f(\xi)\cdot h \quad , \quad y_r \le \xi \le y_r + h$$

و اگر فرض کنیم $h \to 0$، سرانجام

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)\,!(n-r)\,!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-r}$$

را به‌ازای $-\infty < y_r < +\infty$ برای تابع چگالی rامین آماره‌ی ترتیبی y_r به‌دست می‌آوریم.

به‌ویژه، توزیع Y_1، کوچکترین مقدار در نمونه‌ای به اندازه‌ی n، عبارت است از

$$g_1(y_1) = n\cdot f(y_1)\left[\int_{y_1}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1} \quad , \quad -\infty < y_1 < \infty.$$

در حالی که توزیع Y_n، بزرگترین مقدار در یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n، عبارت است از

$$g_n(y_n) = n\cdot f(y_n)\left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-1} \quad , \quad -\infty < y_n < \infty.$$

همچنین، در نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n = 2m+1$، میانه‌ی نمونه‌ای $\tilde{X} = Md$، Y_{m+1} است، به‌طوری که توزیع نمونه‌گیری آن عبارت است از

$$h(\tilde{x}) = \frac{(2m+1)!}{m!m!}\left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x)dx\right]^{m} f(\tilde{x})\left[\int_{\tilde{x}}^{+\infty} f(x)dx\right]^{m}, \qquad -\infty < \tilde{x} < +\infty.$$

(برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی $n = 2m$، میانه به‌صورت $\frac{1}{2}(Y_m + Y_{m+1})$ تعریف می‌شود).

در بعضی موارد می‌توان انتگرال‌های مورد لزوم را برای به‌دست آوردن چگالی‌های آماره‌های ترتیبی گوناگون، محاسبه کرد، برای جامعه‌های دیگر ممکن است چاره‌ای جز تقریب زدن این انتگرال‌ها با استفاده از روش‌های عددی نباشد.

مثال ۲-۴. برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نمایی با پارامتر θ،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

توزیع Y_1 و Y_n به ترتیب عبارت است از

$$g_1(y_1) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}e^{-ny_1/\theta} & y_1 \geq 0 \\ 0 & y_1 < 0 \end{cases}$$

$$g_n(y_n) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}e^{-y_n/\theta}(1-e^{-y_n/\theta})^{n-1} & y_n \geq 0 \\ 0 & y_n < 0 \end{cases}$$

همچنین توزیع میانه برای $n = 2m+1$ برابر است با

$$h(\tilde{x}) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{m!m!\theta}e^{-\tilde{x}(m+1)/\theta}(1-e^{-\tilde{x}/\theta})^{m} & \tilde{x} \geq 0 \\ 0 & \tilde{x} < 0 \end{cases}$$

حل. انتگرال‌های موردنیاز برای به‌دست آوردن این نتایج سر راستند، که به‌عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود.

نتیجه‌ی زیر، نتیجه‌ی جالبی درباره‌ی توزیع‌های نمونه‌گیری میانه است که وقتی چگالی جامعه پیوسته و مقدار آن در $\tilde{\mu}$، میانه‌ی جامعه که برای آن $\int_{-\infty}^{\tilde{\mu}} f(x)dx = \frac{۱}{۲}$، صفر نیست، برقراراست.

قضیه‌ی ۲–۱۷. به‌ازای nهای بزرگ، توزیع نمونه‌گیری میانه نمونه‌های تصادفی به اندازه $۲n+۱$ تقریباً نرمال با میانگین $\tilde{\mu}$ و واریانس $\frac{۱}{۸[f(\tilde{\mu})]^{۲} n}$ است .

توجه کنید که برای نمونه‌های تصادفی به اندازه $۲n+۱$ از جامعه‌های نرمال، داریم $\mu = \tilde{\mu}$ به طوری که

$$f(\tilde{\mu}) = f(\mu) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}$$

و واریانس میانه تقریباً $\frac{\pi\sigma^{۲}}{۴n}$ است. اگر این را با مقایسه واریانس میانه، که برای نمونه‌های تصادفی به اندازه $۲n+۱$ از یک جامعه نامتناهی $\frac{\sigma^{۲}}{(۲n+۱)}$ است، مقایسه کنیم درمی‌یابیم که برای نمونه‌های بزرگ از یک جامعه نرمال، میانگین قابل اعتمادتر از میانه است؛ یعنی میانگین در معرض نوسان‌های شانسی کمتری در مقایسه با میانه است.

تمرین

۲–۴۴. درستی نتایجی را که در مثال ۲–۴ برای توزیع نمونه‌ای $Y_۱$، Y_n و $\tilde{X}$ داده شده‌اند، برای نمونه‌های تصادفی از یک جامعه‌ی نمایی تحقیق کنید.

۲–۴۵. توزیع‌های نمونه‌ای $Y_۱$ و Y_n را برای نمونه‌های تصادفی به اندازه n از یک جامعه یکنواخت پیوسته‌ای با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ پیدا کنید.

۲–۴۶. توزیع نمونه‌گیری میانه را برای نمونه‌هایی تصادفی به اندازه $۲m+۱$ از جامعه تمرین ۲–۴۵ پیدا کنید.

۲–۴۷. میانگین و واریانس توزیع نمونه‌گیری Y_1 را برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی یکنواخت پیوسته‌ای با $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ پیدا کنید .

۲–۴۸. توزیع‌های نمونه‌گیری Y_1 و Y_n را برای نمونه‌های تصادفی به اندازه n از جامعه‌ی یکنواخت بتا با $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ است، پیدا کنید.

۲–۴۹. توزیع نمونه‌گیری میانه را برای نمونه‌هایی تصادفی به اندازه‌ی $2m+1$ از جامعه‌ی یکنواخت بتا با $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ است، پیدا کنید.

۲–۵۰. توزیع نمونه‌گیری Y_1 را برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی $n = 2$ که

الف) بدون جایگذاری از جامعه‌ی متناهی که متشکل از اوّلین پنج عدد صحیح مثبت است،

ب) با جایگذاری از همان جامعه،

استخراج شده‌اند، پیدا کنید.

۲–۵۱. روشی را که در برهان قضیه‌ی ۲–۱۶ به‌کار رفته است، تکرار کرده نشان دهید که چگالی توأم با Y_1 و Y_n به‌صورت زیر است:

$$g(y_1, y_n) = n(n-1) f(y_1) f(y_n) \left[\int_{y_1}^{y_n} f_1(x)dx \right]^{n-2} \quad \text{و} \quad -\infty < y_1 < y_n < \infty$$

و صفر در سایر جاها.

الف) این نتیجه را برای پیدا کردن چگالی توأم Y_1 و Y_n برای نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از یک جامعه‌ی نمایی به‌کار برد.

ب) این نتیجه را برای پیدا کردن چگالی توأم Y_1 و Y_n برای نمونه‌ی تصادفی از جامعه تمرین ۲–۴۵ به‌کار برد.

۲–۵۲. با رجوع به قسمت (ب) تمرین ۲–۵۱، کوواریانس Y_1 و Y_n را پیدا کنید.

۲–۵۳. از فرمول چگالی توأم Y_1 و Y_n، که در تمرین ۲–۵۱ داده شده، و با استفاده از روش تبدیل متغیر بخش ۲–۴ عبارتی برای چگالی توأم Y_1 و برد نمونه‌ای که با $R = Y_n - Y_1$ داده می‌شود، پیدا کنید.

۲–۵۴. نتیجه‌ی تمرین قبل و قسمت (الف) تمرین ۲–۵۱ را به‌کار برده توزیع نمونه‌گیری R را برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نمایی به‌دست آورید.

۲–۵۵. نتیجه‌ی تمرین۲–۵۴ را به‌کار برده میانگین، توزیع نمونه‌گیری R را برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه یکنواخت تمرین۲–۴۵ پیدا کنید.

۲–۵۶. نتیجه‌ی تمرین ۲–۵۵ را به‌کار برده میانگین و واریانس توزیع نمونه‌گیری R را برای نمونه‌ای به اندازه‌ی n از جامعه‌ی یکنواخت تمرین ۲–۴۵ پیدا کنید.

۲–۵۷. این احتمال را پیدا کنید که در نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی $n=۴$ از جامعه‌ی یکنواخت پیوسته تمرین ۲–۴۵، کوچکترین مقدار حداقل ۰/۲۰ باشد.

۲–۵۸. مطلوب است احتمال آنکه در یک نمونه تصادفی به اندازه‌ی $n=۳$ از توزیع بتای تمرین ۲–۴۸، بزرگترین مقدار کمتر از ۰/۹۰ باشد .

۲–۵۹. نتیجه تمرین ۲–۵۵ را به‌کار برده، احتمال آن را پیدا کنید که بر یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $n=۵$ از جامعه‌ی یکنواخت مفروضی حداقل ۰/۷۵ باشد.

فصل سوّم

برآورد: نظریه

۳-۱ مقدمه

مسائل استنباط آماری، به‌طور سنتی، به مسائل برآورد و آزمون فرض تفکیک شده‌اند. گرچه در واقع کلیه‌ی این مسائل، اساساً مسائل تصمیم‌اند، و بنابراین می‌توان آنها را به کمک رهیافت یکپارچه شده‌ای که در فصل قبل ارائه شد رفع و رجوع کرد. وجه تمایز عمده آن است که در مسائل برآورد، باید مقداری از پارامتر (یا مقدارهای چندین پارامتر) را از بین پیوستار شق‌های ممکن تعیین کنیم، در حالی که در آزمون فرض باید تصمیم بگیریم که آیا مقداری مشخص یا مجموعه‌ای از مقادیر یک پارامتر (یا مقدارهای چندین پارامتر) را بپذیریم یا رد کنیم.

اگر مقدار یک آماره را برای برآوردکردن پارامتر یک جامعه به‌کار بریم، این کار را **برآورد نقطه‌ای** می‌نامیم و به مقدار این آماره، برآورد نقطه‌ای پارامتر اطلاق می‌کنیم. مثلاً اگر مقداری از $\overline{X}$ را برای برآورد میانگین جامعه، نسبت نمونه‌ای مشاهده شده را برای برآورد پارامتر θی جامعه‌ی دوجمله‌ای، یا مقدار $S^۲$ را برای برآورد واریانس یک جامعه به‌کار بریم، در هر مورد یک برآورد نقطه‌ای پارامتر مورد بحث را به‌کار می‌بریم. این برآوردها برآورد نقطه‌ای نامیده می‌شوند زیرا در هر مورد یک عدد تک، یا تک نقطه‌ای بر محور حقیقی را برای برآورد این پارامتر به‌کار می‌بریم.

متناظراً خود آماره را **برآوردکننده‌ی نقطه‌ای** می‌نامیم. مثلاً می‌توان از $\overline{X}$ به‌عنوان یک برآوردکننده‌ی نقطه‌ای μ استفاده کرد که در این صورت $\overline{x}$ یک برآورد

نقطه‌ای پارامتر است. به‌همین نحو، می‌توان از S^2 به عنوان یک برآوردکننده‌ی نقطه‌ای σ^2 استفاده کرد که در این صورت s^2 یک برآورد نقطه‌ای این پارامتر است. در اینجا از کلمه‌ی «نقطه» برای ایجاد تمایز بین برآوردکننده‌ها و برآوردها و **برآورد کننده‌های فاصله‌ای** یا **برآوردهای فاصله‌ای** استفاده می‌کنیم.

چون برآورد کننده‌ها متغیرهای تصادفی‌اند، یکی از مسائل اصلی برآورد نقطه‌ای مطالعه‌ی توزیع‌های نمونه‌گیری آنهاست. به‌عنوان مثال، وقتی واریانس یک جامعه را بر مبنای یک نمونه‌ی تصادفی برآورد می‌کنیم، به‌ندرت می‌توانیم انتظار داشته باشیم که مقدار S^2 واقعاً برای σ^2 شود، ولی دست‌کم، دانستن اینکه می‌توانیم انتظار نزدیکی به این مقدار را داشته باشیم، سبب آسودگی خاطر خواهد بود. همچنین، اگر لازم باشد که بین یک میانگین نمونه‌ای، $\overline{X}$، و یک میانه‌ی نمونه‌ای، $\tilde{X}$، یکی را برآورد پارامتر یک جامعه انتخاب کنیم، از جمله مهّم است بدانیم که آیا نزدیکی مقدار $\overline{X}$ به مقدار واقعی محتملتر است یا مقداری که از $\tilde{X}$ حاصل می‌شود.

بنابراین خواص گوناگون برآورد کننده‌ها را می‌توان مورد استفاده قرار داد تا تصمیم گرفت که کدام یک از برآوردکننده‌ها در وضعیت مفروضی مناسب‌تر از همه است، کدام یک ما را در معرض کمترین مخاطره قرار خواهد داد، کدام یک به ما بیشترین اطلاعات را، با کمترین هزینه خواهد داد، و الی‌آخر. آن عدّه از خواص برآوردکننده‌ها که در این فصل مورد بحث قرار می‌دهیم، عبارت‌اند از: نااریبی، کمترین واریانس، کارایی، سازگاری، بسندگی، و استواری.

۳-۲ برآوردکننده‌های نااریب

منطقی است از یک برآوردکننده انتظار داشته باشیم که دست‌کم به‌طور متوسط همواره به جواب درست بیانجامد. یعنی اینکه امید ریاضی آن برابر با پارامتری باشد که باید برآورد شود. اگر چنین باشد، برآوردکننده را نااریب می‌نامند، در غیر این صورت آن را اریب می‌نامند. به‌طور صوری

تعریف ۳-۱. برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\Theta}$ را یک برآوردکننده‌ی نااریب پارامتر θ نامند اگر و تنها اگر $E(\hat{\Theta}) = \theta$.

در زیر، چند مثال از برآوردکننده‌های نااریب و نیز اریب، داده می‌شود.

مثال ۳-۱. اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ باشد، نشان دهید که نسبت نمونه‌ای، $\frac{X}{n}$، برآوردکننده‌ی نااریبی برای پارامتر θ است.

حل. چون $E(X)=n\theta$، نتیجه می‌شود که

$$E(\frac{X}{n})=\frac{1}{n}.E(X)=\frac{1}{n}.n\theta=\theta.$$

مثال ۳-۲. اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با چگالی

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\delta)} & x>\delta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، نشان دهید که $\overline{X}$ برآوردکننده‌ای نااریب برای δ است.

حل. چون میانگین جامعه عبارت است از

$$\mu=\int_{\delta}^{\infty} x.e^{-(x-\delta)}dx=1+\delta,$$

بنابر این $E(\overline{X})=1+\delta\neq\delta$ و در نتیجه $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی اریب δ است.

وقتی $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی اریب θ باشد، ممکن است دانستن میزان اریبی مورد توجه باشد که با عبارت

$$b(\theta)=E(\hat{\Theta})-\theta$$

داده می‌شود. در حالتی که $\lim_{n\to\infty} b(\theta)=0$ می‌گوییم برآوردکننده، **مجانباً نااریب** است.

در مورد مثال ۳-۲، اریبی برابر $(1+\delta)-\delta=1$ است، امّا در اینجا می‌توانیم کاری در مورد آن صورت دهیم. چون $E(\overline{X})=1+\delta$، نتیجه می‌شود که $E(\overline{X}-1)=\delta$ و بنابراین $\overline{X}-1$ یک برآوردکننده‌ی نااریب δ است. مثال زیر، موردی دیگر است که در آن اصلاح جزئی برآوردکننده‌ای، منجر به برآوردکننده‌ی دیگری می‌شود که نااریب است.

مثال ۳-۳. اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = 0$ باشد نشان دهید که بزرگترین مقدار نمونه (یعنی nامین آماره‌ی ترتیبی، Y_n) برآوردکننده‌ای اریب برای پارامتر β است. همچنین، این برآوردکننده را اصلاح کنید تا نااریب شود.

حل. با قراردادن در فرمول مربوط به $g_n(y_n)$ در بخش ۲-۵، نتیجه می‌گیریم که توزیع نمونه‌گیری Y_n عبارت از

$$g_n(y_n) = n.\frac{1}{\beta}.\left(\int_0^{y_n} \frac{1}{\beta}dx\right)^{n-1} = \frac{n}{\beta^n}.y_n^{n-1}$$

برای $\beta > y_n > 0$ است و در سایر جاها $g_n(y_n) = 0$، و بنابراین

$$E(Y_n) = \frac{n}{\beta^n}\int_0^{\beta} y_n^n dy_n = \frac{n}{n+1}.\beta$$

در نتیجه $E(Y_n) \neq \beta$ و nامین آماره‌ی ترتیبی، یک برآوردکننده‌ی اریب پارامتر β است. امّا چون

$$E\left(\frac{n+1}{n}.Y_n\right) = \frac{n+1}{n}.\frac{n}{n+1}.\beta = \beta$$

نتیجه می‌شود که $\frac{n+1}{n}$ ضرب در مقدار بزرگترین آماره‌ی نمونه‌ای، یک برآوردکننده‌ی نااریب پارامتر β است.

پس از بحث نااریبی به عنوان خاصیتی مطلوب برای برآوردکننده‌ها، حال می‌توانیم توضیح دهیم که چرا در تعریف واریانس نمونه‌ای، به‌جای تقسیم بر n بر $n-1$ تقسیم کرده‌ایم - با این کار S^2 یک برآورد نااریب σ^2 برای نمونه‌های تصادفی استخراج شده از جامعه‌های نامتناهی می‌شود.

قضیه‌ی ۳-۱. اگر S^2 واریانس یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با واریانس متناهی σ^2 باشد، در این صورت $E(S^2) = \sigma^2$.

برهان. بنابر تعریف واریانس نمونه

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}.\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$
$$=\frac{1}{n-1}.E\left[\sum_{i=1}^{n}\{(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\}^2\right]$$
$$=\frac{1}{n-1}.\left[\sum_{i=1}^{n}E\{(X_i-\mu)^2\}-n.E\{(\overline{X}-\mu)^2\}\right]$$

بنابراین، چون $E\{(X_i-\mu)^2\}=\sigma^2$ و $E\{(\overline{X}-\mu)^2\}=\frac{\sigma^2}{n}$، نتیجه می‌شود که

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}.\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n.\frac{\sigma^2}{n}\right]=\sigma^2.$$

گرچه S^2 برآوردکننده‌ای نااریب برای واریانس یک جامعه‌ی نامتناهی است، ولی برآوردکننده‌ی نااریب یک جامعه‌ی متناهی نیست و در هیچ حالتی S برآوردکننده‌ی نااریب σ نیست. اریبی S به عنوان برآوردکننده‌ای برای σ، از جمله در کتاب کیپینگ، که در بین مراجع پایان کتاب فهرست شده، مورد بحث قرار گرفته است.

بحث پاراگراف قبل، یکی از مشکلات مرتبط با مفهوم نااریبی را توصیف می‌کند. این خاصیت تحت تبدیل‌های تابعی، پایدار نمی‌ماند، یعنی، اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ی نااریب برای θ باشد، الزاماً نتیجه نمی‌شود که $\omega(\hat{\Theta})$ یک برآوردکننده‌ی نااریب $\omega(\theta)$ است. مشکل دیگری، مرتبط با مفهوم نااریبی آن است که برآوردکننده‌های نااریب لزوماً یکتا نیستند. مثلاً، در مثال ۳-۹، خواهیم دید که $\frac{n+1}{n}.Y_n$ تنها برآوردکننده‌ی نااریب پارامتر βی مثال ۳-۳ نیست.

۳-۳ کارآیی

اگر قرار باشد که بین چندین برآوردکننده‌ی نااریب یکی را انتخاب کنیم، معمولاً آن برآوردکننده را انتخاب می‌کنیم که توزیع نمونه‌گیری آن دارای کمترین واریانس باشد. برای تحقیق اینکه برآوردکننده‌ی نااریب مفروضی دارای کوچکترین واریانس ممکن است، یعنی اینکه آیا یک برآوردکننده‌ی نااریب با کمترین واریانس (بهترین برآوردکننده‌ی نااریب) است یا نه، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که اگر $\hat{\Theta}$ یک

برآوردکننده‌ی نااریب θ باشد، می‌توان نشان داد که تحت شرایط بسیار کلی واریانس $\hat{\Theta}$ باید در نامساوی

$$\operatorname{var}(\hat{\Theta}) \geq \frac{1}{n.E[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \theta}\right)^{2}]}$$

صدق کند، که در آن $f(x)$ مقدار چگالی جامعه در x، و n اندازه‌ی نمونه‌ی تصادفی است. این نامساوی، **نامساوی کرامر–رائو**، به نتیجه‌ی زیر منجر می‌شود.

قضیه‌ی ۳–۲. اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب θ باشد و

$$\operatorname{var}(\hat{\Theta}) = \frac{1}{n.E[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \theta}\right)^{2}]}$$

آنگاه، $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب با کمترین واریانس θ است.

در اینجا، کمیت واقع در مخرج کسر را **اطلاع** درباره‌ی θ نامند که به وسیله‌ی نمونه تأمین می‌شود. بنابراین، هرچه واریانس کمتر باشد، اطلاع بیشتر است.

مثال ۳–۴. نشان دهید $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب با کمترین واریانس، برای میانگین μی جامعه‌ای نرمال است.

حل. چون

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

نتیجه می‌شود که

$$\ln f(x) = -\ln \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}$$

به‌طوری‌که

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

و بنابر این

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \mu}\right)^{۲}\right]=\frac{۱}{\sigma^{۲}}.E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^{۲}\right]=\frac{۱}{\sigma^{۲}}.۱=\frac{۱}{\sigma^{۲}}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{n.E[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \mu}\right)^{۲}]}=\frac{۱}{n.\frac{۱}{\sigma^{۲}}}=\frac{\sigma^{۲}}{n},$$

و چون $\overline{X}$ ناااریب است و طبق قضیه‌ی ۲-۱، $\mathrm{var}(\overline{X})=\frac{\sigma^{۲}}{n}$، نتیجه می‌شود که $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب با کمترین واریانس برای μ است.

درست نیست اگر ازاین مثال چنین نتیجه بگیریم که $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب با کمترین واریانس برای میانگین μی هر جامعه است. به عنوان تمرین خواسته خواهد شد تا تحقیق کنید که برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی $n=۳$ از جامعه‌ی یکنواخت پیوسته با $\alpha=\theta-\frac{۱}{۲}$ و $\beta=\theta+\frac{۱}{۲}$، تمرین ۳-۳، چنین حکمی درست نیست.

همان‌طور که متذکر شده‌ایم، برآوردکننده‌های نااریب معمولاً برحسب واریانس‌های‌شان باهم مقایسه می‌شوند. اگر $\hat{\Theta}_{۱}$ و $\hat{\Theta}_{۲}$ دو برآوردکننده‌ی نااریب پارامتر θ باشند و واریانس $\hat{\Theta}_{۱}$ کوچکتر از واریانس $\hat{\Theta}_{۲}$ باشد، گوییم که $\hat{\Theta}_{۱}$ به‌طور نسبی کارآتر $\hat{\Theta}_{۲}$ است. همچنین از نسبت

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{\Theta}_{۱})}{\mathrm{var}(\hat{\Theta}_{۲})}$$

به‌عنوان اندازه‌ای برای کارآیی $\hat{\Theta}_{۲}$ نسبت به $\hat{\Theta}_{۱}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۳-۵. در مثال ۳-۳ نشان دادیم که اگر $X_{۱},X_{۲},...,X_{n}$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha=۰$ باشد، آنگاه $\frac{n+۱}{n}.Y_{n}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب β است.

الف) نشان دهید که $۲\overline{X}$ نیز یک برآوردکننده‌ی نااریب β است.

ب) کارآیی این دو برآوردکننده‌ی β را مقایسه کنید.

حل. الف) چون میانگین جامعه، $\mu=\frac{\beta}{۲}$ است، از قضیه‌ی ۲-۱، نتیجه می‌شود که $E(\overline{X})=\frac{\beta}{۲}$ و بنابراین $E(۲\overline{X})=\beta$. در نتیجه $۲\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب β است.

ب) ابتدا باید واریانس دو برآوردکننده را پیدا کنیم. با استفاده از توزیع نمونه‌گیری Y_n و عبارت مربوط به $E(Y_n)$ که در مثال ۳-۳ داده شده است، به‌دست می‌آوریم

$$E(Y_n^۲)=\frac{n}{\beta^۲}\int_۰^{\beta} y_n^{n+۱}dy_n=\frac{n}{n+۲}.\beta^۲$$

و

$$\mathrm{var}(Y_n)=\frac{n}{n+۲}.\beta^۲-\left(\frac{n}{n+۱}.\beta\right)^۲.$$

با واگذاری جزئیات برعهده‌ی خواننده، بنابراین می‌توان نشان داد که

$$\mathrm{var}\left(\frac{n+۱}{n}.Y_n\right)=\frac{\beta^۲}{n(n+۲)}.$$

چون واریانس جامعه $\sigma^۲=\frac{\beta^۲}{۱۲}$ است، از قضیه‌ی ۲-۱ نتیجه می‌شود $\mathrm{var}(\bar{X})=\frac{\beta^۲}{۱۲n}$ و بنابراین

$$\mathrm{var}(۲\bar{X})=۴\ \mathrm{var}(\bar{X})=\frac{\beta^۲}{۳n}$$

در نتیجه، کارآیی $۲\bar{X}$ نسبت به $\frac{n+۱}{n}.Y_n$ با عبارت

$$\frac{\mathrm{var}(\frac{n+۱}{n}.Y_n)}{\mathrm{var}(۲\bar{X})}=\frac{\frac{\beta^۲}{n(n+۲)}}{\frac{\beta^۲}{۳n}}=\frac{۳}{n+۲}$$

داده می‌شود و می‌توان ملاحظه کرد که برای $n>۱$، برآوردکننده‌ی مبتنی بر nامین آماره‌ی ترتیبی، بسیار کارآتر از دیگری است. مثلاً برای $n=۱۰$ کارآیی نسبی تنها ۲۵ درصد و برای $n=۲۵$، تنها ۱۱ درصد است.

مثال ۳-۶. در برآورد میانگین μی یک جامعه‌ی نرمال بر مبنای یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $۲n+۱$، کارآیی میانه نسبت به میانگین چیست؟

حل. از قضیه‌ی ۲-۱، می‌دانیم که $\bar{X}$ ناریب و

$$\mathrm{var}(\bar{X})=\frac{\sigma^۲}{۲n+۱}$$

تا آنجا که به $\tilde{X}$ مربوط است، بنا به تقارن توزیع نرمال حول میانگین، نااریب است، و برای نمونه‌های بزرگ

$$\operatorname{var}(\tilde{X}) = \frac{\pi\sigma^۲}{۴n}.$$

بنابراین، برای نمونه‌های بزرگ، کارآیی میانه نسبت به میانگین تقریباً برابر

$$\frac{\operatorname{var}(\bar{X})}{\operatorname{var}(\tilde{X})} = \frac{\frac{\sigma^۲}{۲n+۱}}{\frac{\pi\sigma^۲}{۴n}} = \frac{۴n}{\pi(۲n+۱)}$$

است و **کارایی مجانبی** میانه نسبت به میانگین عبارت از

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۴n}{\pi(۲n+۱)} = \frac{۲}{\pi}$$

یا حدود ۶۴ درصد است.

نتیجه‌ی مثال قبل را می‌توان چنین تعبیر کرد: در نمونه‌های بزرگ، برای برآورد μ، میانگین فقط به ۶۴درصد مشاهداتی نیاز دارد که مورد نیاز میانه است برای اینکه قابلیت اعتماد آنها یکی باشد.

توجه به این نکته اهمّیت دارد که ما بحث خود درباره‌ی کارآیی نسبی را به برآوردکننده‌های نااریب محدود کرده‌ایم. اگر برآوردکننده‌های اریب را درنظرمی‌گرفتیم، همواره می‌توانستیم وجود برآوردکننده‌ای با واریانس صفر را با برابر گرفتن همه‌ی مقادیر آن با عدد ثابتی صرف نظر از داده‌های به‌دست آمده، تضمین کنیم. بنابراین اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ی نااریب پارامتر θ نباشد، بهتر است که برای قضاوت درباره‌ی محاسن آن و مقایسه‌ی کارآیی‌ها به‌جای واریانس $\hat{\Theta}$ برمبنای **میانگین مربع خطا** یعنی $E[(\hat{\Theta}-\theta)^۲]$ به‌جای واریانس $\hat{\Theta}$ عمل کنیم.

تمرین

۳-۱. اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ باشد، چه شرطی باید بر ثابت‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n اعمال کرد به‌طوری‌که

$$a_۱X_۱ + a_۲X_۲ + \cdots + a_nX_n$$

برآوردکننده‌ای، نااریب برای μ باشد؟

۳-۲. اگر $\hat{\Theta}_1$ و $\hat{\Theta}_2$ برآوردکننده‌های نااریب پارامتر θ باشند، چه شرطی باید بر ثابت‌های k_1 و k_2 اعمال کرد به‌طوری‌که

$$k_1\hat{\Theta}_1 + k_2\hat{\Theta}_2$$

نیز یک برآوردکننده‌ی نااریب θ باشد؟

۳-۳. از فرمول مربوط به توزیع نمونه‌گیری $\tilde{X}$ در بخش ۲-۵ استفاده کرده، نشان دهید که برای متغیرهای تصادفی به اندازه‌ی $n = 3$، میانه، برآوردکننده‌ای نااریب برای پارامتر θی جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = \theta - \frac{1}{2}$ و $\beta = \theta + \frac{1}{2}$ است.

۳-۴. نشان دهید که برای نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n = 3$، میانه، برآوردکننده‌ای اریب برای پارامتر θی جامعه‌ی نمایی است.

۳-۵. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای که دارای میانگین معلوم μ و واریانس متناهی σ^2 است، نشان دهید که

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

برآوردکننده‌ای نااریب برای σ^2است.

۳-۶. نشان دهید که $\overline{X}^2$ یک برآوردکننده‌ی مجانباً نااریب μ^2 است.

۳-۷. نشان دهید که $\frac{X+1}{n+2}$ برآوردکننده‌ای اریب برای پارامتر θی دوجمله‌ای است. آیا این برآوردکننده، مجانباً نااریب است؟

۳-۸. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال با $\mu = 0$ باشد، نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n}$$

یک برآوردکننده‌ی نااریب σ^2 است.

۳-۹. اگر X متغیری تصادفی دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ باشد، نشان دهید که $n.\frac{X}{n}.(1 - \frac{X}{n})$ برآوردکننده‌ای اریب برای واریانس X است.

۳-۱۰. اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n، بدون جایگذاری، از جامعه‌ی متناهی متشکل از اعداد صحیح مثبت ۱، ۲، ...، k اختیار شود، نشان دهید که

الف) توزیع نمونه‌گیری nامین آماره‌ی ترتیبی، Y_n، با عبارت

$$f(y_n)=\frac{\binom{y_n-1}{n-1}}{\binom{k}{n}}$$

برای $y_n=n,\ldots,k$ داده می‌شود.

ب) $\frac{n+1}{n}.Y_n-1$ یک برآوردکننده‌ای ناریب k است.

۳-۱۱. نشان دهید که اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای ناریب برای θ باشد و $\operatorname{var}(\hat{\Theta})\neq 0$، آنگاه $\hat{\Theta}^2$ یک برآوردکننده‌ی ناریب θ^2 نیست.

۳-۱۲. نشان دهید که نسبت نمونه‌ای $\frac{X}{n}$ یک برآوردکننده‌ی ناریب با کمترین واریانس برای توزیع دوجمله‌ای θ است.

۳-۱۳. نشان دهید که میانگین نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n، یک برآوردکننده‌ی ناریب با کمترین واریانس برای پارامتر λی توزیع پواسون است.

۳-۱۴. اگر $\hat{\Theta}_1$ و $\hat{\Theta}_2$ برآوردکننده‌های ناریب مستقل پارامتر مفروض θ باشند و داشته باشیم $\operatorname{var}(\hat{\Theta}_1)=3\operatorname{var}(\hat{\Theta}_2)$، مقادیر ثابت a_1 و a_2 را پیدا کنید به طوری که $a_1\hat{\Theta}_1+a_2\hat{\Theta}_2$ برآوردکننده‌ای ناریب با کمترین واریانس برای چنین ترکیب خطی باشد.

۳-۱۵. نشان دهید که میانگین نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی نمایی، یک برآوردکننده‌ی ناریب با کمترین واریانس پارامتر θ است.

۳-۱۶. نشان دهید که برآوردکننده‌ی ناریب مثال ۳-۴، $\frac{n+1}{n}.Y_n$، نامساوی کرامر-رائو برآورده نمی‌شود.

۳-۱۷. اگر $\overline{X}_1$ میانگین یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ_1^2، و $\overline{X}_2$ میانگین یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی نرمال با میانگین μ و واریانس σ_2^2 باشد، و دو نمونه مستقل باشند نشان دهید که

الف) $w.\overline{X}_1+(1-w).\overline{X}_2$ که در آن $0\leq w\leq 1$، یک برآوردکننده‌ی ناریب μ است،

ب) واریانس این برآوردکننده مینیمم است وقتی که

$$w=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

۳-۱۸. با رجوع به تمرین ۳-۱۷، کارآیی برآوردکننده‌ی قسمت الف را با $w=\frac{1}{2}$ نسبت به این برآوردکننده با

$$w=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

پیدا کنید.

۳-۱۹. اگر $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ میانگین‌های نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، نشان دهید که واریانس برآوردکننده‌ی نااریب $w.\overline{X}_1+(1-w).\overline{X}_2$ مینیمم است وقتی که $w=\frac{n_1}{n_1+n_2}$.

۳-۲۰. با رجوع به تمرین ۳-۱۹، کارآیی برآوردکننده‌ی با $w=\frac{1}{2}$ را نسبت به برآوردکننده‌ای با $w=\frac{n_1}{n_1+n_2}$ پیدا کنید.

۳-۲۱. نشان دهید که اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای اریب برای θ باشد، آنگاه

$$E[(\hat{\Theta}-\theta)^2]=\operatorname{var}(\hat{\Theta})+[b(\theta)]^2.$$

۳-۲۲. نمونه‌هایی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌های نرمالی با میانگین μ و واریانس‌های $\sigma_1^2=4$ و $\sigma_1^2=9$ استخراج شده‌اند. اگر $\bar{x}_1=26/0$ و $\bar{x}_2=32/5$، با استفاده از برآوردکننده‌های قسمت ب تمرین ۳-۱۷، μ را برآورد کنید.

۳-۴ سازگاری

در بخش قبل، فرض کردیم که واریانس یک برآوردکننده، یا میانگین مربع خطای آن، نشانه‌ی خوبی از نوسان‌های شانسی آن است. این واقعیت که این اندازه‌ها شاید حتی نتوانند ملاک خوبی برای این منظور باشند در مثال زیر تشریح می‌شود: فرض کنید که بخواهیم برمبنای یک مشاهده، پارامتر θی جامعه‌ی

$$f(x)=\omega.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\theta}{\sigma})^2}+(1-\omega).\frac{1}{\pi}.\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$$

به‌ازای $-\infty<x<+\infty$ و $0<\omega<1$ را برآورد کنیم. آشکار است که این تابع چگالی، ترکیبی از یک جامعه‌ی نرمال با میانگین θ و واریانس σ^2 و یک تابع چگالی کوشی با $\alpha=\theta$ و $\beta=1$ است. حال اگر ω خیلی نزدیک به ۱ باشد، مثلاً $\omega=1-10^{-100}$، و σ

خیلی کوچک باشد، مثلاً $\sigma = 10^{-100}$، احتمال اینکه یک متغیر تصادفی با این توزیع مقداری اختیار کند که خیلی نزدیک به θ، و بنابراین برآوردکننده‌ی بسیار خوبی برای θ باشد، و عملاً ۱ است. با این حال، چون واریانس توزیع کوشی موجود نیست، واریانس این برآوردکننده نیز موجود نخواهد بود.

مثال بالا تا حدودی غیرعادی است، ولی این واقعیت در آن مطرح می‌شود که باید توجه بیشتری به احتمال‌های این پیشامدها بکنیم که برآوردکننده‌ها مقادیری نزدیک پارامترهایی که باید برآوردکنند، اختیارکنند. با مبتنی کردن استدلال خود بر قضیه‌ی چبیشف، وقتی $n \to \infty$، احتمال آنکه نسبت نمونه‌ای $\frac{X}{n}$ مقداری اختیار کند که با پارامتر توزیع دوجمله‌ای θ، اختلافی کمتر از ثابت دلخواه $c > 0$ داشته باشد، به ۱ میل می‌کند. همچنین با استفاده از قضیه‌ی چبیشف می‌توان نشان داد که وقتی $n \to \infty$، احتمال اینکه $\overline{X}$ مقداری اختیار کند که با μ، میانگین جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری، اختلافی کمتر از هر ثابت دلخواه $c > 0$ داشته باشد، به ۱ میل می‌کند.

در هر دو مثال پاراگراف پیشین، عملاً مطمئن شدیم که، حداقل برای n بزرگ، برآوردکننده‌ها مقادیری اختیار می‌کنند که به پارامترهای مربوط خیلی نزدیک‌اند. این مفهوم «نزدیکی» در تعریف زیر از سازگاری تعمیم داده می‌شود.

تعریف ۳-۲. آماره‌ی $\hat{\Theta}$ یک **برآوردکننده‌ی سازگار** پارامتر θ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر ثابت مثبت c،

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\hat{\Theta} - \theta| < c) = 1.$$

توجه کنید که سازگاری یک **خاصیت مجانبی**، یعنی، خاصیت حدّی یک برآوردکننده است، به زبان عادی، تعریف ۳-۲ می‌گوید که وقتی n به حدّ کافی بزرگ است، می‌توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک برآوردکننده‌ی سازگار صورت می‌گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود. نوع همگرایی که با حدگیری در تعریف ۳-۲ توصیف می‌شود، عموماً **همگرایی در احتمال** نامیده می‌شود.

بنابراین بر مبنای قضیه‌ی چبیشف می‌توان نشان داد که $\frac{X}{n}$ برآوردکننده‌ای سازگار برای پارامتر θی دوجمله‌ای است و در قضیه‌ی ۳–۱ نشان داده‌ایم که $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی سازگار میانگین جامعه‌ای با واریانس متناهی است. در عمل، اغلب می‌توانیم در مورد سازگار بودن برآوردکننده‌ای با استفاده از شرط بسنده‌ی زیر حکم کنیم که در واقع پیامد فوری قضیه‌ی چبیشف است.

قضیه‌ی ۳–۳. اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب برای پارامتر θ باشد و وقتی $n \to +\infty$، $\operatorname{var}(\hat{\Theta}) \to ۰$، آنگاه $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای سازگار برای θ است.

مثال ۳–۹. نشان دهید که برای نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال، واریانس نمونه‌ای، $S^۲$ برآوردکننده‌ای سازگار برای $\sigma^۲$ است.

حل. چون $S^۲$، یک برآوردکننده‌ی نااریب برای $\sigma^۲$ است، تنها لازم است نشان دهیم که وقتی $n \to +\infty$، $\operatorname{var}(S^۲) \to ۰$. ملاحظه می‌کنیم که برای نمونه‌ای از یک جامعه‌ی نرمال (تمرین ۲–۲۵)

$$\operatorname{var}(S^۲) = \frac{۲\sigma^۴}{n-۱}$$

نتیجه می‌شود که وقتی $n \to \infty$، $\operatorname{var}(S^۲) \to ۰$، و بنابراین نشان داده‌ایم که $S^۲$ یک برآوردکننده‌ی سازگار واریانس جامعه‌ی نرمال است.

خوب است توجه کنیم که اگر در قضیه‌ی ۳–۳، به جای «نااریب»، «مجانباً نااریب» را قرار دهیم، قضیه همچنان برقرار است. این مطلب را در مثال زیر نشان داده‌ایم.

مثال ۳–۸. با مراجعه ۳–۳، نشان دهید که کوچکترین مقدار نمونه (یعنی، اوّلین آماره‌ی ترتیبی $Y_۱$)، یک برآوردکننده‌ی سازگار برای پارامتر δ است.

حل. با جایگذاری در فرمول $g_۱(y_۱)$ در می‌یابیم که توزیع نمونه‌گیری $Y_۱$ با عبارت

$$g_۱(y_۱) = n.e^{-(y_۱-\delta)}.\left[\int_{y_۱}^{+\infty} e^{-(x-\delta)}dx\right]^{n-۱} = n.e^{-n(y_۱-\delta)}$$

برای $y_1 > \delta$ و $g_1(y_1) = 0$ در سایرجاها داده می‌شود. بر مبنای این نتیجه، می‌توان به آسانی نشان داد که $E(Y_1) = \delta + \frac{1}{n}$ و بنابراین Y_1 یک برآوردکننده‌ی مجانباً نااریب δ است. به‌علاوه

$$P(|Y_1 - \delta| < c) = P(\delta < Y_1 < \delta + c) = \int_{\delta}^{\delta+c} n.e^{-n(y_1-\delta)} dy_1 = 1 - e^{-nc}.$$

چون $\lim_{n \to +\infty} (1 - e^{-nc}) = 1$، از تعریف ۳-۲ نتیجه می‌شود که Y_1 یک برآوردکننده‌ی سازگار δ است.

قضیه‌ی ۳-۳ شرط کافی برای سازگاری یک برآوردکننده است. این شرط یک شرط لازم نیست زیرا لزومی ندارد که برآوردکننده‌های سازگار، نااریب، یا حتی مجانباً نااریب باشند.

۳-۵ بسندگی

برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\Theta}$ را بسنده می‌نامیم در صورتی که از همه‌ی اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر θی یک جامعه بهره‌برداری کند، یعنی، اگر تمام دانشی را که می‌توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه‌ها و ترتیب آنها به‌دست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهده‌ی مقدار آماره‌ی $\hat{\Theta}$ هم به‌دست آوریم.

این را می‌توان، به‌طور صوری، برحسب تابع توزیع احتمال شرطی یا تابع چگالی شرطی مقادیر نمونه به‌فرض $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می‌شود.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n \mid \hat{\theta}) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n, \hat{\theta})}{g(\hat{\theta})} = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{g(\hat{\theta})}.$$

اگر این عبارت به θ بستگی داشته باشد، در این صورت مقادیر خاص X_1، X_2، ... و X_n که $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ را به‌دست می‌دهند، برای برخی مقادیر θ محتمل‌تر از سایر مقادیرند، و دانستن این مقادیر نمونه‌ای به برآورد θ کمک خواهد کرد. از سوی دیگر، اگر این عبارت به θ بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص X_1، X_2، ... و X_n که $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ را به دست می‌دهند، برای هر مقدار θ به یک اندازه محتمل‌اند، و دانستن این مقادیر نمونه‌ای به برآورد θ کمکی نخواهد کرد.

تعریف ۳-۳. آماره‌ی $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده پارامتر θ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر مقدار $\hat{\Theta}$، توزیع احتمال شرطی یا چگالی شرطی نمونه‌ی تصادفی X_1، X_2، ...، X_n، به فرض $\hat{\Theta}=\hat{\theta}$ مستقل از θ باشد.

مثال ۳-۹. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی برنولی θ باشد، نشان دهید $\hat{\Theta}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$، یک برآوردکننده‌ی بسنده برای پارامتر θ است.

حل. بنابر توزیع برنولی

$$f(x_i;\theta)=\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}; \qquad x_i=0,1$$

به‌طوری‌که به‌ازای $x_i=0,1$ ، $i=1,2,\ldots,n$،

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$
$$=\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}=\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}.$$

همچنین چون

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است، و توزیع آن عبارت است از

$$b(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

و از روش تبدیل متغیر

$$g(\hat{\theta})=\binom{n}{n\hat{\theta}}\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}; \qquad \hat{\theta}=0,\frac{1}{n},\ldots,1$$

حال، با جایگذاری این تابع در فرمول $f(x_1,x_2,\ldots,x_n|\hat{\theta})$ به‌ازای $x_i=0,1$، $i=1,2,\ldots,n$، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\hat{\theta})}{g(\hat{\theta})}=\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{g(\hat{\theta})}=\frac{\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}}\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{n\hat{\theta}}}=\frac{1}{\binom{n}{x}}=\frac{1}{\binom{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}.$$

آشکار است که این عبارت به θ بستگی ندارد و بنابراین نشان داده‌ایم که $\hat{\Theta}=\frac{X}{n}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده برای θ است.

مثال ۳–۱۰. نشان دهید که آماره‌ی $Y=\frac{1}{6}(X_1+2X_2+3X_3)$ برآوردکننده‌ای بسنده برای پارامتر θی جامعه‌ی برنولی نیست.

حل. باید نشان دهیم که

$$f(x_1,x_2,x_3|y)=\frac{f(x_1,x_2,x_3,y)}{g(y)}$$

به‌ازای برخی مقادیر X_1، X_2، X_3 مستقل از θ نیست. بنابراین، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن $x_1=1$، $x_2=1$، و $x_3=0$. بنابراین $y=\frac{1}{6}(1+2\times1+3\times0)=\frac{1}{2}$ و

$$f(1,1,0|Y=\tfrac{1}{2})=\frac{P(X_1=1,X_2=1,X_3=0,Y=\frac{1}{2})}{P(Y=\frac{1}{2})}=\frac{f(1,1,0)}{f(1,1,0)+f(0,0,1)}$$

که در آن به‌ازای $x_i=0,1$، $i=1,2,3$،

$$f(x_1,x_2,x_3)=\theta^{x_1+x_2+x_3}(1-\theta)^{3-(x_1+x_2+x_3)}.$$

چون $f(1,1,0)=\theta^2(1-\theta)$ و $f(0,0,1)=\theta(1-\theta)^2$، نتیجه می‌شود که

$$f(1,1,0|Y=\frac{1}{2})=\frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)+\theta(1-\theta)^2}=\theta$$

و می‌توان ملاحظه کرد که این احتمال شرطی به θ بستگی دارد. بنابراین نشان داده‌ایم که $Y=\frac{1}{6}(X_1+2X_2+3X_3)$ یک برآوردکننده‌ی بسنده برای پارامتر θی جامعه‌ی برنولی نیست.

از آنجا که تحقیق در بسنده بودن یک برآوردکننده برای پارامتری مفروض از روی تعریف ۳-۳، کاری کسل‌کننده است، معمولاً آسان‌تر است که بررسی بسنده بودن آماره‌ای را برمبنای قضیه‌ی تجزیه به عوامل زیر قرار دهیم.

قضیه‌ی ۳-۴. آماره‌ی $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده برای پارامتر θ است اگر و تنها اگر تابع چگالی یا توزیع احتمال توأم نمونه‌ی تصادفی را بتوان تجزیه کرد به طوری که

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta).h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

که در آن $g(\hat{\theta}, \theta)$ تنها به θ و $\hat{\theta}$ بستگی دارد، و $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به θ بستگی ندارد.

در اینجا نحوه‌ی استفاده ازقضیه‌ی ۳-۴ را به کمک مثال زیر تشریح می‌کنیم.

مثال ۳-۱۱. نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده برای μ، میانگین جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم σ^2 است.

حل. با استفاده از این واقعیت که

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n . e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

و اینکه

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \overline{x}) - (\mu - \overline{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - \mu)^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}2(x_i - \overline{x})(\overline{x} - \mu)}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2\end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu) = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}\right\} \times \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}.e^{-\frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^2}\right\}$$

که در آن اوّلین عامل سمت راست تنها به برآورد $\bar{x}$، و به میانگین جامعه، μ، بستگی دارد، و دوّمین عامل شامل μ نیست. بنابراین، مطابق با قضیه‌ی ۳–۴، $\bar{X}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی μ، میانگین جامعه‌ی نرمالی با واریانس معلوم σ^2 است.

بر پایه‌ی تعریف ۳–۳ و قضیه‌ی ۳–۴، دو راه برای تحقیق اینکه آیا آماره‌ای مانند $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی پارامتر مفروضی است یا نه، عرضه کرده‌ایم. همان طور که قبلاً گفتیم معمولاً قضیه‌ی تجزیه به عوامل به راه حل آسان‌تری منجر می‌شود، ولی برای نشان دادن اینکه $\hat{\Theta}$ بسنده نیست، تقریباً همواره آسان‌تر است که مطابق تعریف ۳–۳، آن طور که در مثال ۳–۱۰ تشریح شده است، عمل کنیم.

این بخش را با ذکر خاصیتی بسیار مهمّ از برآوردکننده‌های بسنده به پایان می‌بریم. اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی θ باشد، آنگاه هر تابع تک مقداری مانند $y = u(\hat{\theta})$، که شامل θ نیست، نیز یک برآوردکننده‌ی بسنده از θ، و بنابراین از $u(\theta)$ است مشروط بر اینکه $Y = u(\hat{\Theta})$ را بتوان حل کرد تا معکوس تک مقداری $\hat{\theta} = w(y)$ از آن به‌دست آید. این نتیجه از قضیه‌ی ۳–۴ حاصل می‌شود زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = g[w(y), \theta].h(x_1, x_2, ..., x_n)$$

که در آن $g[w(y), \theta]$ تنها به y و θ بستگی دارد. اگر این نتیجه را در مورد مثال ۳–۹، که در آن نشان دادیم که $\hat{\Theta} = \frac{X}{n}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی پارامتر θی برنولی است به کاربریم، نتیجه می‌شود که برآوردکننده‌ی $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ نیز یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی میانگین دوجمله‌ای $\mu = n\theta$ است.

۳–۵ استواری

در سال‌های اخیر، توجه خاصی به یک خاصیت آماری به نام استواری مبذول شده است. این خاصیت، نشانگر میزان تأثیرات نامطلوبی است که با تخلف از فرض‌های مبنایی، متوجه روش‌های برآورد می‌شود. به عبارت دیگر، برآوردکننده‌ای را استوار می‌نامیم هرگاه توزیع نمونه‌گیری آن به‌طور جدی متأثر از تخلف از فرض‌ها نباشد،

چنین تخلف‌هایی اغلب ناشی از دور افتاده‌هایی است که براثر خطاهای مستقیم انجام شده، مثلاً در رؤیت ابزارهای سنجش یا ثبت داده‌ها روی می‌دهند، یا معلول اشتباه در روش‌های آزمایش است. این تخلف‌ها ممکن است به طبیعت جامعه‌های نمونه‌گیری شده یا پارامترهای آنها نیز وابسته باشند. مثلاً در برآورد عمر مفید متوسط برخی قطعات الکترونیک، ممکن است گمان کنیم که از یک جامعه‌ی نمایی نمونه می‌گیریم، در حالی که در واقع از یک جامعه‌ی وایبول است، یا هنگام برآورد درآمد متوسط گروه سنی معینی، ممکن است از روشی براساس این فرض استفاده کنیم که نمونه‌گیری از یک جامعه‌ی نرمال است در حالی که در واقع جامعه (توزیع درآمد) به شدت چاوله است. همچنین در برآورد تفاضل بین وزن‌های متوسط دو نوع قورباغه، تفاضل بین میانگین‌های IQ (بهره هوشی) دو گروه نژادی، و به‌طور کلی تفاضل $\mu_۱-\mu_۲$ بین میانگین‌های دو جامعه، ممکن است فرض کنیم که دو جامعه دارای واریانس‌های یکسان $\sigma^۲$اند، در حالی‌که در واقع $\sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$.

آشکار است که پاسخ اغلب پرسش‌های مربوط به استواری، دشوار است، در واقع بخش عمده‌ی بیان بند قبل تا حدی نادقیق است. علی‌رغم همه بحث‌ها، از «به‌طور جدی متأثر نشدن از» چه منظوری داریم، و وقتی صحبت از تخلف فرض‌های مبنایی می‌کنیم، باید آشکار باشد که برخی تخلف‌ها جدّی‌تر از سایرین‌اند. بنابراین وقتی پرسش‌های مربوط به نیرومندی مطرح می‌شوند، با هر نوع دشواری اعم از ریاضی یا غیر آن روبه‌رو می‌شویم، و بخش عمده‌ی آنها را تنها می‌توان به کمک شبیه‌سازی کامپیوتری حل و فصل کرد.

تمرین

۳–۲۳. از تعریف ۳–۲ استفاده کرده، نشان دهید که $Y_۱$، اوّلین آماره‌ی ترتیبی برآوردکننده‌ای سازگار برای پارامتر αی جامعه‌ای یکنواخت با $\beta=\alpha+۱$ است.

۳–۲۴. اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نمایی باشد، نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی سازگار پارامتر θ است.

۳–۲۵. اگر X_1، X_2، …، X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نمایی باشد نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده برای پارامتر θ است.

۳–۲۶. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که دارای توزیع‌های دوجمله‌ای با پارامترهای θ و n_1، و θ و n_2 هستند، نشان دهید که $\frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$ یک برآوردکننده‌ی بسنده θ است.

۳–۲۷. اگر X_1 و X_2 نمونه‌ای به اندازه‌ی $n=2$ از توزیع پواسون باشد، نشان دهید که میانگین نمونه یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی پارامتر λ است.

۳–۲۸. اگر X_1، X_2، و X_3 نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n=3$ از جامعه‌ی برنولی باشد، نشان دهید که $Y = X_1 + 2X_2 + X_3$ یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی θ نیست.

۳–۲۹. نشان دهید که برآوردکننده‌ی تمرین ۳–۵ یک برآوردکننده‌ی بسنده‌ی واریانس جامعه‌ای نرمال با میانگین معلوم μ است.

۵.۳ روش گشتاوری

به‌طوری‌که طی این فصل دیده‌ایم، برای پارامتری واحد از جامعه، ممکن است برآوردکننده‌های متعددی وجود داشته باشند. بنابراین مناسب خواهد بود که روش، یا روش‌هایی کلی، در اختیار داشته باشیم که برآوردکننده‌هایی عاید کنند که تا حد ممکن، خواص متعدد مطلوبی داشته باشند. در این بخش و در بخش ۳–۶ دو مورد از چنین روش‌هایی را ارائه می‌کنیم. این دو روش عبارت‌اند از: **روش گشتاورها**، که از لحاظ تاریخی یکی از قدیمی‌ترین روش‌هاست و روش **درستنمایی ماکسیمم**.

روش گشتاورها متشکل از برابرگرفتن چند گشتاور اوّلیه‌ی جامعه با گشتاورهای متناظر یک نمونه، و بدین ترتیب به‌دست آوردن هر تعدادی معادله‌ی مورد نیاز است که پارامترهای مجهول جامعه از حل آنها به‌دست آیند.

تعریف ۳–۴. kامین گشتاور نمونه‌ای مجموعه‌ای از مشاهده‌ها مانند x_1، x_2، …، x_n، میانگین توان‌های kام آنهاست و آن را با m'_k نشان می‌دهند، به‌طور نمادی

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k .$$

بنابراین، اگر جامعه‌ای دارای r پارامتر باشد، روش گشتاورها عبارت از حل دستگاه معادلات

$$m'_k = \mu'_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

برای r پارامتر جامعه است.

مثال ۳-۱۲. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از یک جامعه‌ی گاما، از روش گشتاورها استفاده کرده فرمول‌هایی برای برآورد پارامترهای α و β به‌دست آورید.

حل. (لازم است در اینجا تابع چگالی توزیع گاما مطرح شود و میانگین و واریانس آن مرور شود) دستگاه معادلاتی که باید حل کنیم عبارت است از

$$m'_1 = \mu'_1 \quad , \quad m'_2 = \mu'_2$$

چون طبق قضیه‌ی ۳-۶، $\mu'_1 = \alpha\beta$ و $\mu'_2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$، معادلات

$$m'_1 = \alpha\beta \quad , \quad m'_2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$$

را به‌دست می‌آوریم، و با حل این دو معادله برحسب α و β، فرمول‌های زیر برای برآورد دو پارامتر توزیع گاما به‌دست می‌آیند.

$$\hat{\alpha} = \frac{(m'_1)^2}{m'_2 - (m'_1)^2} \quad , \quad \hat{\beta} = \frac{m'_2 - (m'_1)^2}{m'_1}.$$

چون $m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$ و $m'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$، می‌توانیم برحسب مشاهدات اوّلیه، بنویسیم

$$\hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad , \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n\bar{x}}.$$

در مثال بالا، پارامترهای جامعه‌ی خاصی را برآورد کردیم. با این حال توجه به این نکته اهمیت دارد که وقتی پارامترهای مورد برآورد، گشتاورهای جامعه‌اند، روش گشتاورها را می‌توان بدون اطلاع از ماهیت یا دانستن شکل تابعی جامعه به‌کار برد.

۳-۶ روش درستنمایی ماکسیمم

فیشر، یکی از برجسته‌ترین آماردانان، روش کلی برآورد به نام روش درستنمایی ماکسیمم را مطرح ساخت. وی همچنین مزایای این روش را با اثبات این مطلب نشان داد که هرگاه برآوردکننده‌های بسنده موجود باشند، برآوردکننده‌های حاصل از این روش بسنده‌اند، و نیز اینکه این برآوردکننده‌ها، برآورد کننده‌هایی مجانباً نااریب با کمترین واریانس‌اند.

برای کمک به فهم اصلی که روش درستنمایی ماکسیمم بر آن مبتنی است فرض کنید چهار نامه به نشانی شخصی فرستاده شده، امّا پیش از تحویل نامه به گیرنده، یکی از آنها گم شده است. اگر، در بین سه پاکت دیگر، دو پاکت محتوی صورت‌حساب بانکی و دیگری محتوی یک دعوت‌نامه باشد، برآوردی خوب برای پارامتر k، تعداد کل صورت‌حساب‌هایی که با چهار نامه‌ی دریافتی ارسال شده‌اند، چیست؟ روشن است که این تعداد باید دو یا سه باشد، و با فرض اینکه شانس گم‌شدن هر نامه با سایر نامه‌ها برابر باشد، درمی‌یابیم احتمال داده‌ی مشاهده شده (که دو نامه از سه نامه‌ی باقی‌مانده صورت‌حساب بانکی‌اند) برای $k=۲$ عبارت است از

$$\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۱}}{\binom{۴}{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

و برای $k=۳$ عبارت است از

$$\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{\binom{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴}.$$

بنابر این اگر به‌عنوان برآورد خود از تعداد کل صورت‌حساب‌های بانکی مقداری را انتخاب کنیم که احتمال داده‌های مشاهده شده‌ی به‌دست آمده از سه نامه را ماکسیمم کند، مقدار $k=۳$ را به‌دست می‌آوریم. این برآورد را یک برآورد درستنمایی ماکسیمم، و روشی را که این برآورد از آن حاصل شده است، روش درستنمایی ماکسیمم می‌نامیم.

بنابراین، سیمای اصلی روش درستنمایی ماکسیمم آن است که مقادیر یک نمونه‌ی تصادفی را در نظر گرفته و سپس به‌عنوان برآورد خود از پارامترهای مجهول جامعه،

مقدارهایی را برگزینیم که برای آنها، احتمال یا چگالی احتمال به‌دست آوردن مقادیر نمونه‌ای حاصل شده، ماکسیمم شود. آنچه در زیر می‌آید، بحث را به حالت یک پارامتری محدود می‌کنیم، امّا همان طور که در مثال ۳–۱۶ خواهیم دید، ایده‌ی کلی در حالتی نیز که چندین پارامتر مجهول موجود باشند، قابل استفاده است. در حالت گسسته، اگر داده‌های مشاهده شده، مقادیر x_1، x_2، ...، x_n باشند، احتمال به‌دست آوردن آنها عبارت است از

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$$

که همان مقدار توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n در نقطه‌ی نمونه‌ای $X_1 = x_1$، $X_2 = x_2$، ...، $X_n = x_n$ است. چون مقادیر نمونه‌ای مشاهده شده‌اند، و بنابراین اعداد ثابتی هستند، $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$ را به‌عنوان مقدار تابعی از پارامتر θ تلقی می‌کنیم و آن را تابع درستنمایی می‌نامیم. در حالتی که نمونه‌ی تصادفی از یک جامعه‌ی پیوسته آمده باشد، تعریف مشابه قابل اعمال است ولی در این حالت $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$ مقدار چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n در $X_1 = x_1$، $X_2 = x_2$، ...، $X_n = x_n$ است.

تعریف ۳–۵. اگر x_1، x_2، ...، x_n مقادیر یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای با پارامتر θ باشند، تابع درستنمایی این نمونه برای مقادیر θ که در حوزه‌ی مفروضی قرار دارند عبارت است از

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta).$$

دراینجا $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$ مقدار توزیع احتمال توأم یا تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n در $X_1 = x_1$، $X_2 = x_2$، ...، $X_n = x_n$ است.

بنابراین، روش درستنمایی ماکسیمم عبارت از ماکسیمم کردن تابع درستنمایی نسبت به θ است و آن مقدار θ را که تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کند، برآورد درستنمایی ماکسیمم θ می‌نامیم.

مثال ۳-۱۳. با مفروض بودن x «موفقیت» در n آزمایش، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر θ را در توزیع دوجمله‌ای نظیر پیدا کنید.

حل. برای پیدا کردن مقداری از θ که

$$L(\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

را ماکسیمم می‌کند، بهتر است از این واقعیت استفاده کنیم که مقدار θ که $L(\theta)$ را ماکسیمم می‌کند، تابع

$$\ln L(\theta)=\ln\binom{n}{x}+x.\ln\theta+(n-x).\ln(1-\theta)$$

را نیز ماکسیمم می‌کند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=\frac{x}{\theta}-\frac{n-x}{1-\theta}$$

و با برابرگرفتن این مشتق با ۰ و حل آن نسبت به θ، درمی‌یابیم که تابع درستنمایی دارای ماکسیممی در $\theta=\frac{x}{n}$ است. این مقدار، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای است و $\hat{\Theta}=\frac{X}{n}$ را برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم نظیر می‌نامیم.

مثال ۳-۱۴. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقادیر یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای نمایی باشند، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتری θی جامعه را پیدا کنید.

حل. چون تابع درستنمایی به صورت

$$L(\theta)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^{n}.e^{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^{n}x_i)}$$

است، با مشتق‌گیری از $\ln L(\theta)$ نسبت به θ

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}.\sum_{i=1}^{n}x_i$$

به‌دست می‌آید. از برابر گرفتن این مشتق با صفر و حل آن نسبت به θ، برآورد درستنمایی ماکسیمم زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

بنابراین، برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم عبارت است از $\hat{\Theta} = \overline{X}$.

حال مثالی را نیز بررسی می‌کنیم که در آن نمی‌توان از روش‌های مقدماتی حسابان برای یافتن مقدار ماکسیمم تابع درستنمایی استفاده کرد.

مثال ۳-۱۵. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقادیر نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی یکنواخت پیوسته‌ای با $\alpha = 0$ باشند، برآوردکننده‌ی ماکسیمم درستنمایی را پیدا کنید.

حل. تابع درستنمایی به صورت

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \beta) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$

برای مقادیر βی بزرگتر یا برابر با بزرگترین مقدار xها و 0 در سایر جاهاست. چون مقدار این تابع درستنمایی با کاهش β، افزایش می‌یابد، باید β را هر قدر که ممکن باشد، کوچک بگیریم، و نتیجه می‌شود که برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم β همان Y_n، nامین آماره‌ی ترتیبی است.

از مقایسه نتیجه این مثال با نتیجه‌ی مثال ۳-۳، درمی‌یابیم که لزومی ندارد که برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم، نااریب باشند. برآوردکننده‌های مثال‌های ۳-۱۳ و ۳-۱۴ نااریب بودند.

همان‌طور که قبلاً خاطر نشان کرده‌ایم، روش درستنمایی ماکسیمم را می‌توان برای برآورد هم‌زمان چندین پارامتر جامعه‌ای مفروض نیز به‌کار برد. در این حالت باید مقادیر پارامترهایی را که تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کنند، پیدا کنیم.

مثال ۳-۱۶. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم توأم این دو پارامتر را پیدا کنید.

حل. چون تابع درستنمایی به صورت

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} n(x_i;\mu,\sigma)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n.e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

است، با گرفتن مشتق جزئی $\ln L(\mu,\sigma^2)$ نسبت به μ و σ^2 نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial[\ln L(\mu,\sigma^2)]}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

و

$$\frac{\partial[\ln L(\mu,\sigma^2)]}{\partial\sigma^2}=\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

از برابر گرفتن اوّلین مشتق جزئی با صفر و حل آن برحسب μ به‌دست می‌آوریم.

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

و با برابر گرفتن دوّمین مشتق جزئی با صفر و حل آن برحسب σ^2 و بعد از قراردادن $\mu=\bar{x}$، به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

لازم است توجه شود که ما ثابت نکرده‌ایم که $\hat{\sigma}$ یک برآورد درستنمایی ماکسیمم σ است، بلکه تنها ثابت کرده‌ایم که $\hat{\sigma}^2$ یک برآورد درستنمایی ماکسیمم σ^2 است. با این حال، می‌توان نشان داد که برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم دارای این **خاصیت ناوردایی** هستند که اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم θ و تابع مفروض $g(\theta)$ پیوسته باشد، آنگاه $g(\hat{\Theta})$ نیز یک برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم $g(\theta)$ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

نیز یک برآورد درستنمایی ماکسیمم σ است، که از s متفاوت است زیرا در آن، Σ را به‌جای $n-1$ بر n تقسیم می‌کنیم.

تمرین

۳-۳۰. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، از روش گشتاورها استفاده کرده، برآوردکننده‌هایی برای μ و σ^2 پیدا کنید.

۳-۳۱. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نمایی، از روش گشتاورها استفاده کرده برآوردکننده‌ای برای پارامتر θ به‌دست آورید.

۳-۳۲. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = 0$، برآوردکننده‌ای برای β به کمک روش گشتاورها به‌دست آورید.

۳-۳۳. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی پواسون، از روش گشتاورها استفاده کرده برآوردکننده‌ای برای پارامتر λ به‌دست آورید.

۳-۳۴. اگر X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای به صورت

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، برآوردکننده‌ای برای θ به روش گشتاورها به‌دست آورید.

۳-۳۵. N متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای θ و $n = 3$ را در نظر بگیرید. اگر n_0 تا از آنها مقادیر ۰، n_1 تا مقدار ۱، n_2 تا مقدار **۲**، و n_3 تا مقدار ۳ را اختیار کنند، از روش گشتاورها استفاده کرده فرمولی برای برآورد کردن θ به‌دست آورید.

۳-۳۶. از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده تمرین ۳-۳۳ را دوباره حل کنید.

۳-۳۷. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با میانگین معلوم μ، برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم σ را پیدا کنید.

۳-۳۸. اگر V_1، V_2، ...، V_n و W_1، W_2، ...، W_n نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه‌های نرمال با میانگین‌های $\mu_1 = \alpha + \beta$ و $\mu_2 = \alpha - \beta$ و واریانس مشترک $\sigma^2 = 1$ باشند، برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم α و β را پیدا کنید.

۳-۳۹. اگر V_1، V_2، ...، V_n و W_1، W_2، ...، W_n نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس مشترک σ^2 باشند، برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم μ_1، μ_2 و σ^2 را پیدا کنید.

۳-۴۰. فرض کنید که $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی یکنواخت

$$f(x;\theta)=\begin{cases} ۱ & \theta-\frac{۱}{۲}<x<\theta+\frac{۱}{۲} \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد. نشان دهید که $Y_۱$ و Y_n، اوّلین و nامین آماره‌ی ترتیبی باشند، هر برآوردکننده‌ی θ به‌طوری که

$$Y_n-\frac{۱}{۲}\le\hat{\theta}\le Y_۱+\frac{۱}{۲}$$

می‌تواند به عنوان یک برآوردکننده‌ی درستنمایی θ به‌کار رود. این نتیجه، نشان می‌دهد که لزومی ندارد برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم یکتا باشند.

۳-۴۱. با رجوع به تمرین ۳-۴۰، بررسی کنید که آیا برآوردکننده‌های زیر برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم θ هستند؟

الف) $\frac{۱}{۲}(Y_۱+Y_n)$،

ب) $\frac{۱}{۳}(Y_۱+۲Y_۲)$.

۳-۴۲. بهره‌ی هوشی $[IQ]$، ۱۰ نوجوان وابسته به گروه نژادی خاصی عبارت‌اند از

۹۸، ۱۱۴، ۱۰۵، ۱۰۱، ۱۲۳، ۱۱۷، ۱۰۶، ۹۲، ۱۱۰، و ۱۰۸

درحالی که بهره‌ی هوشی شش نوجوان وابسته به یک گروه نژادی دیگر عبارت‌اند از

۱۲۲، ۱۰۵، ۹۹، ۱۲۶، ۱۱۴، و ۱۰۸

با فرض اینکه بتوان این داده‌ها را نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه‌های نرمال با میانگین‌های $\mu_۱$ و $\mu_۲$ و واریانس مشترک $\sigma^۲$ تلقی کرد، این پارامترها را به کمک برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم به‌دست آمده در تمرین ۳-۳۹ برآورد کنید.

فصل چهارم

برآورد: کاربردها

۴-۱ مقدمه

در فصل سوّم به برآورد نقطه‌ای پرداختیم. گرچه برآورد نقطه‌ای طریقه‌ی متداول توصیف برآوردهاست امّا درباره‌ی آن، جا برای پرسش‌های زیادی باقی است. مثلاً، برآورد نقطه‌ای به ما نمی‌گوید که برآورد بر چه مقداری از اطلاعات مبتنی است و چیزی درباره‌ی اندازه‌ی خطای ممکن بیان نمی‌کند. بنابراین می‌توانیم یک برآورد $\hat{\theta}$ پارامتر θ را با افزایش اندازه‌ی نمونه و مقدار $\mathrm{var}(\hat{\Theta})$، یا اطلاعات دیگری درباره‌ی توزیع نمونه‌گیری $\hat{\Theta}$ کامل کنیم. به‌طوری که خواهیم دید، این کار ما را قادر می‌سازد که اندازه‌ی ممکن خطا را ارزیابی کنیم.

متقابلاً، می‌توانیم از برآورد فاصله‌ای استفاده کنیم. یک برآورد فاصله‌ای θ، فاصله‌ای (بازه‌ای) به شکل $\hat{\theta}_۱ < \theta < \hat{\theta}_۲$ است که در آن $\hat{\theta}_۱$ و $\hat{\theta}_۲$ مقادیر متغیرهای تصادفی مناسبی مانند $\hat{\Theta}_۱$ و $\hat{\Theta}_۲$اند. منظور از «مناسب» آن است که به‌ازای احتمال مشخصی مانند $۱-\alpha$،

$$P(\hat{\Theta}_۱ < \theta < \hat{\Theta}_۲) = ۱-\alpha.$$

برای مقدار مشخص $۱-\alpha$، $\hat{\theta}_۱ < \theta < \hat{\theta}_۲$ را یک فاصله‌ی اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای θ می‌نامیم. همچنین $۱-\alpha$، درجه‌ی اطمینان، و دو سر فاصله، $\hat{\theta}_۱$ و $\hat{\theta}_۲$، کران‌های اطمینان پایینی و بالایی نامیده می‌شوند. مثلاً، برای $\alpha = ۰/۰۵$، درجه‌ی اطمینان $۰/۹۵$ است و یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% به‌دست می‌آوریم.

درک این نکته ضروری است که، نظیر برآوردهای نقطه‌ای، فاصله‌های اطمینان یکتا نیستند. این مطلب در تمرین ۴-۲ و نیز در بخش سوم همین فصل تشریح شده است که در آنجا، بر مبنای نمونه‌ی تصادفی واحدی، نشان می‌دهیم که فاصله‌های اطمینان متعددی برای μ موجود است که همه‌ی آنها درجه‌ی اطمینان یکسانی دارند. بنابراین مانند مورد برآورد نقطه‌ای، روش‌های به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان، باید بنابر خواص آماری مختلف آنها داوری شوند. به‌عنوان مثال، یک خاصیت مطلوب آن است که طول فاصله‌ی اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ تا سرحد امکان کوچک گرفته شود؛ خاصیت مطلوب دیگر آن است که امید این طول، $E(\hat{\Theta}_۲-\hat{\Theta}_۱)$، تا سرحد امکان کوچک باشد.

۴-۲ برآورد میانگین‌ها

برای تشریح این مطلب که چگونه می‌توان اندازه‌ی خطاها را در برآورد نقطه‌ای ارزیابی کرد، فرض کنید که بخواهیم از میانگین یک نمونه‌ی تصادفی برای برآورد میانگین جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ استفاده کنیم. توزیع نمونه‌گیری $\overline{X}$ برای نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$، توزیع نرمال با $\mu_{\overline{X}}=\mu$ و واریانس $\sigma^۲_{\overline{X}}=\frac{\sigma^۲}{n}$ است. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$P(|Z|<z_{\alpha/۲})=۱-\alpha$$

که در آن

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

و $z_{\alpha/۲}$ به‌گونه‌ای است که انتگرال از $z_{\alpha/۲}$ تا ∞ برابر $\alpha/۲$ است. نتیجه می‌شود که

$$P\left(|\overline{X}-\mu|<z_{\alpha/۲}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=۱-\alpha.$$

یا به عبارت دیگر، اینکه

قضیه‌ی ۴-۱. اگر از $\overline{X}$، میانگین نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ به‌عنوان یک برآوردکننده‌ی میانگین جامعه استفاده شود، احتمال اینکه قدرمطلق مقدارخطا کمتر از $z_{\alpha/۲}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ باشد، برابر $۱-\alpha$ است.

مثال ۴-۱. یک تیم از کارشناسان کارآیی کارگران، می‌خواهند از میانگین نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n=۱۵۰$ برای برآورد کردن مقدار متوسط استعداد قابلیت کارگران مونتاژ کار در یک بخش بزرگ صنعتی (به کمک یک امتحان استاندارد شده معین اندازه گرفته می‌شود) استفاده کنند. اگر، برمبنای تجربه، کارشناسان کارآیی فرض کنند که برای چنین داده‌ای $\sigma=۶/۲$، درباره‌ی حداکثر خطای برآورد، با احتمال ۰/۹۹، چه حکمی می‌توانند بدهند؟

حل. با قرار دادن $n=۱۵۰$، $\sigma=۶/۲$، و $z_{۰/۰۰۵}=۲/۵۷۵$ در عبارت مربوط به حداکثر خطا، مقدار

$$۲/۵۷۵.\frac{۶/۲}{\sqrt{۱۵۰}}=۱/۳۰$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، کارشناسان کارآیی می‌توانند با احتمال ۰/۹۹ حکم کنند که خطای آنها کمتر از ۱/۳۰ خواهد بود.

حال فرض کنید که این کارشناسان کارآیی، عملاً به گردآوری داده‌ها بپردازند و مقدار $\overline{x}=۶۹/۵$ را به‌دست آورند. آیا هنوز هم می‌توانند با احتمال ۰/۹۹ حکم کنند که خطای برآورد آنها با $\overline{x}=۶۹/۵$، کمتر از ۱/۳۰ است؟ در واقع اختلاف $\overline{x}=۶۹/۵$ از میانگین واقعی(جامعه) یا از ۱/۳۰ کمتر و یا بیشتر از آن است، و آنها هیچ راهی برای حصول اطمینان از اینکه کدام یک از آنها درست است، ندارند. البته آنها قادر به این کارند امّا باید توجه کرد که احتمال ۰/۹۹ (برای درستی حکمی که می‌دهند) شامل حال روشی است که برای به‌دست آوردن برآوردشان و محاسبه‌ی حداکثر خطا (جمع‌آوری داده‌ها، تعیین مقدار $\overline{x}$، و استفاده از فرمول قضیه‌ی ۴-۱) به‌کار برده‌اند و مستقیماً به پارامتری که درصد برآورد آن‌اند، مرتبط نمی‌شود.

برای روشن کردن این وجه افتراق، مرسوم شده است که در اینجا به‌جای کلمه‌ی «احتمال» از کلمه‌ی «اطمینان» استفاده کنند. درحالت کلی، ما از حکم‌های احتمالاتی درباره‌ی مقادیر آتی متغیرهای تصادفی (مثلاً، خطای بالقوه‌ی یک برآورد) و حکم‌های اطمینان به محض حصول داده‌ها، استفاده می‌کنیم. براین اساس، باید در مثال بالا می‌گفتیم که کارشناسان کارآیی می‌توانند ۰/۹۹ مطمئن باشند که خطای برآورد آنها، $\bar{x}=۶۹/۵$، کمتر از ۱/۳۰ است.

برای ساختن یک فرمول فاصله‌ی اطمینان برای برآورد میانگین جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$، به احتمال

$$P\left(|\bar{X}-\mu|<z_{\alpha/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=۱-\alpha$$

رجوع می‌کنیم که اینک آن را به‌صورت

$$P\left(\bar{X}-z_{\alpha/۲}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{\alpha/۲}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=۱-\alpha$$

می‌نویسیم. نتیجه می‌شود که

قضیه‌ی ۴-۲. اگر $\bar{x}$ مقدار میانگین یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ باشد، آنگاه

$$\bar{x}-z_{\alpha/۲}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/۲}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای میانگین جامعه است.

مثال ۴-۲. اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n=۲۰$ از یک جامعه‌ی نرمال با واریانس $\sigma^۲=۲۲۵$ دارای میانگین $\bar{x}=۶۴/۳$ باشد، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای میانگین، μ، بسازید.

حل. با قراردادن $n=۲۰$، $\bar{x}=۶۴/۳$، $\sigma=۱۵$، و $z_{۰/۰۲۵}=۱/۹۶$ در فرمول فاصله‌ی اطمینان قضیه‌ی ۴-۲، عبارت

$$۶۴/۳-۱/۹۶\frac{۱۵}{\sqrt{۲۰}}<\mu<۶۴/۳+۱/۹۶\frac{۱۵}{\sqrt{۲۰}}$$

را به‌دست می‌آوریم که به‌صورت

$$۵۷/۷<\mu<۷۰/۹$$

خلاصه می‌شود.

فرمول‌های فاصله‌ی اطمینان برای پارامترهای مجهول یکتا نیستند. این واقعیت را می‌توان به‌آسانی با تغییر دادن فرمول فاصله‌ی اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ قضیه‌ی ۴-۲ به صورت

$$\bar{x}-z_{۲\alpha/۳}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/۳}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یا به‌صورت فاصله‌ی اطمینان یک‌طرفه‌ی $(۱-\alpha)۱۰۰\%$

$$\mu<\bar{x}+z_{\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ملاحظه کرد. همچنین می‌توانستیم مبنای فاصله‌ی اطمینان را به‌جای میانگین نمونه‌ای، میانه‌ی نمونه‌ای، یا مثلاً، میان برد قراردهیم.

به‌بیان صریح، قضیه‌های ۴-۱ و ۴-۲ مستلزم آن‌اند که نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ در اختیار داشته باشیم. امّا، با توجه به قضیه‌ی حدّ مرکزی، می‌توان این نتایج را برای نمونه‌هایی تصادفی از جامعه‌های غیرنرمال نیز به‌کار برد مشروط بر اینکه n به حد کافی بزرگ باشد؛ یعنی $n\geq ۳۰$. در این حالت می‌توانیم به‌جای σ نیز مقدار انحراف معیار نمونه‌ای را قراردهیم.

مثال ۴-۳. یک طراح صنعتی می‌خواهد مقدار متوسط زمانی را که فرد بالغ برای سوارکردن یک اسباب بازی «جورچین» صرف می‌کند، تعیین کند. از داده‌های زیر (برحسب دقیقه)، که یک نمونه‌ی تصادفی است، استفاده کرده یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای میانگین جامعه‌ای که نمونه از آن استخراج شده است، بسازید.

۱۵	۲۱	۲۸	۱۶	۲۲	۲۹	۲۱	۱۷	۱۹	۱۸	۱۳	۱۷
۲۲	۲۵	۱۸	۳۲	۲۱	۱۷	۱۷	۸	۲۰	۲۴	۲۳	۲۶
۱۱	۲۸	۲۴	۱۲	۲۲	۳۰	۱۴	۱۹	۲۲	۲۰	۱۰	۱۶

حل. با قرار دادن $n=۳۶$، $\bar{x}=۱۹/۹۲$، $z_{۰/۰۲۵}=۱/۹۶$، و $s=۵/۷۳$ به‌جای σ در فرمول فاصله‌ی اطمینان قضیه‌ی ۴-۲، عبارت

$$۱۹/۹۲-۱/۹۶\frac{۵/۷۳}{\sqrt{۳۶}}<\mu<۱۹/۹۲+۱/۹۶\frac{۵/۷۳}{\sqrt{۳۶}}$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین حدود فاصله‌های اطمینان عبارت از ۱۸/۰۵ و ۲۱/۷۹ دقیقه است.

وقتی با نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال سروکار داریم، $n<۳۰$، و σ مجهول است، قضیه‌های ۴-۱ و ۴-۲ را نمی‌توان به‌کار برد. در این حالت، از این حقیقت استفاده می‌کنیم که

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

یک متغیر تصادفی دارای توزیع تی با $n-۱$ درجه‌ی آزادی است. با قراردادن $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ به‌جای T در

$$P(-t_{\alpha/۲,n-۱}<T<t_{\alpha/۲,n-۱})=۱-\alpha$$

که درآن $t_{\alpha/۲,n-۱}$ در بخش ۳-۴ تعریف شده است، فاصله‌ی اطمینان مطرح شده در قضیه ۴-۳ را برای μ به‌دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۴-۳. اگر $\bar{x}$ و s مقادیر میانگین و انحراف معیار یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ باشند، آنگاه

$$\bar{x}-t_{\alpha/۲,n-۱}\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{\alpha/۲,n-۱}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای میانگین جامعه است.

چون این فرمول فاصله‌ی اطمینان، وقتی n کوچکتر از ۳۰ است زیاد به‌کار می‌رود، آن را فاصله‌ی اطمینان کوچک نمونه‌ای μ می‌نامیم.

مثال ۴-۴. یک سازنده‌ی رنگ می‌خواهد متوسط زمان خشک شدن رنگ جدید دیوارهای داخلی ساختمان را معین کند. اگر برای ۱۲ سطح آزمایشی با مساحت‌های برابر، وی میانگین زمان خشک شدن را مساوی ۶۶/۳ دقیقه و انحراف معیار را مساوی ۸/۴ دقیقه به‌دست آورد، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای میانگین واقعی μ به‌دست آورید.

حل. با جایگذاری $\bar{x} = ۶۶/۳$، $s = ۸/۴$، و $t_{۰/۰۲۵,۱۱} = ۲/۲۰۱$ (از جدول ۵)، فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای μ به‌صورت

$$۶۶/۳ - ۲/۲۰۱\frac{۸/۴}{\sqrt{۱۲}} < \mu < ۶۶/۳ + ۲/۲۰۱\frac{۸/۴}{\sqrt{۱۲}}$$

یا صرفاً

$$۶۱/۰ < \mu < ۷۱/۶$$

در می‌آید. این بدان معنی است که می‌توانیم با اطمینان ۹۵% اظهار کنیم که فاصله‌ی از ۶۱/۰ دقیقه تا ۷۱/۶ دقیقه، میانگین واقعی زمان خشک شدن رنگ را دربردارد.

روشی که مطابق آن فاصله‌های اطمینان را در این بخش ساختیم، اساساً مشتمل بر پیدا کردن متغیر تصادفی مناسبی است که مقادیر آن به کمک داده‌های نمونه‌ای و نیز پارامترهای جامعه معین می‌شوند، گرچه توزیع آن متضمن پارامتری نیست که درصد برآورد آن هستیم. مثلاً، وقتی از متغیر تصادفی

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

استفاده کردیم که مقادیر آن بدون دانستن μ قابل محاسبه نیست ولی توزیع آن برای نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌های نرمال، توزیع نرمال استاندارد است و متضمن μ نیست، به‌همین نحو عمل کردیم. این روش به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان، که **روش محوری** نامیده می‌شود، به‌گونه‌ای گسترده مورد استفاده است، ولی روش‌های کلی‌تری موجودند که یکی از آنها در کتاب مود، گری بیل، و بوز که در بین مراجع انتهای کتاب است، مورد بحث قرارگرفته‌اند.

۴-۳ برآورد تفاضل بین میانگین‌ها

با استفاده از تمرین‌های ۳-۲ و ۳-۳ درمی‌یابیم که برای نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه‌های نرمال

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است. با قرار دادن این عبارت به‌جای Z در

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

از روش محوری، فاصله‌ی اطمینان زیر برای $\mu_1 - \mu_2$ به‌دست می‌آید.

قضیه‌ی ۴-۴. اگر $\overline{x}_1$ و $\overline{x}_2$ مقادیر میانگین‌های متغیرهای تصادفی مستقل به اندازه‌ی n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با واریانس‌های معلوم σ_1^2 و σ_2^2 باشند، آنگاه

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای تفاضل بین دو میانگین جامعه است.

می‌توان به‌کمک قضیه‌ی حد مرکزی، این نتیجه را برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های غیرنرمال با واریانس‌های معلوم σ_1^2 و σ_2^2 نیز به‌کار برد، مشروط بر اینکه n_1 و n_2 به‌قدر کافی بزرگ باشند، یعنی وقتی که $n_1, n_2 \geq 30$ هستند.

مثال ۴-۵. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۴% برای تفاضل واقعی بین طول عمرهای متوسط دو نوع لامپ روشنایی بسازید، با این فرض که نمونه‌ای تصادفی از ۴۰ لامپ روشنایی از یک نوع به‌طور متوسط ۴۱۸ ساعت و ۵۰ لامپ از نوع دوّم به‌طور متوسط ۴۰۲ ساعت در استفاده‌ی مستمر دوام آورده‌اند. می‌دانیم که انحراف معیارهای جامعه‌ها $\sigma_1 = 26$ و $\sigma_2 = 22$ هستند.

حل. برای $\alpha = 0/06$، از جدول ۳ مقدار $z_{0/03} = 1/88$ را پیدا می‌کنیم. بنابراین، فاصله‌ی اطمینان ۹۴% برای $\mu_1 - \mu_2$ عبارت از

$$(۴۱۸-۴۰۲)-۱/۸۸\sqrt{\frac{۲۶^۲}{۴۰}+\frac{۲۲^۲}{۵۰}}<\mu_۱-\mu_۲$$
$$<(۴۱۸-۴۰۲)+۱/۸۸\sqrt{\frac{۲۶^۲}{۴۰}+\frac{۲۲^۲}{۵۰}}$$

که به نامساوی‌های زیر تبدیل می‌شود

$$۶/۳<\mu_۱-\mu_۲<۲۵/۷.$$

بنابراین ۹۴% مطمئنم که بازه‌ی ۶/۳ تا ۲۵/۷ شامل تفاضل واقعی بین طول عمرهای متوسط دو نوع لامپ روشنایی است. از این واقعیت که هر دو حدود اطمینان مثبت‌اند، چنین برمی‌آید که به طور متوسط لامپ نوع اوّل بر لامپ نوع دوّم برتری دارد.

در ساختن یک فاصله‌ی اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای تفاضل دو میانگین موقعی که $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نامعلوم باشند ولی $n_۱,n_۲\geq ۳۰$، به‌جای $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ مقادیر انحراف معیارهای نمونه‌ای $s_۱$ و $s_۲$ را قرار می‌دهیم و مانند قبل عمل می‌کنیم. روش برآورد تفاضل بین دو میانگین موقعی که $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نامعلوم و اندازه‌های نمونه کوچک باشند، روش سر راستی نیست مگر اینکه انحراف معیارهای نامعلوم دو جامعه‌ی نرمال برابر باشند. اگر $\sigma_۱=\sigma_۲=\sigma$، آنگاه

$$Z=\frac{(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲)-(\mu_۱-\mu_۲)}{\sigma\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}}$$

متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است و $\sigma^۲$ را می‌توان با ادغام مربع انحرافات از میانگین‌های دو نمونه برآورد کرد. نااریبی $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ برای $\sigma^۲$ موجب می‌شود که برآوردکننده‌ی ادغام شده‌ی

$$S_p^۲=\frac{(n_۱-۱)S_۱^۲+(n_۲-۱)S_۲^۲}{n_۱+n_۲-۲}$$

یک برآوردکننده‌ی نااریب $\sigma^۲$ است. حال، بنابر قضیه‌های ۳–۹ و ۳–۱۱، متغیرهای تصادفی مستقل

$$\frac{(n_۱-۱)S_۱^۲}{\sigma^۲} \quad \text{و} \quad \frac{(n_۲-۱)S_۲^۲}{\sigma^۲}$$

دارای توزیع‌های خی‌دو با n_1-1 و n_2-1 درجه‌ی آزادی هستند، و مجموع آنها

$$Y=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیع خی‌دو با n_1+n_2-2 درجه‌ی آزادی است. چون می‌توان نشان داد که متغیرهای تصادفی Y و Z بالا مستقل‌اند، از قضیه‌ی ۳–۱۲، نتیجه می‌شود که

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n_1+n_2-2}}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

دارای توزیع t با n_1+n_2-2 درجه‌ی آزادی است. با قرار دادن این عبارت به‌جای T در

$$P(-t_{\alpha/2,n-1}<T<t_{\alpha/2,n-1})=1-\alpha$$

به فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$ زیر برای $\mu_1-\mu_2$ می‌رسیم.

قضیه‌ی ۴–۵. اگر $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$، و s_1 و s_2 مقادیر میانگین‌ها و انحراف معیارهای نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با واریانس‌های نامعلوم ولی برابر باشند، آنگاه

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2$$
$$<(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای تفاضل بین دو میانگین جامعه‌هاست.

چون این فرمول فاصله‌ی اطمینان، عمدتاً زمانی به‌کار می‌رود که n_1 یا n_2 یا هردو، کوچک، و کمتر از ۳۰ باشند، آن را یک فاصله‌ی اطمینان کوچک نمونه‌ای برای $\mu_1-\mu_2$ می‌نامیم.

مثال ۴–۶. مطالعه‌ای برای مقایسه‌ی محتوای نیکوتین دو نوع سیگار به عمل آمده است. متوسط محتوای نیکوتین ۱۰ سیگار نوع (الف) ۳/۱ میلی‌گرم با انحراف معیار ۰/۵

میلی‌گرم بوده است، درحالی که ۸ سیگار نوع (ب) دارای محتوای نیکوتین متوسط ۲/۷ میلی‌گرم با انحراف معیار ۰/۷ میلی‌گرم بوده‌اند. با فرض اینکه دو مجموعه‌ی داده‌ها نمونه‌هایی تصادفی از جامعه‌های نرمال با واریانس‌های برابر باشند، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای تفاضل واقعی محتوای نیکوتین متوسط دو نوع سیگار بسازید.

حل. ابتدا $n_۱ = ۱۰$، $n_۲ = ۱۰$، $s_۱ = ۰/۵$، و $s_۲ = ۰/۷$ را در فرمول s_p قرار می‌دهیم، و مقدار

$$s_p = \sqrt{\frac{۹(۰/۲۵) + ۷(۰/۴۷)}{۱۶}} = ۰/۵۹۶$$

را به‌دست می‌آوریم. سپس با قرار دادن این مقدار همراه با $n_۱ = ۱۰$، $n_۲ = ۸$، $\bar{x}_۱ = ۳/۱$، $\bar{x}_۲ = ۲/۷$، و $t_{۰/۰۲۵,۱۶} = ۲/۲۰$ (از جدول ۵) در فرمول فاصله‌ی اطمینان قضیه‌ی ۴–۵، فاصله‌ی اطمینان ۹۵% مطلوب را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$(۳/۱ - ۲/۷) - ۲/۱۲۰(۰/۵۹۶)\sqrt{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۸}} < \mu_۱ - \mu_۲$$
$$< (۳/۱ - ۲/۷) + ۲/۱۲۰(۰/۵۹۶)\sqrt{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۸}}$$

که به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$-۰/۲۰ < \mu_۱ - \mu_۲ < ۱/۰۰.$$

بنابراین، حدود اطمینان عبارت‌اند از: ۰/۲۰− و ۱/۰۰ میلی‌گرم، امّا توجه کنید که چون این فاصله شامل $\mu_۱ - \mu_۲ = ۰$ است، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که تفاوتی واقعی بین متوسط محتویات نیکوتین دو نوع سیگار وجود داشت.

تمرین

۴–۱. اگر x مقداری از یک متغیر با توزیع نمایی باشد، k را طوری پیدا کنید که بازه‌ی از ۰ تا kx، یک فاصله اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای پارامتر θ باشد.

۴–۲. اگر $x_۱$ و $x_۲$ مقادیر یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی ۲ از جامعه‌ای دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = \theta$ باشد، k را طوری پیدا کنید که

$$۰ < \theta < k(x_۱ + x_۲)$$

یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای پارامتر θ باشد.

۴–۳. نشان دهید که فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

کوتاه‌تراز فاصله‌ی اطمینان متناظر زیر است.

$$\bar{x} - z_{2\alpha/3}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{2\alpha/3}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

۴–۴. اگر $\bar{x}$ به‌عنوان برآورد μ مورد استفاده قرارگیرد، نشان دهید که می‌توانیم $(1-\alpha)100\%$ مطمئن باشیم که $|\bar{x}-\mu|$، قدر مطلق خطای ما، کمتر از مقدار مشخص e خواهد بود هرگاه اندازه نمونه

$$n\left[z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{e}\right]^2$$

باشد.

۴–۵. نشان دهید که S_p^2 یک برآوردکننده‌ی نااریب σ^2 است و واریانس آن را تحت شرایط قضیه ۴–۵ پیدا کنید.

۴–۶. درستی نتیجه در بخش ۴–۳ را که T را برحسب $\bar{X}_1$، $\bar{X}_2$، و S_p بیان می‌کند، تحقیق کنید.

۴–۷. یک مسئول آموزش و پروش منطقه‌ای میل دارد از میانگین نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی ۱۵۰ دانش‌آموز کلاس ششم از یکی از مناطق بزرگ آموزشی استفاده کرده میانگین نمره‌ای که کلیه‌ی دانش‌آموزان کلاس ششم این منطقه در صورت شرکت در یک امتحان قوه‌ی حساب کسب خواهند کرد، برآورد نماید. اگر، بر مبنای تجربه، این مقام آموزشی بداند که برای چنین داده‌هایی $\sigma = 9/4$، درباره خداکثر خطا با احتمال ۰/۹۵ چه حکمی می‌تواند اظهار کند؟

۴–۸. با رجوع به تمرین۴–۷، فرض کنید که مسئول منطقه، نمونه خود را استخراج و $\bar{x} = 61/8$ را به‌دست می‌آورد. از کلیه‌ی اطلاعات استفاده کرده یک فاصله اطمینان ۹۹% برای میانگین نمره‌ی همه‌ی دانش‌آموزان کلاس ششم منطقه بسازید.

۴–۹. یک پژوهشگر امور پزشکی می‌خواهد از میان یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $n = 120$ استفاده کرده میانگین فشار خون زنان پنجاه ساله را به‌دست آورد. اگر، برمبنای

تجارب بداند که $\sigma = ۱۰/۵$ (برحسب میلیمترجیوه) است، درباره‌ی حداکثر خطا با احتمال ۰/۹۹ چه حکمی می‌تواند بدهد؟

۴-۱۰. با رجوع به تمرین قبل، فرض کنید که پژوهشگر، نمونه‌ای استخراج می‌کند و مقدار $\bar{x} = ۱۴۱/۸$ را برحسب میلی‌متر جیوه به‌دست می‌آورد. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۸% برای میانگین فشار خون زنان پنجاه ساله به‌دست آورید.

۴-۱۱. مشاهده از رشد سالانه نوعی کاکتوس نشان می‌دهد که ۶۴تا از آنها، که به تصادف از یک ناحیه کویری انتخاب شده‌اند، به‌طور متوسط ۵۲/۸۰ میلی‌متر با انحراف استاندارد ۴/۵ میلی‌متر رشد داشته است، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای متوسط واقعی رشد سالانه‌ی نوعی کاکتوس مفروض به‌دست آورید.

۴-۱۲. در برآورد متوسط زمان لازم برای انجام کار تعمیر خاصی، یک سازنده خودرو مدت زمان انجام این کار را به وسیله‌ی ۴۰ مکانیک، به عنوان نمونه‌ای تصادفی اندازه‌گیری کرده است. آنها این کار را به طور متوسط در ۲۴/۰۵ دقیقاً با انحراف معیار ۲/۶۸ دقیقه انجام داده‌اند. سازنده خودرو با اطمینان ۹۵% درباره‌ی حداکثر خطا چه می‌تواند بگوید در صورتی که از $\bar{x} = ۲۴/۰۵$ دقیقه به‌عنوان برآوردی برای میانگین واقعی زمان لازم انجام تعمیر مورد اشاره استفاده نمود.

۴-۱۳. در مطالعه‌ای از عادت‌های بینندگان تلویزیون، مطلوب آن است که متوسط تعداد ساعت‌هایی را که در هفته صرف تماشای تلویزیون کرده‌اند، برآورد شود. اگر فرض $\sigma = ۳/۲$ برحسب ساعت را بتوان موجه دانست، نمونه‌ای به چه بزرگی لازم است تا امکان اظهار این حکم را با اطمینان ۹۵% موجود باشد که میانگین نمونه‌ای کمتر از ۲۰ دقیقه، از واقعیت دور است.

۴-۱۴. طول جمجمه‌های ۱۰ اسکلت فسیل شده‌ی نوعی از پرندگان که نسل آنها نابود شده است، دارای میانگین ۵/۶۸ سانتی‌متر وانحراف معیار ۰/۲۹ سانتی‌متر است. با فرض اینکه چنین اندازه‌هایی به طور نرمال توزیع شده‌اند، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای طول میانگین جمجمه‌های این نوع پرندگان پیدا کنید.

۴-۱۵. نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه $n_1 = ۱۶$ و $n_2 = ۲۵$ از جامعه‌های نرمال با $\sigma_1 = ۴/۸$ و $\sigma_2 = ۳/۵$ دارای میانگین‌های $\bar{x}_1 = ۱۸/۲$ و $\bar{x}_2 = ۲۳/۴$ بوده‌اند، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۰% برای $\mu_1 - \mu_2$ پیدا کنید.

۴-۱۶. مطالعه‌ای از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می‌دهد که زمان تعمیر ۶۱بار از کار افتادگی‌های دستگاه اوّل به‌طور متوسط ۸۰/۷ با انحراف معیار ۱۹/۴ دقیقه بوده و زمان تعمیر ۶۱بار از کار افتادگی‌های دستگاه دوّم به‌طور متوسط ۸۸/۱ دقیقه با انحراف معیار ۱۸/۸ دقیقه بوده است. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای تفاضل بین میانگین‌های واقعی زمان‌های تعمیر از کارافتادگی‌های دو نوع دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

۴-۱۷. دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به تصادف انتخاب شده‌اند، دارای میانگین ارتفاع ۱۳/۸ پا با انحراف معیار ۱/۲ پا و پانزده درخت نوع دیگری که به تصادف انتخاب شده‌اند، دارای میانگین ارتفاع ۱۲/۹ پا و انحراف معیار ۱/۵ پاست. با فرض اینکه نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال با واریانس‌های برابر انتخاب شده اند، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای تفاضل بین میانگین‌های واقعی ارتفاع دو نوع درخت مرکبات پیدا کنید.

۴-۱۸. در زیر ظرفیت‌های گرمازایی زغال دو معدن (برحسب کیلوکالری در هر تن) داده شده است:

معدن (الف): ۸۵۰۰، ۸۳۳۰، ۸۴۸۰، ۷۹۶۰، ۸۰۳۰

معدن (ب): ۷۷۱۰، ۷۸۹۰، ۷۹۲۰، ۸۲۷۰، ۷۸۶۰

با فرض اینکه این داده‌ها تشکیل نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه‌هایی نرمال با واریانس‌های برابر باشد، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای تفاضل بین ظرفیت‌های گرمازایی متوسط زغال این دو معدن بسازید.

۴-۱۹. برای مطالعه تـأثیر الیاژی کردن در مقاومت سیم‌های برق، یک مهندس برق در نظر دارد مقاومت $n_1 = ۱۶$ سیم استاندارد و $n_2 = ۲۵$ سیم آلیاژی را اندازه‌گیری کند. اگر بتوان فرض کرد که برای چنین داده‌هایی $\sigma_1 = ۴/۸$ و $\sigma_2 = ۳/۵$ برحسب اهم باشد، وی درباره‌ی حداکثر خطا با اطمینان ۹۸% چه حکمی می‌تواند بدهد در صورتی که از $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ به عنوان برآورد $\mu_1 - \mu_2$ استفاده کند؟

۴-۲۰. یک جایگاه بزگ سوخت‌گیری و توقفگاه کامیون‌ها، سوابق گسترده‌ای درباره‌ی انواع مختلف معاملاتی که با مشتریانش داشته است، نگهداری داشته است. اگر نمونه‌ای تصادفی از ۱۸ مورد این سوابق نشان دهد که متوسط فروش گازوئیل ۶۳/۸۴ گالن با

انحراف معیار ۲/۷۵ گالن بوده است، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای میانگین جامعه مورد نمونه‌گیری بسازید.

۴-۴ برآورد نسبت‌ها

مسائل زیادی وجود دارند که درآنها باید نسبت‌ها، احتمال‌ها، درصدها، یا نرخ‌ها، نظیر نسبت اقلام معیوب در محموله‌ای بزرگ از ترانزیستورها، احتمال اینکه اتومبیلی که در قسمتی از جاده توقف کرده چراغ‌هایش عیب داشته باشند، درصد دانش‌آموزانی که بهره‌ی هوشی آنها بالای ۱۱۵ است، یا نرخ مرگ‌ومیر ناشی از یک بیماری، را برآورد کنیم. در بسیاری از این مسائل، می‌توان به گونه‌ای معقول فرض کرد که ما از یک جامعه‌ی دوجمله‌ای نمونه می‌گیریم، و بنابراین، مسأله‌ی ما عبارت از برآوردکردن پارامتر دوجمله‌ای θ است. می‌توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که به‌ازای n بزرگ، توزیع دوجمله‌ای را می‌توان با توزیع نرمال تقریب کرد، یعنی اینکه می‌توان با متغیر تصادفی

$$Z = \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$$

به‌گونه‌ای رفتار کرد که گویی دارای توزیع نرمال است. با قرار دادن این عبارت به‌جای Z در

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

عبارت

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

دو نامساوی

$$-z_{\alpha/2} < \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \quad \text{و} \quad \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} < z_{\alpha/2}$$

را به‌دست می‌آوریم که از حل آنها حدود اطمینان $(1-\alpha)100\%$ را به‌دست می‌آوریم. با واگذاری جزئیات انجام این کار به خواننده در تمرین ۴-۲۱، در اینجا یک تقریب بزرگ نمونه‌ای را با قرار دادن $\frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$ به‌جای Z در $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ و بازنویسی آن به‌صورت

$$P\left(\hat{\Theta}-z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\theta(۱-\theta)}{n}}<Z<\hat{\Theta}+z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\theta(۱-\theta)}{n}}\right)=۱-\alpha$$

به‌دست می‌آوریم که در آن $\hat{\Theta}=\frac{X}{n}$. در این صورت اگر در زیر رادیکال به‌جای θ مقدار $\hat{\theta}$ را قراردهیم، که با این کار تقریب بیشتری به‌کار برده می‌شود، نتیجه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۴-۶. اگر X یک متغیر دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ با n بزرگ باشد، و $\hat{\Theta}=\frac{X}{n}$ آنگاه

$$\hat{\theta}-z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\theta}\ (۱-\hat{\theta})}{n}}<\theta<\hat{\theta}+z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\theta}\ (۱-\hat{\theta})}{n}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان تقریبی $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای θ است.

مثال ۴-۷. در یک نمونه‌ی تصادفی، ۱۳۶ نفر از ۴۰۰ نفری که واکسن آنفلوآنزا زده‌اند، دچار کمی ناراحتی شده‌اند. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای نسبت واقعی اشخاصی که بر اثر تزریق واکسن دچار ناراحتی خواهند شد، بسازید.

حل. با قراردادن $n=۴۰۰$، $\hat{\theta}=\frac{۱۳۶}{۴۰۰}=۰/۳۴$، و $z_{۰/۰۲۵}=۱/۹۶$ در فاصله‌ی اطمینان بزرگ نمونه‌ای θ، به‌دست می‌آوریم

$$۰/۳۴-۱/۹۶\sqrt{\frac{(۰/۳۴)(۰/۶۶)}{۴۰۰}}<\theta<۰/۳۴+۱/۹۶\sqrt{\frac{(۰/۳۴)(۰/۶۶)}{۴۰۰}}$$

$$۰/۲۹۴<\theta<۰/۳۸۶$$

یا، پس از گردکردن تا دو رقم اعشار، $۰/۲۹<\theta<۰/۳۹$.

با استفاده از همان تقریبی که به قضیه‌ی ۴-۶ منجر شد، همچنین می‌توانیم بنویسیم

قضیه‌ی ۴-۷. اگر $\hat{\theta}=\frac{x}{n}$ به‌عنوان برآوردی برای به‌کار رود، می‌توانیم با اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ حکم کنیم که خطا کمتر است از

$$z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\theta(۱-\theta)}{n}}.$$

مثال ۴-۷. مطالعه‌ای برای تعیین نسبت رأی دهندگانی که در جامعه‌ای بزرگ طرفدار ساختن یک کارخانه برق اتمی‌اند، انجام شده است. اگر ۱۴۰ نفر از ۴۰۰ رأی دهند، که به تصادف انتخاب شده‌اند، موافق پروژه باشند و از $\hat{\theta}=\frac{۱۴۰}{۴۰۰}=۰/۳۵$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی همه رأی دهندگان جامعه که موافق پروژه‌اند، استفاده کنیم، با اطمینان ۹۹% درباره‌ی حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم؟

حل. با قراردادن $n=۴۰۰$، $\hat{\theta}=۰/۳۵$، و $z_{۰/۰۰۵}=۲/۵۷۵$ در فرمول قضیه‌ی ۴-۷ مقدار

$$۲/۵۷۵\sqrt{\frac{(۰/۳۵)(۰/۶۵)}{۴۰۰}}=۰/۰۶۱$$

یا $\sigma^{۲}$ ۰/۰۶ را پس از گردکردن تا دو رقم اعشار به‌دست می‌آوریم. بنابر این اگر از $\hat{\theta}=۰/۳۵$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی رأی‌دهندگان این جامعه که موافق پروژه‌اند، استفاده کنیم، می‌توانیم با اطمینان ۹۹% حکم کنیم که خطا کمتر از ۰/۰۶ است.

۴-۵ برآورد تفاضل بین نسبت‌ها

اغلب، مسائلی پیش می‌آیند که در آنها برآورد تفاضل بین پارامترهای دوجمله‌ای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ برمبنای نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ از دو جامعه‌ی دوجمله‌ای را می‌خواهند. مثلاً، اگر بخواهیم تفاضل بین نسبت‌های رأی‌دهندگان مذکر و مؤنث را که موافق کاندیدای معینی در انتخابات مجلس‌اند برآوردکنیم، در چنین وضعیتی هستیم. اگر تعداد پیروزی‌های مربوط، $X_۱$ و $X_۲$، و نسبت‌های نمونه‌ای نظیر $\hat{\Theta}_۱=\frac{X_۱}{n_۱}$ و $\hat{\Theta}_۲=\frac{X_۲}{n_۲}$ باشند، می‌خواهیم توزیع نمونه‌ای $\hat{\Theta}_۲-\hat{\Theta}_۱$ را که برآوردکننده‌ای بدیهی برای $\theta_۱-\theta_۲$ است مورد بررسی قرار دهیم. از تمرین ۲-۵ داریم

$$E(\hat{\Theta}_۲-\hat{\Theta}_۱)=\theta_۱-\theta_۲$$

و

$$\operatorname{var}(\hat{\Theta}_۲-\hat{\Theta}_۱)=\frac{\theta_۱(۱-\theta_۱)}{n_۱}+\frac{\theta_۲(۱-\theta_۲)}{n_۲}$$

و چون برای نمونه‌های بزرگ، X_1 و X_2، و در نتیجه تفاضل آنها را می‌توان با توزیع‌های نرمال تقریب زد، نتیجه می‌شود که

$$Z=\frac{(\hat{\Theta}_1-\hat{\Theta}_2)-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}}$$

متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد تقریبی است. با قرار دادن این عبارت به جای Z در $P(-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2})=1-\alpha$، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

قضیه‌ی ۴-۸. اگر X_1 یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n_1 و θ_1، X_2 یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n_2 و θ_2، n_1 و n_2 بزرگ باشند، و $\hat{\theta}_1=\frac{x_1}{n_1}$ و $\hat{\theta}_2=\frac{x_2}{n_2}$، آنگاه

$$(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}<\theta_1-\theta_2$$
$$<(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان تقریبی $(1-\alpha)100\%$ برای $\theta_1-\theta_2$ است.

مثال ۴-۹. اگر ۱۳۲ نفر از ۲۰۰ رأی دهنده‌ی مذکر و ۹۰ نفر از ۱۵۹ رأی‌دهنده‌ی مؤنث موافق کاندیدای خاصی برای انتخاب ریاست جمهوری باشند، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای تفاضل بین نسبت‌های واقعی رأی‌دهندگان مرد و زن که موافق این کاندیدا هستند، به‌دست آورید.

حل. با قراردادن $\hat{\theta}_1=\frac{132}{200}=0/66$، $\hat{\theta}_2=\frac{90}{150}=0/60$، $z_{0/005}=2/575$ در فاصله‌ی اطمینان بزرگ نمونه‌ای قضیه‌ی ۴-۸، به‌دست می‌آوریم

$$(0/66-0/60)-2/575\sqrt{\frac{(0/66)(0/34)}{200}+\frac{(0/60)(0/40)}{150}}<\theta_1-\theta_2$$
$$<(0/66-0/60)+2/575\sqrt{\frac{(0/66)(0/34)}{200}+\frac{(0/60)(0/40)}{150}}$$

که به صورت

$$-۰/۰۷۴ < \theta_۱ - \theta_۲ < ۰/۱۹۴$$

ساده می‌شود. بنابراین ۹۹% اطمینان داریم که بازه‌ی از ۰/۰۷۴− تا ۰/۱۹۴ شامل تفاضل بین نسبت‌های واقعی رأی‌دهندگان مرد و زن است که موافق کاندیدای مفروض‌اند. ملاحظه کنید که این فاصله، امکان تفاضل صفر بین دو نسبت را هم دربردارد.

تمرین

۴–۲۱. با حل

$$-z_{\alpha/۲} = \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}, \qquad \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}} = z_{\alpha/۲}$$

برحسب θ، نشان دهید که حدود اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای θ عبارتند از

$$\frac{x + \frac{۱}{۲}.z^{۲}_{\alpha/۲} \pm z_{\alpha/۲}\sqrt{\frac{x(n-x)}{n} + \frac{۱}{۴}.z^{۲}_{\alpha/۲}}}{n + z^{۲}_{\alpha/۲}}$$

۴–۲۲. جزئیات اعمالی را کامل کنید که ما را از آماره‌ی Z بخش ۴–۴، که در

$$P(-z_{\alpha/۲} < Z < z_{\alpha/۲}) = ۱ - \alpha$$

قرار دادیم، به فاصله‌ی اطمینان قضیه‌ی ۴–۸ می‌رساند.

۴–۲۳. یک بررسی نمونه‌ای در سوپر مارکتی نشان داده است که ۲۰۴ خریدکننده از ۳۰۰ خریدکننده به طور منظم از کوپن‌های تخفیفی که مبالغی برحسب ریال تخفیف می‌دهند، استفاده می‌کنند. از فاصله‌ی اطمینان بزرگ نمونه‌ای قضیه‌ی ۴–۶ استفاده کرده یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای نسبت واقعی متناظر پیدا کنید.

۴–۲۴. در یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه ۲۵۰ از بینندگان تلویزیون در ناحیه‌ای، ۱۹۰ نفر برنامه‌ی بحث‌برانگیزی را مشاهده می‌کرده‌اند. با استفاده از دو راه زیر، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای نسبت واقعی متناظر پیدا کنید.

الف) فرمول فاصله‌ی اطمینان بزرگ برای قضیه‌ی ۴–۶،

ب) کران‌های اطمینان تمرین۴–۲۱.

۴–۲۵. از ۱۰۰ ماهی صید شده از دریاچه‌ای، ۱۸ ماهی به علت آلودگی شیمیایی محیط غیرقابل مصرف بوده‌اند. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای نسبت واقعی متناظر بسازید.

۴–۲۶. در نمونه‌ای تصادفی از ۱۲۰ خواننده‌ی کُر، ۵۴ نفر دچار گرفتگی مختصر صدا شده‌اند. با اطمینان ۹۰% درباره‌ی حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم در صورتی که از نسبت نمونه‌ای، $\frac{۵۴}{۱۲۰}=۰/۴۵$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی خوانندگانی که به این ترتیب دچار صدمه شده‌اند استفاده کنیم؟

۴–۲۷. در نمونه‌ای تصادفی از ۳۰۰ نفر که نهار را در یک سلف سرویس صرف کرده‌اند، ۱۰۲ نفر دسر خورده‌اند. اگر از $\frac{۱۰۲}{۳۰۰}=۰/۳۴$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی متناظر استفاده کنیم، با چه اطمینانی می‌توانیم حکم کنیم که خطای ما از ۰/۰۵ کمتر است؟

۴–۲۸. الف) از فرمول قضیه‌ی ۴–۷ استفاده کرده نشان دهید که می‌توانیم حداقل $(۱-\alpha)۱۰۰$% مطمئن باشیم که قدرمطلق خطا از e کمتراست هرگاه از نسبت نمونه‌ای $\hat{\theta}=\frac{x}{n}$ به‌عنوان برآوردی برای θ با

$$n=\frac{z_{\alpha/۲}^{۲}}{۴e^{۲}}$$

استفاده کنیم.

ب) فرض کنید می‌خواهیم که نسبت رانندگانی را که در فاصله‌ی معین بین دو شهر معین از سرعت مجاز تجاوز می‌کنند، برآورد کنیم. از فرمول قسمت الف استفاده کرده تعیین کنید که نمونه‌ای به چه بزرگی لازم است تا ۹۹% مطمئن باشیم که برآورد حاصل، یعنی نسبت نمونه‌ای، کمتر از ۰/۰۴ از واقعیت دور باشد.

۴–۲۹. در یک نمونه‌ی تصادفی از بازدیدکنندگان جاذبه‌ی توریستی مشهوری، ۸۴ مرد از ۲۵۰ مرد و ۱۵۶ زن از ۲۵۰ زن کالاهای یادگاری خریداری کرده‌اند. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای تفاضل بین نسبت‌های واقعی زنان و مردانی که در این جاذبه‌ی توریستی یادگاری می‌خرند، بسازید.

۴–۳۰. در بین ۵۰۰ متقاضی گواهی ازدواج، که به تصادف در سالی معین انتخاب شده‌اند، ۴۸ مورد وجود دارد که در آنها زنان حداقل یک سال مسن‌تر از مردان بوده‌اند، در بین ۴۰۰ متقاضی گواهی ازدواج، که شش سال بعد به تصادف انتخاب

شده‌اند، ۶۸ مورد وجود دارد که زنان حداقل یک سال مسن‌تر از مردان بوده‌اند. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای تفاضل بین نسبت‌های واقعی متقاضیان گواهی ازدواج که در آنها زنان حداقل یکسال مسن‌تر از مردان هستند، پیدا کنید.

۴-۶ برآورد واریانس‌ها

با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌های نرمال، می‌توانیم یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ^2 با استفاده از قضیه‌ی ۲-۱۱ پیدا کنیم. مطابق این قضیه

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع خی‌دو با $n-1$ درجه‌ی آزادی است. بنابراین

$$P\left[\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right] = 1-\alpha$$

که در آن $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ و $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ در بخش ۲-۴ تعریف شده‌اند، و به‌دست می‌آوریم.

قضیه‌ی ۴-۹. اگر s^2 مقدار واریانس یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال باشد، آنگاه

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ^2 است.

حدود اطمینان $(1-\alpha)100\%$ متناظر برای σ را می‌توان با گرفتن جذر از حدود اطمینان σ^2 به‌دست آورد.

مثال ۴-۱۰. در ۱۶ بار کار آزمایشی یک موتور تحت آزمایش، مصرف بنزین آن دارای انحراف معیار ۲/۲ گالن بوده است. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای $\sigma^۲$ بسازید که میزان تغییرپذیری مصرف بنزین این موتور را بسنجد.

حل. با فرض اینکه داده‌های آزمایشی را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌های نرمال تلقی کرد، در فاصله‌ی اطمینان قضیه‌ی ۴-۹، مقادیر $n=۱۶$ و $s=۲/۲$ را همراه با مقادیر $\chi^۲_{۰/۰۰۵,۱۵}=۳۲/۸۰۱$ و $\chi^۲_{۰/۹۹۵,۱۵}=۴/۶۰۱$ که از جدول ۴ به‌دست می‌آیند، قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱۵(۲/۲)^۲}{۳۲/۸۰۱}<\sigma^۲<\frac{۱۵(۲/۲)^۲}{۴/۶۰۱}$$

یا

$$۲/۲۱<\sigma^۲<۱۵/۷۸$$

با گرفتن جذر، فاصله‌ی اطمینان ۹۹% متناظر برای σ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$۱/۴۹<\sigma<۳/۹۷.$$

۴-۷ برآورد نسبت دو واریانس

اگر $S_۱^۲$ و $S_۲^۲$ واریانس‌های نمونه‌ای، نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ از جامعه‌های نرمال باشند، آنگاه طبق قضیه‌ی ۲-۱۵،

$$F=\frac{\sigma_۲^۲\, S_۱^۲}{\sigma_۱^۲\, S_۲^۲}$$

متغیری تصادفی است که دارای توزیع F با $n_۱-۱$ و $n_۲-۱$ درجه‌ی آزادی است. پس می‌توانیم بنویسیم

$$P\left(f_{۱-\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}<\frac{\sigma_۲^۲S_۱^۲}{\sigma_۱^۲S_۲^۲}<f_{\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}\right)=۱-\alpha$$

که درآن $f_{۱-\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}$ و $f_{\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}$ در بخش ۲-۵ تعریف شده‌اند. چون

$$f_{۱-\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}=\frac{۱}{f_{\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}}$$

(تمرین ۲–۳۴ را ببینید) نتیجه می‌شود که

قضیه‌ی ۴–۱۰. اگر s_1^2 و s_2^2 مقادیر واریانس‌های نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه‌ی نرمال باشند، آنگاه

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$$

یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ است.

کران‌های اطمینان $(1-\alpha)100\%$ متناظر برای $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ را می‌توان با گرفتن جذرهای کران‌های اطمینان برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به‌دست آورد.

مثال ۴–۱۱. با مراجعه به مثال ۴–۶، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۸% برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ پیدا کنید.

حل. با قراردادن $n_1=10$، $n_2=8$، $s_1=0/5$، و $s_2=0/7$، و مقادیر $f_{0/01,9,7}=6/72$ و $f_{0/01,7,9}=5/61$، از جدول ۶ به‌دست می‌آوریم

$$\frac{0/25}{0/49}\cdot\frac{1}{6/72}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{0/25}{0/49}\cdot 5/61$$

یا

$$0/076<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<2/862.$$

چون این فاصله، امکان برابر نسبت با ۱ را هم شامل می‌شود، شواهدی واقعی علیه فرض برابری واریانس‌ها در مثال ۴–۶ در دست نیست.

تمرین

۴–۳۱. جزئیات اعمال را که از احتمال به فرمول فاصله‌ی اطمینان قضیه‌ی ۴–۱۰ منجر شد، کامل کنید.

۴-۳۲. برای مقادیر بزرگ n، توزیع نمونه‌ای S گاهی به وسیله‌ی توزیعی نرمال با میانگین σ و واریانس $\frac{\sigma^{۲}}{۲n}$ تقریب می‌شود. نشان دهید که این تقریب به فاصله‌ی اطمینان بزرگ نمونه‌ای $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ زیر برای σ منجر می‌شود.

$$\frac{s}{۱+\frac{z_{\alpha/۲}}{\sqrt{۲n}}}<\sigma<\frac{s}{۱-\frac{z_{\alpha/۲}}{\sqrt{۲n}}}$$

۴-۳۳. با رجوع به تمرین۴-۱۴، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵% برای واریانس واقعی طول جمجمه‌ی پرندگان نوع مفروض بسازید.

۴-۳۴. با رجوع به تمرین ۴-۱۱، از فرمول فاصله‌ی اطمینان بزرگ نمونه‌ای تمرین ۴-۳۲ استفاده کرده یک فاصله‌ی اطمینان ۹۹% برای انحراف معیار رشد سالانه‌ی کاکتوس نوع مفروض بسازید.

۴-۳۵. با رجوع به تمرین ۴-۱۶، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۸% برای نسبت واریانس‌های دو جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری بسازید.

۴-۳۶. با رجوع به تمرین ۴-۱۷، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۸% برای نسبت واریانس‌های دو جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری بسازید.

۴-۳۷. با رجوع به تمرین ۴-۱۸، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۰% برای نسبت واریانس‌های دو جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری بسازید.

فصل پنجم

آزمون فرض: نظریه

۵-۱ مقدمه

اگر مهندسی بخواهد برمبنای داده‌های نمونه‌ای نظر بدهد که آیا طول عمر متوسط نوع خاصی لاستیک چرخ ماشین حداقل ۲۲۰۰۰ مایل است یا نه، اگر یک کارشناس کشاورزی بخواهد برمبنای آزمایش‌هایی نظر دهد که آیا نوع خاصی کود کشاورزی محصول لوبیای بیشتری نسبت به کود دیگر تولید می‌کند یا نه، و اگر یک سازنده‌ی محصولات دارویی بخواهد بر مبنای نمونه‌هایی نظردهد که آیا ۹۰درصد بیمارانی که داروی جدیدی را مصرف می‌کنند از بیماری خاصی بهبود خواهند یافت یا نه، همه‌ی این مسائل را می‌توان به زبان **آزمون فرض‌های آماری** برگرداند. در مورد اوّل می‌توانیم بگوییم که این مهندس باید این فرض را آزمون کند که θ، پارامتر یک جامعه‌ی نمایی، حداقل ۲۲۰۰۰ است؛ در مورد دوّم، می‌توانیم بگوییم که کارشناس کشاورزی باید نظر دهد که آیا $\mu_1 > \mu_2$، که در آن μ_1 و μ_2 میانگین‌های دو جامعه‌ی نرمال هستند؛ و در مورد سوّم می‌توانیم بگوییم که سازنده باید نظردهد که آیا θ، پارامتر یک جامعه‌ی دوجمله‌ای، برابر ۰/۹۰ است یا نه. البته در هر مورد باید فرض شود توزیعی که انتخاب شده است به درستی شرایط آزمایشی را توصیف می‌کند، یعنی، این توزیع **مدل آماری** صحیحی در اختیار می‌گذارد.

مانند مثال‌های بالا، اغلب آزمون‌های آماری به پارامترهای توزیع‌ها می‌پردازند، ولی گاهی آنها به نوع، یا ماهیت خود توزیع‌ها هم می‌پردازند. به عنوان مثال، در اوّلین مثال از سه مثال بالا، آن مهندس ممکن است همچنین بخواهد نظر دهد که آیا واقعاً با

نمونه‌ای از توزیع نمایی سروکاردارد، یا اینکه آیا داده‌های او مقادیر متغیرهای تصادفی هستند که، مثلاً، دارای توزیع وایبول هستند.

تعریف ۵-۱. یک فرض آماری، حکم یا حدسی درباره‌ی توزیع یک یا چند متغیرتصادفی است. اگر یک فرض آماری توزیع را کاملاً مشخص کند، آن را فرض ساده و در غیر این صورت آن را فرض مرکب می‌نامند.

بدین ترتیب یک فرض ساده نه تنها باید شکل تابعی توزیع مبنا، بلکه باید مقادیر همه‌ی پارامترها را نیز مشخص کند. بنابراین در سوّمین مثال از مثال‌های بالا، یعنی مثالی که با کارآیی داروی جدید سروکار دارد، فرض $\theta = ۰/۹۰$ ساده است، البته با این فرض که اندازه‌ی نمونه و دوجمله‌ای بودن توزیع جامعه را بدانیم. امّا، در اوّلین مثال از مثال‌های بالا، فرض مرکب است، زیرا $\theta \geq ۲۲۰۰۰$ مقدار مشخصی به پارامتر θ تخصیص نمی‌دهد.

برای آنکه بتوان ملاک‌های مناسبی برای فرض‌های آماری به وجود آورد، لازم است که **فرض‌های مقابل** را هم فرمول‌بندی کنیم. مثلاً در مثالی که در آن با طول عمر لاستیک‌ها سروکار داشتیم، می‌توانیم این فرض مقابل را فرمول‌بندی کنیم که پارامتر θ در توزیع نمایی، کمتراز ۲۲۰۰۰ است؛ در مثالی که در آن با دو نوع کود سروکار داشتیم، می‌توانیم فرض مقابل $\mu_۱ = \mu_۲$ را فرمول‌بندی کنیم؛ و در مثالی که در آن با داروی جدید سروکار داشتیم می‌توانیم این فرض مقابل را فرمول‌بندی کنیم که پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای مفروض صرفاً ۰/۶۰ است، که همان نرخ بهبودی از بیماری بدون داروی جدید است.

مفهوم فرض‌های ساده و مرکب در مورد فرض‌های مقابل نیز به کار می‌رود، و در مثال اوّل اینک می‌توانیم بگوییم که فرض مرکب $\theta \geq ۲۲۰۰۰$ را در برابر فرض مقابل مرکب $\theta < ۲۲۰۰۰$ آزمون می‌کنیم که در آن θ پارامتر جامعه‌ی نمایی است. به همین نحو، در مثال دوّم، فرض مرکب $\mu_۱ > \mu_۲$ را در برابر فرض مقابل مرکب $\mu_۱ \leq \mu_۲$ آزمون می‌کنیم، که در آن $\mu_۲$ و $\mu_۱$ میانگین‌های دو جامعه‌ی نرمال‌اند، و در مثال سوّم فرض ساده $\theta = ۰/۹۰$ را در برابر فرض مقابل ساده‌ی $\theta = ۰/۶۰$ آزمون می‌کنیم که در آن θ پارامتر یک جامعه‌ی دوجمله‌ای است که برای آن n معلوم است.

آماردانان اغلب، به عنوان فرض‌های خود ضد آنچه را که باور آنها درست است بیان می‌کنند. مثلاً، اگر بخواهیم نشان دهیم که دانش‌آموزان یک مدرسه بهره‌ی هوشی بالاتری نسبت به مدرسه‌ی دیگری دارند، می‌توانیم این فرض را فرمول‌بندی کنیم که تفاوتی در بین نیست، یعنی اینکه $\mu_1 = \mu_2$. با این فرض، می‌دانیم که چه انتظاری باید داشته باشیم، امّا اگر فرض را به صورت $\mu_1 > \mu_2$ فرمول‌بندی می‌کردیم، وضعیت این گونه نمی‌بود؛ مگر اینکه حداقل تفاضل واقعی بین μ_2 و μ_1 را مشخص کنیم.

به‌همین نحو، اگر بخواهیم نشان دهیم که نوعی سنگ معدن، محتوی درصد اورانیوم بیشتری نسبت به سنگ معدن دیگری است، می‌توانیم این فرض را فرمول‌بندی کنیم که درصدها یکی هستند؛ و اگر بخواهیم نشان دهیم که تغییرپذیری بیشتری در کیفیت یک محصول نسبت به کیفیت محصول دیگری وجوددارد، می‌توانیم این فرض را فرمول‌بندی کنیم که هیچ تفاوتی در بین نیست، یعنی اینکه $\sigma_1 = \sigma_2$. با توجه به فرض‌های عدم تفاوت، فرض‌هایی نظیر اینها به پیدایش اصطلاح فرض صفر منجر شدند، گرچه امروزه این اصطلاح به هر فرضی اطلاق می‌شود که می‌خواهیم آن را آزمون کنیم.

با استفاده از نمادها، از نماد H_0 برای فرض صفری که می‌خواهیم آزمون کنیم و از H_1 یا H_A برای فرض مقابل استفاده خواهیم کرد. مسائلی که شامل بیش از دو فرض باشند، یعنی مسائلی که شامل چندین فرض مقابل‌اند، کاملاً پیچیده از کار در می‌آیند و ما در این کتاب به مطالعه‌ی آنها نمی‌پردازیم.

۵-۲ آزمون فرض آماری

آزمون یک فرض آماری عبارت از به‌کار گرفتن مجموعه‌ی قواعد صریحی برای آن است که تصمیم بگیریم که آیا فرض صفر را بپذیریم یا آن را به نفع فرض مقابل رد کنیم. مثلاً فرض کنید که آماردانی می‌خواهد فرض صفر $\theta = \theta_0$ را در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_1$ آزمون کند. برای انجام یک انتخاب، وی به تولید داده‌های نمونه‌ای از طریق ترتیب دادن یک آزمایش و سپس محاسبه‌ی مقدار یک آماره‌ی آزمون دست می‌زند که این آماره به او خواهد گفت که به‌ازای هر برآمد ممکن فضای نمونه‌ای چه اقدامی بکند. بنابراین، روش آزمون، مقادیر ممکن آماره‌ی آزمون را به دو مجموعه افراز می‌کند: یک **ناحیه‌ی عدم رد (ناحیه‌ی قبول)** برای H_0 و یک **ناحیه‌ی رد** برای H_0.

روشی که هم اکنون توصیف شد ممکن است به دو نوع خطا منجر شود. مثلاً اگر مقدار واقعی پارامتر θ، θ_0 باشد و آماردان به طور نادرست نتیجه بگیرد که $\theta=\theta_1$، وی خطایی مرتکب می‌شود که **خطای نوع** I نامیده می‌شود. از طرف دیگر اگر مقدار واقعی پارامتر θ، θ_1 باشد و آماردان به طور نادرست نتیجه بگیرد $\theta=\theta_0$، وی مرتکب خطایی از نوع دوّم می‌شود که به **خطای نوع** II مرسوم است.

تعریف ۵-۲.

۱. رد فرض صفر را وقتی درست باشد خطای نوع I نامند؛ احتمال ارتکاب خطای نوع I را با α نشان می‌دهند.

۲. قبول فرض صفر را وقتی نادرست باشد، خطای نوع II نامند؛ احتمال ارتکاب خطای نوع II را با β نشان می‌دهند.

رسم بر این است که به ناحیه‌ی رد برای H_0، **ناحیه‌ی بحرانی آزمون**، و به احتمال به‌دست آوردن مقداری برای آماره‌ی آزمون در داخل ناحیه‌ی بحرانی، وقتی که H_0 درست باشد، **اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی** اطلاق می‌کنند. بدین ترتیب، اندازه‌ی یک ناحیه‌ی بحرانی صرفاً احتمال αی مرتکب شدن یک خطای نوع I است. این احتمال، **سطح معنی‌دار بودن** آزمون هم نامیده می‌شود.

مثال ۵-۱. با رجوع به مورد سوم در بخش مقدمه، فرض کنید که سازنده‌ی داروی جدید می‌خواهد فرض صفر $\theta=۰/۹۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta=۰/۶۰$ امتحان کند. آماره‌ی آزمون او X، تعداد موفقیت(بهبودی)های مشاهده شده در ۲۰ آزمایش است، و او فرض صفر را می‌پذیرد در صورتی که $x>۱۴$؛ در غیر این صورت آن را رد خواهد کرد. α و β را حساب کنید.

حل. ناحیه‌ی قبول برای H_0 با مقادیر، $x=۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰$؛ و ناحیه‌ی رد(یا ناحیه‌ی بحرانی) متناظر با مقادیر $x=۰,۱,۲,\ldots,۱۴$، داده می‌شود. بنابر جدول ۱،

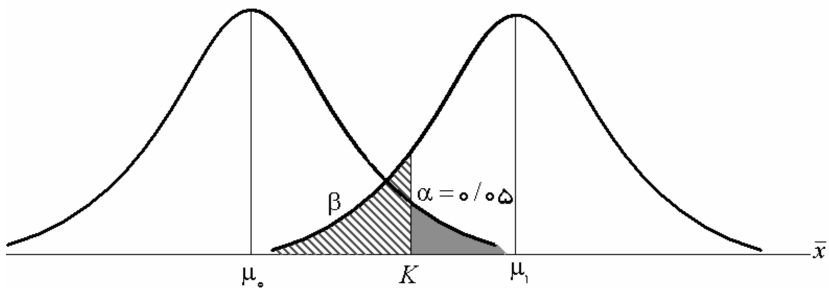
$$\alpha=P(X\leq ۱۴;\quad \theta=۰/۹۰)=۰/۰۱۱۴$$

و

$$\beta=P(X>۱۴;\quad \theta=۰/۶۰)=۰/۱۲۵۵.$$

یک روش آزمون خوب آن است که در آن α و β هر دو کوچک باشند و بنابراین به ما شانس بالایی برای اتخاذ تصمیم درست بدهد. احتمال خطای نوع II در مثال ۵-۱ نسبتاً زیاد است، امّا می‌توان آن را با تغییر مناسب ناحیه‌ی بحرانی کم کرد. مثلاً اگر ناحیه‌ی قبول $x > ۱۵$ را در مثال ۵-۱ به‌کار بریم، به‌طوری که ناحیه‌ی بحرانی $x \leq ۱۵$ باشد، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که با این کار $\alpha = ۰/۰۴۳۳$ و $\beta = ۰/۰۵۰۹$ خواهد شد. بنابراین، گرچه احتمال خطای نوع دوّم کوچکتر شده است، احتمال خطای نوع I بزرگتر شده است. تنها راهی که می‌توان احتمال‌های هر دو نوع خطا را کم کرد افزایش دادن اندازه‌ی نمونه است، امّا مادام که n ثابت گرفته شود، این رابطه‌ی متقابل بین احتمال‌های خطاهای نوع I و نوع II از خصوصیات روش‌های تصمیم آماری است. به عبارت دیگر اگر احتمال یک نوع خطا کاهش یابد، احتمال خطای نوع دیگر افزایش می‌یابد.

مثال ۵-۲. فرض کنید بخواهیم این فرض صفر را که میانگین یک جامعه‌ی نرمال با $\sigma^۲ = ۱$ مساوی $\mu_۰$ است در برابر این فرض مقابل که این میانگین مساوی $\mu_۱$ است، با $\mu_۱ > \mu_۰$، مورد آزمون قراردهیم. مقدار K را طوری پیدا کنید که $\bar{x} > K$ یک ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی $\alpha = ۰/۰۵$ برای نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n باشد.



شکل ۵-۱. نمودار برای مثال‌های ۵-۲ و ۵-۳

حل. با رجوع به شکل ۵-۱ و جدول ۳، معلوم می‌شود که $z = ۱/۶۴۵$ متناظر با درایه‌ی ۰/۴۵۰۰ است. بنابر این

$$۱/۶۴۵ = \frac{K - \mu_۰}{۱/\sqrt{n}}$$

و نتیجه می‌شود که

$$K = \mu_\circ + \frac{۱/۶۴۵}{\sqrt{n}}.$$

مثال ۵-۳. با رجوع به مثال ۵-۲، حداقل اندازه‌ی نمونه‌ی مورد نیاز برای آزمون فرض صفر $\mu_\circ = ۱۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 = ۱۱$ با $\beta < ۰/۰۶$، تعیین کنید.

حل. چون β با مساحت هاشور خورده‌ی شکل ۵-۱ داده شده است، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\beta &= P\left(\overline{X} < ۱۰ + \frac{۱/۶۴۵}{\sqrt{n}};\quad \mu = ۱۱\right)\\ &= P\left(Z < \frac{\left(۱۰ + \frac{۱/۶۴۵}{\sqrt{n}}\right) - ۱۱}{۱/\sqrt{n}}\right)\\ &= P(Z < -\sqrt{n} + ۱/۶۴۵)\end{aligned}$$

و چون $z = ۱/۵۵۵$ متناظر با درایه‌ی $۰/۵۰۰۰ - ۰/۰۶ = ۰/۴۴۰۰$ در جدول ۳ است، $-\sqrt{n} + ۱/۶۴۵$ را برابر $-۱/۵۵۵$ قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{n} = ۱/۶۴۵ + ۱/۵۵۵ = ۳/۲۰۰$$

$n = ۱۰/۲۴$ یا پس از گردکردن به نزدیکترین عدد صحیح برابر ۱۱ است.

۵-۳ لم نیمن - پیرسن

در نظریه‌ی آزمون فرض که امروزه با عنوان نظریه‌ی «کلاسیک» یا «سنتی» یعنی نظریه‌ی نیمن-پیرسن از آن یاد می‌شود، ما مشکل وابستگی بین احتمال‌های خطاهای نوع I و II را با محدود کردن خود به آماره‌های آزمونی که برای آنها احتمال خطای نوع I کمتر از α یا مساوی α است، چاره می‌کنیم. به عبارت دیگر، ما خود را به ناحیه‌های بحرانی با اندازه‌های کمتر از α یا مساوی α محدود می‌کنیم. باید اجازه دهیم که ناحیه‌ی بحرانی دارای اندازه‌ای کوچکتر از α باشد تا در مورد متغیرهای تصادفی گسسته نیز، که برای آنها شاید تعیین آماره‌ی آزمونی با اندازه‌ی آزمونی با اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی دقیق α غیرممکن است، کارساز باشد. در این صورت برای کلیه‌ی مقاصد عملی، احتمال خطای نوع I را ثابت نگاه می‌داریم و به دنبال آماره‌ی آزمونی می‌گردیم که احتمال خطای نوع II را مینیمم، یا معادل آن، کمیت $۱-\beta$ را

ماکسیمم کند. در موقع آزمون فرض صفر $\theta=\theta_0$ در برابر فرض مقابل $\theta=\theta_1$، کمیت $1-\beta$ **توان آزمون** در $\theta=\theta_0$ نامیده می‌شود.

یک ناحیه‌ی بحرانی آزمون فرض ساده‌ی $\theta=\theta_0$ در برابر فرض مقابل $\theta=\theta_1$ را بهترین یا تواناترین می‌نامند هرگاه توان آزمون در $\theta=\theta_1$ ماکسیمم باشد. برای ساختن تواناترین ناحیه‌ی بحرانی در چنین وضعیتی، ما به درستنمایی‌های یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ی تحت بررسی وقتی $\theta=\theta_0$ و $\theta=\theta_1$ رجوع می‌کنیم. با نشان دادن این درستنمایی‌ها با L_0 و L_1 داریم

$$L_0=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0) \quad \text{و} \quad L_1=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1).$$

به‌طور شهودی، می‌توان استدلال کرد که $\frac{L_0}{L_1}$ باید برای نقاط نمونه‌ای داخل ناحیه‌ی بحرانی، که وقتی $\theta=\theta_0$ به خطاهای نوع I و وقتی $\theta=\theta_1$ به تصمیم‌های درست منجر می‌شوند، کوچک باشد؛ به‌همین نحو می‌توان استدلال کرد که $\frac{L_0}{L_1}$ باید برای نقاط خارج ناحیه‌ی بحرانی، که وقتی $\theta=\theta_0$ به تصمیم‌های درست، و وقتی $\theta=\theta_1$ به خطاهای نوع II منجر می‌شوند، بزرگ باشد. این واقعیت که چنین استدلالی درواقع وجود یک ناحیه‌ی بحرانی تواناترین را تضمین می‌کند در قضیه‌ی زیر ثابت می‌شود.

قضیه‌ی ۵-۱. (لم نیمن-پیرسن) اگر C یک ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α و k مقدار ثابتی باشد به‌طوری‌که

$$\frac{L_0}{L_1}\le k \quad , \quad C \text{ درداخل}$$

و

$$\frac{L_0}{L_1}\ge k \quad , \quad C \text{ درداخل}$$

آنگاه C تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α برای آزمودن فرض $\theta=\theta_0$ در برابر فرض $\theta=\theta_1$ است.

برهان. فرض کنید C یک ناحیه‌ی بحرانی باشد که در شرایط قضیه صدق می‌کند و D ناحیه‌ی بحرانی دیگری به اندازه‌ی α باشد. بنابراین

$$\int_C \cdots \int L_\circ dx = \int_D \cdots \int L_\circ dx = \alpha$$

که در آن dx معرف $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ است، و انتگرال چندگانه در روی ناحیه‌های n بعدی C و D گرفته شده‌اند. حال، با استفاده از این واقعیت که C اجتماع مجموعه‌های مجزای $C \cap D$ و $C \cap D'$ است و D اجتماع مجموعه‌های مجزای $C \cap D$ و $C' \cap D$ است، می‌توان نوشت

$$\int_{C\cap D}\cdots\int L_\circ dx + \int_{C\cap D'}\cdots\int L_\circ dx = \int_{C\cap D}\cdots\int L_\circ dx + \int_{C'\cap D}\cdots\int L_\circ dx = \alpha$$

و بنابر این

$$\int_{C\cap D'}\cdots\int L_\circ dx = \int_{C'\cap D}\cdots\int L_\circ dx.$$

در این صورت، چون در داخل C، $L_1 \geq L_\circ / k$ و در خارج C، $L_1 \leq L_\circ / k$، نتیجه می‌شود که

$$\int_{C\cap D'}\cdots\int L_1 dx \geq \int_{C\cap D'}\cdots\int \frac{L_\circ}{k}.dx = \int_{C'\cap D}\cdots\int \frac{L_\circ}{k} dx \geq \int_{C'\cap D}\cdots\int L_1 dx$$

و بنابر این

$$\int_{C\cap D'}\cdots\int L_1 dx \geq \int_{C'\cap D}\cdots\int L_1 dx$$

بالاخره

$$\begin{aligned}\int_C\cdots\int L_1 dx &= \int_{C\cap D}\cdots\int L_1 dx + \int_{C\cap D'}\cdots\int L_1 dx\\ &\geq \int_{C\cap D}\cdots\int L_1 dx + \int_{C'\cap D}\cdots\int L_1 dx\\ &= \int_D\cdots\int L_1 dx,\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$\int_C\cdots\int L_1 dx \geq \int_D\cdots\int L_1 dx,$$

و به این ترتیب برهان قضیه‌ی ۵–۱ کامل می‌شود. آخرین نامساوی بیان می‌کند که برای ناحیه‌ی بحرانی C، احتمال عدم ارتکاب یک خطای نوع II بزرگتر از یا مساوی با

احتمال متناظر برای هر ناحیه‌ی بحرانی دیگر به اندازه‌ی α است. (برای حالت گسسته، برهان، مشابه همین است و در آن، جای انتگرال‌گیری‌ها را مجموع‌یابی‌ها می‌گیرند.)

مثال ۵-۴. می‌خواهیم از نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با $\sigma^2 = 1$ استفاده کرده فرض صفر $\mu = \mu_0$ را در برابر فرض مقابل $\mu = \mu_1$، با $\mu_1 > \mu_0$، آزمون کنیم. از لم نیمن-پیرسن استفاده کرده تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α را پیدا کنید.

حل. دو درستنمایی عبارت‌اند از

$$L_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n . e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu_0)^2} \quad , \quad L_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n . e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu_1)^2}$$

که در آن مجموع‌یابی‌ها از $i=1$ تا $i=n$ انجام می‌شوند و بعد از مقداری ساده کردن، نسبت آنها به‌صورت

$$\frac{L_0}{L_1} = e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)+(\mu_0-\mu_1).\sum x_i}$$

درمی‌آید. بنابراین باید مقداری ثابت مانند k و ناحیه‌ای از فضای نمونه‌ای مانند C را پیدا کنیم به‌طوری‌که

$$e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)+(\mu_0-\mu_1).\sum x_i} \le k \quad , \quad C \text{ درداخل}$$

$$e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)+(\mu_0-\mu_1).\sum x_i} \ge k \quad , \quad C \text{ درداخل}$$

و بعد از گرفتن لگاریتم، کم کردن $\frac{n}{2}\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)$ و تقسیم بر کمیت منفی $n(\mu_0-\mu_1)$، این دو نامساوی به‌صورت

$$\bar{x} \ge K \quad , \quad C \text{ داخل}$$

$$\bar{x} \le K \quad , \quad C \text{ خارج}$$

در می‌آیند که در آنها K عبارتی برحسب k، μ_1، μ_0، n است.

در عمل، مقادیر ثابتی چون K با استفاده از اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی و نظریه‌ی آماری مناسب معین می‌شوند. در حالت مورد بحث (مثال ۵-۲ را ببینید) به‌دست

می‌آوریم، $K=\mu_{\circ}+z_{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ که در آن z_{α} به صورتی است که در برابری $P(Z<z_{\alpha})=\alpha$ صدق می‌کند. بنابراین، تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α برای آزمون فرض صفر $\mu=\mu_{\circ}$ در برابر فرض مقابل $\mu=\mu_{1}$ (با $\mu_{1}>\mu_{\circ}$) برای جامعه‌ی نرمال مفروض عبارت است از

$$\bar{x}>\mu_{\circ}+z_{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

و باید توجه کرد که این ناحیه به μ_{1} بستگی ندارد. این خاصیت مهمی است که در بخش ۵-۵ دوباره به آن باز خواهیم گشت.

توجه کنید که در اینجا، ناحیه‌ی بحرانی را بدون آنکه در ابتدا ذکر کنیم که آماره‌ی آزمون $\bar{X}$ است، به‌دست آوردیم. چون بدین ترتیب، مشخص کردن یک ناحیه‌ی بحرانی، آماره‌ی آزمون متناظری را تعریف می‌کند و برعکس، این دو اصطلاح در زبان آماری به‌طور مترادف به‌کار گرفته می‌شوند.

تمرین

۵-۱. در هر یک از حالت‌های زیر نظر دهید که فرض داده شده ساده است یا مرکب:

الف) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با $\lambda=۱/۲۵$ است،

ب) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با $\lambda>۱/۲۵$ است،

ج) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu=۱۰۰$ است.

۵-۲. مشاهده‌ای واحد از متغیری از تصادفی دارای توزیع فوق هندسی با $N=۷$ و $n=۲$ برای آزمون فرض صفر $k=۲$ در برابر فرض مقابل $k=۴$ به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر وقتی و تنها وقتی رد می‌شود که مقدار مشاهده شده‌ی متغیر تصادفی ۲ است، احتمال‌های خطاهای نوع I و II را پیدا کنید.

۵-۳. با رجوع به مثال ۵-۱، اگر ناحیه‌ی پذیرش $x>۱۶$ و ناحیه‌ی رد نظیر $x\leq ۱۶$ می‌بود، احتمال‌های خطاهای نوع I و II چه مقدارهایی می‌داشتند.

۵-۴. یک مشاهده‌ی واحد از یک متغیر تصادفی که دارای توزیع نمایی است برای آزمون این فرض به‌کار می‌رود که میانگین توزیع $\theta=۲$ در برابر فرض مقابل $\theta=۵$ است. اگر فرض صفر را وقتی و فقط وقتی بپذیریم که مقدار مشاهده شده‌ی متغیر تصادفی کمتر از ۳ است، احتمال‌های خطاهای نوع I و II را پیدا کنید.

۵-۵. فرض کنید که X_1 و X_2 نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال با $\sigma^2=1$ باشد. اگر بخواهیم فرض صفر $\mu=\mu_0$ را به‌نفع فرض مقابل $\mu=\mu_1$، که در آن $\mu_1>\mu_0$، وقتی که $\mu=12/3$ رد کنیم، اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی چیست؟

۵-۶. مشاهده‌ای واحد از متغیری تصادفی دارای چگالی یکنواخت با $\alpha=0$ برای آزمون فرض صفر $\bar{x}=11/2$ در برابر فرض مقابل $\beta=\beta_0+2$ به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر وقتی و فقط وقتی رد شود که متغیر تصادفی مقداری بزرگتر از β_0+1 اختیار کند، احتمال‌های خطاهای نوع I و II را پیدا کنید.

۵-۷. فرض کنید که X_1 و X_2 نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی ۲ از جامعه‌ای باشد که در زیر داده شده است

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

اگر ناحیه‌ی بحرانی $x_1x_2\geq\frac{3}{4}$ برای آزمون فرض صفر $\theta=1$ در برابر فرض مقابل $\theta=2$ به‌کار رود، توان این آزمون در $\theta=2$ چیست؟

۵-۸. نشان دهید که اگر در مثال ۵-۴، $\mu_1<\mu_0$، لم نیمن پیرسن ناحیه‌ی بحرانی

$$\bar{x}\leq\mu_0-z_\alpha.\frac{1}{\sqrt{n}}$$

را نتیجه می‌دهد.

۵-۹. نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نمایی برای آزمون این فرض صفر که پارامتر آن $\theta=\theta_0$ در برابر این فرض مقابل که $\theta=\theta_1>\theta_0$، به‌کار می‌رود. از لم نیمن-پیرسن استفاده کرده تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α را پیدا کنید، و نشان دهید که چگونه باید مقدار ثابت را محاسبه کرد.

۵-۱۰. از لم نیمن-پیرسن استفاده کرده نشان دهید که چگونه باید تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α را برای آزمونی بسازیم که در آن فرض صفر $\theta=\theta_0$ که در آن θ پارامتر یک توزیع دوجمله‌ای با مقدار مفروض n است در برابر این فرض که $\theta=\theta_1<\theta_0$، آزمون می‌شود.

۵-۱۱. با رجوع به تمرین قبل، اگر $n=100$، $\theta_0=0/40$، $\theta_1=0/30$، و α تا سرحد امکان بزرگ باشد بدون اینکه از ۰/۰۵ تجاوز نماید، از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای استفاده کرده احتمال ارتکاب خطای نوع II را پیدا کنید.

۵-۱۲. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با $\mu=0$، از لم نیمن-پیرسن استفاده کرده تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α را برای آزمون فرض صفر $\sigma=\sigma_0$ در برابر فرض مقابل $\sigma=\sigma_1>\sigma_0$ بسازید.

۵-۱۳. یک شرکت هواپیمایی می‌خواهد این فرض را که ۶۰درصد مسافرین آن مخالف کشیدن سیگار در داخل هواپیما هستند، مورد آزمون قرار دهد. توضیح دهید که در چه شرایطی آنها مرتکب خطای نوع I خواهند شد و تحت چه شرایطی مرتکب خطای نوع II خواهند شد.

۵-۱۴. از پزشکی خواسته می‌شود که معاینه‌ی کاملی از یک مدیر اجرایی به عمل آورد تا این فرض صفر که وی قادر به پذیرش مسوولیت‌های بیشتر است، مورد آزمون قرار گیرد. توضیح دهید که تحت چه شرایطی این پزشک مرتکب خطای نوع I و تحت چه شرایطی مرتکب خطای نوع II خواهد شد.

۵-۱۵. متوسط زمان خشک شدن رنگ تولیدی یک سازنده‌ی رنگ، ۲۰ دقیقه است. برای تحقیق در موثر بودن بهترسازی ترکیب شیمیایی، سازنده‌ی رنگ می‌خواهد فرض صفر $\mu=20$ (برحسب دقیقه) را در برابر فرض مقابل مناسبی آزمون کند که در آن μ متوسط زمان خشک شدن رنگی است که بهتر ساخته شده است.

الف) سازنده‌ی رنگ باید از کدام فرض مقابل استفاده کند در صورتی که نخواهد بهترسازی در ترکیب شیمیایی رنگ را اجرا نکند مگر اینکه بر اثر آن، زمان خشک شدن کاهش یابد.

ب) سازنده‌ی رنگ از کدام فرض مقابل استفاده کند در صورتی که فرایند تولید جدید واقعاً ارزان‌تر باشد و وی بخواهد بهترسازی را اجرا کند مگر اینکه موجب افزایش زمان خشک شدن رنگ شود.

۵-۱۶. یک زیست‌شناس می‌خواهد این فرض صفر را که میانگین طول از یک سربال تا سربال دیگر نوعی حشره ۱۲/۳ میلی‌متر است در برابر فرض مقابل که ۱۲/۳ میلی‌متر نیست، آزمون کند. اگر وی نمونه‌ای تصادفی استخراج کند و تصمیم بگیرد که فرض صفر را بپذیرد اگر و تنها اگر میانگین نمونه بین ۱۲/۰ میلی‌متر ۱۲/۶ میلی‌متر باشد، در صورتی که مقدار $\bar{x}=12/9$ (برحسب میلی‌متر) را به‌دست آورد وی چه تصمیمی خواهد گرفت؟ و آیا این تصمیم در صورتی که

الف) $\mu = ۱۲/۵$،

ب) $\mu = ۱۲/۳$،

تصمیمی خطاست؟

۵-۱۷. یک کارمند بانک می‌خواهد این فرض صفر را که به‌طور متوسط در روز ۱۰ فقره چک بی‌محل به بانک آورده می‌شود در برابر این فرض مقابل که رقم بسیار کوچکتر از آن است آزمون کند. اگر وی یک نمونه‌ی تصادفی استخراج کند و تصمیم بگیرد که فرض صفر را رد کند اگر و تنها اگر میانگین نمونه از ۱۲/۵ تجاوز کند، در صورتی که $\bar{x} = ۱۱/۲$ چه تصمیمی خواهد گرفت؟ و آیا این تصمیم در صورتی که

الف) $\lambda = ۱۱/۵$،

ب) $\lambda = ۱۰/۰$،

خطا خواهد بود؟

۵-۱۸. فرض کنید می‌خواهیم این فرض را که دوام نوعی لاستیک به‌طور متوسط ۳۵۰۰۰ مایل است در برابر این فرض مقابل که به‌طور متوسط ۴۵۰۰۰ مایل است، آزمون کنیم. اگر فرض کنیم که با متغیری تصادفی با توزیع نمایی سروکار داریم، اندازه‌ی نمونه و احتمال خطای نوع I را مشخص و از لم نیمن- پیرسن برای ساختن ناحیه‌ی بحرانی استفاده می‌کنیم. آیا در صورتی که فرض مقابل را به

الف) $\theta_1 = ۵۰۰۰۰$،

ب) $\theta_1 > ۳۵۰۰۰$،

تغییر دهیم، همان ناحیه‌ی بحرانی را به‌دست خواهیم آورد؟

۵-۴ تابع توان یک آزمون

در مثال ۵-۱، قادر بودیم که مقادیری یکتا برای احتمال‌های ارتکاب خطاهای نوع I و II بدهیم زیرا یک فرض ساده را در برابر فرض مقابل ساده‌ای آزمون می‌کردیم. با این حال در عمل به ندرت پیش می‌آید که فرض‌های ساده در مقابل فرض‌های مقابل ساده آزمون شوند. معمولاً یکی از آنها، یا هر دو مرکب‌اند. مثلاً، در مثال ۵-۱ ممکن است واقع بینانه‌تر باشد که این فرض صفر را که نرخ بهبودی از بیماری $\theta \geq ۰/۹۰$ است در برابر فرض مقابل $\theta < ۰/۹۰$، یعنی در برابر این فرض مقابل که داروی جدید به‌طوری

که ادعا شده است مؤثر نیست، آزمون کرد.

وقتی با فرض‌های مرکب سروکار داریم، مسأله‌ی ارزشیابی مزایای یک ملاک آزمون، یا ناحیه‌ی بحرانی، خیلی مشکل‌تر می‌شود. در این صورت باید احتمال‌های $\alpha(\theta)$ی ارتکاب خطای نوع I را برای تمام مقادیر θ در داخل حوزه‌ای که تحت فرض صفر H_0 مشخص شده است، و احتمال‌های $\beta(\theta)$ی ارتکاب خطای نوع II را برای تمام مقادیر θ در داخل حوزه‌ای که تحت فرض H_1 مشخص شده است، در نظر گیریم. رسم بر این است که دو مجموعه‌ی احتمال را به‌صورت زیر با هم ترکیب کنند.

تعریف ۵-۳. تابع توان یک آزمون فرض آماری H_0 در برابر فرض مقابل H_1 به صورت زیر است:

$$\pi(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta) & \text{برای مقادیر } \theta \text{ که تحت } H_0 \text{ اختیار شوند}\\ 1-\beta(\theta) & \text{برای مقادیر } \theta \text{ که تحت } H_1 \text{ اختیار شوند}\end{cases}$$

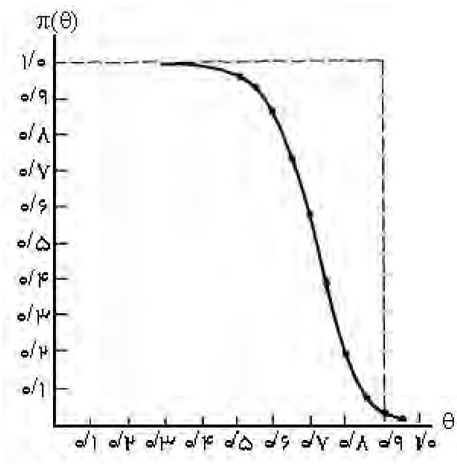
بنابر این، مقادیر تابع توان، احتمال‌های رد فرض H_0 برای مقادیر مختلف پارامتر θ است. همچنین ملاحظه کنید که تابع توان برای مقادیر θ تحت H_0، احتمال ارتکاب خطای نوع I، و برای مقادیر θ تحت H_1، احتمال مرتکب شدن خطای نوع II را می‌دهد.

مثال ۵-۵. با مراجعه به مثال ۵-۱، فرض کنید که می‌خواستیم این فرض صفر را که $\theta\geq ۰/۹۰$ در برابر این فرض مقابل که $\theta<۰/۹۰$ آزمون کنیم. تابع توان متناظر با همان ملاک آزمون که در آن فرض صفر را می‌پذیریم هرگاه $x>۱۴$ و آن را رد می‌کنیم هرگاه $x\leq ۱۴$، بررسی کنید. مانند قبل، x تعداد موفقیت‌ها(بهبودی‌ها) در $n=۲۰$ امتحان است.

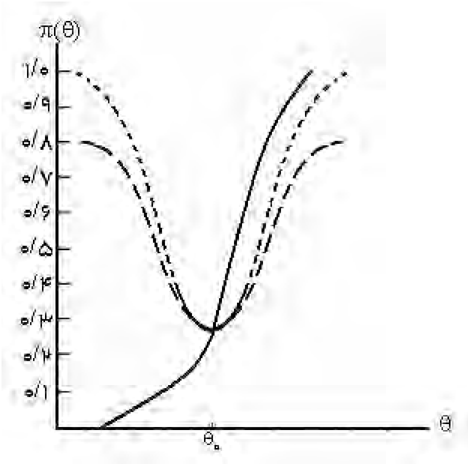
حل. با انتخاب آن مقادیر θ که برای آنها احتمال‌های نظیر $\alpha(\theta)$ یا $\beta(\theta)$ در جدول ۱ موجودند، احتمال‌های $\alpha(\theta)$ی به‌دست آوردن حداکثر ۱۴ موفقیت را برای $\theta=۰/۹۰$ یا $\theta=۰/۹۵$ و احتمال‌های $\beta(\theta)$ی به‌دست آوردن ۱۴ موفقیت را برای $\theta=۰/۸۵,۰/۸۰,\dots,۰/۵۰$ پیدا می‌کنیم. این احتمال‌ها و مقادیر تابع توان $\pi(\theta)$، در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

θ	احتمال خطای نوع I α(θ)	احتمال خطای نوع II β(θ)	احتمال رد $H_{\circ}$ π(θ)
۰/۹۵	۰/۰۰۰۳		۰/۰۰۰۳
۰/۹۰	۰/۰۱۱۴		۰/۰۱۱۴
۰/۸۵		۰/۹۳۲۶	۰/۰۶۷۴
۰/۸۰		۰/۸۰۴۲	۰/۱۹۵۸
۰/۷۵		۰/۶۱۷۱	۰/۳۸۲۹
۰/۷۰		۰/۴۱۶۳	۰/۵۸۳۷
۰/۶۵		۰/۲۴۵۵	۰/۷۵۴۵
۰/۶۰		۰/۱۲۵۵	۰/۸۷۴۵
۰/۵۵		۰/۰۵۵۳	۰/۹۴۴۷
۰/۵۰		۰/۰۲۰۷	۰/۹۷۹۳

نمودار این تابع توان در شکل ۵–۲ نشان داده شده است. البته، این نمودار فقط قابل اعمال برای ناحیه‌ی بحرانی $x \leq ۱۴$ مثال ۵–۱ است، ولی مقایسه‌ی آن با تابع توان یک ملاک آزمون آرمانی(بی‌خطا) برای این مسأله، که به‌کمک خط‌چین شکل ۵–۳ داده شده، جالب است.



شکل ۵–۲. نمودار برای مثال ۵–۵



شکل ۵-۳. تابع‌های توان

توابع توان نقش بسیار مهمّی در ارزیابی آزمون‌های آماری، به‌ویژه در مقایسه‌ی چندین ناحیه‌ی بحرانی که همه قابل استفاده در یک فرض صفر مفروض در برابر فرض مقابل مفروضی هستند، دارند. ضمناً، اگر در شکل ۵-۲ احتمال‌های قبول کردن H_0 را (به جای احتمال‌های رد کردن H_0) با نقطه‌یابی رسم می‌کردیم، **منحنی مشخصه‌ی عمل** ناحیه‌ی بحرانی مفروض را به‌دست می‌آوریم. به عبارت دیگر، مقادیر تابع مشخصه‌ی عمل، که عمدتاً در کاربردهای صنعتی موجود است، با $1-\pi(\theta)$ داده می‌شوند.

در نظریه‌ی نیمن- پیرسن آزمون‌های آماری، α، یعنی احتمال خطای نوع I، را ثابت می‌گیریم و این مستلزم آن است که فرض صفر H_0 فرض ساده‌ای باشد، مثلاً، $\theta=\theta_0$. در نتیجه، تابع توان هر آزمون این فرض صفر، از نقطه‌ی (θ_0,α)، تنها نقطه‌ای که در آن مقدار تابع توان برابر احتمال ارتکاب خطایی است، خواهد گذشت. با این کار، مقایسه‌ی تابع‌های توان چندین ناحیه‌ی بحرانی، که همه برای آزمون فرض صفر ساده‌ی $\theta=\theta_0$ در برابر یک فرض مرکب، مثلاً فرض مقابل $\theta\neq\theta_0$ طرح شده‌اند، تسهیل می‌شود. برای روشن شدن مطلب، شکل ۵-۳ را در نظر بگیرید که تابع‌های توان سه ناحیه‌ی بحرانی مختلف، یا ملاک آزمون را که برای این منظور طرح شده‌اند، می‌دهد. چون به‌ازای هر مقدار θ بجز θ_0 مقادیر تابع‌های توان، احتمال‌های اتخاذ

تصمیم‌های درست را می‌دهند، مطلوب آن است که آنها را تا سرحد امکان به یک نزدیک کرد. بنابراین از طریق وارسی دیده می‌شود که ناحیه‌ی بحرانی که تابع توان آن به منحنی نقطه چین شکل ۵–۳ داده شده است بر ناحیه‌ی بحرانی که تابع توان آن با منحنی خط چین داده شده است، برتری دارد. احتمال مرتکب نشدن خطای نوع II با اوّلین ناحیه‌ی بحرانی، همواره بیشتر از احتمال مرتکب نشدن این نوع خطا با ناحیه‌ی بحرانی دوّم است، و گوییم که اوّلین ناحیه‌ی بحرانی **به‌طور یکنواخت تواناتر** از دوّمی است؛ ناحیه‌ی بحرانی دوّم را غیر قابل قبول نیز می‌نامند.

قائل شدن تمایزی بدین روشنی به هنگام مقایسه‌ی ناحیه‌های بحرانیی که تابع‌های توان آنها با منحنی‌های پررنگ در شکل ۵–۳ داده شده‌اند، امکان‌پذیر نیست. در این حالت ناحیه‌ی بحرانی اوّل برای $\theta < \theta_0$ ارجح است در حالی که دوّمی برای $\theta > \theta_0$ ارجح است. در چنین وضعیت‌هایی به ملاک‌های بیشتری برای مقایسه‌ی تابع‌های توان نیازمندیم که از آن‌جمله یکی ملاکی است که در تمرین ۵–۲۴ داده شده است. توجه کنید که اگر فرض مقابل، $\theta > \theta_0$ بود، ناحیه‌ی بحرانیی که تابع توان آن با منحنی پررنگ داده شده است به‌طور یکنواخت تواناتر از ناحیه‌ی بحرانیی می‌بود که تابع توان آن با منحنی نقطه‌چین داده شده است.

در حالت کلی، برای آزمون یک فرض ساده در برابر یک فرض مقابل مرکب، α، احتمال مرتکب شدن خطای نوع I را مشخص می‌کنیم و یک ناحیه‌ی بحرانی را به‌طور یکنواخت تواناتر از دیگری می‌نامیم هرگاه مقادیر تابع توان آن همواره بزرگتر یا مساوی با تابع توان دیگری بوده و نامساوی اکید حداقل برای یک مقدار پارامتر مورد نظر برقرار باشد. اگر در مسأله‌ی مفروضی، یک ناحیه‌ی بحرانی با اندازه‌ی α به‌طور یکنواخت تواناتر از هر ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α باشد، آن را به‌طور یکنواخت تواناترین نامند. متأسفانه، ناحیه‌های بحرانی **به‌طور یکنواخت تواناترین** در موقعی که یک فرض ساده را در برابر یک فرض مقابل مرکب آزمون می‌کنیم، به ندرت موجودند. البته، وقتی یک فرض ساده را در برابر یک فرض مقابل ساده آزمون می‌کنیم، یک ناحیه‌ی بحرانی تواناترین به اندازه‌ی α، به صورتی که در لم نیمن–پیرسن ارائه شد، در واقع همواره به‌طور یکنواخت تواناترین است.

تاکنون همواره فرض می‌کردیم که ناحیه‌ی قبول H_0 معادل با ناحیه‌ی رد H_1

است و برعکس امّا مثلاً در **آزمون‌های چندمرحله‌ای** یا **دنباله‌ای**، که در آن فرض‌های مقابل عبارت از پذیرفتن H_0، پذیرفتن H_1، یا موکول کردن اخذ تصمیم به تهیه‌ی داده‌های بیشتری است، وضعیت طور دیگری است. همچنین در به اصطلاح **آزمون‌های معنی‌دار بودن**، که در آن، به دلیل رد کردن H_0 خودداری از داوری است و نه پذیرش H_0، وضعیت به گونه‌ای دیگر است. مثلاً اگر بخواهیم این فرض صفر را که سکه‌ای کاملاً همگن است در برابر این فرض که چنین نیست آزمون کنیم، و در ۱۰۰ بار پرتاب سکه، ۵۷ شیر و ۴۳ خط بیاید، این کار ما را قادر به رد فرض صفر وقتی $\alpha = ۰/۰۵$ است، نخواهد کرد (تمرین ۵-۲۸). مع‌هذا چون فقط چند شیر بیشتر از ۵۰، که برای یک سکه‌ی همگن انتظار داریم، به‌دست آورده‌ایم، شاید به‌همان اندازه اکراه داشته باشیم که فرض صفر را به‌عنوان درست بپذیریم. برای اجتناب از این کار، می‌توانیم بگوییم که اختلاف بین ۵۰ و ۵۷، یعنی تعداد شیرهای مورد انتظار و شیرهای حاصل را می‌توان به‌نحو موجهی معلول تصادف دانست - یا می‌توان گفت که این اختلاف آن اندازه زیاد نیست که فرض صفر را قبول نکرده باشیم، نمی‌توانیم مرتکب خطای نوع I شویم. عمدتاً در ارتباط با آزمون‌هایی از این نوع است که به احتمال خطای نوع I، **سطح معنی‌دار بودن** اطلاق می‌کنیم.

۵-۵ آزمون‌های نسبت درستنمایی

لم نیمن- پیرسن وسیله‌ای برای ساختن تواناترین ناحیه‌های بحرانی برای آزمون کردن یک فرض صفر ساده در برابر یک فرض مقابل ساده است، ولی در فرض‌های مرکب همواره قابل به‌کار بردن نیست. اینک روشی کلی برای ساختن ناحیه‌های بحرانی برای آزمون‌های فرض‌های مرکب ارائه می‌کنیم که در اغلب حالات، خواص بسیار رضایت‌بخشی دارند. آزمون‌های حاصل، که **آزمون‌های نسبت درستنمایی** نامیده می‌شوند، مبتنی بر تعمیمی از روش بخش ۵-۳ هستند، ولی لزوماً به‌طور یکنواخت تواناترین نیستند. در اینجا این روش را در رابطه با آزمون‌های مربوط به یک پارامتر θ و جامعه‌های پیوسته مورد بحث قرارمی‌دهیم، امّا همه‌ی استدلال‌های‌مان را می‌توان به آسانی به حالت چند پارامتری و جامعه‌های گسسته تعمیم داد.

برای توضیح شیوه‌ی نسبت درستنمایی، فرض می‌کنیم که $X_1, X_2, \cdots$، و X_n

نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای باشد که چگالی آن در x عبارت از $f(x;\theta)$ است، و فرض می‌کنیم که Ω مجموعه‌ی مقادیری است که پارامتر θ اختیار می‌کند. غالباً Ω را فضای پارامتر θ می‌نامیم. فرض صفری که می‌خواهیم آزمون کنیم عبارت است از

$$H_{\circ}:\theta\in\omega$$

و فرض مقابل عبارت است از

$$H_{1}:\theta\in\omega'$$

که در آن ω زیرمجموعه‌ی Ω و ω' متمم ω نسبت به Ω است. بنابراین، فضای پارامتر θ به مجموعه‌های مجزای ω و ω' افراز می‌شود؛ طبق فرض صفر، θ عضو مجموعه‌ی اوّل است و طبق فرض مقابل عضوی از مجموعه‌ی دوّم است. در بیشتر مسائل، Ω یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی، مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت، بازه‌ای از اعداد حقیقی، یا مجموعه‌ای گسسته از اعداد حقیقی است.

وقتی $H_{\circ}$ و H_{1} هر دو فرض‌های ساده‌ای باشند، ω و ω' هریک فقط یک عضو دارند، و در بخش ۵–۳ ما آزمون‌هایی برای مقایسه‌ی درستنمایی‌های $L_{\circ}$ و L_{1} ساختیم. در حالت کلی، که در آن حداقل یکی از دو فرض مرکب است، ما به‌جای این کار $\max L_{\circ}$ و $\max L$ را مقایسه می‌کنیم که در آن $\max L_{\circ}$ مقدار ماکسیمم تابع درستنمایی برای کلیه‌ی مقادیر θ در ω است، و $\max L$ مقدار تابع درستنمایی برای همه‌ی مقادیر θ در Ω است. به‌عبارت دیگر، اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای داشته باشیم که چگالی آن در x برابر $f(x;\theta)$ است، $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ مشروط به این محدودیت است که θ باید عضوی از ω باشد، و $\hat{\hat{\theta}}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ برای کلیه‌ی مقادیر θ در Ω است، بنابراین

$$\max L_{\circ}=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\hat{\theta})$$

و

$$\max L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\hat{\hat{\theta}}).$$

این کمیت‌ها هر دو مقادیر متغیرهای تصادفی‌اند زیرا آنها به مقادیر مشاهده شده‌ی $x_1, x_2, \cdots, x_n$ بستگی دارند، و نسبت آنها

$$\lambda = \frac{\max L_\circ}{\max L}$$

مقداری از **آماره‌ی نسبت درستنمایی** Λ نامیده می‌شود.

چون $\max L_\circ$ و $\max L$ هر دو مقادیر یک تابع درستنمایی‌اند، و بنابراین هرگز منفی نیستند، نتیجه می‌شود که $\lambda \geq \circ$؛ همچنین، چون ω زیرمجموعه‌ای از فضای پارامتر Ω است، نتیجه می‌شود که $\lambda \leq ۱$. وقتی فرض صفر نادرست است، انتظار داریم که $\max L_\circ$ در مقایسه با $\max L$ کوچک باشد، که در این صورت λ نزدیک صفر خواهد بود. از طرف دیگر وقتی که فرض صفر درست است و $\theta \in \omega$، انتظار داریم که $\max L_\circ$ به $\max L$ نزدیک باشد، که در این صورت λ به یک نزدیک خواهد بود. لذا، بنابر آزمون نسبت درستنمایی، فرض صفر $H_\circ$ رد می‌شود اگر و تنها اگر λ در ناحیه‌ی ردی به شکل $\lambda \leq k$ قرار گیرد که در آن $\circ < k < ۱$. به‌طور خلاصه،

تعریف ۵-۴. اگر ω و ω' زیرمجموعه‌های متمم از فضای پارامتری Ω باشند، و اگر

$$\lambda = \frac{\max L_\circ}{\max L}$$

که در آن $\max L_\circ$ و $\max L$ به‌ترتیب مقادیر ماکسیمم تابع‌های درستنمایی برای کلیه‌ی مقادیر θ در ω و Ω هستند، در این صورت ناحیه‌ی بحرانی

$$\lambda \leq k$$

که در آن $\circ < k < ۱$، یک **آزمون نسبت درستنمایی** را برای فرض صفر $\theta \in \omega$ در برابر فرض مقابل $\theta \in \omega'$ تعریف می‌کند.

اگر $H_\circ$ فرض ساده‌ای باشد، k طوری انتخاب می‌شود که اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی برابر α باشد؛ اگر $H_\circ$ مرکب باشد، k طوری انتخاب می‌شود که احتمال خطای نوع I به‌ازای کلیه‌ی مقادیر θ در ω کوچکتر از α یا مساوی با آن، و در صورت امکان، حداقل برای یک مقدار θ در ω برابر α باشد. بنابراین اگر $H_\circ$ فرضی ساده و $g(\lambda)$ چگالی Λ در λ باشد وقتی $H_\circ$ درست است، در این صورت k باید طوری باشد که

$$P(\Lambda \leq k) = \int_\circ^k g(\lambda)d\lambda = \alpha.$$

در حالت گسسته به‌جای انتگرال، مجموع قرار داده می‌شود و k بزرگترین مقداری اختیار می‌شود که برای آن، مجموع کوچکتر از α یا مساوی آن است.

مثال ۵-۶. ناحیه‌ی بحرانی آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون فرض صفر

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

در برابر فرض مقابل مرکب

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

را برمبنای نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم σ^2 پیدا کنید.

حل. چون ω تنها شامل μ_0 است، نتیجه می‌شود که $\hat{\mu} = \mu_0$، و چون Ω مجموعه‌ی کلیه‌ی اعداد حقیقی است، بنابه روش بخش ۳-۷، نتیجه می‌شود که $\hat{\mu} = \bar{x}$. بنابراین

$$\max L_0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n . e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\sum(x_i - \mu_0)^2}$$

و

$$\max L = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n . e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

که در آن مجموع‌ها از $i=1$ تا $i=n$ محاسبه می‌شوند، و مقدار آماره‌ی نسبت درستنمایی پس از ساده کردن، به‌صورت

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\sum(x_i - \mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}.\sum(x_i - \bar{x})^2}} = e^{-\frac{n}{2\sigma^2}.\sum(x_i - \mu_0)^2}$$

در می‌آید. بنابراین ناحیه‌ی بحرانی آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از

$$e^{-\frac{n}{2\sigma^2}.\sum(x_i - \mu_0)^2} \leq k$$

و، بعد از گرفتن لگاریتم و تقسیم بر $-\frac{n}{2\sigma^2}$، به‌صورت

$$(\bar{x} - \mu_0)^2 \geq -\frac{2\sigma^2}{n}.\ln k$$

یا

$$|\bar{x} - \mu_0| \geq K$$

در می‌آید که درآن K باید طوری معین شود که اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی برابر α شود. توجه کنید که $\ln k$ با توجه به اینکه $0 < k < 1$، منفی است.

چون $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ_0 و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است، معلوم می‌شود که ناحیه‌ی بحرانی این آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از

$$|\bar{x}-\mu_0| \geq z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یا، معادل آن

$$|z| \geq z_{\alpha/2}$$

که در آن

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

به‌عبارت دیگر، فرض صفر باید در صورتی که z مقداری بزرگتر از یا مساوی $z_{\alpha/2}$، یا مقداری نابیشتر از $-z_{\alpha/2}$ اختیار کند، رد شود.

در مثال قبل یافتن مقدار ثابتی که اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی را α کند، آسان بود زیرا می‌توانستیم به توزیع معلوم $\overline{X}$ رجوع کنیم و مجبور نبودیم که توزیع خود Λ، آماره‌ی نسبت درستنمایی را به‌دست آوریم. چون توزیع Λ عموماً بسیار پیچیده است و این کار محاسبه‌ی k را مشکل می‌کند، اغلب ارجح آن است که تقریب زیر را به‌کار بریم که مرجعی برای برهان آن در پایان فصل داده شده است.

قضیه‌ی ۵-۲. برای n بزرگ، توزیع $-2\ln\Lambda$، تحت شرایطی بسیار کلی، به توزیع خی‌دو با یک درجه‌ی آزادی میل می‌کند.

باید اضافه کنیم که این قضیه تنها برای حالت یک پارامتری قابل اعمال است؛ اگر جامعه متضمن بیش از یک پارامتر مجهول باشد که بر فرض صفر، r محدودیت را اعمال می‌کند، تعداد درجه‌های آزادی در توزیع خی‌دوی تقریبی $-2\ln\Lambda$ برابر r است. بنابراین، اگر بخواهیم این فرض صفر را آزمون کنیم که میانگین و واریانس مجهول یک جامعه‌ی نرمال، به‌ترتیب μ_0 و σ_0^2 هستند در برابر این فرض مقابل که $\mu \neq \mu_0$ و $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$، تعداد درجه‌های آزادی در توزیع خی‌دوی تقریبی $-2\ln\Lambda$ برابر

۲ خواهد بود دو محدودیت عبارت‌اند از $\mu=\mu_0$ و $\sigma^2=\sigma_0^2$.

چون مقادیر کوچک λ متناظر با مقادیر بزرگ $-2\ln\Lambda$ هستند، می‌توانیم قضیه‌ی ۵-۲ را برای نوشتن ناحیه‌ی بحرانی این آزمون نسبت درستنمایی تقریبی به‌صورت

$$-2\ln\lambda \geq \chi^2_{\alpha,1}$$

مورد استفاده قرار دهیم که درآن $\chi^2_{\alpha,1}$ به‌صورتی است که در بخش ۲-۳ تعریف شده است. در رابطه با مثال ۵-۶ عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$-2\ln\lambda = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2 = \left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

که در واقع مقداری است از یک متغیرتصادفی که توزیع خی‌دو با یک درجه‌ی آزادی دارد.

همان‌گونه که قبلاً خاطر نشان کردیم، روش نسبت درستنمایی عموماً نتایجی رضایت‌بخش به‌دست می‌دهد. این مطلب که همیشه چنین نیست در مثال زیر، که کمی غیرعادی است، تشریح شده است.

مثال ۵-۷. می‌خواهیم تنها برمبنای یک مشاهده، این فرض ساده را که توزیع احتمال X به‌صورت

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

است در برابر این فرض مقابل مرکب که توزیع X به‌صورت

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$g(x)$	$\frac{a}{12}$	$\frac{b}{12}$	$\frac{c}{12}$	$\frac{2}{4}$	0	0	0

است آزمون کنیم، که در آن $a+b+c=1$. نشان دهید که ناحیه‌ی بحرانی حاصل از طریق روش نسبت درستنمایی، غیرقابل قبول است.

حل. فرض مقابل مرکب، شامل کلیه‌ی توزیع‌های احتمالی است که با تخصیص مقادیر مختلف از ۰ تا ۱ برای a,b,c، تنها با قید این محدودیت که $a+b+c=1$، به‌دست می‌آیند. برای تعیین λ به‌ازای هر مقدار x، ابتدا قرار می‌دهیم $x=1$. برای این مقدار، به‌دست می‌آوریم $\max L_0=\frac{1}{12}$، $\max L=\frac{1}{3}$(متناظر با $a=1$)، و بنابراین $\lambda=\frac{1}{4}$. با تعیین λ به‌ازای سایر مقادیر x به روشی مشابه، نتایجی را که در جدول زیر نشان داده

شده‌اند، به‌دست می‌آوریم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
λ	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	۱	۱	۱

اگر اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی $\alpha = ۰/۲۵$ باشد، نتیجه می‌گیریم که روش نسبت درستنمایی، ناحیه‌ی بحرانی به‌دست می‌دهد که به‌ازای آن فرض صفر رد می‌شود در صورتی که $\lambda = \frac{۱}{۴}$، یعنی وقتی $x = ۱$، $x = ۲$، یا $x = ۳$؛ روشن است که

$$f(۱) + f(۲) + f(۳) = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} = ۰/۲۵$$

احتمال متناظر خطای نوع II با $g(۴) + g(۵) + g(۶) + g(۷)$ داده می‌شود، و بنابر این برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

حال ناحیه‌ی بحرانی را در نظر می‌گیریم که به‌ازای آن، فرض صفر تنها وقتی رد می‌شود که $x = ۴$. اندازه‌ی آن نیز $\alpha = ۰/۲۵$ است زیرا $f(۴) = \frac{۱}{۴}$، ولی احتمال متناظر برای خطای نوع II عبارت است از

$$g(۱) + g(۲) + g(۳) + g(۵) + g(۶) + g(۷) = \frac{a}{۳} + \frac{b}{۳} + \frac{c}{۳} + ۰ + ۰ + ۰ = \frac{۱}{۳}$$

و چون این عدد کمتر از $\frac{۲}{۳}$ است، ناحیه‌ی بحرانی حاصل از روش نسبت درستنمایی غیرقابل قبول است. البته همان‌طور که در ابتدا خاطر نشان کردیم، این مثال تا حدی غیرعادی است.

تمرین

۵-۱۹. با رجوع به تمرین ۵-۳ ، فرض کنید که می‌خواستیم فرض صفر $k \le ۲$ را در برابر فرض مقابل $k > ۲$ آزمون کنیم. احتمال‌های

الف) خطاهای نوع I را برای $k = ۰,۱,۲$،

ب) خطاهای نوع II را برای $k = ۴,۵,۶,۷$،

پیدا کنید. همچنین نمودار تابع توان متناظر را رسم کنید.

۵-۲۰. با رجوع به مثال ۵-۵، فرض کنید که فرض صفر را وقتی $x \le ۱۵$ رد کنیم و آن را بپذیریم هرگاه $x > ۱۵$. $\pi(\theta)$ را بر همان مقادیر θی جدول بخش ۵-۵ محاسبه و نمودار تابع توان ملاک آزمون را رسم کنید.

۵-۲۱. در حل مثال ۵-۵، درستی گامی را که به

$$\lambda = e^{-\frac{n}{۲\sigma^۲}(\bar{x}-\mu_۰)^۲}$$

منجر شد، تحقیق کنید.

۵-۲۲. تعداد موفقیت‌ها در n امتحان برای آزمون این فرض که پارامتر θی یک توزیع دوجمله‌ای مساوی $\frac{۱}{۲}$ است در برابر این فرض مقابل که مساوی $\frac{۱}{۲}$ نیست، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

الف) عبارتی برای آماره‌ی نسبت درستنمایی پیدا کنید.

ب) از نتیجه‌ی قسمت الف استفاده کرد، نشان دهید که ناحیه‌ی بحرانی آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$x.\ln x + (n-x).\ln(n-x) \geq K$$

نوشت که در آن x تعداد موفقیت‌های مشاهده شده است.

ج) با بررسی منحنی $f(x) = x.\ln x + (n-x).\ln(n-x)$ ، به‌ویژه مینیمم آن، و تقارن آن، نشان دهید که ناحیه‌ی بحرانی این آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$\left| x - \frac{n}{۲} \right| \geq k$$

که در آن K ثابتی است که به اندازه‌ی ناحیه‌ی بحرانی بستگی دارد.

۵-۲۳. می‌خواهیم از نمونه‌ای به اندازه‌ی n برای آزمون این فرض صفر که پارامتر θی یک جامعه‌ی نمایی برابر $\theta_۰$ است در برابر این فرض مقابل که مساوی $\theta_۰$ نیست، استفاده کنیم.

الف) عبارتی برای آزمون نسبت درستنمایی پیدا کنید.

ب) از نتیجه‌ی قسمت الف استفاده کرده، نشان دهید که ناحیه‌ی بحرانی آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\bar{x}.e^{-\bar{x}/\theta_۰} \leq K.$$

۵-۲۴. وقتی یک فرض صفر ساده را در برابر یک فرض مقابل مرکب آزمون می‌کنیم، یک ناحیه‌ی بحرانی، نااریب نامیده می‌شود در صورتی که تابع توان متناظر، مقدار مینیمم خود را به‌ازای مقداری از پارامتر اختیار می‌کند که تحت فرض صفر قید شده است. به‌عبارت دیگر، یک ناحیه‌ی بحرانی نااریب است هرگاه احتمال رد فرض صفر

موقعی که فرض صفر درست است، دارای کمترین مقدار باشد. با مفروض بودن تنها یک مشاهده از متغیر تصادفی X با چگالی

$$f(x)=\begin{cases}1+\theta^2(\frac{1}{2}-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

که در آن $-1\leq\theta\leq 1$، نشان دهید که ناحیه‌ی بحرانی $x\leq\alpha$، یک ناحیه‌ی بحرانی نااریب و به‌طور یکنواخت تواناترین با اندازه‌ی α برای آزمون کردن فرض صفر $\theta=0$ در برابر فرض مقابل $\theta\neq 0$ در اختیار می‌گذارد.

۵-۲۵. از مشاهده‌ای واحد برای آزمون این فرض صفر که میانگین زمان انتظار بین لرزه‌ها در یک ایستگاه زلزله‌نگاری (میانگین جامعه‌ای نمایی) برابر $\theta=10$ (برحسب ساعت) است در برابر این فرض مقابل که $\theta\neq 10$ (برحسب ساعت) است استفاده می‌شود. اگر فرض صفر را وقتی و تنها وقتی رد کنیم که مقدار مشاهده شده کمتر از ۸ یا بزرگتر از ۱۲ است، پیدا کنید

الف) احتمال خطای نوع I،

ب) احتمال‌های خطای نوع II، وقتی $\theta=2,4,6,8,12,16,20$.

همچنین تابع توان این ملاک آزمون را رسم کنید.

۵-۲۶. نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی ۶۴ در آزمون این فرض صفر که برای گروه سنی خاص، میانگین نمرات در یک آزمون پیشرفت (میانگین جامعه‌ای نرمال با واریانس $\sigma^2=256$) کوچکتر از ۴۰ یا مساوی آن است، در برابر این فرض مقابل که بزرگتر از ۴۰ است، به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر را فقط و فقط در صورتی رد کنیم که میانگین نمونه‌ی تصادفی بیشتر از ۴۳/۵ باشد، پیدا کنید

الف) احتمال‌های خطای نوع I وقتی، $\mu=37,38,39,40$،

ب) احتمال‌های خطای نوع II وقتی، $\mu=41,42,43,44,45,46,47,48$،

همچنین نمودار تابع توان این ملاک آزمون را رسم کنید.

۵-۲۷. مجموع مقادیر حاصل در نمونه‌ای به اندازه‌ی ۵، برای آزمون این فرض صفر که در تقاطعی به‌طور متوسط بیش از دو تصادف در هر هفته وجود دارد که برای این جامعه‌ی پواسون $\lambda>2$، در برابر این فرض مقابل که به‌طور متوسط تعداد تصادف‌ها ۲

یا کمتر از ۲ است به کار می‌رود. اگر فرض صفر وقتی و تنها وقتی رد شود که مجموع مشاهدات پنج یا کمتر از پنج است، مطلوب است

الف) احتمال‌های خطاهای نوع I، وقتی $\lambda =$ ۲/۲,۲/۴,۲/۶,۲/۸,۳/۰،

ب) احتمال‌های خطاهای نوع II، وقتی $\lambda =$ ۲/۰,۱/۵,۱/۰,۰/۵.

همچنین نمودار تابع توان این ملاک آزمون را رسم کنید.

۵–۲۸. تحقیق کنید که ۵۷ شیر و ۴۳ خط در ۱۰۰ پرتاب یک سکه به ما این امکان را نمی‌دهد که این فرض صفر را که سکه کاملاً همگن است (در برابر این فرض مقابل که سکه‌ی کاملاً همگن نیست) در سطح معنی‌دار بودن $\alpha =$ ۰/۰۵ رد کنیم. (راهنمایی: از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای استفاده کنید.)

فصل ششم

آزمون فرض: کاربردها

۶-۱ مقدمه

در فصل پنجم قسمتی از نظریه‌ای را که مبنای آزمون‌های آماری است، مورد بحث قرار دادیم و در این فصل برخی از آزمون‌های استاندارد را که استفاده‌ی بسیار وسیعی در کاربردها دارند، ارائه می‌کنیم. اغلب این آزمون‌ها، حداقل آنهایی را که مبتنی بر توزیع‌های معلوم جامعه‌اند، می‌توان با تکنیک نسبت درستنمایی به‌دست آورد.

برای توضیح اصطلاحاتی که به‌کار خواهیم برد، وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن می‌خواهیم فرض صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در برابر فرض مقابل دو طرفه‌ی $H_1 : \theta \neq \theta_0$ آزمون کنیم. چون معقول به نظر می‌آید که فرض صفر را وقتی برآورد نقطه‌ای $\hat{\theta}$ برای θ به θ_0 نزدیک است بپذیریم و وقتی $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر از θ_0 است آن را رد کنیم، منطقی خواهد بود که ناحیه‌ی بحرانی را متشکل از هر دو دم توزیع نمونه‌گیری آماره‌ی آزمون $\hat{\Theta}$ بگیریم. چنین آزمونی، **آزمون دو دمی** نامیده می‌شود.

از طرف دیگر، اگر بخواهیم فرض صفر $H_0 : \theta = \theta_0$ را در برابر **فرض مقابل یک طرفه** $H_1 : \theta < \theta_0$ آزمون کنیم، به نظر معقول می‌رسد که H_0 را تنها وقتی $\hat{\theta}$ خیلی کوچکتر از θ_0 است، رد کنیم. بنابراین، در این حالت منطقی خواهد بود که ناحیه‌ی بحرانی را تنها متشکل از دم چپ توزیع نمونه‌گیری $\hat{\Theta}$ بگیریم. به‌همین نحو، در آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ در برابر فرض مقابل یک‌طرفه‌ی $H_1 : \theta > \theta_0$، H_0 را تنها برای مقادیر بزرگ $\hat{\theta}$ رد می‌کنیم و ناحیه‌ی بحرانی تنها متشکل از دم راست توزیع نمونه‌گیری $\hat{\Theta}$ است. هر آزمونی که در آن ناحیه‌ی بحرانی تنها متشکل از یک دم توزیع نمونه‌ای

آماره‌ی آزمون باشد، **آزمون یک دمی** نامیده می‌شود.

مثلاً، برای فرض مقابل دو طرفه‌ی $\mu \neq \mu_{\circ}$، در مثال ۵-۶، تکنیک نسبت درستنمایی به یک آزمون دو طرفه با ناحیه‌ی بحرانی

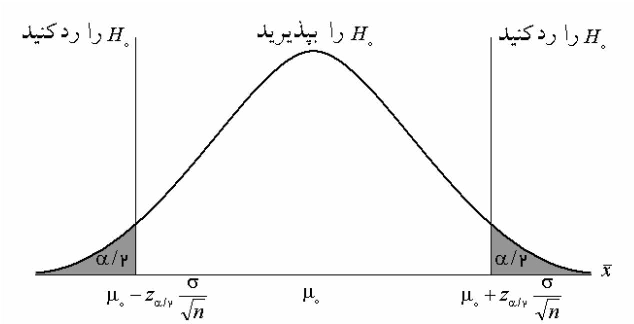
$$|\bar{x} - \mu_{\circ}| \geq z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یا

$$\bar{x} \leq \mu_{\circ} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \qquad \bar{x} \geq \mu_{\circ} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

منجر شد. همان‌طور که در شکل ۶-۱ نشان داده شده، در صورتی که $\bar{X}$ مقداری اختیار کند که در هر یک از دو دم توزیع نمونه‌گیری آن قرار بگیرد، فرض صفر $\mu = \mu_{\circ}$ رد می‌شود. به‌طور نمادین، این ناحیه‌ی بحرانی را می‌توان به شکل $z \leq -z_{\alpha/2}$ و $z \geq z_{\alpha/2}$ بیان کرد، که در آن

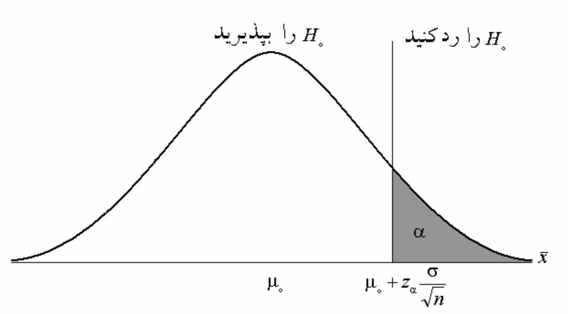
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\circ}}{\sigma/\sqrt{n}}.$$



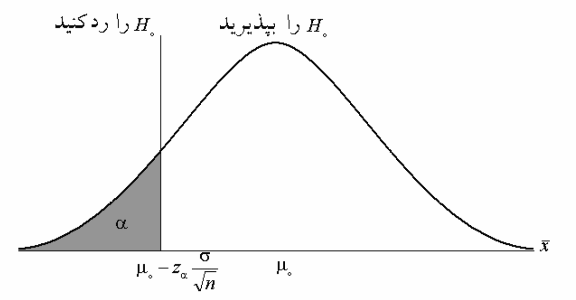
شکل ۶-۱: ناحیه‌ی بحرانی برای آزمون دو دمی

اگر از فرض مقابل یک طرفه‌ی $\mu > \mu_{\circ}$ استفاده کرده بودیم، تکنیک نسبت درستنمایی به آزمون یک طرفه‌ای که ناحیه‌ی بحرانی آن در شکل ۶-۲ نشان داده شده منجر می‌شد، و اگر فرض مقابل یک‌طرفه‌ی $\mu < \mu_{\circ}$ را به‌کار برده بودیم، روش نسبت درستنمایی به آزمون یک طرفه‌ای منجر می‌شد که ناحیه‌ی بحرانی آن در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. به‌نظر معقول می‌رسد که در حالت اوّل فرض صفر را تنها برای

مقادیر $\overline{X}$ که در دم سمت راست توزیع نمونه‌گیری آن قرار می‌گیرند، رد کنیم، و در حالت دوّم فرض صفر را تنها برای مقادیر $\overline{X}$ که در دم سمت چپ توزیع نمونه‌گیری آن قرار می‌گیرند، رد کنیم. به‌صورت نمادی، ناحیه‌های بحرانی متناظر را می‌توان به صورت $z \geq z_\alpha$ و $z \leq -z_\alpha$ نوشت که در آن z همان است که قبلاً تعریف شده است. گرچه استثناهایی بر این قاعده هست (تمرین ۴-۳)، فرض‌های مقابل دو طرفه معمولاً به آزمون‌های دو دمی و فرض‌های مقابل یک طرفه به آزمون‌های یک دمی منجر می‌شوند.



شکل ۶-۲: ناحیه‌ی بحرانی برای آزمون یک دمی $\mu > \mu_0$



شکل ۶-۳: ناحیه‌ی بحرانی برای آزمون یک دمی $\mu < \mu_0$

به‌طور سنتی، مرسوم است که نکات اصلی آزمون فرض‌ها را به کمک مراحل زیر نشان می‌دهند.

۱. H_0 و H_1 را فرمول‌بندی و α را مشخص کنید.

۲. با استفاده از توزیع نمونه‌گیری آماره‌ی آزمون مناسبی، ناحیه‌ای بحرانی به اندازه‌ی

α را معین کنید.
۳. مقدار آماره‌ی آزمون را از داده‌های نمونه‌ای معین کنید.
۴. بررسی کنید که آیا مقدار آماره‌ی آزمون در ناحیه‌ی بحرانی می‌افتد یا نه و مطابق آن، فرض صفر را رد کنید، یا بپذیرد، یا از داوری خودداری کنید.

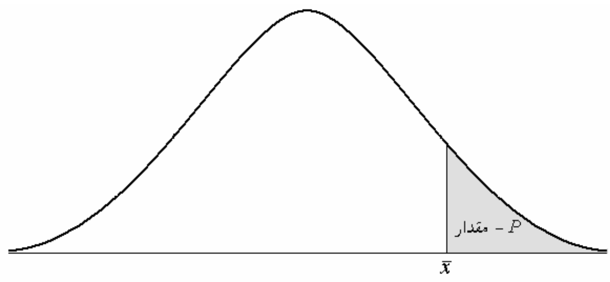
در شکل‌های ۶-۱، ۶-۲، و ۶-۳ خطوط مجزاکننده‌ی ملاک‌های آزمون (یعنی، مرزهای ناحیه‌های بحرانی، یا مقادیر بحرانی) نیازمند دانستن z_α یا $z_{\alpha/۲}$ اند. این مقادیر به سادگی از جدول ۳ (یا مبسوط‌تر توزیع نرمال استاندارد) برای هر سطح معنی‌دار بودن α در دسترس‌اند، امّا مسأله همواره ساده نیست. مثلاً، اگر توزیع نمونه‌گیری آماره‌ی آزمون، توزیع t، توزیع خی‌دو، یا توزیع F از کار درآیند، جدول‌های متداول، مقادیر لازم t_α، $t_{\alpha/۲}$، $\chi^۲_\alpha$، $\chi^۲_{\alpha/۲}$، F_α و یا $F_{\alpha/۲}$ را در اختیار می‌گذارند امّا این مقادیر تنها برای چند مقدار α در دسترس قرار می‌گیرد. عمدتاً به این دلیل، رسم برآن است که آزمون‌های فرض‌های آماری را تقریباً به صورت انحصاری با سطح معنی‌دار بودن α برابر با ۰/۰۵ یا ۰/۰۱ بنا می‌کنند. این کار ممکن است کاملاً دلخواه به نظرآید، و البته چنین نیز هست، و به این دلیل است که امروزه استفاده از P-مقدارها (تعریف ۶-۱) ارجحیت یافته است. به روش دیگر، می‌توانستیم از یک رهیافت نظریه‌ی تصمیمی استفاده کنیم و بدین ترتیب پیامدهای همه‌ی عمل‌های ممکن را به حساب آوریم. امّا، همچنان که قبلاً متذکر شدیم، " ... مسائل زیادی موجودند که در آنها تخصیص مقادیر عددی به همه‌ی پیامدهای عمل‌های شخص و احتمال‌های همه‌ی امکان‌ها، اگر غیرممکن هم نباشد، دشوار است."

با ورود کامپیوتر به صحنه و در دسترس عامه قرارگرفتن نرم‌افزارهای آماری، چهار گامی را که در بالا به‌طور خلاصه بیان شده‌اند، می‌توان جرح و تعدیل کرد تا آزادی عمل بیشتری در انتخاب سطح معنی‌دار بودن α میسر شود. با مراجعه به آزمونی که ناحیه‌ی بحرانی که در شکل ۶-۲ نشان داده شده است، به‌جای مقایسه مقدار مشاهده شده $\overline{X}$ با مرزهای ناحیه‌ی بحرانی یا مقدار

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_\circ}{\sigma/\sqrt{n}}$$

با z_α ناحیه‌ی هاشور خورده‌ی شکل ۶-۴ را با α مقایسه می‌کنیم. به‌عبارت دیگر،

فرض صفر را رد می‌کنیم هرگاه ناحیه‌ی بحرانی شکل ۶-۴ کوچکتر از α یا مساوی آن باشد. این ناحیه‌ی هاشور خورده را P-مقدار، **پروب-مقدار**، **احتمال دمی**، یا **سطح معنی‌دار بودن** مشاهده شده متناظر با $\bar{x}$، که مقدار مشاهده شده $\bar{X}$ است می‌نامند. در واقع، این مقدار عبارت از احتمال $P(\bar{X} \geq \bar{x})$ است هنگامی که فرض صفر درست است.



شکل ۶-۴: نمودار برای تعریف P-مقدارها

متناظراً، وقتی فرض مقابل به‌صورت $\mu < \mu_\circ$ و ناحیه‌ی بحرانی، ناحیه بحرانی مربوط به شکل ۶-۳ است، P-مقدار عبارت از احتمال $P(\bar{X} \leq \bar{x})$ است هنگامی که فرض صفر درست است؛ و وقتی فرض مقابل $\mu \neq \mu_\circ$ و ناحیه‌ی بحرانی، مربوط به شکل ۶-۱ است، P-مقدار عبارت است از $۲P(\bar{X} \geq \bar{x})$ یا $۲P(\bar{X} \leq \bar{x})$ بسته به اینکه $\bar{x}$ در دم سمت راست یا دم سمت چپ توزیع نمونه‌گیری $\bar{x}$ بیفتد. در اینجا مجدداً فرض می‌شود که فرض صفر درست است.

در حالت کلی، P-مقدار چنین است.

تعریف ۶-۱. متناظر با مقداری مشاهده شده از یک آماره‌ی آزمون، P-مقدار عبارت از پایین‌ترین سطح معنی‌دار بودن است که می‌توان فرض صفر را در آن رد کرد.

در رابطه با این رهیافت دیگر برای آزمون فرض، اوّلین گام از چهار گام بی‌تغییر باقی می‌ماند، دوّمین گام به‌صورت زیر در می‌آید:

$۲'$: آماره‌ی آزمون را مشخص کنید.

سومین گام به صورت

$3'$: مقدار آماره‌ی آزمون و P–مقدار متناظر را از داده‌های نمونه‌ای تعیین کنید.

و چهارمین گام به‌صورت زیر در می‌آید:

$4'$: بررسی کنید که آیا P–مقدار کمتر از α با مساوی آن است و، برطبق آن، فرض صفر را رد کنید، وگرنه آن را بپذیرید یا از داوری خودداری کنید.

همان‌طور که قبلاً خاطر نشان کردیم، با این کار آزادی عمل بیشتری در انتخاب سطح معنی‌دار بودن به وجود می‌آید، امّا تصور وضعیت‌هایی که در آنها استفاده از مثلاً $\alpha = 0/04$ به‌جای $\alpha = 0/05$، یا $\alpha = 0/015$ را به‌جای $\alpha = 0/01$ موجه بدانیم، دشوار است. در عمل، واقعاً غیرممکن است که به‌طور کامل از دلخواه بودن اجتناب کنیم، و در اغلب حالت‌ها، لااقل تاحدی، به‌طور ذهنی داوری می‌کنیم که کدام یک از $\alpha = 0/05$ یا $\alpha = 0/01$ منعکس کننده‌ی مخاطره‌های قابل قبول است. البته وقتی مخاطره زیاد است و در صورت عملی بودن، می‌توانیم از سطح معنی‌دار بودن بسیار کوچکتر از $\alpha = 0/01$ استفاده کنیم.

در همه حال، باید دریافت که دو روش آزمون فرض‌ها، چهارگامی که در ابتدای بخش داده شده‌اند و چهارگام توصیف شده در اینجا، معادل‌اند. این بدان معناست که صرف‌نظر از اینکه از کدام روش استفاده می‌کنیم، تصمیم نهایی–رد فرض صفر، پذیرش آن، یا خودداری از داوری – یکی است. در عمل، روشی را که راحت‌تر است به کار می‌بریم، و این امر ممکن است به توزیع نمونه‌گیری آماره‌ی آزمون، در دسترس بودن جدول‌های آماری یا نرم‌افزارهای کامپیوتری، و ماهیت مسأله بستگی داشته باشد (به عنوان مثال، نگاه کنید به مثال ۶–۸)

آمارданانی هستند که ترجیح می‌دهند از همه‌ی مشکلات مربوط به انتخاب سطح معنی‌دار بودن احتراز کنند. با محدودکردن نقش خود به تحلیل داده‌ها، آنها α را مشخص نمی‌کنند و گام $4'$ را حذف می‌کنند. البته، همواره پسندیده است که از دیگران (محققان یا مدیریت) در فرمول‌بندی فرض‌ها و مشخص کردن α یاوری گرفته شود، ولی به زحمت می‌توان معقول دانست که P–مقدارها را در اختیار اشخاصی قرار دهند که کاورزی آماری مناسب ندارند و تصمیم‌گیری را به عهده‌ی آنان واگذارند.

برای عمده کردن مشکلات، وضعیت وسوسه‌آمیزی را در نظر گیرید که شخص می‌خواهد α را پس از ملاحظه P – مقداری که باید آن را با α مقایسه کند، انتخاب نماید. مثلاً، فرض کنید که در آزمایشی P – مقدار برابر ۰/۰۳۶ محاسبه می‌شود. اگر مایل به رد فرض صفر باشیم و به این ترتیب حرف خود را به کرسی بنشانیم، وسوسه می‌شویم که α را برابر ۰/۰۵ انتخاب کنیم؛ اگر مایل باشیم که فرض صفر را بپذیریم و به این ترتیب حرف خود را پیش بریم، وسوسه خواهیم شد که $\alpha = ۰/۰۱$ را انتخاب کنیم.

با این حال در **تحلیل اکتشافی داده‌ها**، که در آن حقیقتاً به دنبال استنباطی نیستیم، می‌توان از P–مقدارها به عنوان اندازه‌هایی برای قوت شواهد استفاده کرد. مثلاً، فرض کنید که در تحقیقات مربوط به سرطان با دو نوع دارو، دانشمندان P – مقدارهایی برای ۰/۰۷۳۵ و ۰/۰۰۲۱ برای مؤثر بودن این داروها در کاهش اندازه‌ی غده‌ها به‌دست آورند. این نتیجه، اشاره برآن دارد که شواهد قوی‌تری در حمایت از مؤثر بودن داروی دوّم موجود است، یا اینکه، داروی دوّم «امیدوار کننده‌تر به نظر می‌رسد».

۶–۲ آزمون‌های مربوط به میانگین‌ها

در این بخش متداول‌ترین آزمون‌های مربوط به میانگین یک جامعه، و در بخش ۶–۳ آزمون‌های متناظر درباره‌ی میانگین‌های دو جامعه را مورد بحث قرار می‌دهیم. آزمون‌های مربوط به میانگین‌های بیش از دو جامعه در مباحث تحلیل واریانس دنبال می‌شوند. کلیه‌ی آزمون‌های این فصل مبتنی بر نظریه‌ی توزیع نرمال‌اند، با این فرض که یا نمونه‌ها از جامعه‌های نرمال گرفته شده‌اند یا به حد کافی بزرگ‌اند تا تقریب‌های نرمال موجه باشند، برخی روش‌های ناپارامتری برای این آزمون‌ها، که به داشتن اطلاعی درباره‌ی جامعه یا جامعه‌هایی که نمونه‌ها از آن به‌دست آمده‌اند نیازی ندارند، در مباحث ناپارامتری دنبال خواهند شد.

فرض کنید بخواهیم که فرض $\mu = \mu_۰$ را در برابر یکی از فرض‌های مقابل $\mu \neq \mu_۰$، $\mu > \mu_۰$، یا $\mu < \mu_۰$ برمبنای نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ آزمون کنیم. البته این آزمونی است که در مثال ۵–۶ برای تشریح روش نسبت درستنمایی در نظر گرفتیم و ناحیه‌های بحرانی برای فرض‌های

مقابل متناظر عبارت‌اند از $|z| \geq z_{\alpha/۲}$، $z \geq z_{a}$ و $z \leq -z_{\alpha}$، که در آنها

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\circ}}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

همان‌طور که در بخش ۶-۱ خاطر نشان کردیم، رایج‌ترین مقدارها برای سطح معنی‌دار بودن عبارت‌اند از ۰/۰۵ و ۰/۰۱، و آن‌گونه که خواننده در آمار و احتمال یک دیده است مقادیر متناظر z_{α} و $z_{\alpha/۲}$ عبارت‌اند از $z_{\circ/\circ۵} = ۱/۶۴۵$، $z_{\circ/\circ۱} = ۲/۳۳$، $z_{\circ/\circ۲۵} = ۱/۹۶$، $z_{\circ/\circ\circ۵} = ۲/۵۷۵$.

مثال ۶-۱. فرض کنید که بنابر تجربه می‌دانیم که انحراف معیار وزن بسته‌های ۸ اونسی نان شیرینی‌هایی که در یک شیرینی‌پزی تهیه می‌شوند ۰/۱۶ اونس است. برای تحقیق درباره‌ی اینکه تولید آن در روز خاصی تحت کنترل است، یعنی، برای تحقیق درباره‌ی اینکه میانگین واقعی بسته‌ها ۸ اونس است، نمونه‌ای ۲۵تایی از بسته‌ها انتخاب و ملاحظه می‌شود که میانگین وزن آنها $\bar{x} = ۸/\circ۹۱$ اونس است. چون شیرینی‌پزی وقتی $\mu < ۸$ ضرر می‌کند و وقتی $\mu > ۸$ به زیان مشتری است، فرض صفر $\mu = ۸$ را در برابر فرض مقابل $\mu \neq ۸$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_{\circ}: \mu = ۸ \\ H_{۱}: \mu \neq ۸ \end{cases} \qquad \alpha = \circ/\circ۱$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۲/۵۷۵$ یا $z \geq ۲/۵۷۵$، که در آن

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\circ}}{\sigma / \sqrt{n}}$$

۳. با قرار دادن $\bar{x} = ۸/\circ۹۱$، $\mu = ۸$، $\sigma = \circ/۱۶$ و $n = ۲۵$، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{۸/\circ۹۱ - ۸}{\circ/۱۶/\sqrt{۲۵}} = ۲/۸۴$$

۴. چون $z = ۲/۸۴$ از ۲/۵۷۵ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد و لازم است فرآیند تولید به‌نحو مناسبی تنظیم شود.

اگر از رهیافت متفاوتی که در بخش ۶-۱ توصیف شده، استفاده کرده بودیم، $P-$ مقدار ۰/۰۰۴۶ را به‌دست می‌آوردیم،

$$\text{مقدار} - P = 2P_{H_0}(\overline{X} > 8/09)$$
$$= 2P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{8/09-8}{0/16/\sqrt{5}})$$
$$= 2P(Z > 2/84) = 2(0/5 - 0/4977)$$
$$= 2(0/0023) = 0/0046$$

و چون ۰/۰۰۴۶ کوچکتر از ۰/۰۱ است، نتیجه همان می‌شد که در بالا به‌دست آوردیم. (جهت درون احتمال بالا بستگی به مقدار $\overline{x}$ دارد که در کدام دم توزیع نرمال قرار می‌گیرد.) باید توجه شود که ناحیه‌ی بحرانی $z \ge z_\alpha$ را می‌توان برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_0$ در برابر فرض مقابل ساده‌ی $\mu = \mu_1 > \mu_0$، یا آزمون فرض مرکب $\mu \le \mu_0$ در برابر فرض مقابل مرکب $\mu > \mu_0$ به‌کار برد. در حالت اوّل یک فرض ساده را در برابر فرض مقابل ساده نظیر بخش ۵-۴ آزمون می‌کنیم (مثال ۵-۴ را ببینید، که در آن این آزمون را به‌ازای $\sigma = 1$ مطالعه کردیم)، و در حالت دوّم، α ماکسیمم احتمال ارتکاب خطای نوع I به‌ازای هر مقدار μ است که تحت فرض صفر اختیار می‌شود. البته استدلال‌های مشابهی در مورد ناحیه‌ی بحرانی $z \le -z_\alpha$ به‌کار می‌رود.

وقتی که با یک نمونه‌ی تصادفی بزرگ به اندازه‌ی $n \ge 30$ از جامعه‌ای که لزوماً نرمال نیست ولی واریانس متناهی دارد، سروکار داریم می‌توانیم از قضیه‌ی حدمرکزی برای توجیه به‌کار بردن آزمونی که برای جامعه‌های نرمال به‌کار رفته است استفاده کنیم، و حتی وقتی σ^2 نامعلوم است می‌توانیم مقدار آن را در موقع محاسبه‌ی آماره‌ی آزمون، با s^2 تقریب کنیم. برای تشریح نحوه‌ی استفاده از این **آزمون‌های بزرگ نمونه‌ای تقریبی**، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۶-۲. فرض کنید که ۱۰۰ حلقه‌ی لاستیک که به وسیله‌ی کارخانه‌ای معین تولید شده به‌طور متوسط ۲/۸۱۹ مایل با انحراف معیار ۱۲۹۵ مایل دوام کرده‌اند. فرض صفر $\mu = 22000$ را در برابر فرض مقابل $\mu < 22000$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 22000 \\ H_1 : \mu < 22000 \end{cases} \quad \text{و} \qquad \alpha = 0/05.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \le -1/645$، که در آن

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

۳. با قرار دادن $\bar{x} = 21819$، $\mu_0 = 22000$، $s = 1295$ برای σ، و $n = 100$ به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{21819 - 22000}{1295/\sqrt{100}} = -1/40.$$

۴. چون $z = -1/40$ بزرگتر از $-1/645$ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ یعنی شواهد واقعی در دست نیست که این لاستیک‌ها به‌همان خوبی که تحت فرض صفر بیان شده است، نباشند.

اگر از رهیافت متفاوت توصیف شده در بخش ۶-۱ استفاده می‌کردیم، P-مقدار $0/0808$ را به‌دست می‌آوردیم،

$$\begin{aligned} \text{مقدار} - P &= P_{H_0}(\bar{X} < 21819) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{21819 - 22000}{1295/\sqrt{100}}\right) \\ &= P(Z < -1/4) = 0/5 - 0/4192 = 0/0808 \end{aligned}$$

که از $0/05$ بیشتر است. همان‌طور که می‌توان انتظار داشت، نتیجه همان است که قبلاً به‌دست آمد، یعنی فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

وقتی $n < 30$ و σ^2 نامعلوم است، از آزمونی که درباره‌ی آن بحث می‌کردیم، نمی‌توان استفاده کرد. مع‌هذا، در بخش ۲-۴ دیدیم که برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال، تکنیک نسبت درستنمایی آزمون متناظری را مبتنی بر

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

به‌دست می‌دهد که مقداری از یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع t با $n-1$ درجه‌ی آزادی است. بنابراین، ناحیه‌های بحرانی به اندازه‌ی α برای آزمون کردن فرض صفر $\mu = \mu_0$ در برابر فرض مقابل $\mu \ne \mu_0$، $\mu > \mu_0$ یا $\mu < \mu_0$ به‌ترتیب عبارت‌اند از $|t| \ge t_{\alpha/2, n-1}$، و $t \le -t_{\alpha, n-1}$. توجه کنید تذکراتی که در بخش ۶-۱ در رابطه با فرض $\mu_1 > \mu_0$ و آزمون فرض صفر، $\mu \le \mu_0$ در برابر فرض مقابل $\mu > \mu_0$

داده شده‌اند، در این مورد نیز قابل اعمال‌اند.

برای تشریح این آزمون، که به آن معمولاً نام **آزمون کوچک نمونه‌ای** t، داده می‌شود، مثال را در نظر بگیرید.

مثال ۶-۳. فرض کنید که یکی از مشخصات لازم نوع معینی مفتول، داشتن میانگین قدرت شکنندگی ۱۸۵ پوند باشد، و فرض کنید پنج قطعه مفتولی که به تصادف از حلقه‌های مختلف انتخاب شده‌اند، دارای قدرت شکنندگی ۱۷۱/۶، ۱۹۱/۸، ۱۷۸/۳، ۱۸۴/۹، ۱۸۹/۱ باشند، فرض صفر $\mu = ۱۸۵$ را در برابر فرض مقابل $\mu < ۱۸۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_۰ : & \mu = ۱۸۵ \\ H_۱ : & \mu < ۱۸۵ \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha = ۰/۰۵.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $t \leq -۲/۱۳۲$، که در آن t به کمک فرمول بالا محاسبه می‌شود و ۲/۱۳۲ مقدار $t_{۰/۰۵,۴}$ است.

۳. ابتدا میانگین و انحراف معیار را محاسبه و مقادیر $\bar{x} = ۱۸۳/۱$ و $s = ۸/۲$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت با قرار دادن این مقادیر همراه با $\mu_۰ = ۱۸۵$ و $n = ۵$ در فرمول مربوط به t، مقدار

$$t = \frac{۱۸۳/۱ - ۱۸۵}{۸/۲ / \sqrt{۵}} = -۰/۴۹$$

را به‌دست می‌آوریم.

۴. چون $t = -۰/۴۹$ بزرگتر از $-۲/۱۳۲$ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد. اگر از این مرحله فراتر رویم و نتیجه بگیریم که حلقه‌های مفتول که نمونه‌ها از آن استخراج شده‌اند، مشخصات مطلوب را دارند، البته در این صورت در معرض مخاطره‌ی نامعلوم ارتکاب خطای نوع II قرار خواهیم گرفت.

۶-۳ آزمون‌های مربوط به تفاضل دو میانگین

در تحقیقات کاربردی، مسائل متعددی موجودند که در آنها به فرض‌هایی درباره‌ی تفاضل بین دو میانگین دو جامعه علاقه‌مندیم. برای مثال، ممکن است بخواهیم که برمبنای نمونه‌هایی مناسب تصمیم بگیریم که آیا مردان می‌توانند کار معینی را به همان

سرعت زنان انجام دهند یا نه، یا ممکن است بخواهیم برمبنای نمونه‌ی جامع مناسبی تصمیم بگیریم که آیا هزینه‌های خوردوخوراک هفتگی خانواده‌های یک شهر از هزینه‌های مشابه خانواده‌های شهر دیگری حداقل به اندازه‌ی ۵۰۰ تومان بیشتر است یا نه.

فرض کنید که با نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه‌ی نرمال با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 سروکار داریم و می‌خواهیم فرض صفر $\mu_1-\mu_2=\delta$ را، که در آن δ ثابت مفروضی است، در برابر یکی از فرض‌های مقابل $\mu_1-\mu_2\neq\delta$، $\mu_1-\mu_2>\delta$، یا $\mu_1-\mu_2<\delta$ آزمون کنیم. با به‌کار بردن روش نسبت درستنمایی، به آزمون مبتنی بر $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ خواهیم رسید، و با مراجعه به تمرین ۲-۳، نتیجه می‌گیریم که ناحیه‌های بحرانی مربوط را می‌توان به صورت $|z|\geq z_{\alpha/2}$، $z\geq z_{\alpha}$ و $z\leq -z_{\alpha}$ نوشت، که در آنها

$$z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

وقتی با نمونه‌های تصادفی از جامعه‌هایی با واریانس‌های نامعلوم سروکار داریم که حتی ممکن است نرمال نباشند، هنوز هم می‌توانیم، مادام که اندازه‌ی نمونه‌های تصادفی به قدری بزرگ باشند که بتوان به قضیه‌ی حدمرکزی توسل جست، از آزمونی که در بالا توصیف کردیم با s_1 به‌جای σ_1، و s_2 به‌جای σ_2 استفاده کنیم.

مثال ۶-۴. آزمایشی انجام می‌شود تا تعیین کنند که آیا متوسط محتوای نیکوتین نوعی سیگار از متوسط محتوای نیکوتین سیگار نوع دیگری به اندازه‌ی ۰/۲۰ میلی‌گرم بیشتر است یا خیر. اگر $n_1=۵۰$ سیگار نوع اوّل دارای $\bar{x}_1=۲/۶۱$ میلی‌گرم و انحراف معیار $s_1=۰/۱۲$ میلی‌گرم و $n_2=۴۰$ سیگار از نوع دوّم دارای $\bar{x}_2=۲/۳۸$ میلی‌گرم و انحراف معیار $s_2=۰/۱۴$ میلی‌گرم باشند، فرض صفر $\mu_1-\mu_2=۰/۲۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1-\mu_2\neq ۰/۲۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید. مبنای تصمیم را P-مقدار متناظر با مقدار آماره‌ی مناسبی قرار دهید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=0/20 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2\neq 0/20 \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha=0/05.$$

′۲. از آماره‌ی آزمون z استفاده کنید که در آن

$$z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

′۳: با قرار دادن $\bar{x}_1=2/61$، $\bar{x}_2=2/38$، $\delta=0/20$، و $s_1=0/12$ به‌جای σ_1، $s_2=0/14$، به‌جای σ_2، $n_1=50$، و $n_2=50$ در این فرمول، به‌دست می‌آوریم

$$z=\frac{2/61-2/38-0/20}{\sqrt{\frac{(0/12)^2}{50}+\frac{(0/14)^2}{40}}}=1/08.$$

P–مقدار مورد نظر عبارت است از $2(0/5000-0/3599)=0/2802$، که در آن $0/3599$ درایه‌ی جدول ۳ برای $z=1/08$ است.

′۴: چون $0/2802$ از $0/05$ بیشتر است فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ یا فرض صفر را می‌پذیریم یا می‌گوییم که تفاضل بین $2/61-2/38=0/23$ و $0/20$ معنی‌دار نیست. این بدان معنی است که تفاضل را می‌توان به شانس منسوب کرد.

وقتی n_1 و n_2 کوچک و σ_1 و σ_2 نامعلوم باشند، آزمونی که مورد بحث بود، قابل استفاده نیست. با این حال، برای نمونه‌های تصادفی مستقل از دو جامعه‌ی نرمال که دارای واریانس مشترک نامعلوم σ^2 هستند، تکنیک نسبت درستنمایی، آزمونی مبتنی بر

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-\delta}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

به‌دست می‌دهد که در آن

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

از بخش ۴–۳ می‌دانیم که تحت مفروضات داده شده و فرض صفر $\mu_1-\mu_2=\delta$، عبارت بالا برای t، مقداری از یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع t با n_1+n_2-2 درجه‌ی آزادی است. بنابراین ناحیه‌ی بحرانی مناسب به اندازه‌ی α برای آزمون فرض صفر $\mu_1-\mu_2=\delta$ در برابر فرض مقابل $\mu_1-\mu_2\neq\delta$، $\mu_1-\mu_2>\delta$، یا $\mu_1-\mu_2<\delta$ تحت مفروضاتی که داده شده‌اند به‌ترتیب عبارت‌اند از: $|t|\geq t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$،

$t \geq t_{\alpha/۲, n_۱+n_۲-۲}$، $t \leq -t_{\alpha/۲, n_۱+n_۲-۲}$. برای تشریح این آزمون tی دو نمونه‌ای، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۶-۵. در مقایسه‌ی دو نوع رنگ، یک مؤسسه‌ی حمایت از مصرف‌کننده درمی‌یابد که چهار قوطی یک گالنی از یک نوع رنگ به‌طور متوسط ۵۱۲ فوت مربع را با انحراف معیار ۳۱ فوت مربع رنگ آمیزی می‌کند، در حالی که چهار قوطی یک گالنی از نوعی دیگر به‌طور متوسط ۴۹۲ فوت مربع را با انحراف معیار ۲۶ فوت مربع رنگ‌آمیزی می‌کند. با فرض اینکه دو جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری نرمال‌اند و واریانس‌های برابر دارند فرض صفر $\mu_۱-\mu_۲=۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_۱-\mu_۲>۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_۰ & :\mu_۱-\mu_۲=۰ \\ H_۱ & :\mu_۱-\mu_۲>۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha=۰/۰۵.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $t \geq ۱/۹۴۳$، که در آن t مطابق فرمول داده شده در بالا محاسبه می‌شود و ۱/۹۴۳ مقدار $t_{۰/۰۵,۶}$ است.

۳. ابتدا با محاسبه‌ی s_p، مقدار

$$s_p=\sqrt{\frac{۳(۳۱)^۲+۳(۲۶)^۲}{۴+۴-۱}}=۲۸/۶۰۹$$

را به‌دست می‌آوریم و سپس با جایگذاری مقدار آن همراه با $\bar{x}_۱=۵۴۶$، $\bar{x}_۲=۴۹۲$، $\delta=۰$، و $n_۱=n_۲=۴$ در فرمول t، به‌دست می‌آوریم

$$t=\frac{۵۴۶-۴۹۲}{۲۸/۶۰۹\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}}=۲/۶۷.$$

۴. چون ۲/۶۷ از ۱/۹۴۳ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد، نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط رنگ نوع اوّل مساحت بیشتری را در مقایسه با رنگ دوّم، می‌پوشاند.

توجه کنید که در این مثال، $n_۱=n_۲$، به‌طوری که فرمول مربوط به $s_p^۲$ به صورت

$$s_p^۲=\frac{۱}{۲}(s_۱^۲+s_۲^۲)$$

در می‌آید. استفاده از این فرمول، موجب تسهیل در محاسبات می‌شود.

می‌توان نشان داد که با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری مناسبی، P–مقدار در این مثال برابر ۰/۰۱۸۵ در می‌آید، و نتیجه، البته، همان می‌شود که در بالا به‌دست آمد. اگر فرض برابری واریانس‌ها در مسأله‌ای از این نوع، موجه نباشد، چندین امکان موجود است. یک روش نسبتاً ساده عبارت از زوج کردن تصادفی مقادیر حاصل در دو نمونه و سپس تلقی تفاضل آنها به‌عنوان یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی n_1 یا n_2، بسته به اینکه کدام کوچکتر باشد، از یک جامعه‌ی نرمال است که تحت فرض صفر دارای میانگین $\mu = \delta$ است. در این صورت ما این فرض صفر را در برابر فرض مقابل به کمک روش‌های بخش ۶–۲ آزمون می‌کنیم. این، دلیل خوبی برای انتخاب $n_1 = n_2$ است، ولی روش‌های بدیل دیگری برای رفع و رجوع این حالت وقتی $n_1 \neq n_2$، موجودند – یکی از اینها، آزمون اسمیت – سترتویت است که مرجعی برای آن در مراجع پایان کتاب داده شده است.

تا اینجا بحث خود را به نمونه‌های تصادفی محدود کرده‌ایم که مستقل‌اند، و روش‌هایی که در این بخش معرفی کرده‌ایم نمی‌توانند مثلاً در اتخاذ تصمیم برمبنای وزن‌های «قبل و بعد» درباره‌ی اینکه رژیم غذایی معینی واقعاً مؤثر است، یا اینکه آیا اختلاف مشاهده شده بین میانگین بهره‌ی هوشی شوهران و زنان آنها واقعاً معنی‌دار است یا نه، مورد استفاده باشند. در هر دو مثال بالا، نمونه‌ها مستقل نیستند زیرا داده‌ها در واقع زوج شده‌اند. راه معمول رفع و رجوع این نوع مسأله آن است که مانند بند قبل عمل کنیم، یعنی به تفاضل‌های بین اندازه‌گیری‌ها یا مشاهدات زوج شده توجه نماییم. اگر n بزرگ باشد، می‌توانیم از آزمونی که در همین بخش برای آزمون فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ در برابر فرض مناسبی توصیف شد، استفاده کنیم، مشروط بر اینکه تفاضل‌ها را بتوان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال تلقی کرد. (تمرین‌های ۶–۱۵ و ۶–۱۶)

تمرین

۶–۱. با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از یک جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم σ^2، نشان دهید که فرض صفر $\mu = \mu_0$، در برابر فرض مقابل $\mu \neq \mu_0$ را می‌توان با استفاده از ملاک یک‌طرفه‌ای مبتنی بر توزیع خی‌دو آزمون کرد.

۲-۶. فرض کنید که بخواهیم از نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم σ^{2} برای آزمون فرض صفر $\mu=\mu_{0}$ در برابر فرض مقابل $\mu=\mu_{1}$، که در آن $\mu_{1}>\mu_{0}$، و احتمال‌های خطاهای نوع I و نوع II دارای مقادیر از پیش تعیین شده‌ی α و β هستند استفاده کنیم. نشان دهید که اندازه‌ی نمونه‌ی مورد نیاز با عبارت زیر داده می‌شود.

$$n=\frac{\sigma^{2}(z_{\alpha}+z_{\beta})^{2}}{(\mu_{1}-\mu_{0})^{2}}.$$

۳-۶. فرض کنید که بخواهیم با استفاده از نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌ی n از دو جامعه‌ی نرمال با واریانس‌های معلوم σ_{1}^{2} و σ_{2}^{2} برای آزمون فرض صفر $\mu_{1}-\mu_{2}=\delta$ در برابر فرض مقابل $\mu_{1}-\mu_{2}=\delta'$ استفاده کنیم. اگر احتمال‌های خطاهای نوع I و II دارای مقادیر از پیش تعیین شده‌ی α و β باشند، نشان دهید که اندازه‌ی نمونه‌ی مورد نیاز با عبارت زیر داده می‌شود.

$$n=\frac{(\sigma_{1}^{2}+\sigma_{2}^{2})(z_{\alpha}+z_{\beta})^{2}}{(\delta-\delta')^{2}}.$$

۴-۶. با رجوع به تمرین قبل، اندازه‌ی مورد نیاز نمونه را وقتی $\sigma_{1}=۹$، $\sigma_{2}=۱۳$، $\delta=۸۰$، $\delta'=۸۶$، $\alpha=۰/۰۱$، و $\beta=۰/۰۱$ پیدا کنید.

۵-۶. برمبنای داده‌هایی معین، باید فرض صفری را در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ رد کرد. آیا این فرض صفر در

الف) سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱،

ب) سطح معنی‌دار بودن ۰/۱۰،

رد می‌شود؟

۶-۶. در آزمون فرضی معین، P-مقدار متناظر با آماره‌ی آزمون ۰/۰۳۱۶ است. آیا می‌توان فرض صفر را در

الف) سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱،

ب) سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵،

ج) سطح معنی‌دار بودن ۰/۱۰،

رد کرد؟

۶-۷. مطابق قراردادهای متداول در یک امتحان قدرت فهم در خواندن، دانش‌آموزان کلاس هشتم باید به‌طور متوسط نمره‌ی ۸۴/۳ با انحراف معیار ۸/۶ بیاورند. اگر ۴۵ دانش‌آموز کلاس هشتم ناحیه‌ی معینی که به تصادف انتخاب شده‌اند به‌طور متوسط نمره‌ی ۸۷/۵ بیاورند، از چهار گام بخش ۶-۱ استفاده کرده فرض صفر $\mu = ۸۴/۳$ را در برابر فرض مقابل $\mu > ۸۴/۳$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید.

۶-۸. بخش حفاظت یک کارخانه می‌خواهد بداند که آیا میانگین واقعی زمان لازم برای اینکه نگهبان شب، گشت معمول خود را انجام دهد، ۳۰ دقیقه است یا نه. اگر در یک نمونه‌ی تصادفی از ۳۲ گشت، نگهبان شب هرگشت خود را به‌طور متوسط در ۳۰/۸ دقیقه با انحراف معیار ۱/۵ دقیقه انجام داده باشد، معین کنید که آیا شواهد کافی برای رد فرض صفر $\mu = ۳۰$ دقیقه به نفع فرض مقابل $\mu \neq ۳۰$ وجود دارد یا نه. از چهار گام بخش ۶-۱ و سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ استفاده کنید.

۶-۹. یک قایق موتوری جدیداً طراحی شده است. در ۱۲ بار که به صورت آزمایشی در خط سیری خاص رانده شده است، به طور متوسط هر دور را در ۳۳/۶ ثانیه با انحراف معیار ۲/۳ ثانیه پیموده است. با فرض اینکه تلقی این داده‌ها به‌عنوان یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای نرمال موجه باشد، از چهار گام بخش ۶-۱ استفاده کرده فرض صفر $\mu = ۳۵$ در برابر فرض مقابل $\mu < ۳۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

۶-۱۰. از پنج اندازه‌گیری از محتوای قطران سیگار نوعی خاص، اعداد ۱۴/۵، ۱۴/۲، ۱۴/۴، ۱۴/۳، ۱۴/۶ میلی‌گرم در هر سیگار حاصل شده است. با فرض اینکه داده‌ها، نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ی نرمال باشند، از چهار گام بخش ۶-۱ استفاده کرده نشان دهید که در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ باید فرض صفر $\mu = ۱۴/۰$ را به نفع فرض مقابل $\mu = ۱۴/۰$ رد کرد.

۶-۱۱. با مطالعه‌ای از تعداد ضیافت‌های ناهار در هر ماه که مدیران اجرایی بیمه‌ها و بانک‌ها مدعی‌اند هزینه‌ی آن باید به حساب محل کار گذاشته شود، برمبنای نمونه‌هایی تصادفی، انجام شده و نتایج زیر

$$n_1 = ۴۰ \quad \bar{x}_1 = ۹/۱ \quad s_1 = ۱/۹$$
$$n_2 = ۵۰ \quad \bar{x}_2 = ۸/۰ \quad s_2 = ۲/۱$$

از چهار گام بخش ۶-۱ و سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ استفاده کرده فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = ۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 \neq ۰$ آزمون کنید.

۶-۱۲. نمونه‌گیری‌های جامعی که در استانی بزرگ در سالی معین و دوباره ۲۰سال بعد انجام شده، نشان داده است که در ابتدا قد متوسط ۴۰۰ پسر ده ساله ۵۳/۲ اینچ با انحراف معیار ۲/۴ اینچ بوده در حالی که ۲۰ سال بعد قد متوسط ۵۰۰ پسر ده ساله ۵۴/۵ اینچ با انحراف معیار ۲/۵ اینچ بوده است. از چهار گام بخش ۶-۱ استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵، فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = -۰/۵$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 < -۰/۵$ آزمون کنید.

۶-۱۳. برای اطلاع از اینکه آیا سکنه‌ی دو جزیره جنوب اقیانوس آرام را می‌توان دارای تبار نژادی یکسانی تلقی کرد، یک انسان‌شناس شاخص‌های جمجمه‌ای شش فرد ذکور بالغ را از هر جزیره تعیین کرده، مقادیر $\bar{x}_1 = ۷۷/۴$، $\bar{x}_2 = ۷۲/۲$، و انحراف معیارهای متناظر $s_1 = ۳/۳$، $s_2 = ۲/۱$ را به‌دست می‌آورد. از چهار گام بخش ۶-۱ و سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ استفاده کرده تحقیق کنید که آیا تفاضل بین دو میانگین نمونه‌ای را می‌توان به‌گونه‌ای موجه معلول تصادف دانست؟ فرض کنید که جامعه‌ها نرمال و دارای واریانس‌های یکسان‌اند.

۶-۱۴. برای مقایسه‌ی دو نوع سپر اتومبیل، شش سپر از هر نوع را بر نوع خاصی خودرو کوچک نصب می‌کنند. سپس هر خودرو با سرعت ۵ مایل در سرعت به یک دیوار بتونی کوبیده می‌شود، و اعداد زیر هزینه‌های تعمیر را (برحسب دلار) نشان می‌دهند:

سپر۱:	۱۲۷	۱۶۸	۱۴۳	۱۶۵	۱۲۲	۱۳۹
سپر۲:	۱۵۴	۱۳۵	۱۳۲	۱۷۱	۱۵۳	۱۴۹

از چهار گام بخش ۶-۱ استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید که آیا تفاضل بین میانگین‌های این نمونه‌ها معنی‌دار است یا خیر.

۶-۱۵. در مطالعه‌ای برای تحقیق در مؤثر بودن تمرین‌های ورزشی معینی در کاهش وزن، گروه مرکب از ۱۶ نفر به مدت یک ماه مشغول این ورزش‌ها بوده‌اند و نتایج زیر به‌دست آمده است. از سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ استفاده کرده فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = ۰$

را در برابر فرض مقابل $\mu_1-\mu_2>0$ آزمون کنید، و به این ترتیب نظر دهید که آیا تمرین‌ها در کاهش وزن مؤثر بوده‌اند، یا خیر.

وزن بعد از ورزش	وزن قبلی	وزن بعد از ورزش	وزن قبلی
۱۹۸	۲۱۱	۱۶۶	۱۷۲
۱۹۸	۱۸۰	۱۵۴	۱۵۵
۱۷۲	۱۷۱	۱۸۱	۱۸۵
۲۰۹	۲۱۴	۱۶۴	۱۶۷
۱۷۹	۱۸۲	۲۰۱	۲۰۳
۱۹۲	۱۹۴	۱۷۵	۱۸۱
۱۶۱	۱۶۰	۲۳۳	۲۴۵
۱۸۲	۱۸۲	۱۴۲	۱۴۶

۶-۱۶. داده‌های زیر در دوره‌ی یکساله‌ای از اتلاف وقت هفتگی متوسط نیروی انسانی ناشی از تصادفات کاری در ۱۲ کارخانه، «قبل و بعد» از به مرحله‌ی اجرا گذاشته شدن برنامه‌ی ایمنی خاصی گردآوری شده‌اند:

۴۵ و ۳۶، ۷۳ و ۶۰، ۴۶ و ۴۴، ۱۲۴ و ۱۱۹، ۳۳ و ۳۵

۵۷ و ۵۱، ۸۳ و ۷۷، ۳۴ و ۲۹، ۲۶ و ۲۴، ۱۷ و ۱۱

از چهار گام بخش ۶-۱، از سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ استفاده کرده آزمون کنید که آیا برنامه‌ی ایمنی مؤثر است یا خیر.

۶-۴ آزمون‌هایی درباره‌ی واریانس‌ها

دلایلی متعدد در اهمیت آزمون فرض‌هایی مربوط به واریانس‌های جامعه‌ها در دست است. تا آنجا که به کاربردهای مستقیم مربوط می‌شود، می‌توان از موارد زیر نام برد؛ تولیدکننده‌ای که محصولاتش باید واجد مشخصات دقیقی باشد لازم است که آزمون‌هایی درباره‌ی تغییرپذیری محصولاتش انجام دهد، یک معلم ممکن است بخواهد از این امر آگاه شود که آیا حکم‌های معینی درباره‌ی تغییرپذیریی که می‌تواند از آمادگی دانش‌آموزان انتظار داشته باشد درست‌اند یا نه، و یک داروساز ممکن است بخواهد بداند که آیا میزان تغییر در تأثیر بخشی یک دارو در حدود قابل قبول است یا نه. تا آنجا که به کاربردهای غیرمستقیم مربوط می‌شود، می‌توان گفت که آزمون‌های مربوط

به واریانس‌ها اغلب پیش‌نیازهایی برای آزمون‌های مربوط به سایر پارامتر هستند. مثلاً، آزمون tی دو نمونه‌ای که در بخش قبل توصیف شد، مستلزم آن است که دو جامعه واریانس برابر داشته باشند و در عمل این به معنی آن است که ممکن است لازم باشد، معقول بودن این فرض را قبل از انجام آزمون‌هایی درباره‌ی میانگین‌ها تحقیق کنیم.

آزمون‌هایی که در این بخش مطالعه خواهیم کرد شامل آزمونی از این فرض صفر است که واریانس یک جامعه‌ی نرمال برابر ثابت مفروضی است، و شامل آزمون نسبت درستنمایی برابری واریانس‌های دو جامعه‌ی نرمال است.

با فرض اینکه نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از یک جامعه‌ی نرمال استخراج شده است، می‌خواهیم فرض صفر $\sigma^۲ = \sigma_۰^۲$ را در برابر یکی از فرض‌های مقابل $\sigma^۲ \neq \sigma_۰^۲$، $\sigma^۲ < \sigma_۰^۲$ یا $\sigma^۲ > \sigma_۰^۲$ آزمون کنیم، و آن‌گونه که خواننده از بخش ۲-۴ و روش نسبت درستنمایی به یاد دارد نتیجه منجر به آزمونی برمبنای $s^۲$، مقدار واریانس نمونه‌ای، می‌شود. بنابراین می‌توانیم ناحیه‌های بحرانی برای آزمون این فرض صفر در برابر دو فرض مقابل یک‌طرفه را به‌صورت $\chi^۲ \geq \chi_{\alpha,n-۱}^۲$ و $\chi^۲ \leq \chi_{۱-\alpha,n-۱}^۲$ بنویسیم که در آن

$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_۰^۲}.$$

امّا در مورد فرض مقابل دو طرفه، فرض صفر را در صورتی رد می‌کنیم که $\chi^۲ \geq \chi_{\alpha/n-۱}^۲$ یا $\chi^۲ \leq \chi_{۱-\alpha/n-۱}^۲$، و البته اندازه‌ی کلیه‌ی ناحیه‌های بحرانی برابر α است.

مثال ۶-۶. فرض کنید ضخامت قطعه‌ای که در یک نیمه هادی به‌کار رفته بعد بحرانی آن است و اندازه‌گیری‌های مربوط به ضخامت‌های یک نمونه‌ی تصادفی از ۱۸ قطعه‌ی فوق‌الذکر دارای واریانس $s^۲ = ۰/۶۸$ هستند که در آن اندازه‌ها برحسب یک هزارم اینچ است. فرآیند را تحت کنترل تلقی می‌کنند در صورتی که تغییرپذیری ضخامت‌ها واریانسی نابیشتر از ۰/۳۶ داشته باشد. با فرض اینکه اندازه‌گیری‌ها تشکیل یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ی نرمالی را بدهند، فرض صفر $\sigma^۲ = ۰/۳۶$ را در برابر فرض مقابل

$\sigma^2 > 0/36$ در سطح $\alpha = 0/05$ آزمون کنید.

حل ۱.

$$\begin{cases} H_0 & : \sigma^2 = 0/36 \\ H_1 & : \sigma^2 > 0/36 \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha = 0/05.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^2 \geq 27/587$، که در آن

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

و $27/587$ مقدار $\chi^2_{0/05,17}$ است.

۳. با قرار دادن $s^2 = 0/68$، $\sigma_0^2 = 0/36$، و $n = 18$، به‌دست می‌آوریم

$$\chi^2 = \frac{17(0/68)}{0/36} = 32/11.$$

۴. چون $\chi^2 = 32/11$ از $27/587$ بزرگتر است، فرض صفر را باید رد کرد و فرایند به‌کار رفته در ساختن قطعات را تنظیم کرد.

توجه کنید که اگر α در مثال پیشین برابر $0/01$ بود، فرض صفر را نمی‌شد رد کرد، زیرا $\chi^2 = 32/11$ از $\chi^2_{0/01,17} = 33/409$ بیشتر نیست. این تذکر برای آن است که عمل انتخاب α کاری است که همواره باید پیشاپیش انجام شود، به‌طوری که از وسوسه‌ی انتخاب مقداری برای سطح معنی‌دار بودن که منظور ما را برآورد، به دور باشیم.

خواننده نشان دهد که آماره‌ی نسبت درستنمایی برای آزمون برابری واریانس‌های دو جامعه‌ی نرمال را می‌توان برحسب نسبت دو واریانس نمونه‌ای بیان کرد. با مفروض بودن نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه‌ی نرمال با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2، از قضیه‌ی ۲–۱۵ درمی‌یابیم که ناحیه‌های بحرانی متناظر با اندازه‌ی α برای آزمون فرض صفر $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ در برابر فرض‌های مقابل یکطرفه‌ی $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ یا $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq f_{\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1}, \quad \frac{s_2^2}{s_1^2} \geq f_{\alpha, n_2 - 1, n_1 - 1}$$

که در آن $f_{\alpha,n_۱-۱,n_۲-۱}$ و $f_{\alpha,n_۲-۱,n_۱-۱}$ در بخش ۲-۶ تعریف شده‌اند. ناحیه‌ی بحرانی مناسب برای آزمون این فرض صفر در برابر فرض مقابل دو طرفه‌ی $\sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$ عبارت است از اگر $s_۱^۲ \geq s_۲^۲$،

$$\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲} \geq f_{\alpha,n_۱-۱,n_۲-۱},$$

و اگر $s_۱^۲ < s_۲^۲$،

$$\frac{s_۲^۲}{s_۱^۲} \geq f_{\alpha,n_۲-۱,n_۱-۱}.$$

توجه کنید که این آزمون کاملاً مبتنی بر دم سمت راست توزیع F است امکان‌پذیر شده است، یعنی بنابراین واقعیت که اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع F با $v_۱$ و $v_۲$ درجه‌ی آزادی باشد، آنگاه $\frac{۱}{X}$ دارای توزیع F با $v_۱$ و $v_۲$ درجه‌ی آزادی خواهد بود.

مثال ۶-۷. در مقایسه‌ی تغییرپذیری قوه‌ی کشش دو نوع فولاد ساختمانی، نتایج زیر طی یک آزمایش به‌دست آمده‌اند: $n_۱ = ۱۳$، $s_۱^۲ = ۱۹/۲$، $n_۲ = ۱۶$، و $s_۲^۲ = ۳/۵$، که در آنها واحد اندازه‌گیری ۱۰۰۰ پوند بر هر اینچ مربع است. با فرض اینکه اندازه‌گیری‌ها تشکیل نمونه‌های تصادفی مستقلی از دو جامعه‌ی نرمال را بدهند، فرض صفر $\sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲$ را در برابر فرض‌های مقابل $\sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۲ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ \\ H_۱: & \sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲ \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \alpha = ۰/۰۲.$$

۲. چون $s_۱^۲ \geq s_۲^۲$، فرض صفر را رد کنید هرگاه $\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲} \geq ۳/۶۷$ که در آن ۳/۶۷ مقدار $f_{۰/۰۱,۱۲,۱۵}$ است.

۳. با قرار دادن $s_۱^۲ = ۱۹/۲$ و $s_۲^۲ = ۳/۵$، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{19/2}{3/5}=5/49.$$

۴. چون $f = 5/49$ از ۳/۶۷ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه می‌گیریم که تغییرپذیری قوه‌ی کشش دو نوع فولاد یکسان نیست.

تمرین

۶-۱۷. با استفاده از این واقعیت که توزیع خی‌دو را می‌توان وقتی ν، مقدار درجه‌ی آزادی، بزرگ باشد با توزیع نرمال تقریب کرد، نشان دهید که برای نمونه‌های بزرگ از جامعه‌های نرمال

$$s^2 \ge \sigma_0^2\left[1+z_\alpha\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]$$

یک ناحیه‌ی بحرانی تقریبی به اندازه‌ی α برای آزمون فرض صفر $\sigma^2=\sigma_0^2$ در برابر فرض مقابل $\sigma^2>\sigma_0^2$ است. همچنین ناحیه‌های بحرانی متناظر را برای آزمون کردن این فرض صفر در برابر فرض مقابل $\sigma^2<\sigma_0^2$ و $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ بنا کنید.

۶-۱۸. نه بار اندازه‌گیری دمای ویژه‌ی آهن دارای انحراف معیار ۰/۰۰۸۶ است. با فرض اینکه این اندازه‌ها نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال تشکیل دهند، فرض صفر $\sigma=0/0100$ را در برابر فرض مقابل $\sigma<0/0100$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

۶-۱۹. در یک نمونه‌ی تصادفی، وزن‌های ۲۴ گوساله‌ی نر از نژاد بلک‌آنگوس در سن معینی دارای انحراف معیار ۲۳۸ پوند بوده است. با فرض اینکه این وزن‌ها تشکیل نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال باشند، فرض صفر $\sigma=250$ پوند را در برابر فرض مقابل دو طرفه‌ی $\sigma\neq 250$ پوند در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید.

۶-۲۰. در یک نمونه‌ی تصادفی، برای مدت زمانی که ۳۰ زن برای جواب دادن به سؤالات امتحان آیین‌نامه رانندگی صرف کردند، مقدار $s=2/53$ به‌دست آمد. فرض صفر $\sigma=2/85$ را در برابر فرض مقابل $\sigma<2/85$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

۶-۲۱. داده‌های حاصل از آزمایش‌های قبل، نشان می‌دهند که انحراف معیار اندازه‌گیری‌هایی به وسیله‌ی بازرسان خبره از اَنگ ورقه‌های فلزی انجام شده، ۰/۴۱ اینچ مربع است. اگر بازرس جدیدی، ۵۰ اَنگ را با انحراف معیار ۰/۴۹ اینچ مربع اندازه‌گیری کند، برمبنای اینکه آزمون فرض صفر $\sigma^2=\sigma_0^2$ را می‌توان با آماره‌ی

$$\left(\frac{S}{\sigma_0}-1\right)\sqrt{2(n-1)} \sim N(0,1)$$

آزمود، فرض $\sigma=0/41$ را در برابر فرض مقابل $\sigma>0/41$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ رد کرد یا خیر.

۶-۲۲. با رجوع به مثال ۶-۵، فرض صفر $\sigma_1-\sigma_2=0$ را در برابر فرض مقابل $\sigma_1-\sigma_2>0$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید.

۶-۲۳. با رجوع به تمرین ۶-۱۳، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۱۰ آزمون کنید که آیا فرض تساوی واریانس‌های دو جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری موجه است یا خیر.

۶-۲۴. با رجوع به تمرین ۶-۱۴، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۲ آزمون کنید که آیا فرض تساوی واریانس‌های دو جامعه‌ی مورد نمونه‌گیری موجه است یا خیر.

۶-۵ آزمون‌هایی مربوط به نسبت‌ها

اگر برآمد آزمایشی تعداد رأی‌هایی باشد که کاندیدایی در یک رأی‌گیری به‌دست می‌آورد، تعداد عیب‌هایی باشد که در یک قواره پارچه موجود است، تعداد کودکان غایب از مدرسه در روز مفروضی باشد، ...، این داده‌ها را **داده‌های شمارشی** می‌نامیم. مدل‌های مناسب برای تحلیل داده‌های شمارشی، توزیع دوجمله‌ای، توزیع پواسون، توزیع چندجمله‌ای، و برخی از توزیع‌های گسسته‌ی دیگرند که در درس آمار و احتمال یک مطالعه کردیم. در این بخش ما یکی از معمول‌ترین آزمون‌های مبتنی بر داده‌های شمارشی، یعنی آزمونی درباره‌ی پارامتر θی توزیع دوجمله‌ای را ارائه می‌دهیم. به عنوان مثال، بر مبنای نمونه‌ای تصادفی، ممکن است این فرض را آزمون کنیم که نسبت واقعی بهبود یافتگان از بیماری خاصی ۰/۹۰ است یا اینکه نسبت واقعی ضایعات حاصل در یک خط تولید ۰/۰۲ است.

در تمرین ۵-۱۰ از خواننده خواسته شد تا نشان دهد که تواناترین ناحیه‌ی بحرانی برای آزمون فرض صفر $\theta=\theta_0$ در برابر فرض مقابل $\theta=\theta_1<\theta_0$، که در آن θ پارامتر

توزیع دوجمله‌ای است، بر مقدار X، تعداد «موفقیت‌ها» در n آزمایش، مبتنی است. وقتی فرض‌های مقابل مرکب‌اند، روش نسبت درستنمایی باز هم آزمون‌هایی مبتنی بر تعداد مشاهده شده‌ی موفقیت‌ها را (همان‌طور که در تمرین ۵-۲۲ برای حالت خاص $\theta_\circ = \frac{۱}{۲}$ دیدیم) به‌دست می‌دهد. در واقع اگر بخواهیم فرض صفر $\theta = \theta_\circ$ را در برابر فرض مقابل یک طرفه‌ی $\theta > \theta_\circ$ آزمون کنیم، ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α از ملاک نسبت درستنمایی عبارت است از

$$x \ge k_\alpha$$

که در آن k_α کوچکترین عدد صحیحی است که برای آن

$$\sum_{y=k_\alpha} b(y;n,\theta_\circ) \le \alpha$$

و $b(y;n,\theta_\circ)$ احتمال به‌دست آوردن y موفقیت در n آزمایش برنولی است وقتی $\theta = \theta_\circ$. اندازه‌ی این ناحیه‌ی بحرانی، و نیز ناحیه‌های بحرانیی که در زیر می‌آیند، تا سرحد امکان به α نزدیک‌اند بدون آنکه از آن بیشتر شوند.

ناحیه‌ی بحرانی متناظر برای آزمون فرض صفر $\theta = \theta_\circ$ در برابر فرض مقابل یک‌طرفه‌ی $\theta < \theta_\circ$ عبارت است از

$$x \le k'_\alpha$$

که در آن k'_α بزرگترین عدد صحیحی است که برای آن

$$\sum_{y=\circ}^{k'_\alpha} b(y;n,\theta_\circ) \le \alpha$$

و، بالاخره، ناحیه‌ی بحرانی برای آزمون فرض صفر $\theta = \theta_\circ$ در برابر فرض مقابل دو طرفه‌ی $\theta \ne \theta_\circ$ عبارت است از

$$x \ge k_{\alpha/۲} \quad \text{یا} \quad x \le k'_{\alpha/۲}.$$

ما به تشریح بیشتر این روش تعیین ناحیه‌های بحرانی برای آزمون‌های مربوط به پارامتر θی دوجمله‌ای نخواهیم پرداخت؛ زیرا، در عمل، بنا کردن تصمیم‌ها بر P-مقدارها زحمت کمتری دارد.

مثال ۶-۸. اگر $x = ۴$ نفر از $n = ۲۰$ بیمار دچار عوارض جانبی شدید بر اثر استفاده از دارویی جدید شده باشند، فرض صفر $\theta = ۰/۵۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta \ne ۰/۵۰$ در

سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید. در اینجا θ نسبت واقعی بیمارانی است که از داروی جدید دچار عوارض جانبی شدید شده‌اند.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_{\circ} : \theta = \text{۰/۵۰} \\ H_{۱} : \theta \neq \text{۰/۵۰} \end{cases} \quad \text{و} \qquad \alpha = \text{۰/۰۵}.$$

$'۲$: از آماره‌ی آزمون X، تعداد مشاهده شده‌ی موفقیت‌ها، استفاده کنید.

$'۳$: $x = ۴$ و چون $P(X \leq ۴) = \text{۰/۰۰۵۹}$، P–مقدار عبارت است از $۲(\text{۰/۰۰۵۹}) = \text{۰/۰۱۱۸}$.

$'۴$: چون P–مقدار، یعنی ۰/۰۱۱۸ کمتر از ۰/۰۵ است، فرض صفر را باید رد کرد. نتیجه می‌گیریم که $\theta \neq \text{۰/۵۰}$.

آزمون‌هایی که توصیف کرده‌ایم، صرف‌نظر از اینکه چهار گام بخش ۶-۱ را به‌کار بریم، مستلزم استفاده از جدول احتمال‌های دوجمله‌ای‌اند. برای $n \leq ۲۰$ می‌توانیم جدول ۱ پایان این کتاب را به‌کار بریم و برای مقادیر n تا ۱۰۰ می‌توانیم از جدول‌هایی که مرجع آنها در پایان کتاب داده شده، استفاده کنیم. به‌روشی بدیل، برای مقادیر بزرگتر n می‌توانیم از تقریب توزیع دوجمله‌ای با نرمال و تلقی

$$z = \frac{x - n\theta_{\circ}}{\sqrt{n\theta_{\circ}(۱-\theta_{\circ})}},$$

به‌عنوان مقدار متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد، استفاده کنیم. بنابر این، برای n بزرگ می‌توانیم فرض صفر $\theta=\theta_{\circ}$ را در برابر فرض‌های مقابل $\theta\neq\theta_{\circ}$، $\theta>\theta_{\circ}$، یا $\theta<\theta_{\circ}$، به ترتیب با استفاده از ناحیه‌های بحرانی $|z| \geq z_{\alpha/۲}$، $z \geq z_{\alpha}$ و $z \leq -z_{\alpha}$ آزمون کنیم که در آن

$$z = \frac{x - n\theta_{\circ}}{\sqrt{n\theta_{\circ}(۱-\theta_{\circ})}},$$

یا اگر تصحیح پیوستگی را به‌کار بریم

$$z = \frac{(x \pm \frac{۱}{۲}) - n\theta_{\circ}}{\sqrt{n\theta_{\circ}(۱-\theta_{\circ})}}.$$

از علامت منها وقتی x بیشتر از $n\theta_{\circ}$ است و از علامت بعلاوه وقتی x کوچکتر از $n\theta_{\circ}$ است، استفاده می‌کنیم.

مثال ۶-۹. یک شرکت تولید فرآورده‌های نفتی مدعی است که کمتر از ۲۰ درصد کلیه‌ی دارندگان اتومبیل، بنزین تولیدی آن شرکت را نمی‌خرند. این ادعا را در صورتی که یک بررسی تصادفی نشان دهد که از صاحبان ۲۰۰ اتومبیل ۲۲ نفر از بنزین تولیدی این شرکت استفاده نکرده‌اند، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱، آزمون کنید.

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_{\circ} \ : \ \theta = \circ/۲\circ \\ H_{۱} \ : \ \theta < \circ/۲\circ \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \alpha = \circ/\circ۱.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۲/۳۳$، که در آن (بدون تصحیح پیوستگی)

$$z = \frac{x - n\theta_{\circ}}{\sqrt{n\theta_{\circ}(۱-\theta_{\circ})}}.$$

۳. با قرار دادن $x = ۲۲$، $n = ۲\circ\circ$، و $\theta_{\circ} = \circ/۲\circ$، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{۲۲ - ۲\circ\circ(\circ/۲\circ)}{\sqrt{۲\circ\circ(\circ/۲\circ)(\circ/۸\circ)}} = -۳/۱۸.$$

۴. چون $z = -۳/۱۸$ کمتر از $-۲/۳۳$ است، فرض صفر را باید رد کرد؛ یعنی نتیجه می‌گیریم، همان‌طور که ادعا شده، کمتر از ۲۰ درصد همه‌ی صاحبان اتومبیل از بنزین تولیدی این شرکت استفاده نکرده‌اند.

توجه کنید که اگر در مثال قبل از تصحیح پیوستگی استفاده کرده بودیم، مقدار $z = -۳/\circ۹$ را به‌دست می‌آوردیم و نتیجه همانند قبل می‌بود.

۶-۶ آزمون‌های مربوط به تفاضل‌های بین k نسبت

در تحقیقات کاربردی، مسائل متعددی موجودند که در آنها باید تصمیم بگیریم که آیا تفاضل‌هایی که بین نسبت‌های نمونه‌ای، یا درصدها مشاهده می‌شوند، معنی‌دار هستند، یا اینکه آنها را می‌توان معلول تصادف دانست. برای مثال اگر ۶ درصد جوجه‌های منجمد در نمونه‌ای که از موجودی یک توزیع‌کننده استخراج شده‌اند واجد شرایط استاندارد نباشند، و تنها ۴ درصد در نمونه‌ای از موجودی توزیع کننده‌ی دیگر واجد شرایط استاندارد نباشند، ممکن است بخواهیم در این مورد حکم کنیم که آیا تفاضل بین درصدها معنی‌دار است یا نه. به همین نحو ممکن است بخواهیم برمبنای داده‌های نمونه‌ای نظر دهیم که آیا نسبت واقعی رأی‌دهندگانی که طرفدار کاندیدای خاصی هستند، در چهار شهر مختلف یکسان‌اند یا خیر.

برای بیان یک روش کلی در حل این نوع مسائل، فرض کنید که x_1، x_2، ...، و x_k مقادیر مشاهده شده‌ی k تصادفی مستقل X_1، X_2، ...، و X_k باشند که دارای توزیع‌های دوجمله‌ای با پارامترهای n_1 و θ_1، n_2 و θ_2، ...، و n_k و θ_k هستند. اگر nها به‌قدر کافی بزرگ باشند، می‌توانیم توزیع‌های متغیرهای تصادفی مستقل

$$Z_i = \frac{X_i - n_i\theta_i}{\sqrt{n_i\theta_i(1-\theta_i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

را با توزیع‌های نرمال استاندارد تقریب کنیم، و طبق ۲–۸ می‌توانیم

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\theta_i)^2}{n_i\theta_i(1-\theta_i)}$$

را به‌عنوان مقداری از یک متغیر تصادفی که توزیع خی‌دو با k درجه‌ی آزادی دارد، تلقی کنیم. بنابراین برای آزمون فرض $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k = \theta_0$ (در برابر این فرض مقابل که حداقل یکی از θها برابر θ_0 نیست) می‌توانیم از ناحیه‌ی بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k}$ استفاده کنیم که درآن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\theta_0)^2}{n_i\theta_0(1-\theta_0)}.$$

وقتی θ_0 معین نیست، یعنی وقتی توجه ما تنها به فرض صفر $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$ است، به‌جای θ، برآورد ادغام شده‌ی

$$\hat{\theta} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

را قرار می‌دهیم و ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $\chi^2 \geq \chi_{\alpha,k-1}$ در می‌آید که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\hat{\theta})^2}{n_i\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}.$$

از بین رفتن یک درجه‌ی آزادی، یعنی، تغییر در ناحیه‌ی بحرانی از $\chi^2_{\alpha,k}$ به $\chi^2_{\alpha,k-1}$ ناشی از این واقعیت است که به‌جای پارامتر نامعلوم θ، برآورد آن قرار داده شده است؛ برای بحث صوری این مطلب، مراجعی درآخر کتاب داده شده است.

حال شکل دیگری از آماره‌ی خی‌دو را برای این نوع آزمون ارائه می‌دهیم که، مطابق آنچه در بخش ۶–۷ خواهیم دید، انعطاف بیشتری برای کاربردهای دیگر دارد. با مرتب کردن داده‌ها به‌صورت زیر

	موفقیت‌ها	شکست‌ها
نمونه۱	x_1	$n_1 - x_1$
نمونه۲	x_2	$n_2 - x_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
نمونهk	x_k	$n_k - x_k$

درایه‌های آن را **فراوانی‌های خانه‌ای مشاهده شده‌ی** f_{ij} می‌نامیم، که در آن اوّلین اندیس نشانه‌ی سطر و دوّمین اندیس نشانه‌ی ستون این جدول $k \times 2$ است.

تحت فرض صفر $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k = \theta_0$، امید فراوانی‌های خانه‌ای مشاهده شده برای اوّلین ستون به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, k$، $n_i\theta_0$ و برای ستون دوّم $n_i(1-\theta_0)$ هستند. وقتی θ_0 معلوم نباشد، مانند قبل به‌جای آن برآورد ادغام شده‌ی $\hat{\theta}$ را قرار می‌دهیم و امید فراوانی‌های خانه‌ای را به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, k$ به‌صورت

$$e_{i1} = n_i\hat{\theta} \quad , \quad e_{i2} = n_i(1-\hat{\theta})$$

برآورد می‌کنیم. اثبات این مطلب را که مقدار آماره‌ی خی‌دو

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i - n_i\hat{\theta})^2}{n_i\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}$$

را می‌توان به‌صورت

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

نوشت، در تمرین ۶–۲۷ به عهده‌ی خواننده گذاشته‌ایم.

مثال ۶–۱۰. برمبنای داده‌های نمونه‌ای که در جدول زیر نشان داده شده، تعیین کنید که آیا نسبت واقعی مشتریانی که ماده‌ی شوینده‌ی A را به ماده‌ی شوینده‌ی B ترجیح می‌دهند، در هر سه شهر یکسان است یا نه. از سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ استفاده کنید.

	ماده‌ای که ترجیح می‌دهند		
	A	B	
شهر الف	۲۳۲	۱۶۸	$n_1 = 400$
شهر ب	۲۶۰	۲۴۰	$n_2 = 500$
شهر ج	۱۹۷	۲۰۳	$n_3 = 400$

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \\ H_1 : \text{سه } \theta_i \text{ با هم برابر نیستند} \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \alpha = 0/05.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^2 \geq 5/991$، که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

و ۵/۹۹۱ مقدار $\chi^2_{0/05,2}$ است.

۳. چون برآورد ادغام شده‌ی θ عبارت است از

$$\hat{\theta} = \frac{232+260+197}{400+500+400} = \frac{689}{1300} = 0/53.$$

بنابر این، امید فراوانی‌های خانه‌ای برابرند با

$$\begin{aligned} e_{11} &= 400(0/53) = 212 \quad , \quad e_{12} = 400(0/47) = 188 \\ e_{21} &= 500(0/53) = 265 \quad , \quad e_{22} = 500(0/47) = 235 \\ e_{31} &= 400(0/53) = 212 \quad , \quad e_{32} = 400(0/47) = 188 \end{aligned}$$

و با قرار دادن آنها در فرمول χ^2، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(232-212)^2}{212} + \frac{(260-265)^2}{265} + \frac{(197-212)^2}{212} \\ &\quad + \frac{(168-188)^2}{188} + \frac{(240-235)^2}{235} + \frac{(203-188)^2}{188} \\ &= 6/48. \end{aligned}$$

۴. چون $\chi^2 = 6/48$ از $\chi^2_{0/05,2}$ بیشتر است، فرض صفر باید رد شود، به عبارت دیگر، نسبت‌های واقعی مشتریانی که ماده‌ی شوینده‌ی A را بر ماده‌ی شوینده‌ی B در سه شهر ترجیح می‌دهند، یکسان نیستند.

تمرین

۶–۲۵. در یک نمونه‌ی تصادفی، ۴۶ تا از ۴۰۰ پیاز لاله از یک گلفروشی و ۱۸ تا از ۲۰۰ پیاز لاله از گلفروشی دوّم شکوفه نکرده‌اند. از آماره‌ی χ^2 استفاده کرده فرض

صفر $\theta_1 = \theta_2$ را در برابر فرض مقابل $\theta_1 \neq \theta_2$ در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ را آزمون کنید.

۶–۲۶. با مفروض بودن نمونه‌های تصادفی بزرگی از دو توزیع دوجمله‌ای، نشان دهید که می‌توان فرض صفر $\theta_1 = \theta_2$ را، بر مبنای آماره‌ی

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

آزمون کرد که در آن $\hat{\theta} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$.

۶–۲۷. نشان دهید که دو فرمولی که برای χ^2 در بخش ۶–۶ داده شده‌اند، معادل‌اند.

۶–۲۸. به‌ازای $k = 2$، نشان دهید که فرمول χ^2 را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\chi^2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_2 x_1 - n_1 x_2)^2}{n_1 n_2 (x_1 + x_2)[(n_1 + n_2) - (x_1 + x_2)]}.$$

۶–۲۹. در یک نمونه‌ی تصادفی از ۲۰۰ نفری که صبحانه نخورده‌اند، ۸۲ نفر دچار ضعف نیم‌روزی شده‌اند، و در یک نمونه‌ی تصادفی از ۳۰۰ نفری که صبحانه خورده‌اند که ۸۷ نفر گفته‌اند که دچار ضعف نیم‌روزی شده‌اند. فرض صفر را که فرقی بین نسبت‌های جامعه‌های متناظر نیست در برابر این فرض مقابل که ضعف نیم‌روزی بین کسانی که صبحانه نخورده‌اند شایع‌تر است، آزمون کنید.

۶–۳۰. با رجوع به مثال ۶–۸، نشان دهید که ناحیه‌ی بحرانی $x \leq 15$ یا $x \geq 15$ است و متناظر با این ناحیه‌ی بحرانی، سطح معنی‌دار بودن در واقع ۰/۰۴۱۴ است.

۶–۳۱. ادعا شده است که بیش از ۴۰درصد خریدکنندگان، می‌توانند کالایی را که روی آن خیلی تبلیغ شده است، تشخیص دهند. اگر در نمونه‌ای تصادفی، ۱۰ نفر از ۱۸ نفر خرید کننده قادر باشند که آن کالا را تشخیص دهند، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید که آیا فرض صفر $\theta = 0/40$ را می‌توان در برابر فرض مقابل $\theta > 0/40$ رد کرد؟

۶–۳۲. پزشکی مدعی است که کمتر از ۳۰% همه‌ی اشخاصی که در معرض مقدار معینی پرتوگیری قرارداشته‌اند، دچار تأثیرات نامطلوب خواهند شد. اگر در نمونه‌ای تصادفی، تنها ۱ نفر از ۱۹ نفر که در معرض چنان پرتوگیری قرارگرفته‌اند، دچار

عوارض نامطلوب شوند، فرض صفر $\theta = ٠/٣٠$ را در برابر فرض مقابل $\theta < ٠/٣٠$ در سطح معنی‌دار بودن ٠/٠۵ آزمون کنید.

۶-۳۳. در نمونه‌ای ۱۲ حادثه از ۱۴ حادثه‌ی صنعتی، معلول شرایط کاری فاقد ایمنی بوده‌اند. از سطح معنی‌دار بودن ٠/٠۱ استفاده کرده فرض صفر $\theta = ٠/۴٠$ را در برابر فرض مقابل $\theta \neq ٠/۴٠$ آزمون کنید.

۶-۳۴. در نمونه‌ای از ۱۲ دانشجوی کارشناسی رشته‌ی مدیریت بازرگانی، شش نفر گفته‌اند که میل دارند در دوره‌ی کارشناسی ارشد حسابداری تحصیل کنند. از سطح معنی‌دار بودن ٠/٠۱ استفاده کرده فرض صفر $\theta = ٠/٢٠$، یعنی این فرض را که ۲٠ درصد دانشجویان کارشناسی رشته مدیریت بازرگانی میل دارند در دوره‌ی کارشناسی ارشد حسابداری تحصیل کنند، در برابر $\theta > ٠/٢٠$ آزمون کنید.

۶-۳۵. یک تولیدکننده‌ی مواد غذایی می‌خواهد بداند که آیا احتمال مصرف کننده‌ای نوعی جدید از بسته‌بندی را بر بسته‌بندی قبلی ترجیح می‌دهد، واقعاً ٠/۶٠ است یا خیر. اگر در نمونه‌ای تصادفی، هفت مصرف‌کننده از ۱۸ مصرف‌کننده بسته‌بندی جدید را بر بسته‌بندی قبلی ترجیح دهند، فرض صفر $p = ٠/۶٠$ را در برابر فرض مقابل $p \neq ٠/۶٠$ در سطح معنی‌دار بودن ٠/٠۵ آزمون کنید.

۶-۳۶. در یک نمونه‌ی تصادفی از ۶٠٠ اتومبیلی که در تقاطع خاصی به سمت راست می‌پیچند، ۱۵۷ اتومبیل وارد خط غلط می‌شوند. از سطح معنی‌دار بودن ٠/٠۵ استفاده کرده این فرض صفر فرض را که نسبت واقعی راننده‌هایی که مرتکب این اشتباه در تقاطع مفروض می‌شوند $\theta = ٠/٣٠$ است در برابر این فرض مقابل که $\theta \neq ٠/٣٠$، آزمون کنید.

۶-۷ تحلیل یک جدول $r \times c$

روشی که در این بخش توصیف خواهیم کرد در مورد دو نوع مساله قابل اجراست، دو مسأله‌ای که از نظر مفهومی متفاوت‌اند ولی به روش یکسانی مورد تحلیل قرارمی‌گیرند. در اوّلین نوع از مسائل، با نمونه‌هایی از r جامعه‌ی چندجمله‌ای سروکار داریم که در آن هر امتحان c برآمد ممکن دارد. مثلاً وقتی اشخاصی در پنج حوزه‌ی انتخاباتی مختلف مورد پرسش قرارمی‌گیرند و از آنها پرسیده می‌شود که آیا موافق کاندیدایی

هستند، برعلیه او رأی می‌دهند، یا هنوز تصمیم نگرفته‌اند، در وضعیتی از این‌گونه هستیم. در اینجا $r = ۵$ و $c = ۳$.

در مثال ۶–۱۰ نیز در همین وضعیت خواهیم بود در صورتی که از هر خریدکننده سؤال شود که آیا ماده‌ی شوینده‌ی A یا ماده‌ی شوینده‌ی B را ترجیح می‌دهد، یا هیچ کدام از آنها ارجحیتی برای او ندارد. بنابراین امکان دارد که نتایجی را که در جدول ۳×۳ زیر نشان داده شده است، به‌دست آورده باشیم:

	ماده‌ای که ترجیح می‌دهند			
	A	B	افراد بی‌تفاوت	
شهر الف	۱۷۴	۹۳	۱۳۳	۴۰۰
شهر ب	۱۹۶	۱۲۴	۱۸۰	۵۰۰
شهر ج	۱۴۸	۱۰۵	۱۴۷	۴۰۰

فرض صفری که مایلیم که در مسأله‌ای از این نوع آزمون کنیم عبارت از آن است که نمونه‌گیری از r جامعه چندجمله‌ای یکسان انجام می‌شود. به‌صورت نمادی، اگر θ_{ij} احتمال iامین برآمد برای iامین جامعه باشد، می‌خواهیم که فرض صفر

$$\theta_{ij} = \theta_{۲j} = \cdots = \theta_{rj}$$

را به‌ازای $j = ۱,۲,\ldots,c$ آزمون کنیم. فرض مقابل عبارت از این خواهد بود که $\theta_{۱j}$، $\theta_{۲j}$،...، و θ_{rj} حداقل به‌ازای یک مقدار j برابر نیستند.

در مثال قبل، با سه نمونه سروکار داشتیم که اندازه‌های ثابت آنها از مجموع سطرها، یعنی ۴۰۰، ۵۰۰، و ۴۰۰ به‌دست می‌آمد؛ از سوی دیگر، مجموع‌های ستونی به عهده‌ی شانس گذاشته می‌شد. در نوعی دیگر از مسائل که در آن روش این فصل قابل اجراست، تنها با یک نمونه سروکار داریم و مجموع سطرها و در همان حال ستون‌ها به عهده شانس گذاشته می‌شوند.

برای آنکه مثالی ارائه دهیم، جدول زیر را در نظر می‌گیریم که در مطالعه‌ی وجود وابستگی بین بهره‌های هوشی اشخاصی است که برنامه‌ی آموزش شغلی مؤسسه‌ای بزرگ را گذرانده‌اند و نحوه‌ی کار آنها پس از اتمام دوره، به‌دست آمده است:

	نحوه‌ی کار				
	خوب	متوسط	ضعیف		
۱۵۶	۲۵	۶۴	۶۷	کمتر از متوسط	بهره‌ی هوشی
۱۷۴	۵۶	۷۶	۴۲	متوسط	
۷۰	۳۷	۲۳	۱۰	بالاتر از متوسط	
۴۰۰	۱۱۸	۱۶۳	۱۱۹		

در اینجا تنها یک نمونه به اندازه‌ی ۴۰۰ داریم و مجموع‌های سطری و ستونی به عهده‌ی شانس واگذار شده‌اند. عمدتاً در ارتباط با چنین مسائلی است که جدول‌های $r\times c$ را **جدول‌های توافقی** می‌نامند.

فرض صفری که می‌خواهیم به کمک جدول بالا آزمون کنیم، آن است که نحوه‌ی کار افرادی که برنامه‌ی آموزش شغلی را گذرانده‌اند، مستقل از بهره‌ی هوشی آنهاست. در حالت کلی، اگر θ_{ij} عبارت از احتمال آن باشد که فقره‌ای در خانه‌ای متعلق به سطر iام و ستون jام بیفتد، $\theta_{i.}$عبارت از احتمال آن باشد که فقره‌ای در سطر iام بیفتد، و $\theta_{.j}$ عبارت از احتمال آن باشد که فقره‌ای در ستون jام بیفتد، فرض صفری که می‌خواهیم آزمون کنیم عبارت خواهد بود از

$$\theta_{ij} = \theta_{i.} . \theta_{.j}$$

به‌ازای $i = 1,2,\dots,r$ و $j = 1,2,\dots,c$. متناظراً فرض مقابل عبارت است از $\theta_{ij} \neq \theta_{i.} . \theta_{.j}$ دست‌کم به‌ازای زوجی از مقادیر i و j.

چون روشی که به کمک آن یک جدول $r\times c$ را تحلیل می‌کنیم، صرف‌نظر از اینکه با r نمونه از جامعه‌های چندجمله‌ای با c برآمد مختلف یا یک نمونه از جامعه‌ای چندجمله‌ای با rc برآمد مختلف سروکار داریم، یکسان است؛ لذا این روش را در ارتباط با موضوع دوّم مورد بحث قرارمی‌دهیم. در تمرین ۶–۳۶ از خواننده خواسته خواهد شد که این کار را به موازات بحث حاضر، برای مسأله‌ی نوع اوّل نیز انجام دهد.

در زیر، فراوانی مشاهده شده برای خانه‌ی سطر iام و ستون jام را با f_{ij}، جمع‌های ستونی را با $f_{i.}$، جمع‌های سطری را با $f_{.j}$، و مجموع کل، یعنی مجموع فراوانی‌های همه‌ی خانه‌ها را، با f نشان می‌دهیم. با این نمادها، احتمال‌های $\theta_{i.}$ و

$\theta_{.j}$ را به صورت

$$\hat{\theta}_{i.} = \frac{f_{i.}}{f} \quad , \quad \hat{\theta}_{.j} = \frac{f_{.j}}{f}$$

برآورد می‌کنیم و تحت فرض صفر استقلال، تساوی‌های

$$e_{ij} = \hat{\theta}_{i.} \times \hat{\theta}_{.j} \times f = \frac{f_{i.}}{f} \times \frac{f_{ij}}{f} \times f = \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{f}$$

را برای فراوانی مورد انتظار سطر iام و ستون jام به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که به این ترتیب e_{ij} از ضرب‌کردن مجموع سطری که خانه به آن تعلق دارد در مجموع ستونی که به آن متعلق است، و تقسیم بر مجموع کل، به‌دست آمده است.

پس از محاسبه‌ی e_{ij}، تصمیم خود را برمبنای مقدار

$$\chi^{۲} = \sum_{i=۱}^{r} \sum_{j=۱}^{c} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^{۲}}{e_{ij}}$$

قرار می‌دهیم و فرض صفر را رد می‌کنیم هرگاه مقدار آن از $\chi^{۲}_{\alpha,(r-۱)(c-۱)}$ بیشتر باشد.

مقدار درجه‌ی آزادی $(r-۱)(c-۱)$ است، و در رابطه با آن به نکته‌ی زیر اشاره می‌کنیم:

هر موقع که فراوانی‌های خانه‌ای مورد انتظار در فرمول‌های خی‌دو برمبنای داده‌های شمارشی نمونه‌ای برآورد شوند، تعداد درجه‌های آزادی، $s-t-۱$ است که در آن s تعداد جملات مجموع و t تعداد پارامترهای مستقلی است که به‌جای آنها برآوردهای‌شان گذاشته می‌شوند. در موقع آزمون وجود اختلاف بین k نسبت به کمک آماره‌ی خی‌دو بخش ۵-۵، داشتیم $s = ۲k$ و $t = k$، زیرا باید k پارامتر $\theta_۱، \theta_۲، \ldots، \theta_k$ را برآورد می‌کردیم، و مقدار درجه‌ی آزادی $۲k - k - ۱ = k - ۱$ بود. در موقع آزمون مستقل بودن به کمک یک جدول توافقی $r \times c$، داریم $s = rc$ و $t = r + c - ۲$، زیرا r پارامتر $\theta_{i.}$ و c پارامتر $\theta_{.j}$ مقید به این دو قید هستند که مجموع هر کدام از آنها باید برابر ۱ باشد؛ بنابر این

$$s - t - ۱ = rc - (r + c - ۲) - ۱ = (r - ۱)(c - ۱).$$

چون آماره‌ی آزمونی که توصیف کرده‌ایم تنها به تقریب دارای توزیع خی‌دو با $(r-۱)(c-۱)$ درجه‌ی آزادی است، رسم بر این است که این آزمون را تنها وقتی به‌کار برند که هیچ یک از e_{ij}ها کمتر از ۵ نباشد؛ این امر گاهی مستلزم آن است که برخی

از خانه‌ها را با هم ادغام کنیم که در نتیجه از تعداد درجه‌ی آزادی متناظر کاسته می‌شود.

مثال ۶-۱۱. برای داده‌هایی که در جدول زیر نشان داده شده‌اند، مستقل بودن استعداد ریاضی شخص و علاقه‌ی او به آمار را در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید.

		استعداد ریاضی		
		عالی	متوسط	ضعیف
علاقه به آمار	ضعیف	۱۵	۴۲	۶۳
	متوسط	۳۱	۶۱	۵۸
	عالی	۲۹	۴۷	۱۴

حل. ۱.

$$\begin{cases} H_0: \text{استعداد ریاضی و علاقه به آمار مستقل اند} \\ H_1: \text{این دو متغیر مستقل نیستند} \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha = 0/01.$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^2 \geq 13/277$ که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

و ۱۳/۲۷۷ مقدار $\chi^2_{0/01,4}$ است.

۳. فراوانی‌های مورد انتظار برای سطر اوّل عبارت‌اند از $\frac{120 \times 135}{360} = 45$، $\frac{120 \times 150}{360} = 50$، و $120 - 45 - 50 = 25$، که در آن از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که برای هر سطر یا هر ستون، مجموع فراوانی‌های مورد انتظار خانه‌ها با مجموع فراوانی‌های مشاهده شده برابر است. به‌همین نحو، فراوانی‌های مورد انتظار برای سطر دوّم عبارت‌اند از ۵۶/۲۵، ۶۲/۵، ۳۱/۲۵، و فراوانی‌های مورد انتظار برای سطر سوم (که همه با عمل تفریق از مجموع‌های کل ستون‌ها به‌دست آمده‌اند) عبارت‌اند از ۳۳/۷۵، ۳۷/۵، ۱۸/۷۵. در این صورت با جایگذاری در فرمول χ^2 نتیجه می‌شود:

$$\chi^2 = \frac{(63-45)^2}{45} + \frac{(42-50)^2}{50} + \cdots + \frac{(29-18/75)^2}{18/75} = 32/14.$$

۴. چون $\chi^2 = 32/14$ از ۱۳/۲۷۷ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه

می‌گیریم که وابستگی بین استعداد ریاضی افراد و علاقه‌ی آنها به آمار موجود است.

یکی از نقیصه‌های تحلیل خی‌دوی یک جدول $r\times c$ آن است که امکان تغییر ترتیب سطرها یا ستون‌ها را به حساب نمی‌آورد. به عنوان نمونه، در مثال ۶-۱۱، استعداد ریاضی و نیز علاقه به آمار به ترتیب از ضعیف به متوسط و تا عالی مرتب شده‌اند، و مقداری که برای $\chi^۲$ به‌دست می‌آوریم، در صورتی که سطرها و ستون‌ها هر کدام بین خود تغییر آرایش داده شوند، یکسان باقی می‌ماند. همچنین، ستون‌های جدول مثال ۶-۱۰ ترتیب‌بندی مشخصی را از ارجحیت B (عدم ارجحیت A) گرفته تا بی‌تفاوت بودن و تا ارجحیت A را می‌نمایانند ولی در این حالت ترتیب‌بندی خاصی برای سطرها وجود ندارد.

۶-۸ نیکویی برازش

آزمون نیکویی برازش که در اینجا بررسی می‌کنیم در وضعیت‌هایی به‌کارمی‌رود که در آنها می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا می‌توان مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با توزیع مفروض تلقی کرد یا نه. نوع دیگری از «نیکویی برازش» که در برازاندن یک منحنی بر مجموعه‌ای از داده‌های زوج شده به‌کار می‌رود که در دروس پیشرفته‌ی آماری مورد بحث قرار می‌گیرد. برای تشریح مطلب، فرض کنید که بخواهیم برمبنای داده‌هایی (فراوانی‌های مشاهده شده) که در جدول زیر نشان داده شده، تصمیم بگیریم که آیا تعداد اشتباهات یک حروف‌چین در چیدن یک رانگا، متغیری تصادفی با توزیع پواسون است یانه.

تعدادخطاها	فراوانیهای مشاهده شده f_i	احتمالهای پواسون با $\lambda=۳$	فراوانیهای مورد انتظار e_i
۰	۱۸	۰/۰۴۹۸	۲۱/۹
۱	۵۳	۰/۱۴۹۴	۶۵/۷
۲	۱۰۳	۰/۲۲۴۰	۹۸/۶
۳	۱۰۷	۰/۲۲۴۰	۹۸/۶
۴	۸۲	۰/۱۶۸۰	۷۳/۹
۵	۴۶	۰/۱۰۰۸	۴۴/۴
۶	۱۸	۰/۰۵۰۴	۲۲/۲
۷	۱۰	۰/۰۲۱۶	۹/۵
۸	۲ } ۳	۰/۰۰۸۱	۳/۶ } ۵/۳
۹	۱	۰/۰۰۳۸	۱/۷

برای تعیین مجموعه‌ای متناظر از فراوانی‌های مورد انتظار برای متغیرهای تصادفی از جامعه‌ای پواسون، ابتدا از میانگین توزیع مشاهده شده برای برآورد پارامتر λی توزیع پواسون استفاده کرده $\hat{\lambda}=\frac{۱۳۴۱}{۴۴۰}=۳/۰۵$ یا تقریباً $\hat{\lambda}=۳$ را به‌دست می‌آوریم. سپس، با استخراج احتمال‌های پواسون برای $\lambda=۳$ از جدول ۲ (با استفاده از احتمال ۹ یا بیشتر به‌جای احتمال ۹) و ضرب در ۴۴۰، یعنی فراوانی کل، فراوانی‌های مورد انتظاری را که در ستون سمت راست جدول نشان داده‌ایم، به‌دست می‌آوریم. برای آزمون این فرض صفر که فراوانی‌های مشاهده شده تشکیل نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی پواسون را می‌دهند، باید قضاوت کنیم که برازش با چه نیکویی، یا توافق با چه نزدیکی، بین دو مجموعه‌ی فراوانی‌ها موجود است. در حالت کلی، برای آزمون این فرض صفر $H_۰$ که مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده شده، از جامعه‌ای با توزیع مشخص می‌آید در برابر این فرض مقابل که جامعه دارای توزیع دیگری است، مقدار

$$\chi^۲=\sum_{i=۱}^{m}\frac{(f_i-e_i)^۲}{e_i}$$

را محاسبه می‌کنیم. $H_۰$ را در سطح معنی‌دار بودن α رد می‌کنیم، در صورتی که

$$\chi^۲\geq\chi^۲_{\alpha,m-t-۱}$$

که در آن m تعداد جمله‌ها در مجموع و t تعداد پارامترهای مستقلی است که برمبنای داده‌های نمونه‌ای برآورد شده‌اند (بحث بخش قبل). در مثال بالا، $t=۱$، زیرا تنها یک پارامتر برمبنای داده‌ها برآورد شده و تعداد درجه‌ی آزادی $m-۲$ است.

مثال ۶-۱۲. برای داده‌های جدول صفحه‌ی(قبل)، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید که آیا تعداد اشتباهات حروف‌چینی که یک رانگا حروف می‌چیند متغیری تصادفی با توزیع پواسون است یا نه.

حل. (چون فراوانی‌های مورد انتظار متناظر با تعداد ۸ و ۹ اشتباه چاپی کمتر از ۵ است، دو رده را با هم ترکیب کرده‌ایم.)

۱.

$$\begin{cases}H_۰: & \text{تعداد اشتباه‌ها ی‌ک متغی‌ر تصادفی پواسن است}\\ H_۱: & \text{تعداد اشتباه‌ها ی‌ک متغی‌ر تصادفی پواسن}\end{cases},\quad \alpha=۰/۰۵$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^۲\geq ۱۴/۰۶۷$، که در آن

$$\chi^{۲}=\sum_{i=۱}^{m}\frac{(f_i-e_i)^{۲}}{e_i}$$

و ۱۴/۰۶۷ مقدار $\chi^{۲}_{۰/۰۵,۷}$ است.

۳. با جایگذاری در فرمول مربوط $\chi^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\chi^{۲}=\frac{(۱۸-۲۱/۹)^{۲}}{۲۱/۹}+\frac{(۵۳-۶۵/۷)^{۲}}{۶۵/۷}+\cdots+\frac{(۳-۵/۳)^{۲}}{۵/۳}$$
$$=۶/۸۳.$$

۴. چون $\chi^{۲}=۶/۸۳$ کمتر از ۱۴/۰۶۷ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد، در واقع توافق نزدیک بین فراوانی‌های مشاهده شده و مورد انتظار، این مطلب را القا می‌کند که توزیع پواسون «برازش نیکویی» را در اختیار می‌گذارد.

تمرین

۶-۳۷. نشان دهید قاعده‌ای که برای محاسبه‌ی فراوانی‌های خانه‌ای مورد انتظار بیان شد، در حالتی نیز که این فرض صفر را آزمون می‌کنیم که از r جامعه با توزیع‌هایی چندجمله‌ای یکسان نمونه‌گیری می‌کنیم، قابل اجراست.

۶-۳۸. نشان دهید که فرمول محاسباتی زیر برای $\chi^{۲}$ با فرمول بخش ۶-۷ هم‌ارز است:

$$\chi^{۲}=\sum_{i=۱}^{r}\sum_{j=۱}^{c}\frac{f_{ij}^{۲}}{e_{ij}}-f.$$

۶-۳۹. اگر تحلیل یک جدول توافقی نشان دهد که بین دو متغیر تحت بررسی وابستگی وجود دارد، قوت این وابستگی را می‌توان به کمک ضریب توافقی

$$C=\sqrt{\frac{\chi^{۲}}{\chi^{۲}+f}}$$

سنجید، که در آن $\chi^{۲}$ مقداری است که برای آماره‌ی آزمون به‌دست می‌آید و f مجموع کلی است. نشان دهید که

الف) برای یک جدول توافقی ۲×۲ مقدار ماکسیمم C عبارت است از $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$.

ب) برای یک جدول توافقی ۳×۳ مقدار ماکسیمم C عبارت است از $\frac{۱}{۳}\sqrt{۶}$.

۶-۴۰. در مطالعه‌ی عکس‌العمل والدین نسبت به درسی الزامی که در دبیرستان عرضه می‌شود، یک نمونه‌ی تصادفی از ۳۶۰ پدر و مادر، بسته به اینکه تعداد فرزندان‌شان

یک، دو، سه یا بیشتر بوده و نیز بسته به اینکه به‌نظر آنها این درس ضعیف، مناسب، یا خوب است، رده‌بندی می‌شود. برمبنای نتایج جدول زیر، در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید که آیا وابستگی بین عکس‌العمل والدین نسبت به درس و تعداد فرزندانی که در مدرسه دارند، وجود دارد یانه.

	تعداد فرزندان		
	۱	۲	۳ یا بیشتر
ضعیف	۴۸	۴۰	۱۲
مناسب	۵۵	۵۳	۲۹
خوب	۵۷	۴۶	۲۰

۴۱-۶. آزمایش‌هایی از صافی صدا و درستگیری (عدم اختلاط ایستگاه‌ها با هم) ۱۹۰ رادیو، نتایجی را که در جدول زیر نشان داده شده‌اند، به‌دست آمده است.

		صافی صدا		
		ضعیف	متوسط	قوی
	ضعیف	۷	۱۲	۳۱
درستگیری	متوسط	۳۵	۵۹	۱۸
	قوی	۱۵	۱۳	۰

از سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ استفاده کرده این فرض صفر را که صافی صدا مستقل از درستگیری است، آزمون کنید.

۴۲-۶. داده‌های نمونه‌ای زیر به محموله‌هایی مربوط است که یک شرکت بزرگ از سه فروشنده مختلف دریافت کرده است.

	تعداد موارد ناسالم		
فروشنده	رد	قابل پذیرش	سالم
A	۱۲	۲۳	۸۹
B	۸	۶۲	۶۲
C	۲۱	۳۰	۱۱۹

در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۱ آزمون کنید که آیا کیفیت محصولات سه فروشنده یکی است یا خیر.

۶-۴۳. چهار سکه ۱۶۰ بار پرتاب شده‌اند و ۰،۱،۲،و ۴ شیر به ترتیب ۱۹، ۵۴، ۵۸، ۲۳، و ۶ بار ظاهر شده‌اند. از سطح معنی‌دار بودن $\alpha = ۰/۰۵$ استفاده کرده آزمون کنید که آیا این فرض موجه است که سکه‌ها منصف بوده و به تصادف پرتاب شده‌اند یا نه.

۶-۴۴. می‌خواهیم این فرض را آزمون کنیم که آیا تعداد اشعه‌ی گامایی که در هر ثانیه از یک ماده‌ی رادیواکتیو خارج می‌شود، متغیری پواسون با $\lambda = ۲/۴$ است یا نه. برای آزمون فرض صفر در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ از داده‌های زیر که در ۳۰۰ فاصله‌ی زمانی یک ثانیه‌ای به‌دست آمده‌اند، استفاده کنید.

فراوانی	تعداد اشعه گاما
۱۹	۰
۴۸	۱
۶۶	۲
۷۴	۳
۴۴	۴
۳۵	۵
۱۰	۶
۴	$\geq$ ۷

۶-۴۵. نانوایی هر روز، از شنبه تا پنجشنبه، سه کیک شکلاتی بزرگ را طبخ می‌کند و در صورت فروش نرفتن، آنها را به یک مؤسسه خیریه می‌بخشد. از داده‌های جدول زیر استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ آزمون کنید که آیا می‌توان این داده‌ها را به عنوان مقادیر یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای تلقی کرد یا خیر.

تعداد روزها	تعداد کیک‌های به فروش رفته
۱	۰
۱۶	۱
۵۵	۲
۲۲۸	۳

۶-۴۶. داده‌های زیر توزیع ارقامی هستند که در یک کنتورگایگر از تعداد ذره‌های خارج شده از یک ماده‌ی رادیواکتیو در ۱۰۰ فاصله‌ی زمانی ۴۰ ثانیه‌ای ثبت شده‌اند.

الف) تحقیق کنید که میانگین و انحراف معیار این توزیع به ترتیب عبارت‌اند از: $\bar{x} = ۲۰$ و $s = ۵$.

ب) این احتمال‌ها را پیدا کنید که یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با $\mu = ۲۰$ و $\sigma = ۵$ مقداری کمتر از ۹/۵، بین ۹/۵ و ۱۴/۵، بین ۱۴/۵ و ۱۹/۵، بین ۱۹/۵ و ۲۴/۵، بین ۲۴/۵ و ۲۹/۵، بین ۲۹/۵ و ۳۴/۵، و بیشتر از ۳۴/۵ اختیار کند.

ج) فراوانی‌های مورد انتظار منحنی نرمال برای رده‌های مختلف را با ضرب احتمال‌های قسمت ب در فراوانی کل پیدا کنید و سپس در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ این فرض صفر را آزمون کنید که داده‌ها تشکیل نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه‌ی نرمال را می‌دهند.

تعداد ذره‌ها	فراوانی
۵ − ۹	۱
۱۰ − ۱۴	۱۰
۱۵ − ۱۹	۳۷
۲۰ − ۲۴	۳۶
۲۵ − ۲۹	۱۳
۳۰ − ۳۴	۲
۳۵ − ۳۹	۱

فصل هفتم

رگرسیون

۱-۷ مقدمه

یکی از هدف‌های اصلی بسیاری از پژوهش‌های آماری ایجاد وابستگی‌هایی است تا پیش‌بینی یک یا چند متغیر را برحسب سایرین میسر گرداند. مثلاً، مطالعاتی انجام می‌شود تا فروش‌های بالقوه‌ی یک محصول جدید را برحسب قیمت آن، وزن یک بیمار را برحسب تعداد هفته‌هایی که پرهیز داشته است، مخارج سرگرمی‌های خانواده را برحسب درآمد آن، مصرف سرانه‌ی برخی مواد غذایی را برحسب ارزش غذایی آنها و مقدار پولی که صرف تبلیغ آنها در تلویزیون می‌شود و مواردی از این قبیل را پیش‌بینی کنند.

البته گرچه مطلوب آن است که بتوان کمیتی را برحسب سایرین دقیقاً پیش‌بینی کرد، ولی این کار به‌ندرت میسر است، و در اغلب موارد باید به پیش‌بینی متوسط‌ها یا امیدهای ریاضی رضایت دهیم. مثلاً، شاید نتوانیم درآمد آقای (ب) را ده سال بعد از فارغ‌التحصیل شدن از دانشگاه به‌طور دقیق پیش‌بینی کنیم ولی، با در دست داشتن داده‌های مناسب، می‌توانیم درآمد متوسط یک فارغ‌التحصیل دانشگاه را برحسب تعداد سال‌های بعد از فارغ‌التحصیلی پیش‌بینی کنیم. به‌همین نحو، حداکثر می‌توانیم متوسط محصول غله‌ی معینی را برحسب داده‌های مربوط به بارش باران در ماه تیر پیش‌بینی کنیم، و می‌توانیم حداکثر، وضع تحصیلی دانشجویان تازه وارد را برحسب بهره‌ی هوشی آنها به‌طور متوسط پیش‌بینی نماییم.

به‌طور صوری، اگر توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y را داشته باشیم و بدانیم

که X مقدار x را اختیار می‌کند، مسأله‌ی اصلی **رگرسیون دو متغیره** عبارت از تعیین میانگین شرطی $\mu_{Y|x}$، یعنی «متوسط» مقدار Y به‌ازای مقدار مفروضی از X است. اصطلاح «رگرسیون» به صورتی که در این کتاب به کار رفته، به فرانسیس گالتن باز می‌گردد که وی آن را اوّلین بار برای بیان برخی روابط، در نظریه‌ی وراثت به کار برد. در مسائلی که متضمن بیش از دو متغیر تصادفی‌اند، یعنی در رگرسیون چندگانه، با کمیت‌هایی مانند $\mu_{Z|x,y}$ میانگین Z به‌ازای مقادیر مفروضی از X و Y، $\mu_{X_۴|x_۱,x_۲,x_۳}$ میانگین $X_۴$ به‌ازای مقادیر مفروضی از $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$، و نظایر آنها سروکار داریم.

اگر $f(x,y)$ مقدار چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y در (x,y) باشد، مسأله‌ی رگرسیون دو متغیره صرفاً عبارت از تعیین چگالی شرطی X به شرط $X=x$ و سپس محاسبه‌ی انتگرال

$$\mu_{Y|x}=E(Y|x)=\int_{-\infty}^{\infty} y.w(x|y)dy$$

است. معادله‌ی حاصل، **معادله‌ی رگرسیون** Y روی X نامیده می‌شود. متقابلاً، ممکن است که به معادله‌ی رگرسیون

$$\mu_{X|y}=E(X|y)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x|y)dy$$

علاقه‌مند باشیم. در حالت گسسته، که در آن به جای چگالی‌های احتمال با توزیع‌های احتمال سروکار داریم، به جای انتگرال در دو معادله‌ی رگرسیون بالا صرفاً مجموع‌ها را قرار می‌دهیم.

موقعی که توزیع توأم دو متغیر تصادفی یا حداقل همه‌ی پارامترهای آن را ندانیم، تعیین $\mu_{Y|x}$ و $\mu_{X|y}$ به یک مسأله‌ی برآورد برمبنای داده‌های نمونه‌ای تبدیل می‌شود، این مسأله، مسأله‌ای کاملاً متفاوت است که در بخش‌های بعدی مورد بحث قرار می‌دهیم.

مثال ۷–۱. با مفروض بودن متغیرهای تصادفی X و Y با چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases} x.e^{-x(۱+y)} & x>۰ \text{ و } y>۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

معادله‌ی رگرسیون Y روی X را بیابید و منحنی رگرسیون را رسم کنید.

حل. با انتگرال‌گیری نسبت به y، چگالی حاشیه‌ای x به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$g(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

بنابراین، چگالی شرطی Y به شرط $X=x$ با عبارت

$$w(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{x.e^{-x(1+y)}}{e^{-x}}=x.e^{-xy}$$

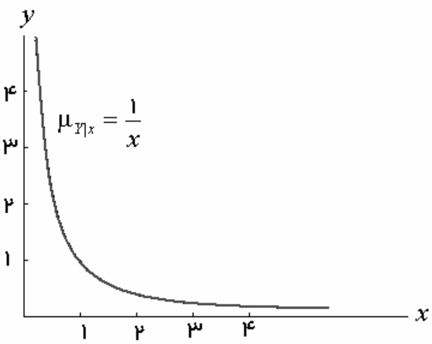
به‌ازای $y>0$ و در سایر جاها، $w(y|x)=0$ داده می‌شود، که تشخیص می‌دهیم یک چگالی نمایی با $\theta=\frac{1}{x}$ است. بنابراین با محاسبه‌ی

$$\mu_{Y|x}=\int_0^{\infty} y.x.e^{-xy}dy$$

درمی‌یابیم که معادله‌ی رگرسیون Y روی X عبارت است از:

$$\mu_{Y|x}=\frac{1}{x}$$

منحنی رگرسیون متناظر در شکل ۷–۱ نشان داده شده است.



شکل ۷–۱. منحنی رگرسیون مثال ۷–۱

مثال ۷–۲. اگر X و Y دارای توزیع چندجمله‌ای

$$f(x,y)=\binom{n}{x,y,n-x-y}.\theta_1^x\theta_2^y(1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y}$$

به‌ازای $x=0,1,2,\cdots,n$ و $y=0,1,2,\cdots,n$ مقید به شرط $x+y\le n$ باشند، معادله‌ی رگرسیون Y روی X را پیدا کنید.

حل. توزیع حاشیه‌ای X به‌صورت

$$g(x)=\sum_{y=0}^{n-x}\binom{n}{x,y,n-x-y}.\theta_1^x\theta_2^y(1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y}$$
$$=\binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x}$$

به‌ازای $x=0,1,2,\ldots,n$ است، که تشخیص می‌دهیم که یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ_1 است. بنابراین به‌ازای $y=0,1,2,\ldots,n-x$،

$$w(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{\binom{n-x}{y}\theta_2^y(1-\theta_1-\theta_2)^{n-x-y}}{(1-\theta_1)^{n-x}}$$

که با بازنویسی فرمول به‌صورت

$$w(y|x)=\binom{n-x}{y}\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)^y\left(\frac{1-\theta_1-\theta_2}{1-\theta_1}\right)^{n-x-y}$$

و با امتحان کردن متوجه می‌شویم که توزیع شرطی Y به فرض $X=x$ یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n-x$ و $\frac{\theta_2}{1-\theta_1}$ است، به‌طوری که معادله‌ی رگرسیون Y روی X عبارت است از:

$$\mu_{Y|x}=\frac{(n-x)\theta_2}{1-\theta_1}.$$

با بازگشت به مثال قبل، اگر X را تعداد دفعاتی بگیریم که در ۳۰ بار پرتاب یک تاس سالم عددی زوج ظاهر می‌شود و Y را تعداد دفعاتی بگیریم که نتیجه پنج است، آنگاه معادله‌ی رگرسیون به صورت

$$\mu_{Y|x}=\frac{(30-x)\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}(30-x)$$

درمی‌آید. این نتیجه‌ی موجهی است زیرا به‌ازای هریک از $30-x$ برآمدی که زوج نیست، سه امکان هم‌شانس ۱، ۳، و ۵ وجود دارد.

مثال ۷-۳. اگر چگالی توأم X_1، X_2 و X_3،

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}(x_1+\frac{1}{2})e^{-x_3} & 0<x_1<1,\ 0<x_2<1,\ x_3>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد، معادله‌ی رگرسیون X_2 روی X_1 و X_3 را پیدا کنید.

حل. می‌توان نشان داد که چگالی حاشیه‌ای X_1 و X_3 عبارت است از:

$$m(x_1,x_3)=\begin{cases}(x_1+\frac{1}{2})e^{-x_3} & 0<x_1<1,\ x_3>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mu_{X_2|x_1,x_3} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2\,\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{m(x_1,x_3)}\,dx_2\\ &=\int_0^1 \frac{x_2(x_1+x_2)}{(x_1+\frac{1}{2})}\,dx_2\\ &=\frac{x_1+\frac{2}{3}}{2x_1+1}.\end{aligned}$$

توجه کنید که امید شرطی مثال بالا به‌دست آمد، به x_1 بستگی دارد ولی به x_3 بستگی ندارد که انتظارش را باید می‌داشتیم، زیرا دو متغیر تصادفی X_2 و X_3 مستقل‌اند.

۷–۲ رگرسیون خطی

یک جنبه‌ی مهم مثال ۷–۲ آن است که معادله‌ی رگرسیون، خطی است، یعنی به شکل

$$\mu_{Y|x}=\alpha+\beta x$$

که در آن α و β مقادیر ثابت‌اند و **ضریب‌های رگرسیون** نامیده می‌شوند. بنابر دلایلی متعدد، معادلات رگرسیون خطی مورد توجه خاصی هستند: اولاً، این معادلات به سادگی به سایر اعمال ریاضی تن در می‌دهند، ثانیاً، اغلب آنها تقریب‌های خوبی برای معادلات رگرسیون پیچیده‌تر هستند، و سرانجام در حالت توزیع نرمال دو متغیره، معادلات رگرسیون در واقع خطی هستند.

برای آسان کردن مطالعه‌ی معادلات رگرسیون خطی، ضریب‌های رگرسیون α و β را برحسب بعضی گشتاورهای مرتبه‌ی پایینتر توزیع توأم X و Y، یعنی برحسب $E(X)=\mu_1$، $E(Y)=\mu_2$، $\text{var}(X)=\sigma_1^2$، $\text{var}(Y)=\sigma_2^2$، و $\text{cov}(X,Y)=\sigma_{12}$ بیان می‌کنیم. سپس با استفاده از ضریب همبستگی

$$\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2},$$

نتایج زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه‌ی ۷-۱. اگر رگرسیون Y روی X خطی باشد، آنگاه

$$\mu_{Y|x} = \mu_۲ + \rho\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}(x - \mu_۱)$$

و اگر رگرسیون X روی Y خطی باشد، آنگاه

$$\mu_{X|y} = \mu_۱ + \rho\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}(y - \mu_۲).$$

برهان. چون $\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$، نتیجه می‌شود که

$$\int y.w(y|x)\, dy = \alpha + \beta x,$$

و اگر عبارت‌های دو طرف این معادله را در $g(x)$، مقادیر متناظر توزیع حاشیه‌ای X، ضرب کنیم و روی x انتگرال بگیریم به‌دست می‌آوریم

$$\int\int y.w(y|x)g(x)dydx = \alpha\int g(x)dx + \beta\int x.g(x)dx$$

یا

$$\mu_۲ = \alpha + \beta\mu_۱$$

زیرا $w(y|x)g(x) = f(x,y)$. اگر دوطرف معادله‌ی مربوط به $\mu_{Y|x}$ را قبل از انتگرال‌گیری در $x.g(x)$ ضرب کرده بودیم، نتیجه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\int\int xy.f(x,y)dydx = \alpha\int x.g(x)dx + \beta\int x^۲.g(x)dx$$

یا

$$E(XY) = \alpha\mu_۱ + \beta E(X^۲).$$

با حل $\mu_۲ = \alpha + \beta\mu_۱$ و $E(XY) = \alpha\mu_۱ + \beta E(X^۲)$ برحسب α و β و استفاده از این واقعیت که $E(XY) = \sigma_{۱۲} + \mu_۱\mu_۲$ و $E(X^۲) = \sigma_۱^۲ + \mu_۱^۲$، نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha = \mu_۲ - \frac{\sigma_{۱۲}}{\sigma_۱^۲}.\mu_۱ = \mu_۲ - \rho\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}.\mu_۱$$

و

$$\beta = \frac{\sigma_{۱۲}}{\sigma_۱^۲} = \rho\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱},$$

که ما را قادر می‌سازد تا معادله‌ی رگرسیون خطی Y روی X را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$\mu_{Y|x} = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1).$$

وقتی رگرسیون X روی Y خطی است، اعمال مشابهی به معادله‌ی زیر منجر می‌شود.

$$\mu_{X|y} = \mu \ \ + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2).$$

از قضیه‌ی ۷–۱ نتیجه می‌شود که اگر معادله‌ی رگرسیون خطی باشد و $\rho = 0$، آنگاه $\mu_{Y|x}$ به x بستگی ندارد (یا $\mu_{X|y}$ به y بستگی ندارد). وقتی $\rho = 0$ و در نتیجه، $\sigma_{12} = 0$، دو متغیر تصادفی X و Y ناهمبسته‌اند. همانگونه که قبلاً گفته شد، اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، ناهمبسته نیز هستند، امّا اگر دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند لزوماً مستقل نیستند.

ضریب همبستگی و برآوردهای آن در بسیاری از پژوهش‌های آماری اهمیت دارند. در اینجا خاطر نشان می‌کنیم، که $-1 \le \rho \le +1$، و علامت ρ مستقیماً به ما می‌گوید که آیا شیب خط همبستگی رو به بالاست یا رو به پایین.

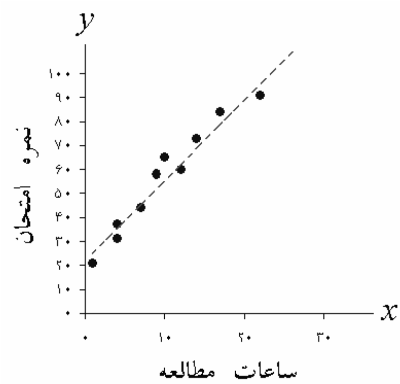
۷–۳ روش کمترین مربعات

در بخش‌های پیشین، مسأله‌ی رگرسیون را تنها در رابطه با متغیرهای تصادفیی که دارای توزیع‌های توأم‌اند مورد بحث قرار دادیم. درعمل، مسائل متعددی موجودند که در آنها مجموعه‌ای از داده‌های زوج شده دلالت بر آن می‌کند که رگرسیون خطی است و در آن توزیع توأم متغیرهای تصادفی تحت بررسی را نمی‌دانیم، امّا با این حال می‌خواهیم که ضرایب رگرسیون α و β را برآورد کنیم. مسائلی از این نوع معمولاً با **روش کمترین مربعات** رفع و رجوع می‌شوند که روشی برای برازش دادن یک منحنی است که در اوایل قرن نوزدهم توسط ریاضی‌دان فرانسوی آدرین لژاندر پیشنهاد شده است.

برای تشریح این روش، داده‌های زیر از تعداد ساعات مطالعه‌ی ۱۰ نفر را برای

امتحان زبان فرانسه و نمرات آنها در این امتحان را در نظر می‌گیریم:

نمره امتحان y	تعداد ساعات مطالعه X
۳۱	۴
۵۸	۹
۶۵	۱۰
۷۳	۱۴
۳۷	۴
۴۴	۷
۶۰	۱۲
۹۱	۲۲
۲۱	۱
۸۴	۱۷

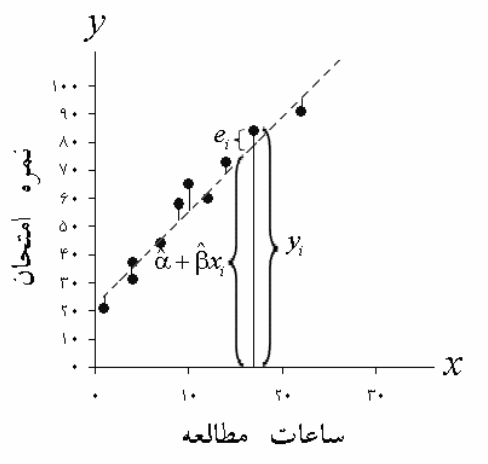


شکل ۷–۲. داده‌های حاصل از نمرات امتحانی و تعداد ساعات مطالعه

با رسم شکل ۷–۲، این فکر در ما القا می‌شود که یک خط راست، برازش نسبتاً خوبی است. گرچه همه‌ی نقاط بریک خط قرار نمی‌گیرند، الگوی کلی، این فکر را القا می‌کند که نمره‌ی متوسط امتحان به‌ازای تعدادی از ساعات مطالعه را می‌توان به خوبی به کمک معادله‌ای به شکل $\mu_{Y|x}=\alpha+\beta x$ با تعداد ساعات مطالعه مربوط کرد.

به‌محض آنکه در مسأله‌ی مفروضی بر تقریباً خطی بودن رگرسیون حکم کردیم، با مسأله‌ی برآورد کردن ضرایب α و β از روی داده‌های نمونه‌ای مواجه می‌شویم. به

عبارت دیگر ما با مسأله‌ی به‌دست آوردن برآوردهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به‌طوری که خط رگرسیون برآورد شده‌ی $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ به تعبیری بهترین برازش ممکن برای داده‌های مفروض باشد، مواجه هستیم.



شکل ۷-۳. ملاک کمترین مربعات

اگر انحراف قائم یک نقطه از خط را، به‌طوری که شکل ۷-۳ نشان داده شده، با e_i نشان دهیم، ملاک کمترین مربعات که این «نیکویی برازش» را برمبنای آن قرار می‌دهیم، مستلزم آن است که مجموع مربعات این انحراف‌ها را مینیمم کنیم. بنابراین اگر مجموعه‌ای از داده‌های زوج شده مانند $\{(x_i, y_i); i = ۱,۲,\ldots,n\}$ داده شده باشد، **برآورد کمترین مربعات** ضرایب رگرسیون، مقادیری مانند $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هستند که به‌ازای آنها کمیت

$$q = \sum_{i=۱}^{n} e_i^۲ = \sum_{i=۱}^{n} [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)]^۲$$

مینیمم است. با گرفتن مشتق جزئی نسبت به $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ و برابر صفر قرار دادن این مشتق‌های جزئی، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\alpha}} = \sum_{i=۱}^{n} (-۲)[y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)] = ۰$$

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\beta}} = \sum_{i=۱}^{n} (-۲)x_i[y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)] = ۰$$

که معادلات موسوم به **معادلات نرمال** را می‌دهند

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{\alpha} n + \hat{\beta}.\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{\alpha}.\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}.\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

با حل این دستگاه معادلات نسبت به $\hat{\beta}$، برآورد کمترین مربعات برای β را به‌صورت

$$\hat{\beta} = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

و سپس با استفاده از اولین معادله‌ی نرمال، برآورد کمترین مربعات α را به صورت

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}.\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

به‌دست می‌آوریم. این فرمول برای $\hat{\alpha}$ را به صورت

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}.\bar{x}$$

نیز می‌توان نوشت. برای آسان کردن فرمول مربوط به $\hat{\beta}$، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$s_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

$$s_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2$$

و

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

قضیه‌ی ۷-۲. با مفروض بودن داده‌های نمونه‌ای $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, \ldots, n\}$، ضریب‌های خط کمترین مربعات $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ عبارت‌اند از

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

و

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}.\bar{x}.$$

مثال ۷–۴. با رجوع به داده‌های همین بخش(نمرات امتحانی و تعداد ساعات مطالعه)،
الف) معادله‌ی خط کمترین مربعات را که تقریبی برای رگرسیون نمرات امتحانی روی تعداد ساعت‌های مطالعه است، پیدا کنید.
ب) نمره‌ی متوسط امتحانی فردی را که ۱۴ ساعت برای امتحان مطالعه کرده است، پیش‌گویی کنید.
حل. الف) با به‌دست آوردن $n = ۱۰$، $\sum x = ۱۰۰$، $\sum x^{۲} = ۱۳۷۶$، $\sum y = ۵۶۴$، و $\sum xy = ۶۹۴۵$ از داده‌ها، نتیجه می‌گیریم که

$$S_{xx} = ۱۳۷۶ - \frac{۱}{۱۰}(۱۰۰)^{۲} = ۳۷۶$$

و

$$S_{xy} = ۶۹۴۵ - \frac{۱}{۱۰}(۱۰۰)(۵۶۴) = ۱۳۰۵.$$

بنابراین $\hat{\beta} = \frac{۱۳۰۵}{۳۷۶} = ۳/۴۷۱$ و $\hat{\alpha} = \frac{۵۶۴}{۱۰} - ۳/۴۷۱.\frac{۱۰۰}{۱۰} = ۲۱/۶۹$، و معادله‌ی خط کمترین مربعات چنین است:

$$\hat{y} = ۲۱/۶۹ - ۳/۴۷۱x.$$

ب) با قرار دادن $x = ۱۴$ در معادله‌ی حاصل در الف، مقدار

$$\hat{y} = ۲۱/۶۹ + ۳/۴۷۱(۱۴) = ۷۰/۲۸۴$$

یا، پس از گرد کردن به نزدیکترین واحد، $\hat{y} = ۷۰$ را به‌دست می‌آوریم.

تمرین

۷–۱. با مراجعه به مثال ۷–۱، نشان دهید که معادله‌ی رگرسیون X روی Y

$$\mu_{X|y} = \frac{۲}{۱ + y}$$

است و منحنی رگرسیون را رسم کنید.

۷–۲. با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(2x+3y) & 0<x<1 \text{ و } 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$\mu_{Y|x}$ و $\mu_{X|y}$ را پیدا کنید.

۷–۳. با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases}6x & 0<x<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$\mu_{Y|x}$ و $\mu_{X|y}$ را پیدا کنید.

۷–۴. با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<y<1,\ -y<x<y\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

نشان دهید که متغیرهای تصادفی X و Y ناهمبسته‌اند ولی مستقل نیستند.

۷–۵. دُزهای متفاوتی از یک سم به گروه‌هایی ۲۵تایی از موش‌ها داده شده و نتایج زیر به‌دست آمده است.

برحسب میلیگرم x	تعداد مرگها y
۴	۱
۶	۳
۸	۶
۱۰	۸
۱۲	۱۴
۱۴	۱۶
۱۶	۲۰

الف) معادله‌ی خط کمترین مربعات را که بر این داده‌ها برازش کند، پیدا کنید.

ب) تعدا مرگ‌ها را در یک گروه از ۲۵ موش که ۷ میلی‌گرم از این سم دریافت می‌کند، برآورد کنید.

۷–۶. مادّه‌ی خامی که در تولید یک نوع الیاف مصنوعی به‌کار می‌رود، در جایی انبار شده است که هیچ کنترلی بر رطوبت به‌عمل نمی‌آید. اندازه‌گیری‌هایی از رطوبت نسبی و میزان نم‌گرفتگی نمونه‌هایی از ماده‌ی خام (هر دو برحسب درصد) در ۱۲ روز، نتایج زیر را به‌دست داده است.

الف) یک خط کمترین مربعات ببرازانید که ما را قادر سازد نم‌گرفتگی را برحسب

رطوبت نسبی، پیش‌گویی کنیم.
ب) از نتایج قسمت الف استفاده کرده نم‌گرفتگی را وقتی رطوبت نسبی ۳۸ درصد است، برآورد (پیش‌گویی) کنید.

نم گرفتگی	رطوبت
۱۲	۴۶
۱۴	۵۳
۱۱	۳۷
۱۳	۴۲
۱۰	۳۴
۸	۲۹
۱۷	۶۰
۱۲	۴۴
۱۰	۴۱
۱۵	۴۸
۹	۳۳
۱۳	۴۰

پرسش‌های تستی

۱. $\hat{\theta}$ را برآوردکننده‌ای نااریب برای پارامتر θ گویند اگر و تنها اگر:

الف) $E(\theta)=\hat{\theta}$ ب) $E(\hat{\theta})=\theta$ ج) $E(\hat{\theta})=\theta^۲$ د) $E(\theta^۲)=\hat{\theta}$

۲. کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف) $E(\hat{\theta})-\theta =$ اریب ب) $MSE=E(\hat{\theta}-\theta)^۲$

ج) $MSE=\sigma^۲_{\hat{\theta}}+(\text{اریب})^۲$ د) $MSE=(E(\hat{\theta})-\theta)^۲$

۳. توزیع نمونه‌گیری $\overline{X}$ دارای انحراف معیار ۲ است. اگر انحراف معیار جامعه آماری ۱۲ باشد، مقدار n چقدر است؟

الف) ۶ ب) ۱۴۴ ج) ۳۶ د) ۷۲

۴. جحم نمونه چقدر باشد تا توزیع $\overline{X}$ هم‌توزیع X شود؟

الف) $n=۱$ ب) $n=N$ ج) $n=۳۰$ د) $n>۳۰$

۵. در تخمین فاصله‌ای μ_x زمانی‌که انحراف معیار معلوم نباشد می‌توان از:

الف) $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_x}{\sigma_{\overline{x}}}\right|\le Z_{\frac{\alpha}{۲}}\right)=۱-\alpha$ ب) $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_x}{S_{\overline{x}}}\right|\le t_{\frac{\alpha}{۲}}\right)=۱-\alpha$

ج) $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_x}{S_{\overline{x}}}\right|\le Z_{\frac{\alpha}{۲}}\right)=۱-\alpha$ د) $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_x}{\sigma_{\overline{x}}}\right|\le t_{\frac{\alpha}{۲}}\right)=۱-\alpha$

۶. چنانچه $(n<۳۰)$ و جامعه به‌طور نرمال توزیع نشده باشد، تنظیم اولیه‌ی فاصله اطمینان برای میانگین جامعه از .... استفاده می‌نمائیم.

الف) توزیع t ب) توزیع نرمال ج) نامساوی چیبیشف د) الف و ب

۷. اگر $\overline{X}_۱$ و $\overline{X}_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه:

الف) $\mu_{\overline{X}_۱-\overline{X}_۲}=\mu_{\overline{X}_۱}-\mu_{\overline{X}_۲}$ ب) $\sigma^۲_{\overline{X}_۱-\overline{X}_۲}=\sigma^۲_{\overline{X}_۱}-\sigma^۲_{\overline{X}_۲}$

ج) $\sigma^2_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=\sigma^2_{\overline{X}_1}+\sigma^2_{\overline{X}_2}$ د) الف و ج

۸. بررسی اولیه حاصل از ۸ مشتری نشان می‌دهد که انحراف معیار زمان اشتغال یک فروشنده در مغازه‌ای ۰/۰۷۲ است. هدف از این تحقیق، تخمین درصد زمان اشتغال فروشنده با دقت $(\pm ۰/۰۴)$ و احتمال ۹۵% است. حجم نمونه‌ی مورد نظر برابر است با $(Z_{۰/۹۵}=۱/۹۶)$:

الف) ۱۲ ب) ۶ ج) ۲۴ د) ۳۶

۹. اگر $(s_1^2=۱۶, \bar{x}_1=۱۴, n_1=۱۶)$ و $(s_2^2=۱۲, \bar{x}_2=۱۵, n_2=۱۰)$ باشد در سطح اطمینان ۹۰%، پراکندگی داده‌ها در دو جامعه $(F_{۰/۰۵,۱۵,۹}=۳/۰۱$, $F_{۰/۰۵,۹,۱۵}=۲/۵۹)$

الف) تفاوت معنی‌داری وجود ندارد ب) $\sigma_1^2>\sigma_2^2$

ج) تفاوت معنی‌داری وجود دارد د) $\sigma_1^2<\sigma_2^2$

۱۰. احتمال خطای نوع اوّل (α) عبارتست از:

الف) P(رد H_0 وقتی H_1 درست) ب) P(رد نکردن H_0 وقتی H_1 درست)

ج) P(رد H_0 وقتی H_0 درست) د) P(رد H_1 وقتی H_1 درست)

۱۱. اگر $(s_1=۱۲, \bar{x}_1=۵۲, n_1=۱۰)$ و $(s_2=۸, \bar{x}_2=۴۵, n_2=۱۵)$ نمونه‌های مستقل باشند آنگاه مقدار $s_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$ عبارتست از:

الف) ۱/۶۶ ب) ۴/۳۲ ج) ۱/۶۲۷ د. ۰/۷۹۷

۱۲. با توجه به اطلاعات سئوال ۱۱، مقدار آماره‌ی آزمون $H_0:\mu_1=\mu_2$ برابر است با:

الف) ۱/۷۵۷ ب) ۱/۶۲ ج) ۹/۶۷۲ د) ۴/۳

۱۳. سطح زیر منحنی H_0 در آزمون فرض آماری همواره برابر است با:

الف) خطای نوع اوّل ب) سطح اطمینان آزمون

ج) خطای نوع دوّم د) توان آزمون

۱۴. کدامیک از گذاره‌های زیر تعریف آماره است؟

الف) هر عدد حقیقی را آماره می‌گویند.

ب) کمیتی است که از روی جامعه به‌دست می‌آید.

ج) همان پارامتر است.

د. تابعی از نمونه تصادفی که به پارامتر مجهول بستگی ندارد.

۱۵. اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب برای θ باشد آنگاه $۳\hat{\theta}-۴$ برای چه کمیتی نااریب است؟

الف) $\frac{\hat{\theta}+۴}{۳}$ ب) $۳\hat{\theta}-۴$ ج) $۳\theta-۴$ د) $\frac{\theta+۴}{۳}$

۱۶. اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب برای θ باشد مقدار MSE برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\sigma^۲_{\hat{\theta}}$ ب) صفر ج) $E(\hat{\theta}-\theta)^۲$ د) $E(\hat{\theta})^۲-\theta^۲$

۱۷. در یک نمونه‌گیری ۱۶تایی اگر انحراف معیار جامعه برابر ۱۶ باشد، مقدار واریانس میانگین نمونه، کدام گزینه است؟

الف) ۱۶ ب) ۱ ج) $\frac{۱}{۱۶}$ د) ۴

۱۸. اگر اطلاعات به‌دست آمده از نمونه تصادفی را دو برابر کنیم مقدار واریانس میانگین نمونه، چه تغییری می‌کند؟

الف) دو برابر می‌شود. ب) نصف می‌شود.

ج) تغییری نمی‌کند. د) چهار برابر می‌شود.

۱۹. در مبحث برآوردیابی و تخمین فاصله‌ای میانگین جامعه، چه موقع از فرمول $\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{۲}}$ استفاده می‌کنیم؟

الف) $\sigma^۲$ معلوم و جامعه نرمال ب) $\sigma^۲$ مجهول و n بزرگ

ج) $\sigma^۲$ معلوم و n بزرگ د) گزینه‌های الف و ب

۲۰. در یک نمونه‌گیری ۲۵تایی با انحراف معیار $\sigma=۵$ طول فاصله‌ی تخمینی برای میانگین جامعه چقدر است؟ $(z_{\frac{\alpha}{۲}}=۲)$

الف) ۴ ب) ۲ ج) ۱ د) نیاز به مقدار میانگین نمونه دارد.

۲۱. از نامساوی چی‌بی‌چشف برای یافتن فاصله اطمینان میانگین جامعه تحت چه شرایطی استفاده می‌کنیم؟

الف) n بزرگ ب) توزیع جامعه نرمال

ج) توزیع جامعه یکنواخت باشد د) توزیع جامعه نامعلوم باشد.

۲۲. دو جامعه مستقل را در نظر بگیرید از هر یک به‌طور مساوی نمونه‌گیری به اندازه n به‌دست آمده است. اگر هدف یافتن برآورد مجموع دو میانگین جامعه باشد از کدام برآوردگر استفاده می‌کنیم؟

الف) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ب) $\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{2}$ ج) $\overline{X}_1 + \overline{X}_2$ د) $\dfrac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2}{n}$

۲۳. در سئوال ۲۲، مقدار واریانس جامعه‌ی اول ۱۶ و مقدار واریانس جامعه‌ی دوم ۲۵ می‌باشد، واریانس $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ برابر است با:

الف) $\dfrac{41}{n}$ ب) $\dfrac{25}{n}$ ج) $\dfrac{5}{n}$ د) $\dfrac{7}{n}$

۲۴. براساس یک نمونه‌گیری از جمعیت نرمال به اندازه ۱۴ مقدار k چقدر باشد تا توزیع kS^2 دارای توزیع خی‌دو با ۱۳ درجه‌ی آزادی باشد؟

الف) $\dfrac{13}{\sigma^2}$ ب) $\dfrac{14}{\sigma^2}$ ج) $15\sigma^2$ د) $\dfrac{\sigma^2}{14}$

۲۵. مقدار آماره‌ی آزمون $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ به‌ازای $s_1^2=12$ و $s_2^2=8$ را تعیین کنید؟

الف) $\dfrac{3}{2}$ ب) $\dfrac{2}{3}$ ج) ۱ د) به اندازه‌ی نمونه بستگی دارد.

۲۶. در سئوال ۲۵، اگر $n_1=4$ و $n_2=5$، توزیع آماره‌ی آزمون $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=1$ چیست؟

الف) $F_{4,3}$ ب) $F_{3,4}$ ج) $F_{4,5}$ د) $F_{5,4}$

۲۷. اگر بگوئیم H_0 در سطح α معنی‌دار است، با کدام عبارت معادل است؟

الف) H_0 در سطح α رد شده است.

ب) در سطح α دلیلی برای رد H_0 نداریم.

ج) α همان خطای نوع اوّل است.

د) به‌ازای مقادیر کوچکتر از α، فرض صفر رد می‌شود.

۲۸. اگر در یک نمونه‌گیری $n_۲=۲۵, n_۱=۱۴, \bar{x}_۲=۱۹/۵, \bar{x}_۱=۱۷$ به‌دست آید و هدف آزمون $H_۰: \mu_۱-\mu_۲=۰$ باشد فرض مقابل را کدام انتخاب می‌کنید که دارای توان آزمون بیشتری داشته باشد؟

الف) $\mu_۱-\mu_۲\neq ۰$ ب) $\mu_۱-\mu_۲>۰$

ج) $\mu_۱-\mu_۲<۰$ د) نیاز به تعیین توزیع جامعه دارد.

۲۹. واریانس نمونه‌ای یک نمونه تصادفی به حجم $n_۱=۲۱$ از جامعه‌ای $s_۱^۲=۱/۶$ و واریانس نمونه‌ای یک نمونه‌ی دیگر به حجم $n_۲=۱۶$ و $s_۲^۲=۲$ است واریانس ادغام شده‌ی این دو نمونه کدام است؟

الف) $s_p^۲=\frac{۳/۶}{۳۷}$ ب) $s_p^۲=\frac{۶۲}{۳۵}$ ج) $s_p^۲=\frac{۳۵}{۶۲}$ د) $s_p^۲=\frac{۳۷}{۳۶}$

۳۰. واریانس نسبت نمونه‌ای با کدامیک از مقادیر زیر برآورد می‌شود:

الف) $s_p^۲=\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$ ب) $s_p^۲=n\bar{p}\bar{q}$ ج) $s_p^۲=\sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}$ د) $s_p^۲=\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}$

۳۱. نسبت بی‌سوادان در جامعه‌ای ۰/۳۰ است اگر از این جامعه ۲۰۰نفر را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم انتظار داریم چند نفر بی‌سواد باشند؟

الف) ۶۰ نفر ب) ۵۶ نفر ج) ۳۰ نفر د) ۶۰۰ نفر

۳۲. اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای متناهی به اندازه‌ی N و واریانس $\sigma^۲$ باشد، آنگاه $\mathrm{var}(\bar{X})$ کدام است؟

الف) $\frac{\sigma^۲}{n}.\frac{N-۱}{N-n}$ ب) $\frac{\sigma^۲}{n}.\frac{N-n}{N-۱}$ ج) $\frac{\sigma^۲}{n}$ د) $\frac{\sigma^۲}{N}$

۳۳. یک نمونه تصادفی به اندازه‌ی ۱۰۰ از جامعه نزمالی با $\sigma=۱۶$ اختیار شده است احتمال آنکه اختلاف بین میانگین نمونه و میانگین جامعه ۲ یا بیشتر باشد چقدراست؟

الف) ۰/۲۱۱۲ ب) ۰/۱۲۵۶ ج) ۰/۲۵۱۲ د) ۰/۱۰۵۶

۳۴. اگر $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند و $Y = X_۱^۲ + X_۲^۲ + X_۳^۲$ آنگاه $M_Y(t)$ کدام است؟

الف) $(۱-۳t)^{-\frac{۱}{۲}}$ ب) $(۱-۲t)^{-\frac{۱}{۳}}$ ج) $(۱-۳t)^{-\frac{۲}{۳}}$ د) $(۱-۲t)^{-\frac{۳}{۲}}$

۳۵. چگالی توزیع F با ۴ و ۴ درجه‌ی آزادی کدام است؟

الف) $g(F) = \begin{cases} ۶F(۱+F)^{-۴} & F > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

ب) $g(F) = \begin{cases} ۶F^{-۴}(۱+F)^{-۴} & F > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

ج) $g(F) = \begin{cases} \frac{۱}{۶}F(۱+F)^{-۴} & F > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

د) $g(F) = \begin{cases} \frac{۱}{۶}F^{-۴}(۱+F)^{-۴} & F > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۳۶. با استفاده از چگالی سئوال ۳۵ برای یک نمونه‌ی تصادفی مستقل به اندازه‌ی ۵ از دو توزیع نرمال با واریانس مشترک، احتمال آنکه $\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲}$ مقداری بین ۱ و ۳ اختیار کند، چقدر است؟

الف) $\frac{۹}{۳۲}$ ب) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ج) $\frac{۲۲}{۳۲}$ د) $\frac{۵}{۳۲}$

۳۷. توزیع نمونه‌ای $Y_۱$(اوّلین آماره‌ی ترتیبی) برای نمونه‌های تصادفی به اندازه‌ی ۳ از یک جامعه‌ی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۲$ کدام است؟

الف) $۰ < y_۱ < ۲$ $\frac{۱}{۲}(۲ - y_۱)$ ب) $۰ < y_۱ < ۲$ $\frac{۳}{۸}(۲ - y_۱)^۲$

ج) $۰ < y_۱ < ۲$ $\frac{۳}{۱۶}(۴y_۱ - y_۱^۲)$ د) $۰ < y_۱ < ۲$ $\frac{۱}{۴}(۲y_۱ - y_۱^۲)$

۳۸. اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، $X_{۱۶}$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای متناهی با میانگین ۱۲ و واریانس ۹ باشد، $E(\overline{X})$ کدام است؟

الف) ۲۱ ب) ۱۵ ج) ۱۲ د) ۱۰

۳۹. در سئوال شماره‌ی ۳۸، انحراف معیار میانگین نمونه‌ای $\sigma_{\overline{X}}$ چقدر است؟

الف) $\frac{۳}{۴}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۹}{۱۵}$ د) $\frac{۱۲}{۹}$

۴۰. در سئوال شماره‌ی ۳۸، $\operatorname{cov}(X_۲,\overline{X})$ چقدر است؟

الف) ۰/۱۶ ب) صفر ج) $\frac{۴}{۹}$ د) $\frac{۹}{۱۶}$

۴۱. فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$، نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، به‌ازای چه مقدار از K، $\frac{KX_۱+X_۲+X_۳}{۴}$ یک برآوردکننده‌ی ناااریب μ می‌باشد $(\mu \neq ۰)$؟

الف) ۲ ب) ۳− ج) ۴ د) ۱

۴۲. در سئوال شماره‌ی ۴۱، فرض کنید نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی ۳ از جامعه‌ی برنولی با پارامتر θ باشد. اگر $\hat{\theta}_۱=\frac{X_۱+X_۲+X_۳}{۳}$ و $\hat{\theta}_۲=\frac{X_۱+۲X_۲+X_۳}{۴}$ کارایی نسبی $\hat{\theta}_۱$ نسبت به $\hat{\theta}_۲$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۸}{۹}$ ج) ۱ د) $\frac{۹}{۸}$

۴۳. در سئوال شماره‌ی ۴۲، برآوردکننده‌ای برای θ به‌روش تابع مولد گشتاورها کدام است؟

الف) $\sum_{i=۱}^{۳} X_i$ ب) $Max_{۱\leq i\leq ۳} X_i$ ج) $Min_{۱\leq i\leq ۳} X_i$ د) $\frac{۱}{۳}\sum_{i=۱}^{۳} X_i$

۴۴. اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ی یکنواخت پیوسته‌ای با $\alpha=۰$ و $\beta=\theta$ باشند برآوردکننده‌ی ماکسیمم درستنمایی θ کدام است؟

الف) $\overline{X}$ ب) $Max_{۱\leq i\leq n} X_i$ ج) $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ د) $Min_{۱\leq i\leq n} X_i$

۴۵. یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $n_۱=۱۶$ از جامعه‌ای نرمال با $\sigma_۱=۴/۸$ دارای میانگین $\overline{X}_۱=۱۸$ و یک نمونه‌ی تصادفی به اندازه‌ی $n_۲=۲۵$ از جامعه نرمال دیگری

با $\sigma_۲ = ۳/۵$ دارای میانگین $\overline{x} = ۲۳$ است. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۰% برای $\mu_۲ - \mu_۱$ کدام است؟

الف) $(-۵/۷۲, -۳/۲۸)$ ب) $(-۶/۷۲, -۲/۳۸)$

ج) $(-۷/۲۸, -۲/۷۲)$ د) $(-۷/۷۲, -۳/۲۸)$

۴۶. در زیر، نتیجه‌ی مطالعه‌ی محتوای نیکوتین دو نوع سیگار آمده است، با فرض اینکه دو مجموعه داده‌ها، نمونه‌های تصادفی از جامعه‌ای نرمال با واریانس‌های برابر باشند، یک فاصله‌ی اطمینان ۹۸% برای $\frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲}$ کدام است؟

$$n_۱ = ۱۰ \quad s_۱ = ۰/۵$$
$$n_۲ = ۸ \quad s_۲ = ۰/۷$$

الف) $(۱/۲۶, ۳/۱۲)$ ب) $(۱/۰۶۹, ۳/۱۲)$

ج) $(۰/۵۶, ۲/۸۶)$ د) $(۰/۰۸, ۲/۸۶)$

۴۷. ظرفی محتوی ۷ مهره است که θتا از آنها قرمز و بقیه آبی‌اند، برای آزمون فرض در برابر $\theta = ۴$، دو تا از مهره‌ها به‌تصادف و بدون جایگذاری استخراج می‌شوند و فرض صفر فقط و فقط وقتی رد می‌شود که هر دو مهره قرمز باشند، احتمال مرتکب شدن خطای نوع اوّل چقدر است؟

الف) $\frac{۴}{۴۲}$ ب) $\frac{۳}{۴۲}$ ج) $\frac{۲}{۴۲}$ د) $\frac{۱}{۴۲}$

حل تمرین‌ها

حل تمرین فصل دوّم
توزیع‌های نمونه‌گیری

۲-۱. با توجه به خواص کوواریانس این تمرین حل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_r-\overline{X},\overline{X}) &= \operatorname{cov}(X_r\,,\ \overline{X})-\operatorname{cov}(\overline{X}\,,\overline{X}) \\
&= \operatorname{cov}(X_r\,,\ \frac{۱}{n}[X_۱+\cdots+X_n])-\operatorname{var}(\overline{X}) \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{\substack{i=۱\\ i\neq r}}^{n}\operatorname{cov}(X_r\,,\ X_i)+\frac{۱}{n}\operatorname{cov}(X_r\,,\ X_r)-\operatorname{var}(\overline{X}) \\
&= \frac{-۱}{n}(n-۱)\frac{\sigma^۲}{N-۱}+\frac{۱}{n}\sigma^۲-\frac{۱}{n}\sigma^۲\,\frac{N-n}{N-۱} \\
&= \frac{۱}{n}\sigma^۲\,\frac{۲}{N-۱} \\
&= ۰ \qquad\qquad N\to+\infty
\end{aligned}$$

۲-۲. الف) بنابر $E(\overline{X}_۱)=\mu_۱$ و $E(\overline{X}_۲)=\mu_۲$ داریم

$$E(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲)=E(\overline{X}_۱)-E(\overline{X}_۲)=\mu_۱-\mu_۲$$

ب) استقلال دو جامعه، استقلال دو میانگین نمونه‌ای را موجب می‌شود:

$$\operatorname{var}(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲)=\operatorname{var}(\overline{X}_۱)+(-۱)^۲\operatorname{var}(\overline{X}_۲)=\frac{۱}{n_۱}\sigma_۱{}^۲+\frac{۱}{n_۲}\sigma_۲{}^۲$$

۲-۳. یک شیوه‌ی حل این تمرین، استفاده از تابع مولد گشتاورها است. فرض کنید $Y=\overline{X}_۱-\overline{X}_۲$، آنگاه بنا به نتیجه‌ی تمرین قبل داریم $E(Y)=\mu_۱-\mu_۲$ و

$\text{var}(Y)=\frac{۱}{n_۱}\sigma_۱^۲+\frac{۱}{n_۲}\sigma_۲^۲$، همچنین $M_{X_۱}(t)=e^{\mu_۱ t+\frac{۱}{۲}\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}t^۲}$ و $M_{X_۲}(t)=e^{\mu_۲ t+\frac{۱}{۲}\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}t^۲}$.

$$\begin{aligned}M_{X_۱-X_۲}(t)&=E(e^{(X_۱-X_۲)t})\\&=E(e^{X_۱t})E(e^{-X_۲t})\\&=e^{\mu_۱ t+\frac{۱}{۲}\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}t^۲}\,e^{\mu_۲(-t)+\frac{۱}{۲}\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}(-t)^۲}\\&=e^{(\mu_۱-\mu_۲)t+\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}\right)t^۲}\end{aligned}$$

در نتیجه $X_۱-X_۲\sim N(\mu_۱-\mu_۲,\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲})$.

۲-۴. بنابه خواص توزیع برنولی، $E(X_i)=\theta$ و $\text{var}(X_i)=\theta(۱-\theta)$.

$$E(\hat{\Theta})=E(\overline{X})=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\theta=\theta$$

و

$$\text{var}(\hat{\Theta})=\text{var}(\overline{X})=\frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}\text{var}(X_i)=\frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}\theta(۱-\theta)=\frac{\theta(۱-\theta)}{n}$$

۲-۵. با جایگزینی θ_i به‌جای μ_i و $\theta_i(۱-\theta_i)$ به‌جای $\sigma_i^۲$، و استفاده از تمرین ۲-۲، تمرین حل خواهد شد.

۲-۶. از قبل می‌دانیم که حاصل $\sum_{i=۱}^{N}i=\frac{N(N+۱)}{۲}$ و $\sum_{i=۱}^{N}i^۲=\frac{N(N+۱)(N+۲)}{۶}$ است،

پس

$$E(\overline{X}) = \mu = \sum_{i=1}^{N} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} i \frac{1}{N}$$
$$= \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{(N+1)}{2}$$

برای محاسبه‌ی واریانس میانگین نمونه، ابتدا واریانس جامعه را محاسبه می‌کنیم.

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} i^2 \frac{1}{N}$$
$$= \frac{1}{N} \frac{N(N+1)(N+2)}{6} = \frac{(N+1)(N+2)}{6}$$

در نتیجه

$$\operatorname{var}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}(E(X^2) - \mu^2)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{(N+1)(N+2)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{n}(N+1)\frac{N-n}{12}$$

برای حل قسمت (ج) از خواص امید ریاضی و واریانس استفاده می‌کنیم

$$E(Y) = E(n\overline{X}) = nE(\overline{X}) = \frac{n(N+1)}{2}$$
$$\operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(n\overline{X}) = n^2 \operatorname{var}(\overline{X}) = n^2 \frac{1}{n}(N+1)\frac{N-n}{12} = n(N+1)\frac{N-n}{12}$$

۲–۷.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 15+13+18+10+6+21+7+11+20+9 = 130$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 15^2+13^2+18^2+10^2+6^2+21^2+7^2+11^2+20^2+9^2 = 1946$$

از روی این دو مقدار می‌توان مقادیر میانگین و واریانس جامعه را محاسبه نمود.

$$\mu = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{130}{10} = 13$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \mu^2 = \frac{1946}{10} - (13)^2 = 25/6$$

۲–۸. مطابق با تعریف واریانس می‌توان نوشت

$$\sigma^۲=\sum_{i=۱}^{N}(c_i-\mu)^۲ f(x_i)=\sum_{i=۱}^{N}(c_i-\mu)^۲\frac{۱}{N}=\sum_{i=۱}^{N}(c_i^۲+\mu^۲-۲\mu c_i)\frac{۱}{N}$$
$$=\sum_{i=۱}^{N}c_i^۲\frac{۱}{N}+\frac{۱}{N}N\mu^۲-۲\mu\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}c_i=\sum_{i=۱}^{N}\frac{۱}{N}c_i^۲-\mu^۲$$

۹-۲. الف) $\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$، ب) $\binom{۲۰}{۳}=۱۱۴۰$، ج) $\binom{۵۰}{۳}=۱۹۶۰۰$.

۱۰-۲. الف) $\frac{۱}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۴!\times ۸!}{۱۲!}=۰/۰۰۲$، ب) $\frac{۱}{\binom{۲۲}{۵}}=\frac{۵!\times ۱۷!}{۲۲!}=۰/۰۰۰۰۳۸$.

۱۱-۲.

$$\frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد کل}}=\frac{۱\times\binom{۴۹}{۲}}{\binom{۵۰}{۳}}=\frac{\frac{۴۹!}{۲!\times ۴۷!}}{\frac{۵۰!}{۳!\times ۴۷!}}=\frac{۳}{۵۰}.$$

۱۲-۲. با توجه به فرمول خطای معیار میانگین، $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، هر قدر اندازه‌ی نمونه کاهش یابد مقدار خطای معیار میانگین افزایش می‌یابد.

الف) به‌ازای $n=۳۰$، $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{۳۰}}$، و به‌ازای $n=۱۲۰$،

$$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{۱۲۰}}=\frac{\sigma}{\sqrt{۴\times ۳۰}}=\frac{۱}{۲}[\frac{\sigma}{\sqrt{۳۰}}]$$

چهار برابر شدن اندازه‌ی نمونه مقدار خطای معیار میانگین را نصف می‌کند.

ج) به‌ازای $n=۴۵۰$، $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{۴۵۰}}$، و به‌ازای $n=۵۰$،

$$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{۵۰}}=\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{۴۵۰}{۹}}}=۳[\frac{\sigma}{\sqrt{۴۵۰}}]$$

کاهش مقدار اندازه‌ی نمونه از ۴۵۰ به ۵۰ باعث سه برابر شدن مقدار خطای معیار میانگین است.

۱۳-۲. الف) $\frac{N-n}{N-۱}=\frac{۲۰۰-۵۰}{۲۰۰-۱}=۰/۹۸$، ب) $\frac{N-n}{N-۱}=\frac{۳۰۰-۵۰}{۳۰۰-۱}=۰/۸۴$،

ج) $\frac{N-n}{N-۱}=\frac{۸۰۰-۲۰۰}{۸۰۰-۱}=۰/۷۵$.

۲-۱۴. بنابر قضیه‌ی ۸-۱ داریم $\mu=E(\overline{X})=۷۵$ و $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{۲۵۶}{۱۰}}=۱/۶$ و چون از قضیه‌ی چبیشف به صورت زیر است

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}-\mu|<k\sigma)&=P(-k\sigma<\overline{X}-\mu<k\sigma)\\&=P(\mu-k\sigma<\overline{X}<\mu+k\sigma)\\&=P(۷۵-۱/۶k<\overline{X}<۷۵+۱/۶k)\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}\end{aligned}$$

و چون $۶۷<\overline{X}<۸۳$ پس $۷۵+۱/۶k=۸۳$ یا $k=\frac{۸۳-۷۵}{۱/۶}=۵$، بنابراین

$$P(۶۷<\overline{X}<۸۳)\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}=۱-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}=۰/۹۶.$$

۲-۱۵. بنابر قضیه‌ی حد مرکزی ، متغیر تصادفی $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ توزیع نرمال استاندارد دارد، بنابراین

$$\begin{aligned}P\left(\frac{۶۷-۷۵}{۱/۶}<Z<\frac{۸۳-۷۵}{۱/۶}\right)&=P(-۵<Z<۵)\\&=۲P(۰<Z<۵)=۲\times ۰/۴۹۹=۰/۹۹.\end{aligned}$$

۲-۱۶. بنابر قضیه‌ی ۲-۸ داریم $\mu=E(\overline{X})=۱۲۸$ و $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۶/۳}{۹}=۰/۷$،

الف) احتمال اینکه $\overline{X}$ بین مقادیر داده شده قرارگیرد را حساب نموده، از یک کم می‌نمائیم، تا احتمال مورد نظر حاصل شود.

$$P(|X-\mu|<k\sigma)\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$$

$$P(|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}|<k\sigma_{\overline{X}})\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$$

$$P(|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}|<k\sigma_{\overline{X}})=P(\mu-k\sigma_{\overline{X}}<\overline{X}<\mu+k\sigma_{\overline{X}})$$
$$=P(\mu-k\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}<\overline{X}<\mu+k\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}})$$
$$=P(۱۲۸-k\frac{۶/۳}{\sqrt{۸۱}}<\overline{X}<۱۲۸+k\frac{۶/۳}{\sqrt{۸۱}})$$
$$\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}=P$$

ولی داریم

$$۱۲۸-k\frac{۶/۳}{\sqrt{۸۱}}=۱۲۶/۶$$
$$k=۲$$

بنابراین $P=۱-\frac{۱}{k^۲}=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$ و احتمال اینکه $\overline{X}$ بین مقادیر ۱۲۶/۶ و ۱۲۹/۴ قرار نگیرد، $۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$ می‌باشد.

ب) با توجه به توضیحات تمرین قبل داریم

$$P\left(\frac{\overline{X}-۱۲۸}{۰/۷}<Z<\frac{\overline{X}+۱۲۸}{۰/۷}\right)=P\left(\frac{۱۲۶/۶-۱۲۸}{۰/۷}<Z<\frac{۱۲۹/۴+۱۲۸}{۰/۷}\right)$$
$$=P(-۲<Z<۲)=۲P(۰<Z<۲)$$
$$=۲\times ۰/۴۷۷۲=۰/۹۵۴۴$$

بنابراین

$$۱-P(-۲<Z<۲)=۱-۰/۹۵۴۴=۰/۰۴۵۶$$

احتمال مورد نظر است.

۲–۱۷. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۲–۸ داریم $E(\overline{X})=\mu$ و $\sigma^۲_{\overline{X}}=\frac{\sigma^۲}{n}.\frac{N-n}{N-۱}$، لذا $\mu_{\overline{X}}=E(\overline{X})=۱۲۸$ و $\sigma^۲_{\overline{X}}=\frac{(۶/۳)^۲}{۸۱}.\left(\frac{۴۰۰-۸۱}{۴۰۰-۱}\right)=۰/۳۹۱$ و لذا $\sigma_{\overline{X}}=۰/۶۲۶$ پس بنابر قضیه‌ی حد مرکزی داریم

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}}<Z<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}}\right)=P\left(\frac{۱۲۶/۶-۱۲۸}{۰/۶۲۶}<Z<\frac{۱۲۶/۶-۱۲۸}{۰/۶۲۶}\right)$$
$$=P(-۲/۲۴<Z<۲/۲۴)=۲P(۰<Z<۲/۲۴)$$
$$=۲\times ۰/۴۸۷۵=۰/۹۷۵۰$$

بنابراین $۰/۰۲۵ = ۰/۹۷۵۰ - ۱$، احتمال مورد نظر خواهد بود.

۲–۱۸. الف)

$$P(\overline{X} > ۵۲/۹) = P(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{۵۲/۹ - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}})$$
$$= P(Z > \frac{۵۲/۹ - ۵۱/۴}{\frac{۶/۸}{۸}}) = P(Z > ۱/۷۷)$$
$$= ۰/۵ - ۰/۴۶۱۶ = ۰/۰۳۸۴.$$

ب)

$$P(۵۰/۵ < \overline{X} < ۵۲/۳) = P\left(\frac{۵۰/۵ - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{۵۲/۳ - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$
$$= P\left(\frac{۵۰/۵ - ۵۱/۴}{\frac{۶/۸}{۸}} < Z < \frac{۵۲/۳ - ۵۱/۴}{\frac{۶/۸}{۸}}\right)$$
$$= P(-۱/۵ < Z < ۱/۵) = ۲ \times P(۰ < Z < ۱/۵)$$
$$= ۲ \times ۰/۳۵۳۱ = ۰/۷۵۶۲.$$

ج)

$$P(\overline{X} < ۵۰/۶) = P\left(Z < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{۵۰/۶ - ۵۱/۶}{\frac{۶/۸}{\sqrt{۶۴}}}\right)$$
$$= P(Z < -۰/۹۴) = ۰/۵ - P(z < ۰/۹۴)$$
$$= ۰/۵ - ۰/۳۲۶۴ = ۰/۱۷۳۶.$$

۲–۱۹. بنابر قضیه‌ی حد مرکزی، متغیر تصادفی $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ توزیع نرمال استاندارد دارد، لذا

$$P(|\bar{X}-\mu|\geq ۳)=P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq\frac{۳}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$
$$=P\left(|Z|\geq\frac{۳\sqrt{n}}{\sigma}\right)=P\left(|Z|\geq\frac{۳۰}{۲۵}\right)$$
$$=P(|Z|\geq ۱/۲۵)=۲P(Z>۱/۲)$$
$$=۲(۰/۵-P(z<۱/۲))=۲(۰/۵-۰/۳۸۴۹)=۰/۲۳۰۲.$$

۲-۲۰. قضیه‌ی چیبیشف می‌گوید: $P(|\bar{X}-\mu_{\bar{X}}|<k\sigma_{\bar{X}})\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$ گیریم $\bar{Y}=\bar{X}_۱-\bar{X}_۲$ بنابر تمرین ۸-۲ داریم

$$\begin{cases} E(\bar{Y})=E(\bar{X}_۱-\bar{X}_۲)=E(\bar{X}_۱)-E(\bar{X}_۲)=\mu-\mu=۰ \\ \sigma_{\bar{Y}}=\sigma_{\bar{X}_۱-\bar{X}_۲}=\sqrt{\frac{\sigma^۲_{X_۱}}{n_۱}+\frac{\sigma^۲_{X_۲}}{n_۲}}=\sqrt{\frac{۴۰۰}{۴۰۰}+\frac{۹۰۰}{۴۰۰}}=\sqrt{\frac{۱۳}{۴}}=۱/۸۰۳ \end{cases}$$

بنابراین $E(\bar{Y})=\mu_{\bar{Y}}=۰$ و لذا

$$P(|\bar{Y}-\mu_{\bar{Y}}|<k\sigma_{\bar{Y}})\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$$

$$P(|\bar{Y}|<k\sigma_{\bar{Y}})\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$$

$$P(-۱/۸۰۳k<\bar{X}_۱-\bar{X}_۲<۱/۸۰۳k)\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$$

و چون حداقل احتمال ۰/۹۹ است لذا $۱-\frac{۱}{k^۲}=۰/۹۹$. بنابراین

$$P(-۱/۸۳\times ۱۰<\bar{X}_۱-\bar{X}_۲<۱/۸۰۳\times ۱۰)=۰/۹۹$$

یعنی $-۱/۸۳<\bar{X}_۱-\bar{X}_۲<۱/۸۰۳$، با احتمال ۰/۹۹ درصد.

۲-۲۱. در این صورت $\mu=E(\bar{X}_۱-\bar{X}_۲)=\mu_۱-\mu_۲=۰$ و

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}=۱/۸۰۳.$$

بنابر قضیه‌ی حد مرکزی $Z=\frac{\bar{X}_۱-\bar{X}_۲-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است، لذا

$$P(-k < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 < k) = P\left(\frac{-k-0}{\sigma} < \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \mu}{\sigma} < \frac{k-0}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{-k}{\sigma} < Z < \frac{k}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-k}{1/803} < Z < \frac{k}{1/803}\right)$$
$$= P\left(|Z| < \frac{k}{1/803}\right) = 0/99$$

یا $2P(0 < Z < \frac{k}{1/803})$، لذا $P(0 < Z < \frac{k}{1/803}) = 0/495$ و چون بنابر جدول ۳ داریم $P(Z = 2/58) = 0/495$ پس $\frac{k}{1/803} = 2/58$ یا $k = 4/65$.

۲-۲۲. بنابر نتایج تمرین ۸-۳، $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ متغیری تصادفی و نرمال با میانگین $\mu = \mu_1 - \mu_2$ و $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ می‌باشد، لذا بنابر قضیه‌ی حدّ مرکزی داریم

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 4/8) = P\left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \mu}{\sigma} \geq \frac{4/8 - (78-75)}{\sqrt{\frac{15}{30} + \frac{200}{50}}}\right)$$
$$= P(Z \geq 0/6) = 0/2743.$$

۲-۲۳. الف) بنابر نتایج تمرین۸-۴، داریم $E(\hat{\theta}) = \theta$ و $\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$، لذا

$$P(0/64 < \hat{\theta} < 0/76) = P(0/64 - \theta < \hat{\theta} - \theta < 0/76 - \theta)$$
$$= P(0/64 - 0/7 < \hat{\theta} - \theta < 0/76 - 0/7)$$
$$= P(-0/6 < \hat{\theta} - \theta < 0/6) = P(|\hat{\theta} - \theta| < 0/6)$$

از طرفی بنابر قضیه‌ی چبیشف داریم $P(|\hat{\theta} - \theta| < k\sigma_{\hat{\theta}}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ لذا

$$0/6 = k\sigma_{\hat{\theta}} = k\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} = k\sqrt{\frac{0/7(1-0/7)}{84}}$$
$$k = 12$$

بنابراین

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < 0/6) \geq 1 - \frac{1}{12^2} = 1 - \frac{1}{144} = \frac{143}{144} = 0/99.$$

ب) بنابر قضیه‌ی حد مرکزی داریم

$$P(0/64<\hat{\theta}<0/76)=P\left(\frac{0/64-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}<\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}<\frac{0/76-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}\right)$$
$$=P\left[\frac{0/64-0/7}{\sqrt{\frac{0/7(1-0/7)}{84}}}<Z<\frac{0/76-0/7}{\sqrt{\frac{0/7(1-0/7)}{84}}}\right]$$
$$=P(-1/2<Z<1/2)=2P(0<Z<1/2)$$
$$=2\times(0/3849)=0/77.$$

۲-۲۴. بنابر نتایج تمرین ۸-۵ و قضیه‌ی چبیشف داریم

$$P\left(|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2-(\theta_1-\theta_2)|<k\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}\right)\geq 1-\frac{1}{k^2}.$$

حال چون $1-\frac{1}{k^2}=0/9375$ پس $k^2=16$ یا $k=4$ و لذا

$$P\left(|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2-(0/40-0/25)|<4\sqrt{\frac{0/4(1-0/4)}{500}+\frac{0/25(1-0/25)}{400}}\right)\geq 0/9375$$
$$P(|\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2-0/15|\leq 0/1232)\geq 0/9375$$
$$P(-0/1232+0/15<\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2<0/1232+0/5)\geq 0/9375$$
$$P(0/0268<\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2<0/2732)\geq 0/9375.$$

۲-۲۵. برای هر متغیرتصادفی χ^2 با ν درجه‌ی آزادی داریم:

$$\mathrm{var}(\chi^2)=2\nu \quad \text{و} \quad E(\chi^2)=\nu$$

بنابراین مقادیر $\nu=n-1$ و $2(n-1)$ به‌ترتیب مقادیر میانگین با درجه‌ی آزادی و واریانس متغیر تصادفی $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ خواهند شد. پس

$$n-1=E(\chi^2)=E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2)$$
$$E(S^2)=\sigma^2$$

و

$$۲(n-۱)=\operatorname{var}(\chi^۲)=\operatorname{var}\left[\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}\right]=\frac{(n-۱)^۲}{\sigma^۴}\operatorname{var}(S^۲)$$

$$\operatorname{var}(S^۲)=\frac{۲\sigma^۴}{(n-۱)}.$$

۲–۲۶. بنابراینکه هر X_i دارای توزیع خی‌دو با یک درجه‌ی آزادی هستند پس $E(X_i)=۱$، و $\operatorname{var}(X_i)=۲$. مستقل بودن متغیرهای تصادفی موجب می‌شود تا متغیرتصادفی $Y_n=X_۱+\cdots+X_n$ دارای توزیع خی‌دو با n درجه‌ی آزادی شود. پس برای $\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}X_i=\frac{Y_n}{n}$ داریم

$$E(\bar{X})=E(X_i)=۱,\quad \operatorname{var}(\bar{X})=\frac{\operatorname{var}(X_i)}{n}=\frac{۲}{n}$$

بنابر قضیه‌ی حد مرکزی $Z=\frac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sqrt{\operatorname{var}(\bar{X})}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد شد هرگاه اندازه‌ی n به‌قدر کافی بزرگ باشد. پس متغیر تصادفی $\frac{\bar{X}-۱}{\sqrt{\frac{۲}{n}}}$ یا $\frac{\frac{Y_n}{n}-۱}{\sqrt{\frac{۲}{n}}}$ دارای توزیع نرمال می‌شود.

۲–۲۷. از آنجا که هر متغیر تصادفی خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی را می‌توان به‌صورت مجموع مستقل متغیرهای تصادفی خی‌دو با یک درجه‌ی آزادی دید، پس با بزرگ بودن اندازه‌ی درجه‌ی آزادی و دانستن این مطلب که $E(X)=\nu$ و $\operatorname{var}(X)=۲\nu$ است می‌توان گفت که متغیر تصادفی $Z=\frac{X-E(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}=\frac{X-\nu}{\sqrt{۲\nu}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.

۲–۲۸. با استاندارد نمودن متغیرتصادفی که دارای توزیع خی‌دو با درجه‌ی آزادی بزرگی است می‌توان محاسبه‌ی احتمالات مربوطه را انجام داد.

$$P(X>۶۸/۰)=P\left(\frac{X-\nu}{\sqrt{۲\nu}}>\frac{۶۸-۵۰}{\sqrt{۲\times۵۰}}\right)=P(Z>۱/۸)$$
$$=۰/۵-P(۰\le Z\le ۱/۸)=۰/۵-۰/۴۶۴۱=۰/۰۳۵۹.$$

۲–۲۹. برای $i=۱,۲$، $x_i\in R$ مقدار تابع چگالی برابر است با: $f_i(x_i)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-۱}{۲}x_i^۲}$ از

طرفی دو متغیر تصادفی مستقل‌اند بنابراین

$$f(x_1,x_2)=f_1(x_1)\,f_2(x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

از روی چگالی توأم X_1 و X_2 چگالی توأم $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ و $X_2=2\overline{X}-X_1$ به‌دست می‌آید. برای اینکار ابتدا مقدار X_1 را ثابت نگه داشته و داریم $\frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}}=2$ و در نتیجه

$$f(x_1,\bar{x})=\left|\frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}}\right|\times f(x_1,x_2)=2\times\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-1}{2}[x_1^2+(2\bar{x}-x_1)^2]}$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{\frac{-1}{2}[x_1^2+4\bar{x}^2-4x_1\bar{x}+x_1^2]}$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-(x_1^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2)}e^{-\bar{x}^2}=\frac{1}{\pi}e^{-\bar{x}^2}e^{-(x_1-\bar{x})^2}.$$

توجه داشته باشید این عملیات به وسیله‌ی تابع مولد گشتاورها نیز امکان‌پذیر است.

ب) با توجه به خاصیت قدرمطلق داریم:

$$U=|X_1-\overline{X}|=\begin{cases}X_1-\overline{X} & X_1>\overline{X}\\ \overline{X}-X_1 & X_1<\overline{X}\end{cases}$$

اگر $U=X_1-\overline{X}$، آنگاه $X_1=U+\overline{X}$، پس

$$g_1(u,\bar{x})=\left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right|f(u+\bar{x},\bar{x})=\frac{1}{\pi}e^{-\bar{x}^2}e^{-[(u+\bar{x})-\bar{x}]^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-\bar{x}^2}e^{u^2}=\frac{1}{\pi}e^{-(u^2+\bar{x}^2)}$$

اگر $U=\overline{X}-X_1$، آنگاه $X_1=\overline{X}-U$، پس

$$g_2(u,\bar{x})=\left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right|f(\bar{x}-u,\bar{x})$$

$$=|-1|\,\frac{1}{\pi}e^{-\bar{x}^2}.e^{-[\bar{x}-U-\bar{x}]^2}=\frac{1}{\pi}e^{-(u^2+\bar{x}^2)}$$

در نتیجه

$$g(u,\bar{x})=g_1(u,\bar{x})+g_2(u,\bar{x})=\frac{2}{\pi}e^{-(u^2+\bar{x}^2)}$$

ج) با توجه به روابط $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ و $X_2=2\overline{X}-X_1$ فرمول واریانس نمونه‌ای را

بازنویسی می‌کنیم.

$$S^{2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^{2}=\sum_{i=1}^{2}(X_i-\overline{X})^{2}=(X_1+\overline{X})^{2}+(X_2-\overline{X})^{2}$$
$$=(X_1-\overline{X})^{2}+(2\overline{X}-X_1-\overline{X})^{2}=(X_1-\overline{X})^{2}+(\overline{X}-X_1)^{2}$$
$$=2(X_1-\overline{X})^{2}=2U^{2}.$$

د) $S^{2}=2U^{2}$ یا $U=\sqrt{\frac{S^{2}}{2}}$، پس با ثابت نگه‌داشتن متغیرتصادفی $\overline{X}$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$h(s^{2},\overline{x})=\left|\frac{\partial u}{\partial s^{2}}\right|\times g(u,\overline{x})=\left|\frac{1}{2\sqrt{2s^{2}}}\right|\frac{2}{\pi}e^{-[\frac{s^{2}}{2}+\overline{x}^{2}]}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{s^{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}\ \pi}e^{-\frac{s^{2}}{2}-\overline{x}^{2}}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\overline{x}^{2}}}_{N(0,\frac{1}{2})}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(s^{2})^{\frac{-1}{2}}e^{-\frac{s^{2}}{2}}}_{\chi^{2}(1)}.$$

۲-۳۰. اگر U و V دو متغیر تصادفی مستقل خی‌دو به‌ترتیب با درجات آزادی ν_1 و ν_2 باشند آنگاه متغیر تصادفی $F=\frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$ دارای توزیع اف با درجه‌های آزادی مرتبط با صورت و کسر ساختار خود می‌شود.

$$E(F)=E(\frac{U/\nu_1}{V/\nu_2})=E(\frac{U}{\nu_1})\times E(\frac{\nu_2}{V})$$
$$=\frac{1}{\nu_1}E(U)\times\nu_2E(\frac{1}{V})=\frac{1}{\nu_1}.\nu_1\times\nu_2.\frac{1}{\nu_2-1}=\frac{\nu_2}{\nu_2-1}.$$

۲-۳۱. برای حل این تمرین باید توزیع $Y=\nu_1X$ را تعیین کنیم. X دارای توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه‌ی آزادی است پس برای $x>0$،

$$g(x)=\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

و برای $x<0$، $g(x)=0$. قرار دهیم $y=\nu_1x$، در نتیجه مقدار ژاکوبی تبدیل برابر

است با $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\nu_1}$ و

$$f(y)=\left|\frac{dx}{dy}\right|g(x)$$

$$=\frac{1}{\nu_1}\times\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\left(\frac{y}{\nu_1}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{y}{\nu_2}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}y^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{y}{\nu_2}\right)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}y^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{y}{\nu_2}\right)^{\frac{-\nu_1}{2}}\left(1+\frac{y}{\nu_2}\right)^{\frac{-\nu_2}{2}}$$

و لذا

$$\lim_{\nu_2\to+\infty}f(y)=\lim_{\nu_2\to+\infty}\left[\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}.\frac{y^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\nu_2^{\frac{\nu_1}{2}}}\left(1+\frac{y}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\left(1+\frac{y}{\nu_2}\right)^{-\frac{\nu_2}{2}}\right]$$

$$=1\times\frac{y^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{2^{\frac{\nu_1}{2}}\Gamma(\frac{\nu_1}{2})}\times(1)\times e^{-\frac{y}{2}}=\frac{y^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{2^{\frac{\nu_1}{2}}\Gamma(\frac{\nu_1}{2})}e^{\frac{-y}{2}}$$

در نتیجه $Y\sim\chi^2(\nu_1)$.

۲–۳۲. از روی تعریف توزیع تی می‌توان گفت که دو متغیر تصادفی مستقل که صورت و مخرج کسر عبارت متغیر تصادفی تی را می‌سازند به‌ترتیب از نرمال استاندارد و جذر خی‌دو با ν درجه‌ی آزادی که بر درجه‌ی آزادی مربوطه تقسیم شده است، آمده‌اند.

$$T=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}},$$

$$T^{2}=\frac{(N(0,1))^{2}}{\frac{\chi_{\nu}^{2}}{\nu}}=\frac{\chi_{1}^{2}}{\frac{\chi_{\nu}^{2}}{\nu}}=\frac{\frac{\chi_{1}^{2}}{1}}{\frac{\chi_{\nu}^{2}}{\nu}}=F_{1,\nu}$$

امّا راه حل دقیق‌تر آن است که از روی تابع چگالی، توزیع را تعیین کنیم. تابع چگالی متغیر تصادفی T عبارت است از:

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^{2}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}};\quad -\infty<t<\infty$$

قرار دهید $X=T^{2}$، پس به‌ازای $x>0$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}G(x)&=P(X\le x)=P(T^{2}\le x)=P(-\sqrt{x}\le T\le\sqrt{x})\\&=P(T\le\sqrt{x})-P(T\le-\sqrt{x})=F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})\end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{dG(x)}{dx}=\frac{d}{dx}[F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})]\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}f(-\sqrt{x})\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\left(1+\frac{(\sqrt{x})^{2}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}+\left(1+\frac{(-\sqrt{x})^{2}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\right]\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[2\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}\right]\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-1}{2}}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\frac{-\nu+1}{2}}\end{aligned}$$

آخرین رابطه، نمایانگر تابع چگالی توزیع F با درجه‌های آزادی $\nu_{1}=1$ و $\nu_{2}=\nu$ است.

۲-۳۳. از روی تعریف توزیع F که برحسب دو متغیر تصادفی مستقل خی‌دو بیان می‌شود، می‌توان نوشت:

$$F=\frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{F}=\frac{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}\sim F_{\nu_2,\nu_1}$$

راه حل دقیق آن است که از طریق تابع چگالی این مطالب نشان داده شود. می‌دانیم فرم تابع چگالی توزیع اف با درجه‌های آزادی داده شده، عبارت است از

$$g(x)=\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)} \quad ; \quad x>0$$

و به‌ازای $x<0$، $g(x)=0$ است. قرار دهید $Y=\frac{1}{X}$، در نتیجه $\frac{dx}{dy}=\frac{-1}{y^2}$، و از این نکته که تغییر درجه‌ی آزادی تأثیری روی $\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}$ نمی‌گذارد، این کمیت را با M نشان می‌دهیم.

$$f(y)=\left|\frac{dx}{dy}\right|g(x)=\left|\frac{-1}{y^2}\right|g(\frac{1}{y})$$

$$=\frac{1}{y^2}\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

$$=M\,\frac{1}{y^2}\,y^{1-\frac{\nu_1}{2}}\left(\frac{\nu_2 y+\nu_1}{\nu_2 y}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}=M\,y^{\frac{\nu_2}{2}-1}\left(\frac{\nu_2 y+\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

$$=M\,y^{1-\frac{\nu_2}{2}}\frac{(\nu_2 y+\nu_1)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}}{\nu_2^{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}}=M\,y^{\frac{\nu_2}{2}-1}\frac{\nu_1^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}(\frac{\nu_2 y}{\nu_1}+1)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}}{\nu_2^{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}}$$

$$=M\,y^{\frac{\nu_2}{2}-1}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}\left(1+\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\frac{\nu_2}{2}}y^{\frac{\nu_2}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_2}{\nu_1}y\right)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

که گویای تابع چگالی F با $\nu_۲$ و $\nu_۱$ درجه‌ی آزادی است.

۳۴–۲. از روی تعریف نماد $f_{\alpha;\nu_۱,\nu_۲}$، در توزیع F داریم: $P(F_{\nu_۱,\nu_۲} \geq f_{\alpha;\nu_۱,\nu_۲}) = \alpha$،

$$P(F_{\nu_۱,\nu_۲} \geq f_{\alpha;\nu_۱,\nu_۲}) = \alpha$$

$$\alpha = P(\frac{۱}{F_{\nu_۱,\nu_۲}} < \frac{۱}{f_{\alpha;\nu_۱,\nu_۲}}) = P(F_{\nu_۲,\nu_۱} < \frac{۱}{f_{\alpha;\nu_۱,\nu_۲}})$$

$$۱-\alpha = P(F_{\nu_۲,\nu_۱} > \underbrace{\frac{۱}{f_{\alpha;\nu_۱,\nu_۲}}}_{f_{۱-\alpha;\nu_۲,\nu_۱}}) = P(F_{\nu_۲,\nu_۱} > f_{۱-\alpha;\nu_۲,\nu_۱})$$

۳۵–۲. تابع چگالی بتا به‌ازای $۰ < y < ۱$، $\alpha,\beta > ۰$

$$g(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-۱}(۱-y)^{\beta-۱}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\nu_۱+\nu_۲}{۲})}{\Gamma(\frac{\nu_۱}{۲})\Gamma(\frac{\nu_۲}{۲})} y^{\frac{\nu_۱}{۲}-۱}(۱-y)^{\frac{\nu_۲}{۲}-۱}$$

$$= M\ y^{\frac{\nu_۱}{۲}-۱}(۱-y)^{\frac{\nu_۲}{۲}-۱}$$

با روش تغییر متغیر و قرار دادن $X = \frac{\nu_۲ Y}{\nu_۱(۱-Y)}$، داریم

$$y = \frac{\nu_۱ x}{\nu_۱ x + \nu_۲}$$

در نتیجه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\nu_۱(\nu_۱ x + \nu_۲) - \nu_۱^۲ x}{(\nu_۱ x + \nu_۲)^۲} = \frac{\nu_۱\nu_۲}{(\nu_۱ x + \nu_۲)^۲},$$

$$f(x)=g(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|=g\left(\frac{\nu_1 x}{\nu_2+\nu_1 x}\right)\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1 x+\nu_2)^2}$$

$$=M\left(\frac{\nu_1 x}{\nu_2+\nu_1 x}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1-\frac{\nu_1 x}{\nu_2+\nu_1 x}\right)^{\frac{\nu_2}{2}-1}\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1 x+\nu_2)^2}$$

$$=M\left(\frac{\nu_1 x}{\nu_2+\nu_1 x}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(\frac{\nu_2}{\nu_2+\nu_1 x}\right)^{\frac{\nu_2}{2}-1}\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1 x+\nu_2)^2}$$

$$=M\,\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}\,x^{\frac{\nu_2}{2}-1}\,\nu_1^{\frac{\nu_2}{2}}\,(\nu_1 x+\nu_2)^{\frac{-1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

$$=M\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}x^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}; \qquad x>0$$

۲–۳۶. با استفاده از قضیه‌ی ۲–۱۵، $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_1^2/\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F_{4,4}$ پس

$$g(f)=\frac{\Gamma(\frac{4+4}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})\,\Gamma(\frac{4}{2})}\left(\frac{4}{4}\right)^{\frac{4}{2}}f^{\frac{4}{2}-1}\left(1-\frac{4}{4}f\right)^{\frac{-1}{2}(4+4)}$$

$$=\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\,\Gamma(2)}f(1+f)^{-4}$$

$$=\frac{3!}{1!\,1!}f(1+f)^{-4}=6\times f\times(1+f)^{-4}, \qquad f>0$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}<\frac{1}{2}\ \text{یا}\ \frac{S_1^2}{S_2^2}>2\right)=P\left(F_{4,4}<\frac{1}{2}\right)+P(F_{4,4}>2)$$

$$=1-P\left(\frac{1}{2}<F_{4,4}<2\right)=1-\int_{\frac{1}{2}}^{2}6f(1+f)^{-4}\,df$$

$$=1-6\left(\frac{1}{-2(1+f)^2}+\frac{1}{3(1+f)^3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{20}{27}.$$

۲–۳۷. بنابر چگالی خی‌دو

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})}x^{\frac{v}{2}-1}e^{\frac{-x}{2}} & x>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

و قضیه‌ی ۲–۱۱، $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$، در نتیجه $\frac{4S^2}{25}\sim\chi^2_4$، پس

$$P(16<S^2<24)=P(\frac{16}{5}<\frac{4S^2}{25}<\frac{24}{5})=\int_{\frac{16}{5}}^{\frac{24}{5}}\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}dx$$
$$=\frac{1}{4}[-2xe^{-\frac{x}{2}}]_{\frac{16}{5}}^{\frac{24}{5}}+\frac{2}{4}\int_{\frac{16}{5}}^{\frac{24}{5}}e^{\frac{-x}{2}}dx=\frac{1}{4}[-2xe^{-\frac{x}{2}}+4e^{\frac{-x}{2}}]_{\frac{16}{5}}^{\frac{24}{5}}=0/216$$

۲–۳۸. از روی توزیع واریانس نمونه‌ای می‌توان احتمال را محاسبه نمود.

$$P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\frac{(16-1)\times 54/668}{25})+P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\frac{(16-1)\times 12/102}{25})$$
$$=P(\chi^2_{(15)}>32/8)+(1-P(\chi^2_{(15)}>7/2612))$$
$$=0/005+1-0/95=0/055.$$

۲–۳۹.

$$P(S^2>7/7535)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\frac{(9-1)\times 7/7535}{4}\right)$$
$$=P(\chi^2_{(8)}>15/507)=0/5.$$

۲–۴۰.

$$P(\overline{X}>47)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>\frac{47-42}{7/\sqrt{25}}\right)$$
$$=P\left(T_{(24)}>\frac{25}{7}\right)=P(T_{(24)}>3/571)=0/003.$$

مقدار احتمال فوق خیلی کوچک به‌دست آمده است پس براساس شواهد، فرض

$\mu = ۴۲$ درست نمی‌باشد.

۲-۴۱. ابتدا مقدار t را محاسبه می‌کنیم.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{۲۷/۸ - ۲۸/۵}{\sqrt{۳/۲۴}/\sqrt{۱۲}} = -۱/۳۴۷$$

حال مقدار به‌دست آمده را با مقدار جدول تی مقایسه می‌کنیم.

$$t = -۱/۳۴۷ < -۱/۳۶۳ = -t_{۰/۱۰,۱۱}$$

بنابراین ادعا رد می‌شود.

۲-۴۲.

$$P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} > ۱/۱۶\right) = P\left(\frac{\sigma_۲^۲ S_۱^۲}{\sigma_۱^۲ S_۲^۲} > ۱/۱۶\frac{۱۸}{۱۲}\right) = P(F_{۶۰,۳۰} > ۱/۷۴) = ۰/۰۵.$$

۲-۴۳.

$$P\left(\frac{S_۱^۲}{S_۲^۲} < ۴/۰۳\right) = P\left(\frac{\sigma_۲^۲ S_۱^۲}{\sigma_۱^۲ S_۲^۲} < ۴/۰۳\right)$$
$$= P(F_{۹,۱۴} < ۴/۰۳) = ۱ - P(F_{۹,۱۴} > ۴/۰۳)$$
$$= ۱ - ۰/۰۱ = ۰/۹۹.$$

۲-۴۴. تابع چگالی نمایی به‌ازای $x > ۰$، $f(x) = \frac{۱}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}$ و به‌ازای $x < ۰$، برابر با صفر است. پس تابع چگالی اوّلین آماره‌ی ترتیبی به‌ازای $y_۱ > ۰$،

$$g_۱(y_۱) = nf(y_۱)\left[\int_{y_۱}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-۱} = n\frac{۱}{\theta}e^{-y_۱/\theta}[\underbrace{\int_{y_۱}^{\infty}\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx}_{e^{-y_۱/\theta}}]^{n-۱}$$

$$= n\frac{۱}{\theta}e^{-y_۱/\theta}[e^{-y_۱/\theta}]^{n-۱} = \frac{n}{\theta}e^{\frac{-ny_۱}{\theta}}$$

و تابع چگالی nامین آماره‌ی ترتیبی به‌ازای $y_n > ۰$ عبارت است از

$$g_n(y_n) = n\ f(y_n)\left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-1}$$
$$= n\,\frac{1}{\theta}e^{-y_n/\theta}\,[\underbrace{\int_{-\infty}^{y_n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx}_{1-e^{-y_n/\theta}}]^{n-1}$$
$$= n\,\frac{1}{\theta}e^{-y_n/\theta}\,[1-e^{-y_n/\theta}]^{n-1}$$

اگر اندازه‌ی نمونه $n=2m+1$ باشد، آنگاه $\tilde{X}$ با Y_{m+1} یکی می‌شود. پس به‌ازای مقادیر مثبت برای $\tilde{x}$:

$$h(\tilde{x}) = \frac{(2m+1)!}{m!m!}\left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x)dx\right]^m f(\tilde{x})\left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x)dx\right]^m$$
$$= \frac{(2m+1)!}{m!m!}[\underbrace{\int_{-\infty}^{\tilde{x}}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}}_{1-e^{-\tilde{x}/\theta}}]^m\,\frac{1}{\theta}e^{-\tilde{x}/\theta}[\underbrace{\int_{\tilde{x}}^{\infty}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx}_{e^{-\tilde{x}/\theta}}]^m$$
$$= \frac{(2m+1)!}{m!m!\theta}[1-e^{-\tilde{x}/\theta}]^m e^{-\tilde{x}/\theta}\,[e^{-\tilde{x}/\theta}]^m$$
$$= \frac{(2m+1)!}{m!m!\theta}e^{-\tilde{x}(m+1)/\theta}[1-e^{-\tilde{x}/\theta}]^m.$$

۲-۴۵. تابع چگالی یکنواخت به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

با جایگزینی موارد خواسته شده به‌دست می‌آید:

$$g_1(y_1) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}\left[\int_{-\infty}^{y_1} f(x)dx\right]^{1-1} f(y_1)\left[\int_{y_1}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$
$$= n.f(y_1)\left[\int_{y_1}^{1} 1.dx\right]^{n-1} = n.1.(1-y_1)^{n-1}$$
$$= n(1-y_1)^{n-1}, \qquad 0 < y_1 < 1$$

و برای سایر جاها، $g_1(y_1)=0$.

$$g_n(y_n)=\frac{n!}{(۱-n)!(n-n)!}\left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-۱} f(y_n)\left[\int_{y_n}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-n}$$
$$=n.f(y_n)\left[\int_{۰}^{y_n} ۱.dx\right]^{n-۱}=n\,۱\,y_n^{n-۱}=ny_n^{n-۱},\quad ۰<y_n<۱$$

و برای سایر جاها، $g_n(y_n)=۰$.

۲–۴۶.

$$h(\tilde{x})=\frac{(۲m+۱)!}{m!m!}\left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x)dx\right]^{m} f(\tilde{x})\left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x)dx\right]^{m}$$
$$=\frac{(۲m+۱)!}{(m!)^۲}\left[\int_{۰}^{\tilde{x}} ۱\,dx\right]^{m} ۱\left[\int_{\tilde{x}}^{۱} ۱\,dx\right]^{m}$$
$$=\frac{(۲m+۱)!}{(m!)^۲}\tilde{x}^m(۱-\tilde{x})^m,\qquad ۰<\tilde{x}<۱$$

و برای سایر جاها، $h(\tilde{x})=۰$.

۲–۴۷. از روی نتیجه‌ی تمرین ۲–۴۶، به‌ازای $۰<y_۱<۱$، $g_۱(y_۱)=n(۱-y_۱)^{n-۱}$؛ و سایر جاها، $g_۱(y_۱)=۰$ است، پس

$$\mu=E(Y_۱)=\int_{-\infty}^{\infty} y_۱\, g(y_۱)dy_۱=\int_۰^۱ y_۱ n(۱-y_۱)^{n-۱}dy_۱$$
$$=\int_۱^۰ -n(۱-u)u^{n-۱}du=n\int_۰^۱(u^{n-۱}-u^n)du$$
$$=u[\frac{u^n}{n}-\frac{u^{n+۱}}{n+۱}]_۰^۱=n[\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}]=\frac{۱}{n+۱}$$

و

$$E(Y_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 \, g_1(y_1)dy_1 = \int_0^1 y_1^2 \, n(1-y_1)^{n-1}dy_1$$
$$= n\int_1^0 (1-u)^2 u^{n-1}(-du) = n\int_0^1 (u^{n-1} - 2u^n + u^{n+1})du$$
$$= n[\frac{u^n}{n} - \frac{2u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n+2}}{n+2}]_0^1 = n[\frac{u^n}{n} - \frac{2u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n+2}}{n+2}]$$
$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

با جایگذاری در فرمول واریانس داریم:

$$\sigma_{Y_1}^2 = E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

۲–۴۸. به‌ازای $0 < x < 1$؛ مقدار تابع چگالی برابر است با:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\,\Gamma(2)} x^{3-1}(1-x)^{2-1}$$
$$= \frac{4!}{2!\,1!} x^2(1-x) = 12x(1-x)$$

و در سایر جاها، $f(x) = 0$ است. پس برای $0 < y_1 < 1$؛

$$g_1(y_1) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}\left[\int_{-\infty}^{y_1} f(x)dx\right]^{1-1} f(y_1)\left[\int_{y_1}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$
$$= nf(y_1)\left[\int_{y_1}^1 f(x)dx\right]^{n-1} = 12n\, y_1^2(1-y_1)[\underbrace{\int_{y_1}^1 12(x^2-x^3)dx}_{12(\frac{1}{12}-\frac{y_1^3}{3}+\frac{y_1^4}{4})}]^{n-1}$$
$$= 12ny_1^2(1-y_1)\left[12(\frac{1}{12} - \frac{y_1^3}{3} + \frac{y_1^4}{4})\right]^{n-1}$$
$$= 12ny_1^2(1-y_1)(1-4y_1^3+3y_1^4)^{n-1}$$

و برای سایرجاها، $g_1(y_1)=0$ است. همچنین برای nامین آماره‌ی ترتیبی مقدار تابع چگالی به‌ازای $0<y_n<1$؛

$$\begin{aligned}
g_n(y_n) &= \frac{n!}{(1-n)!\,(n-n)!}\left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-1} f(y_n)\left[\int_{y_n}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-n} \\
&= n\, f(y_n)\left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-1} \\
&= n\; 12\, y_n^2(1-y_n)\left[1-\int_{y_n}^{1} 12 y_n^2(1-y_n)dy_n\right]^{n-1} \\
&= 12\, n y_n^2(1-y_n)[1-1+4y_n^3-3y_n^4]^{n-1} = 12\, n\, y_n^2(1-y_n)(4y_n^3-3y_n^4)^{n-1}.
\end{aligned}$$

۲-۴۹. به‌ازای $\widetilde{x}>0$،

$$\begin{aligned}
h(\widetilde{x}) &= \frac{(2m+1)!}{m!m!}\left[\int_0^{\widetilde{x}} f(x)dx\right]^m f(\widetilde{x})\left[\int_{\widetilde{x}}^1 f(x)dx\right]^m \\
&= \frac{(2m+1)!}{m!m!}[\underbrace{\int_0^{\widetilde{x}} 12x^2(1-x)dx}_{12(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})\big|_0^{\widetilde{x}}}]^m\; 12\widetilde{x}(1-\widetilde{x})[\underbrace{\int_{\widetilde{x}}^1 12\widetilde{x}^2(1-x)dx}_{12(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})\big|_{\widetilde{x}}^1}]^m \\
&= \frac{12(2m+1)!}{m!m!}\,\widetilde{x}^{3m+2}(1-\widetilde{x})(4-3\widetilde{x})^m(1-4\widetilde{x}^3+3\widetilde{x}^4)^m
\end{aligned}$$

و برای سایر جاها، $h(\widetilde{x})=0$.

۲-۵۰. کلیه‌ی نمونه‌های ۲تایی را در مجموعه‌ی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
S=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),\\
&(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}
\end{aligned}$$

پس مقادیر ممکنه‌ای که Y_1 می‌تواند اختیار کند عبارتند از: $\{1,2,3,4\}$. با شمارش از روی فضای نمونه‌ای می‌توان توزیع اوّلین آماره‌ی ترتیبی را به‌دست آورد.

$y_۱$	۱	۲	۳	۴
$P(Y_۱=y_۱)$	$\frac{۸}{۲۰}$	$\frac{۶}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$

بار دیگر با نمونه‌گیری باجایگذاری حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$\begin{aligned}S=\{&(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),\\&(۳,۴),(۳,۵),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵)\}\end{aligned}$$

پس توزیع احتمال برای $Y_۱$ برابر است با:

$y_۱$	۱	۲	۳	۴	۵
$P(Y_۱=y_۱)$	$\frac{۹}{۲۵}$	$\frac{۷}{۲۵}$	$\frac{۵}{۲۵}$	$\frac{۳}{۲۵}$	$\frac{۱}{۲۵}$

۲–۵۱. با شرط $-\infty<y_۱<y_n<\infty$ و به‌ازای $h_۱,h_۲>۰$، محور اعداد حقیقی را می‌توان به پنج قسمت افراز کرد:

$$(-\infty,y_۱] \uparrow (y_۱,y_۱+h_۱] \uparrow (y_۱+h_۱,y_n] \uparrow (y_n,y_n+h_۲] \uparrow (y_n+h_۲,+\infty)$$

پس مقادیر احتمال متناظر هر فاصله عبارتند از:

$$\int_{-\infty}^{y_۱} f(x)dx \uparrow \int_{y_۱}^{y_۱+h_۱} f(x)dx \uparrow \int_{y_۱+h_۱}^{y_n} f(x)dx \uparrow \int_{y_n}^{y_n+h_۲} f(x)dx \uparrow \int_{y_n+h_۲}^{+\infty} f(x)dx$$

اینکه اگر پیشامد آنکه ۰تا از بازه‌ی اوّل، ۱تا از بازه‌ی دوّم، $n-۲$تا از بازه‌ی سوم، ۱تا از بازه‌ی چهارم و ۰تا از بازه‌ی پنجم را با $A_{h_۱,h_۲}$ نشان دهیم، شانس انتخاب $A_{h_۱,h_۲}$، براساس توزیع چندجمله‌ای عبارت است از:

$$\begin{aligned}P(A_{h_۱,h_۲})&=\frac{n!}{۰!\,۱!\,(n-۲)!\,۱!\,۰!}\left[\int_{-\infty}^{y_۱} f(x)dx\right]^۰\left[\int_{y_۱}^{y_۱+h_۱} f(x)dx\right]^۱\\&\times\left[\int_{y_۱+h_۱}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-۲}\left[\int_{y_n}^{y_n+h_۲} f(x)dx\right]^۱\left[\int_{y_n+h_۲}^{\infty} f(x)dx\right]^۰\\&=\frac{n!}{(n-۲)!}\left[\int_{y_۱}^{y_۱+h_۱} f(x)dx\right]\left[\int_{y_۱+h_۱}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-۲}\left[\int_{y_n}^{y_n+h_۲} f(x)dx\right]\end{aligned}$$

بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین داریم

$$\begin{cases} \int_{y_1}^{y_1+h_1} f(x)dx = f(c)h_1, & y_1 < c < y_1 + h_1 \\ \int_{y_n}^{y_n+h_2} f(x)dx = f(c')h_2, & y_n < c' < y_n + h_2 \end{cases}$$

درنتیجه

$$g(y_1, y_n) = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{P(A_{h_1,h_2}) - P(A_0)}{h_1 h_2} = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{P(A_{h_1,h_2})}{h_1 h_2}$$

$$= \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{\frac{n!}{(n-2)!}[h_1 f(c)]\left[\int_{y_1+h_1}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-2}[h_2 f(c')]}{h_1 h_2}$$

$$= n(n-1) f(y_1) f(y_n)\left[\int_{y_1}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-2}$$

و برای سایرجاها، $g(y_1, y_n) = 0$ است.

الف) از روی چگالی نمایی به‌ازای $-\infty < y_1 < y_n < \infty$،

$$g(y_1, y_n) = n(n-1) f(y_1)\ f(y_n)\left[\int_{y_1}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-2}$$

$$= n(n-1)\frac{1}{\theta}e^{-y_1/\theta}\ \frac{1}{\theta}e^{-y_n/\theta}\left[\int_{y_1}^{y_n} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx\right]^{n-2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-(y_1+y_2)/\theta}\left[-e^{-x/\theta}\Big|_{y_1}^{y_n}\right]^{n-2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-(y_1+y_2)/\theta}\left[e^{-y_1/\theta} - e^{-y_n/\theta}\right]^{n-2}$$

و برای سایر جاها، $g(y_1, y_n) = 0$ است.

ب) از روی تابع چگالی یکنواخت به‌ازای $-\infty < y_1 < y_n < \infty$،

$$g(y_1, y_n) = n(n-1)\, f(y_1)\ f(y_n)\left[\int_{y_1}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-2}$$
$$= n(n-1)\left[\int_{y_1}^{y_n} 1\, dx\right]^{n-2}$$
$$= n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}$$

و برای سایر جاها، $g(y_1, y_n) = 0$ است.

۲–۵۲. از روی تعریف کوواریانس و یا فرمول ساده شده‌ی آن داریم:

$$\operatorname{cov}(Y_1, Y_n) = E(Y_1 Y_n) - E(Y_1)E(Y_n)$$

از روی تمرین ۲–۴۷، $E(Y_1) = \frac{1}{n+1}$ و به‌طریق مشابه

$$E(Y_n) = \int_0^1 y_n\ g_n(y_n)\ dy_n$$
$$= \int_0^1 y_n\ n\, y_n^{n-1}\ dy_n$$
$$= \frac{n}{n+1}[y_n^{n+1}] = \frac{n}{n+1}.$$

چون محدودیت $0 < y_1 < y_n < 1$ روی دو متغیر تصادفی به‌طور هم‌زمان وجود دارد حدود انتگرال را از روی این شرط می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
E(Y_۱Y_n) &= \int_۰^۱\int_۰^{y_n} y_۱ y_n g(y_۱, y_n) dy_۱ dy_n \\
&= \int_۰^۱\int_۰^{y-n} y_۱ y_n n(n-۱)(y_n - y_۱)^{n-۲} dy_۱ dy_n \\
&= n(n-۱)\int_۰^۱ y_n \left[\int_۰^{y_n} y_۱(y_n - y_۱)^{n-۲} dy_۱\right] dy_n \\
&= n(n-۱)\int_۰^۱ y_n \left[\int_{y_n}^۰ (y_n - u)u^{n-۲}(-du)\right] dy_n \\
&= n(n-۱)\int_۰^۱ y_n \left[\int_۰^{y_n} (y_n u^{n-۲} - u^{n-۱}) du\right] dy_n \\
&= n(n-۱)\int_۰^۱ y_n \left[\frac{y_n}{n-۱}u^{n-۱} - \frac{u^n}{n}\right]_۰^{y_n} dy_n \\
&= n(n-۱)\int_۰^۱ y_n \left(\frac{y_n^n}{n-۱} - \frac{y_n^n}{n}\right) dy_n \\
&= \frac{n(n-۱)}{n(n-۱)}\int_۰^۱ - y_n^{n+۱} dy_n = \left[\frac{-y_n^{n+۲}}{n+۲}\right]_۰^۱ = \frac{-۱}{n+۲}
\end{aligned}
$$

و لذا

$$
\operatorname{cov}(Y_۱, Y_n) = \frac{-۱}{n+۲} - \frac{۱}{n+۱}.\frac{n}{n+۱} = -\frac{(n+۱)^۲ + n(n+۲)}{(n+۱)^۲(n+۲)}.
$$

۲-۵۳. بنابر تمرین ۲-۵۱،

$$
g(y_۱, y_n) = n(n-۱) f(y_۱)\ f(y_n)\left[\int_{y_۱}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-۲};\quad -\infty < y_۱ < y_n < \infty
$$

بنابه تعریف برد $r = y_n - y_۱$، و درنتیجه $y_n = y_۱ + r$ و $\frac{\partial y_n}{\partial r} = ۱$، پس

$$
\begin{aligned}
h(y_۱, r) &= g(y_۱, y_n)\left|\frac{\partial y_n}{\partial r}\right| = g(y_۱, y_۱ + r)\times ۱ \\
&= n(n-۱) f(y_۱)\ f(y_۱ + r)\left[\int_{y_۱}^{y_۱+r} f(x)dx\right]^{n-۲}
\end{aligned}
$$

پس چگالی توأم اوّلین آماره‌ی ترتیبی و برد برابر است با:

$$h(y_1,r)=\begin{cases} n(n-1)f(y_1)f(y_1+r)[\int_{y_1}^{y_1+r} f(x)dx]^{n-1} & -\infty<y_1<y_1+r<+\infty \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۲-۵۴. با جایگزینی در تمرین ۲-۵۳ و به‌ازای $-\infty < y_1 < y_1+r < +\infty$، داریم:

$$\begin{aligned} h(y_1,r) &= n(n-1)f(y_1).f(y_1+r)\left[\int_{y_1}^{y_1+r} f(x)dx\right]^{n-2} \\ &= n(n-1)\frac{1}{\theta}e^{-y_1/\theta}\frac{1}{\theta}e^{-(y_1+r)/\theta}[\underbrace{\int_{y_1}^{y_1+r}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx}_{(1-e^{-r/\theta})e^{-y_1/\theta}}]^{n-2} \\ &= \frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-(2y_1+r)/\theta}e^{-(n-2)y_1/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2} \\ &= \frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-(ny_1+r)/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2} \end{aligned}$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$h(y_1,r)=\begin{cases} \frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-(r+ny_1)/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2} & 0<y_1<y_1+r<\infty \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

پس توزیع حاشیه‌ای R، برابر است با:

$$\begin{aligned} g(r) &= \int_{y_1} h(y_1,r)dy_1 \\ &= \int_0^{\infty}\frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-(r+ny_1)/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2}dy_1 \\ &= \frac{n(n-1)}{\theta^2}e^{-r/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2}\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-ny_1/\theta}dy_1}_{\frac{\theta}{n}} \\ &= \frac{(n-1)}{\theta}e^{-r/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2} \end{aligned}$$

و یا

$$g(r)=\begin{cases} \frac{n-1}{\theta}e^{-r/\theta}(1-e^{-r/\theta})^{n-2} & 0<r<\infty \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۲–۵۵. با جایگزینی در فرمول چگالی توأم داریم

$$h(y_1,r)=n(n-1)f(y_1)\ f(y_1+r)\left[\int_{y_1}^{y_1+r} f(x)dx\right]^{n-2}$$
$$=n(n-1)\times 1\times 1\times\left[\int_{y_1}^{y_1+r} 1.dx\right]^{n-2}=n(n-1)r^{n-2}$$

پس

$$h(y_1,r)=\begin{cases} n(n-1)r^{n-2} & 0<y_1<y_1+r<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و در قدم بعدی برای محاسبه‌ی چگالی R، می‌نویسیم

$$g(r)=\int_{y_1} h(y_1,r)dy_1=\int_0^{1-r} n(n-1)r^{n-2}dy_1$$
$$=n(n-1)r^{n-2}[y_1]_0^{1-r}=n(n-1)r^{n-2}(1-r)$$

در نتیجه

$$g(r)=\begin{cases} n(n-1)(1-r)r^{n-2} & 0<r<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۲–۵۶. با انتگرال‌گیری روی حاصل‌ضرب تابع چگالی و مقادیر متغیر امید ریاضی محاسبه می‌شود:

$$E(R)=\int_r r.g(r)dr=\int_0^1 r.n(n-1)(1-r)r^{n-2}dr$$
$$=n(n-1)\int_0^1 r^{n-1}(1-r)dr=n(n-1)\left[\frac{r^n}{n}-\frac{r^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$=n(n-1)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{n-1}{n+1}$$

و همچنین

$$E(R^۲)=\int_r r^۲\ g(r)dr=\int_۰^۱ n(n-۱)r^۲(۱-r)r^{n-۲}dr$$
$$=n(n-۱)\int_۰^۱(r^n-r^{n+۱})dr=n(n-۱)\left[\frac{r^{n+۱}}{n+۱}-\frac{r^{n+۲}}{n+۲}\right]_۰^۱$$
$$=n(n-۱)\left[\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n+۲}\right]=\frac{n(n-۱)}{(n+۱)(n+۲)}$$

پس واریانس برابر است با:

$$\sigma_R^۲=E[R^۲]-[E(R)]^۲=\frac{n(n-۱)}{(n+۱)(n+۲)}-\left(\frac{n-۱}{n+۱}\right)^۲=\frac{۲(n-۱)}{(n+۱)^۲(n+۲)}.$$

۲–۵۷. با توجه تابع چگالی اوّلین آماره‌ی ترتیبی

$$g_۱(y_۱)=\begin{cases} n(۱-y_۱)^{n-۱} & ۰<y_۱<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

احتمال مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$P(Y_۱\ge y_۱)=P(Y_۱\ge ۰/۲)=\int_{۰/۲}^۱ g_۱(y_۱)dy_۱$$
$$=\int_{۰/۲}^۱ n(۱-y_۱)^{n-۱}dy_۱=\int_{۰/۲}^۱ ۴(۱-y_۱)^۳\,dy_۱$$
$$=۴\left[\frac{-(۱-y_۱)^۴}{۴}\right]_{۰/۲}^{۱}=(۰/۸)^۴=۰/۴۰۹۶.$$

۲–۵۸. برای $n=۳$، براساس توزیع بزرگترین آماره‌ی ترتیبی، احتمال مورد نظر عبارت است از:

$$P(Y_n<y_n)=P(Y_n<۰/۹)=\int_۰^{۰/۹} g_n(y_n)dy_n=\int_۰^{۰/۹} ۳y_۳^۲dy_۳=۰/۷۲۹.$$

۲–۵۹.

$$
\begin{aligned}
P(R \geq ۰/۷۵) &= \int_{۰/۷۵}^{۱} g(r)dr = \int_{۰/۷۵}^{۱} n(n-۱)(۱-r)r^{n-۲}\, dr \\
&= \int_{۰/۷۵}^{۱} ۵(۵-۱)(۱-r)r^{۵-۲}\, dr = ۲۰ \int_{۰/۷۵}^{۱} (r^{۳} - r^{۴})\, dr \\
&= \Big[r^{۴}[۵-۴r]\Big]_{۰/۷۵}^{۱} = ۰/۳۶\,۷۲.
\end{aligned}
$$

حل تمرین فصل سوّم
برآورد: نظریه

۳-۱. برای $i=1,\dots,n$؛ $E(X_i)=\mu$ است، پس

$$\begin{aligned}\mu &= E(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)\\ &= a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)\\ &= a_1\mu+\cdots+a_n\mu\\ &= (a_1+\cdots+a_n)\mu\end{aligned}$$

با مقایسه دو طرف تساوی شرط $a_1+\cdots+a_n=1$ ایجاد می‌شود.

۳-۲. فرض کنیم برای $i=1,2$؛ $E(\hat{\Theta}_i)=\theta$ است، پس برای نااریب بودن برآوردگر جدید برابری $E(k_1\hat{\Theta}_1+k_2\hat{\Theta}_2)=\theta$ باید ایجاد شود:

$$\begin{aligned}\theta &= E(k_1\hat{\Theta}_1+k_2\hat{\Theta}_2)\\ &= k_1E(\hat{\Theta}_1)+k_2E(\hat{\Theta}_2)\\ &= k_1\theta+k_2\theta\\ &= (k_1+k_2)\theta\end{aligned}$$

بنابراین $k_1+k_2=1$.

۳-۳. اگر تعداد مشاهدات فرد باشد، $n=2m+1$، تابع چگالی میانه‌ی نمونه‌ای، $\tilde{X}$، برابر است با:

$$h(\tilde{x})=\frac{(2m+1)!}{m!m!}\left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x)dx\right]^m . f(\tilde{x}).\left[\int_{\tilde{x}}^{\infty} f(x)dx\right]^m,\quad -\infty<\tilde{x}<\infty$$

و همچنین توزیع یکنواخت با پارامترهای داده شده، $\alpha=\theta-\frac{1}{2}$ و $\beta=\theta+\frac{1}{2}$، عبارت است از:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta+\frac{1}{2}-\theta+\frac{1}{2}}=1 & \theta-\frac{1}{2}<x<\theta+\frac{1}{2}\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

بنابراین تابع چگالی میانه‌ی نمونه‌ای برابر است با:

$$h(\tilde{x}) = \frac{3!}{1!\ 1!}\left[\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\tilde{x}} 1.dx\right]^1 1\left[\int_{\tilde{x}}^{\theta+\frac{1}{2}} 1.dx\right]^1$$

$$= 3![x]_{\theta-\frac{1}{2}}^{\tilde{x}}[x]_{\tilde{x}}^{\theta+\frac{1}{2}}$$

$$= 6(\tilde{x}-\theta+\frac{1}{2})(\theta+\frac{1}{2}-\tilde{x})$$

میانگین توزیع یکنواخت با پارامترهای داده شده برابر است با:

$$\mu = \frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{\theta-\frac{1}{2}+\theta+\frac{1}{2}}{2} = \theta$$

پس باید نشان دهیم $E(\tilde{X})=\theta$ یا $E(\tilde{X}-\theta)=0$.

$$E(\tilde{X}-\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{x}-\theta)\ h(\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$= \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} 6(\tilde{x}-\theta)(\tilde{x}-\theta+\frac{1}{2})(\theta+\frac{1}{2}-\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 6x(x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-x)dx \qquad \tilde{x}=x+\theta$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (\frac{6x}{2}-6x^3)dx \qquad \text{تابع فرد}$$

$$= 0$$

۳-۴. مشابه‌ی تمرین ۳-۳، براساس اندازه‌ی نمونه‌ی فرد، $n=2m+1$، تابع چگالی میانه‌ی نمونه برای توزیع نمایی عبارت است از:

$$h(\tilde{x}) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{m!m!\theta} e^{-(m+1)\tilde{x}/\theta}[1-e^{-\tilde{x}/\theta}]^m & \tilde{x}>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

با $n=3$، داریم $m=1$، و برای $\tilde{x}>0$ مقدار تابع چگالی مربوطه برابر است با:

$$h(\tilde{x}) = \frac{3!}{\theta}e^{-(1+1)\tilde{x}/\theta}(1-e^{-\tilde{x}/\theta}) = \frac{6}{\theta}e^{-2\tilde{x}/\theta}(1-e^{-\tilde{x}/\theta}).$$

از روی مقدار $E(\frac{\tilde{X}}{\theta})$ نشان می‌دهیم میانه نمونه‌ای برای θ، اریب است.

$$E\left(\frac{\tilde{X}}{\theta}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\tilde{x}}{\theta}\right)h(\tilde{x})\,d\tilde{x}$$
$$= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{x}}{\theta}\right)\frac{6}{\theta}e^{-2\tilde{x}/\theta}(1-e^{-\tilde{x}/\theta})d\tilde{x}$$
$$= 6\left\{\int_{0}^{\infty} ye^{-2y}(1-e^{-y})dy\right\} \qquad y=\frac{\tilde{x}}{\theta}$$
$$= 6(\underbrace{\int_{0}^{\infty} ye^{-2y}dy}_{=\frac{1}{4}} - \underbrace{\int_{0}^{\infty} ye^{-3y}dy}_{=\frac{1}{9}}) \qquad \int_{0}^{\infty} ye^{-ky}dy=\frac{1}{k^2}$$
$$= \frac{5}{6} \neq 1$$
$$E(\tilde{X}) = \frac{5}{6}\theta \neq \theta$$

۳-۵.

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}n\sigma^2 = \sigma^2.$$

۳-۶. با توجه به $E(\overline{X})=\mu$، $\mathrm{var}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ و رابطه‌ی $\mathrm{var}(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-[E(\overline{X})]^2$، می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} E(\overline{X}^2) = \lim_{n\to\infty}[\mathrm{var}(\overline{X})-(E(\overline{X}))^2] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right] = \mu^2$$

پس $\overline{X}^2$ مجانباً برای μ^2 ناااریب است.

۳-۷. در توزیع دوجمله‌ای $\mu=E(X)=n\theta$، پس

$$E\left(\frac{X+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}(E(X)+1) = \frac{1}{n+2}(n\theta+1) \neq \theta.$$

در حالت حدّی،

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{X+1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\theta+1}{n+2} = \theta$$

که نمایانگر نااریبی مجانبی $\frac{X+1}{n+2}$ برای θ است.

۳-۸. در توزیع نرمال $E(X)=\mu=0$، و $\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$، پس

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\operatorname{var}(X_i)+\underbrace{E^2(X_i)}_{=0}] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{1}{n}.n\sigma^2=\sigma^2. \end{aligned}$$

۳-۹. برای $x=0,1,\dots,n$، تابع چگالی توزیع دوجمله‌ای برابر است با: $b(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$، در نتیجه $E(X)=n\theta$ و $\operatorname{var}(X)=n\theta(1-\theta)$، و لذا

$$E(X^2)=\operatorname{var}(X)+E^2(X)=n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E\left(n\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)\right) &= n\left(E\left(\frac{X}{n}\right)-E\left(\frac{X}{n}\right)^2\right) \\ &= n\left(\theta-\frac{1}{n^2}(n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2)\right) \\ &= n\theta-\theta(1-\theta)-n\theta^2 \\ &= (n-1)\theta(1-\theta)\neq n\theta(1-\theta). \end{aligned}$$

برآوردگر $n.\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})$، برآوردگری اریب برای $n\theta(1-\theta)$ است. توجه می‌شود، اریبی به‌طور مجانبی قابل برطرف شدن نیست.

۳-۱۰. از روی عناصر جامعه می‌توان دریافت که $f(y_n)=0;\ \ y_n<n$ ، همچنین احتمال آنکه بزرگترین آماره‌ی ترتیبی مقداری مانند y_n را بگیرد یعنی در نمونه‌ی گرفته شده باید $n-1$تا از عناصر نمونه از y_n کوچکتر باشند،

$$f(y_n)=\frac{\binom{y_n-۱}{n-۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{k}{n}}=\frac{\binom{y_n-۱}{n-۱}}{\binom{k}{n}};\quad y_n=n,\dots,k$$

(یادآوری: $\binom{k}{m}=\sum_{x=m}^{k}\binom{x-۱}{m-۱}\binom{۱}{۱}$)

برای نشان دادن $\frac{n+۱}{n}.E(Y_n)-۱=k$، باید مقدار $E(Y_n)$ را محاسبه کنیم.

$$E(Y_n)=\sum_{y=n}^{k}y\,f(y)=\sum_{y=n}^{k}y\frac{\binom{y-۱}{n-۱}}{\binom{k}{n}}$$

$$=\frac{۱}{\binom{k}{n}}\sum_{y=n}^{k}y\frac{(y-۱)!}{(n-۱)!(y-n)!}=\frac{n}{\binom{k}{n}}\sum_{y=n}^{k}\frac{y!}{n!(y-n)!}$$

$$=\frac{n}{\binom{k}{n}}\sum_{y=n}^{k}\binom{y}{n}=\frac{n}{\binom{k}{n}}\underbrace{\sum_{x=n+۱}^{k+۱}\binom{x-۱}{n}}_{=\binom{k+۱}{n+۱}}$$

$$=\frac{n}{\binom{k}{n}}\binom{k+۱}{n+۱}=\frac{n(k+۱)}{n+۱}$$

پس $E(Y_n)=\frac{n(k+۱)}{n+۱}$ در نتیجه $\frac{n+۱}{n}E(Y_n)=k+۱$، و در آخر $\frac{n+۱}{n}.E(Y_n)-۱=k$.

۳-۱۱. $E(\hat{\theta})=\theta$ و

$$\text{var}(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}^۲)-E^۲(\hat{\theta})$$

$$E(\hat{\theta}^۲)=\text{var}(\hat{\theta})+E^۲(\hat{\theta})$$

$$E(\hat{\theta}^۲)>E^۲(\hat{\theta})=\theta^۲$$

بنابراین $E(\hat{\theta}^۲)\neq\theta^۲$ پس $\hat{\theta}^۲$ نمی‌تواند برآوردگر ناااریبی برای $\theta^۲$ باشد.

۳-۱۲. بنابر توزیع دوجمله‌ای $E(X)=n\theta$ و $\text{var}(X)=n\theta(۱-\theta)$ است. پس

$$E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}n\theta=\theta$$

پس $\frac{X}{n}$ یک برآوردگر نااریب برای θ است. برای گفتن اینکه این برآوردگر دارای کمترین واریانس باشد، برای یک مشاهده از توزیع دوجمله‌ای، نشان می‌دهیم:

$$\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{E[(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial\theta})^2]}$$

برای طرف چپ عبارت فوق، داریم:

$$\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\operatorname{var}(X)=\frac{n\theta(1-\theta)}{n^2}=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

و برای طرف دیگر:

$$\ln f(x)=\ln\left[\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta^{n-x})\right]$$

$$=\ln\binom{n}{x}+x\ln\theta+(n-x)\ln(1-\theta)$$

با مشتق‌گیری نسبت به پارامتر،

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial\theta}=\frac{x}{\theta}-\frac{n-x}{1-\theta}=\frac{x(1-\theta)-\theta(n-x)}{\theta(1-\theta)}=\frac{x-n\theta}{\theta(1-\theta)}$$

و لذا

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial\theta}\right)^2\right]=E\left[\left(\frac{X-n\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2\right]=\frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}E[(X-n\theta)^2]$$

$$=\frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}E[(X-E(X))^2]=\frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}\operatorname{var}(X)$$

$$=\frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}n\theta(1-\theta)=\frac{n}{\theta(1-\theta)}.$$

برابری دو طرف

$$\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}=\frac{1}{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}=\frac{1}{E[(\frac{\partial \ln f(x)}{\partial\theta})^2]}.$$

۳-۱۳. درتوزیع پواسن، $P(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x=0,1,\ldots$، مقدار امید ریاضی با پارامتر $E(X)=\mu=\lambda$ یکی است همچنین $\operatorname{var}(X)=\lambda$، بنابراین

$$E(\overline{X})=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda=\frac{1}{n}.n\lambda=\lambda.$$

براساس یک نمونه‌ی تصادفی nتایی کمترین مقدار واریانس هر برآوردکننده را محاسبه می‌کنیم:

$$\ln f(x)=\ln P(x;\lambda)=\ln\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$=x\ln\lambda-\lambda\underbrace{\ln e}_{=1}-\ln x!=x\ln\lambda-\lambda-\ln x!$$

در نتیجه

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial\lambda}=\frac{x}{\lambda}-1$$

با تغییر مقدار x به متغیر تصادفی داریم:

$$n.E[(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial\lambda})^2]=n.E[(\frac{X}{\lambda}-1)^2]=n.E[(\frac{X-\lambda}{\lambda})^2]$$
$$=n\frac{1}{\lambda^2}E[(X-\lambda)^2]=n\frac{1}{\lambda^2}\operatorname{var}(X)$$
$$=n\frac{1}{\lambda^2}\lambda=\frac{n}{\lambda}$$

از طرفی

$$\operatorname{var}(\overline{X})=\frac{\operatorname{var}(X)}{n}=\frac{\lambda}{n}$$

پس $\overline{X}$ یک برآوردکننده‌ی نااریب با کمترین واریانس برای λ است.

۳-۱۴. محدودیت‌ها را از روی خواص امید ریاضی و نااریبی می‌سازیم: بنابر نااریبی هریک از دو برآوردگر $E(\hat{\theta}_1)=\theta=E(\hat{\theta}_2)$، و در نتیجه از اینکه $E(a_1\hat{\theta}_1+a_2\hat{\theta}_2)=\theta$ است پس $a_1+a_2=1$. حال با توجه به این محدودیت و با استفاده از قاعده‌ی لاگرانژ ، دو کمیتی که $\operatorname{var}(a_1\hat{\theta}_1+a_2\hat{\theta}_2)$ را کمترین مقدار می‌سازنند را می‌یابیم.

$$L(a_1,a_2,\lambda)=\operatorname{var}(a_1\hat{\theta}_1+a_2\hat{\theta}_2)-\lambda(a_1+a_2-1)$$
$$=a_1^2\operatorname{var}(\hat{\theta}_1)+a_2^2\operatorname{var}(\hat{\theta}_2)-\lambda(a_1+a_2-1)$$

با مشتق‌گیری از L نسبت به a_1، a_2 و λ و برابر صفر قراردادن آن به دستگاه زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial a_1}=2a_1\,\mathrm{var}(\hat\theta_1)-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial a_2}=2a_2\,\mathrm{var}(\hat\theta_2)-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-a-a_2+1=0\end{cases}\xrightarrow{\mathrm{var}(\hat\theta_1)=3\,\mathrm{var}(\hat\theta_2)}\begin{cases}2a_1\left(3\,\mathrm{var}(\hat\theta_2)\right)=\lambda\\ 2a_2\,\mathrm{var}(\hat\theta_2)=\lambda\\ a+a_2=1\end{cases}$$

پس از ساده کردن برخی فاکتورها، دستگاه فوق به دستگاه دو متغیره‌ی زیر مبدل می-شود.

$$\begin{cases}6a_1=2a_2\\ a_1+a_2=1\end{cases}$$

$$a_1=\frac{1}{4},\ a_2=\frac{3}{4}$$

۳-۱۵. در توزیع نمایی به‌ازای $x>0$، مقدار تابع چگالی برابر با $f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ است و همچنین $E(X)=\mu=\theta$ و $\mathrm{var}(X)=\theta^2$. پس

$$E(\bar X)=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}.n\theta=\theta$$

و

$$\mathrm{var}(\bar X)=\mathrm{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{\mathrm{var}(X)}{n}=\frac{\theta^2}{n}$$

مشابه‌ی تمرین‌های قبلی

$$\ln f(x)=\ln\left(\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\right)=\frac{-x}{\theta}\ln\frac{1}{\theta}=-\frac{x}{\theta}=-\frac{x}{\theta}-\ln\theta$$

با مشتق‌گیری

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial\theta}=\frac{x}{\theta^2}-\frac{1}{\theta}=\frac{x-\theta}{\theta^2}$$

و

$$n.E[(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial\theta})^۲] = n.E[(\frac{X-\theta}{\theta^۲})^۲]$$
$$= \frac{n}{\theta^۴}E[(X-\theta)^۲] = \frac{n}{\theta^۴}E[(X-\mu)^۲]$$
$$= \frac{n}{\theta^۴}\operatorname{var}(X) = \frac{n}{\theta^۴}\theta^۲ = \frac{n}{\theta^۲}$$
$$= \frac{۱}{\operatorname{var}(\bar{X})}.$$

۳-۱۶. در مثال ۳-۳، تابع چگالی بزرگترین آماره‌ی ترتیبی عبارت است از:

$$g_n(y_n) = \begin{cases} \frac{n}{\beta^n}.y_n^{n-۱} & ۰ < y_n < \beta \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و نشان داده شد که $E[\frac{n+۱}{n}Y_n] = \beta$، یعنی $\frac{n+۱}{n}Y_n$ برای β نااریب است.

$$\ln f(x) = \ln g_n(y_n) = \ln[\frac{n}{\beta^n}.y_n^{n-۱}]$$
$$= \ln n - \ln\beta^n + (n-۱)\ln y_n$$

و

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial\beta} = \frac{-n}{\beta}$$

پس

$$\frac{۱}{nE[(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial\beta})^۲]} = \frac{۱}{nE(\frac{n^۲}{\beta^۲})} = \frac{۱}{\frac{n^۳}{\beta^۲}} = \frac{\beta^۲}{n^۳}$$

برای به‌دست آوردن واریانس بزرگترین آماره‌ی ترتیبی به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$E(Y_n^۲) = \int_۰^\beta y_n^۲.\frac{n}{\beta^n}.y_n^{n-۱}dy_n = \frac{n}{\beta^n}\int_۰^\beta y_n^{n+۱}dy_n$$
$$= \frac{n}{\beta^n}\left[\frac{۱}{n+۲}.y_n^{n+۲}\right]_۰^\beta = \frac{n}{\beta^n}.\frac{\beta^{n+۲}}{n+۱} = \frac{n\beta^۲}{n+۱}$$

و $E(Y_n) = \frac{n}{n+۱}\beta$،

$$\mathrm{var}\left(\frac{n+1}{n}.Y_n\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathrm{var}(Y_n)$$
$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 [E(Y_n^2)-E^2(Y_n)]$$
$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left[\frac{n}{n+1}\beta^2-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\beta^2\right]$$
$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)\beta^2(1-\frac{n}{n+1})=\frac{\beta^2}{n}\neq\frac{\beta^n}{n^3}.$$

۳–۱۷. الف) چون $E(\overline{X}_1)=E(\overline{X}_2)=\mu$، پس

$$E[w\overline{X}_1+(1-w)\overline{X}_2]=wE(\overline{X}_1)+(1-w)E(\overline{X}_2)$$
$$=w\mu+(1-w)\mu=\mu$$

برآوردگر $w\overline{X}_1+(1-w)\overline{X}_2$ ناریب برای μ است.

ب) برای $i=1,2$، $\mathrm{var}(\overline{X}_i)=\frac{\sigma_i^2}{n}$، استقلال دو جامعه

$$\mathrm{var}(w\overline{X}_1+(1-w)\overline{X}_2)=w^2.\mathrm{var}(\overline{X}_1)+(1-w)^2.\mathrm{var}(\overline{X}_2)$$
$$=w^2.\frac{\sigma_1^2}{n}+(1-w)^2.\frac{\sigma_2^2}{n}=f(w)$$

برای یافتن مقدار کمترین در تابع فوق

$$0=f'(w)=2w.\frac{\sigma_1^2}{n}-2(1-w)\frac{\sigma_2^2}{n}$$

به معادله‌ی $2w\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}\right)=\frac{2\sigma_2^2}{n}$ می‌رسیم که با حل آن به جواب زیر را داریم.

$$w=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

با مشتق دوم می‌توان پی برد که جواب فوق تابع مذکور را مینمم می‌سازد.

$$f''(\omega)=\tfrac{2}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)>0.$$

۳–۱۸. تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\theta}_1=\tfrac{1}{2}\overline{X}_1+\tfrac{1}{2}\overline{X}_2$$

$$\hat{\theta}_2 = w\overline{X}_1 + (1-w)\overline{X}_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\overline{X}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\overline{X}_2$$

هر دو برآوردگر نااریب هستند ولی مطابق با تمرین قبل واریانس $\hat{\theta}_2$ کمتر از واریانس $\hat{\theta}_1$ است. پس مقدار کارآیی نسبت $\frac{\mathrm{var}(\hat{\theta}_1)}{\mathrm{var}(\hat{\theta}_2)}$ را تشکیل می‌دهد. حال هر جزء این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\hat{\theta}_2) &= \mathrm{var}\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\overline{X}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\overline{X}_2\right) \\
&= \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 . \frac{\sigma_1^2}{n} + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 . \frac{\sigma_2^2}{n} \\
&= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\hat{\theta}_2) &= \mathrm{var}\left(\frac{1}{2}\overline{X}_1 + \frac{1}{2}\overline{X}_2\right) = \frac{1}{4}[\mathrm{var}(\overline{X}_1) + \mathrm{var}(\overline{X}_2)] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right] = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{4n}
\end{aligned}$$

و در آخر

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{\theta}_2)}{\mathrm{var}(\hat{\theta}_1)} = \frac{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{4n}} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}.$$

۳-۱۹. مشابه‌ی تمرین ۳-۱۷، حل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(w\overline{X}_1 + (1-w)\overline{X}_2) &= w^2.\mathrm{var}(\overline{X}_1) + (1-w)^2.\mathrm{var}(\overline{X}_2) \\
&= w^2.\frac{\sigma^2}{n} + (1-w)^2.\frac{\sigma^2}{n} = f(w)
\end{aligned}$$

و لذا

$$\circ = f'(w) = ۲w\frac{\sigma^۲}{n_۱} - ۲(۱-w)\frac{\sigma^۲}{n_۲}$$

جواب معادله‌ی فوق برابر با $\omega = \frac{۱}{n_۲}.\left(\frac{n_۱n_۲}{n_۱+n_۲}\right) = \frac{n_۱}{n_۱+n_۲}$ می‌شود. بر بررسی اینکه این جواب تابع فوق را مینیمم می‌کند، به مشتق دوم رجوع می‌کنیم.

$$f''(\omega) = ۲\sigma^۲(\tfrac{۱}{n_۱} + \tfrac{۱}{n_۲}) > \circ.$$

۳-۲۰. مشابه تمرین ۳-۱۹، به‌ازای $w = \frac{۱}{۲}$،

$$\operatorname{var}(\tfrac{۱}{۲}\overline{X}_۱ + \tfrac{۱}{۲}\overline{X}_۲) = \tfrac{۱}{۴}\operatorname{var}(\overline{X}_۱) + \tfrac{۱}{۴}\operatorname{var}(\overline{X}_۲)$$
$$= \frac{۱}{۴}.\frac{\sigma^۲}{n_۱} + \frac{۱}{۴}.\frac{\sigma^۲}{n_۲} = \frac{\sigma^۲}{۴}\left(\frac{n_۱+n_۲}{n_۱n_۲}\right)$$

و به‌ازای $w = \frac{n_۱}{n_۱+n_۲}$،

$$\operatorname{var}(w\overline{X}_۱ + (۱-w)\overline{X}_۲) = w^۲\operatorname{var}(\overline{X}_۱) + (۱-w)^۲\operatorname{var}(\overline{X}_۲)$$
$$= \left(\frac{n_۱}{n_۱+n_۲}\right)^۲.\frac{\sigma^۲}{n_۱} + \left(۱-\frac{n_۱}{n_۱+n_۲}\right)^۲.\frac{\sigma^۲}{n_۲}$$
$$= \left(\frac{n_۱}{n_۱+n_۲}\right)^۲.\frac{\sigma^۲}{n_۱} + \left(\frac{n_۲}{n_۱+n_۲}\right)^۲.\frac{\sigma^۲}{n_۲}$$
$$= \frac{\sigma^۲}{(n_۱+n_۲)^۲}.\left(\frac{n_۱^۲}{n_۱} + \frac{n_۲^۲}{n_۲}\right)$$
$$= \frac{\sigma^۲}{(n_۱+n_۲)^۲} + (n_۱+n_۲) = \frac{\sigma^۲}{\sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲}$$

پس کارآیی دو برآوردگر نسبت به هم عبارتند از:

$$\frac{\operatorname{var}(w\overline{X}_۱ + (۱-w)\overline{X}_۲)}{\operatorname{var}(\frac{۱}{۲}.\overline{X}_۱ + \frac{۱}{۲}.\overline{X}_۲)} = \frac{\frac{\sigma^۲}{n_۱+n_۲}}{\frac{(n_۱+n_۲)\sigma^۲}{۴n_۱n_۲}} = \frac{۴n_۱n_۲}{(n_۱+n_۲)^۲}.$$

۳-۲۱.

$$\begin{aligned}E[(\hat{\Theta}-\theta)^{۲}] &= E[(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta})+E(\hat{\Theta})-\theta)^{۲}]\\ &= E\left[(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta}))^{۲}\right]+E\left[(E(\hat{\Theta})-\theta)^{۲}\right]\\ &\quad +۲E\left[(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta}))(E(\hat{\Theta})-\theta)\right]\\ &= E\left[(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta}))^{۲}\right]+(E(\hat{\Theta})-\theta)^{۲}\\ &\quad +۲(E(\hat{\Theta})-\theta)\underbrace{E\left[(\hat{\Theta}-E(\hat{\Theta}))\right]}_{=۰}\\ &= \operatorname{var}(\hat{\Theta})+b^{۲}(\hat{\Theta}).\end{aligned}$$

۳-۲۲. $\omega=\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲+\sigma_۲^۲}=\frac{۹}{۴+۹}=۰/۶۹$، پس مقدار برآورد μ برابر است با:

$$\begin{aligned}۰/۶۹\bar{x}_۱+(۱-۰/۶۹)\bar{x}_۲ &= (۰/۶۹)(۲۶)+(۰/۳۱)(۳۲/۵)\\ &= ۱۷/۹۶+۱۰/۰۷۵=۲۸/۰۱۵\cong ۲۸.\end{aligned}$$

۳-۲۳. توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(\alpha,\alpha+۱)$،

$$f(x)=\begin{cases}۱ & \alpha<x<\alpha+۱\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

و در نتیجه تابع چگالی اوّلین آماره‌ی ترتیبی عبارت است از

$$\begin{aligned}g(y) &= \frac{n!}{(۱-۱)!(n-۱)!}\left[\int_{-\infty}^{y}f(x)dx\right]^{۱-۱}f(y)\left[\int_{y}^{+\infty}f(x)dx\right]^{n-۱}\\ &= n.۱.\left[\int_{y}^{\alpha+۱}۱dx\right]^{n-۱}=n(\alpha+۱-y)^{n-۱}, \qquad \alpha<y<\alpha+۱\end{aligned}$$

بنابه تعریف سازگاری باید نشان دهیم:

$$\forall c>۰ \qquad \lim_{n\to+\infty}P(|Y_۱-\alpha|>c)=۰.$$

از روی توزیع اوّلین آماره‌ی ترتیبی، برای اینکه احتمال فوق مقداری مثبت باشد، محدوده‌ی تغییرات c، نمی‌تواند کلیه‌ی مقادیر مثبت باشد.

$$\begin{gathered}\alpha<Y_۱<\alpha+۱\\ ۰<Y_۱-\alpha<۱\\ ۰<c<۱\end{gathered}$$

بدیهی است برای $c > 1$، مقدار احتمال فوق صفر است.

پس با فرض $0 < c < 1$، حل تمرین را دنبال می‌کنیم:

$$\begin{aligned}P(|Y_1-\alpha|>c) &= 1-P(-c<Y_1-\alpha<c)\\ &= 1-P(0<Y_1-\alpha<c)\\ &= 1-P(\alpha<Y_1<c+\alpha)\\ &= 1-\int_{\alpha}^{c+\alpha} n(\alpha+1-y)^{n-1}dy\\ &= 1-\left(-(\alpha+1-y)^n\right]_{\alpha}^{c+\alpha}\\ &= 1-\left(-[1-c]^n+1\right)=[1-c]^n\end{aligned}$$

پس

$$\forall\, 0<c<1 \qquad \lim_{n\to+\infty} P(|Y_1-\alpha|>c)=\lim_{n\to+\infty}[1-c]^n=0$$

بنابراین اوّلین آماره‌ی ترتیبی برای α سازگار است.

۳–۲۴. در توزیع نمایی $E(X)=\theta$، و در نتیجه $E(\overline{X})=\theta$. پس میانگین نمونه‌ای یک برآوردکننده‌ی نااریب برای θ است. بنابه قضیه‌ی ۳–۳، اگر واریانس میانگین نمونه‌ای، به‌ازای nهای بزرگ، به سمت صفر میل کند نتیجه حاصل می‌شود.

$$\operatorname{var}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\theta^2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta^2}{n}=0$$

۳–۲۵. مسئله از روی قضیه‌ی ۳–۴، حل می شود. بنابه تابع چگالی متغیر تصادفی X، که دارای توزیع نمایی است،

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x>0,\theta>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

چگالی توأم نمونه‌ی تصادفی عبارت است از

.۱. $$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{n\hat{X}}{\theta}}$$

با تعریف $g(\bar{x},\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}}$، $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$، تابع چگالی نمونه‌ی تصادفی به صورت زیر خواهد شد.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g(\bar{x},\theta).h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

بنابراین آماره‌ی $\bar{X}$، برای θ بسنده است.

۳-۲۶. بنابر مستقل بودن دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 و توزیع هریک که $X_1\sim B(n_1,\theta)$ و $X_2\sim B(n_2,\theta)$ است، چگالی توأم این دو متغیر تصادفی برابر می-شود با:

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=f(x_1).f(x_2)\\&=\binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2}\theta^{x_1+x_2}(1-\theta)^{n_1+n_2-(x_1+x_2)}\\&=\binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2}\theta^{n_1+n_2(\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2})}(1-\theta)^{n_1+n_2(1-\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2})}\\&=h(x_1,x_2).g\left(\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2},\theta\right)\end{aligned}$$

در نتیجه $\frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$ یک آماره‌ی بسنده برای θ است.

۳-۲۷. فرض کنید X_1 و X_2 نمونه‌ی تصادفی از توزیع پوآسن باشد.

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=f(x_1).f(x_2)=\frac{1}{x_1!x_2!}.\lambda^{x_1+x_2}.e^{-2\lambda}\\&=\frac{1}{x_1!x_2!}\lambda^{2(\frac{x_1+x_2}{2})}e^{-2\lambda}=\frac{1}{x_1!x_2!}\lambda^{2\bar{x}}.e^{-2\lambda}\\&=h(x_1,x_2)\ \ g(\bar{x},\lambda)\end{aligned}$$

در نتیجه $\bar{X}$ یک آماره‌ی بسنده برای λ است.

۳–۲۸. کافیست یک مثال نقص بیاوریم تا خاصیت بسندگی برقرار نباشد.

$$P(X_1=1,X_2=0,X_3=1\mid Y=2)=\frac{P(X_1=1,X_2=0,X_3=1,Y=2)}{P(Y=2)}$$
$$=\frac{P(X_1=1,X_2=0,X_3=1)}{P(X_1=1,X_2=0,X_3=1)+P(X_1=0,X_2=1,X_3=1)}$$
$$=\frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)+\theta(1-\theta)^2}=\frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta(1-\theta)[\theta+1-\theta]}=\theta$$

در نتیجه، آماره‌ی $Y=X_1+2X_2+X_3$، یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر مجهول جامعه نیست.

۳–۲۹. اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه فرمول تابع چگالی به صورت زیر خواهد شد

$$f(x_i;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}\ ;\qquad x\in R$$

بنابر یک نمونه‌ی تصادفی از همین توزیع، فرم تابع چگالی توأم نمونه‌ی تصادفی برابر است با

$$f(x_1,x_2,\dots,x;\mu,\sigma^2)=f(x_1).f(x_2)\dots f(x_n)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$
$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sigma^n}\exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]\right)\right).(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$$
$$=g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,\sigma^2\right).h(x_1,\dots,x_n)$$

بنابراین آماره‌ی $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ برای σ^2 بسنده است.

۳-۳۰. برای k پارامتر مجهول جامعه، در روش گشتاورها، برآوردیاب‌ها از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آیند.

$$m'_i=\mu'_i\,,\qquad i=1,2,\ldots,k$$

در این تمرین، خانواده‌ی نرمال با دو پارامتر مجهول μ و σ^2 مطرح است، پس دستگاه به‌صورت زیر می‌شود.

$$\begin{cases} m'_1=\mu'_1 \\ m'_2=\mu'_2 \end{cases}$$

چون $m'_2=\mu^2+\sigma$ ، $m'_1=\mu$ ، $m'_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ و $m'_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x^2}$، پس جواب معادله برابر است با:

$$\hat{\mu}=\bar{x}\,,\quad \hat{\sigma}^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

به‌عبارت دیگر $\bar{X}$ و $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ برآوردکننده‌های گشتاوری به‌ترتیب برای μ و σ^2 است.

۳-۳۱. در توزیع نمایی با پارامتر θ، فقط یک پارامتر مجهول داریم، پس می‌توان از معادله‌ی $m_1=\mu'_1$، استفاده کرد. چون $m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ و $\mu'_1=E(X)=\theta$ است پس برآورد گشتاوری θ، $\bar{X}$ می‌باشد.

۳-۳۲. بر اساس توزیع متغیر تصادفی X، تابع چگالی به‌صورت زیر است

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

با جایگذاری $\alpha=0$،

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta} & 0<x<\beta \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

فقط یک پارامتر مجهول مطرح است پس معادله‌ی مورد نیاز به‌صورت $m'_1=\mu'_1$، با مقدار معلوم $m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$ و مقدار مجهول $E(X)=\mu'_1=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\beta}{2}$، دارای جواب

$$m'_1=\mu'_1$$
$$\bar{x}=\frac{\beta}{2}$$
$$\hat{\beta}=2\bar{x}$$

است. در نتیجه برآوردگر β به‌روش گشتاوری $2\bar{X}$ می‌باشد.

۳–۳۳. اگر X دارای توزیع پوآسن با پارامتر λ، باشد آنگاه

$$P(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\qquad x=0,1,2,\ldots$$

در این توزیع با یک پارامتر مجهول، نیاز به داشتن یک معادله، $m'_1=\mu'_1$، است. از آنجا که $\mu'_1=\lambda$ در نتیجه $m'_1=\lambda$، پس برآورد λ، برابر است با $\hat{\lambda}=m'_1$. با جایگذاری $m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$، برآوردکننده‌ی λ، $\bar{X}$ می‌باشد.

۳–۳۴. ابتدا گشتاور اوّل را از روی تابع چگالی به‌دست می‌آوریم.

$$\mu'_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx=\int_0^{\theta}x\,\frac{2(\theta-x)}{\theta^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\theta}\left(\frac{2x}{\theta}-\frac{2x^2}{\theta^2}\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2\theta}-\frac{x^3}{3\theta^2}\right]_0^{\theta}$$
$$=\theta-\frac{2}{3}\theta=(1-\frac{2}{3})\theta=\frac{\theta}{3}$$

پس با معادله‌ی $m'_1=\mu'_1$، داریم $m'_1=\frac{\theta}{3}$، در نتیجه $\hat{\theta}=3m'_1=3\bar{x}$. بنابراین برآوردکننده‌ی θ به‌روش گشتاوری $3\bar{X}$ است.

۳–۳۵. فرض کنید X_1، X_2، …، X_N دارای توزیع

$$b(x;3,\theta)=\binom{3}{x}\theta^x(1-\theta)^{3-x}\quad,\quad x=0,1,2,3$$

با میانگین $\mu_1' = n\theta = 3\theta$ است. از طرفی

x	0	1	2	3	جمع
تعداد	n_0	n_1	n_2	n_3	N
$x_i n_i$	$0n_0$	$1n_1$	$2n_2$	$3n_3$	$0n_0 + 1n_1 + 2n_2 + 3n_3$

$$m_1' = \bar{x} = \frac{0n_0 + 1n_1 + 2n_2 + 3n_3}{N}$$

با حل معادله‌ی $m_1' = \mu_1'$، جواب

$$\hat{\theta} = \frac{m_1'}{3} = \frac{n_1 + 2n_2 + 3n_3}{3N}$$

به‌دست می‌آید.

۳-۳۶. n نمونه‌ی تصادفی مستقل از توزیع

$$P(x_i;\lambda) = \frac{\lambda^{x-i} e^{-\lambda}}{x_i!} \quad , \quad x_i = 0,1,2,\ldots$$

را در نظر می‌گیریم.

$$L(\lambda) = \ln(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$$

با مشتق‌گیری نسبت به λ، و برابری آن با صفر، و حل آن

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = n(\frac{-1}{\lambda^2}\bar{x}) < 0$$

نشان داده شد که برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم برای λ، آماره‌ی $\overline{X}$ است.

۳-۳۷. در اینجا فقط یک پارامتر مجهول، $\sigma^2 = \theta$، داریم.

$$L(\sigma^{۲}) = L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta}} e^{-\frac{۱}{۲\theta}(x_i-\mu)^{۲}}$$
$$= (۲\pi\theta)^{-\frac{n}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲\theta}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^{۲}}$$

قرار دهید $s^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu)^{۲}$، سپس مشتق نسبت به پارامتری مجهول از لگاریتم تابع فوق، را مساوی صفر قراردهید.

$$LnL(\theta) = -\frac{n}{۲}\ln(۲\pi) - \frac{n}{۲}\ln(\theta) - \frac{ns^{۲}}{۲\theta}$$
$$\frac{\partial LnL(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{۲\theta} + \frac{ns^{۲}}{۲\theta^{۲}} = \frac{n}{۲}\left(\frac{-۱}{\theta} + \frac{s^{۲}}{\theta^{۲}}\right) = ۰ \to \hat{\theta} = \hat{\sigma}^{۲} = s^{۲}$$
$$\frac{\partial^{۲} LnL(\theta)}{\partial\theta^{۲}} = \frac{n}{۲}\left(\frac{۲}{\theta^{۲}} - \frac{۳s^{۲}}{\theta^{۳}}\right) = \frac{n}{۲}\frac{۱}{\theta^{۳}}\left(۲\theta - ۳s^{۲}\right)\Big|_{\theta=s^{۲}} < ۰$$

۳-۳۸. V_iها و W_iها از هم مستقل‌اند پس

$$L(\alpha,\beta) = f(v_۱,\ldots,v_n,w_۱,\ldots,w_n)$$
$$= f(v_۱,\ldots,v_n).f(w_۱,\ldots,w_n)$$
$$= \prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}(v_i-\mu_۱)^{۲}} \prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}(w_i-\mu_۲)^{۲}}$$
$$= (۲\pi)^{n}\exp(-\tfrac{۱}{۲}\textstyle\sum_{i=۱}^{n}[(v_i-\mu_۱)^{۲} + (w_i-\mu_۲)^{۲}])$$
$$= (۲\pi)^{n}\exp(-\tfrac{۱}{۲}\textstyle\sum_{i=۱}^{n}[(v_i-[\alpha+\beta])^{۲} + (w_i-[\alpha-\beta])^{۲}])$$

و

$$l(\alpha,\beta) = \ln(L(\alpha,\beta))$$
$$= -n\ln(\sqrt{۲\pi}) - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}[(v_i-\alpha-\beta)^{۲} + (w_i-\alpha+\beta)^{۲}]$$

با مشتق‌گیری نسبت به دو پارامتر مجهول

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(l(\alpha.\beta))}{\partial\alpha}=\dfrac{-1}{2}\sum_{i=1}^{n}-2[v_i-\alpha-\beta+w_i-\alpha+\beta]=0\\ \dfrac{\partial(l(\alpha.\beta))}{\partial\beta}=\dfrac{-1}{2}\sum_{i=1}^{n}[-2(v_i-\alpha-\beta)+2(w_i-\alpha+\beta)]=0\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\begin{cases}\bar{v}-2\alpha+\bar{w}=0\\ \bar{v}-\bar{w}-2\beta=0\end{cases}}$$

$$\hat{\alpha}=\frac{\bar{v}+\bar{w}}{2},\quad \hat{\beta}=\frac{\bar{v}-\bar{w}}{2}$$

برآوردگر درستنمایی ماکسیمم α و β به‌ترتیب عبارتند از $\frac{\bar{V}+\bar{W}}{2}$ و $\frac{\bar{V}-\bar{W}}{2}$ است.

۳-۳۹.

$$\begin{aligned}L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)&=f(v_1,\ldots,v_{n_1},w_1,\ldots,w_{n_2})\\&=f(v_1,v_2,\ldots,v_{n_1}).f(w_1,w_2,\ldots,w_{n_2})\\&=\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{-n_1}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\mu_1)^2]}\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{-n_2}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\mu_2)^2]}\\&=\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{-1}{2}(n_1+n_2)}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\mu_2)^2]}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}l(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=&\frac{-1}{2}(n_1+n_2)\{\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\}\\&-\frac{1}{2\sigma^2}[\textstyle\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\mu_2)^2]\end{aligned}$$

مشتق‌گیری نسبت به سه پارامتر را انجام می‌دهیم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(l(\mu_1,\mu_2,\sigma^2))}{\partial\mu_1}=\dfrac{2}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\mu_1)=0\\ \dfrac{\partial(l(\mu_1,\mu_2,\sigma^2))}{\partial\mu_2}=\dfrac{2}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\mu_2)=0\\ \dfrac{\partial(l(\mu_1,\mu_2,\sigma^2))}{\partial\sigma^2}=(\dfrac{n_1+n_2}{2}).\dfrac{-1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}[\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\mu_2)^2]=0\end{cases}$$

از حل دو معادله‌ی اوّلی، برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم برای میانگین‌های دو جامعه به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\mu_1)=0\\ \sum_{i=1}^{n_2}(v_i-\mu_2)=0\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}\hat{\mu}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}v_i=\bar{v}\\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}w_i=\bar{w}\end{cases}$$

جواب‌های فوق را در معادله‌ی سوم قرار می‌دهیم.

$$-(n_1+n_2)\sigma^2=[\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\bar{v})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\bar{w})^2]$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_1+n_2}(\underbrace{\sum_{i=1}^{n_1}(v_i-\bar{v})^2}_{n_1S_1^2}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n_2}(w_i-\bar{w})^2}_{n_2S_2^2})$$

$$=\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2}.$$

۳-۴۰. تابع نشانگر I، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

تابع چگالی یکنواخت روی بازه‌ی داده شده و تابع درستنمایی را به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم.

$$f(x;\theta)=I_{(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})}(x)$$

و

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}I_{(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})}(x_i)$$

قرار دهیم $y_1=\min(x_1,\dots,x_n)$ و $y_n=\max(x_1,\dots,x_n)$. پس

$$L(\theta) \neq ۰ \Leftrightarrow \prod_{i=۱}^{n} I_{(\theta-\frac{۱}{۲},\theta+\frac{۱}{۲})}(x_i) = ۱$$
$$\Leftrightarrow \theta - \frac{۱}{۲} < x_۱, \ldots, x_n < \theta + \frac{۱}{۲}$$
$$\Leftrightarrow \theta - \frac{۱}{۲} < y_۱ < y_n < \theta + \frac{۱}{۲}$$
$$\Leftrightarrow y_n - \frac{۱}{۲} < \theta < y_۱ + \frac{۱}{۲}$$
$$\Leftrightarrow I_{(y_n - \frac{۱}{۲}\ ,\ y_۱ + \frac{۱}{۲})}(\theta) = ۱$$

پس هر مقدار از θ در درون محدوده‌ی $y_n - \frac{۱}{۲} < \theta < y_۱ + \frac{۱}{۲}$، قرار تابع درستنمایی را ماکسیمم، می‌کند. بنابر به‌ازای هر برآوردگری که در شرط $y_n - \frac{۱}{۲} < \theta < y_۱ + \frac{۱}{۲}$ صدق کند، می‌تواند یک برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم برای پارامتر θ تلقی شود.

۴۱-۳. بنابه تمرین فوق، هر برآوردکننده‌ای که در شرط $Y_n - \frac{۱}{۲} \leq \hat{\Theta} \leq Y_۱ + \frac{۱}{۲}$، صدق کند، یک برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم برای θ است. پس کافیست دو برآوردکننده‌ی مطرح را در شرط، مورد بررسی قرار دهیم.

$$y_n - \frac{۱}{۲} \leq \frac{۱}{۲}(y_۱ - y_n) \leq y_۱ + \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} y_۱ + y_n \leq ۲y_۱ + ۱ \\ \text{و} \\ y_n - \frac{۱}{۲} \leq \dfrac{y_۱ + y_n}{۲} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y_n \leq y_۱ + ۱ \\ \text{و} \\ y_۱ \geq y_n - ۱ \end{cases}$$

برآوردکننده‌ی $\frac{۱}{۲}(Y_۱ + Y_n)$ یک برآوردکننده‌ی درستنمایی ماکسیمم برای θ است.

$$y_n - \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۳}(y_۱ + ۲y_۲) \le y_۱ + \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۳}(y_۱ + ۲y_۲) \le y_۱ + \frac{۱}{۲} \\ \text{و} \\ y_n - \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۳}(y_۱ + ۲y_۲) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y_۲ \le \frac{۳}{۴} + y_۱ \\ \text{و} \\ y_۲ \le (۳y_n - y_۱ - \frac{۳}{۲})/۲ \end{cases}$$

روابط فوق برقرار همواره برقرار نیستند، پس $\frac{۱}{۳}(Y_۱ + ۲Y_۲)$ یک برآوردکننده درستنمایی ماکسیمم برای θ نیست.

۳-۴۲. برآوردکننده‌ها سه پارامتر مجهول عبارتند از

$$\hat{\mu}_۱ = \bar{v} \ , \ \hat{\mu}_۲ = \bar{w} \ , \ \hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{n_۱ + n_۲}[\sum_{i=۱}^{n_۱}(v_۱ - \bar{v})^۲ + \sum_{i=۱}^{n_۲}(w_i - \bar{w})^۲]$$

با اطلاعات داده شده در تمرین، داریم

$$n_۱ = ۱۰ \ , \ \sum_{i=۱}^{۱۰} x_i = ۱۰۷۴ \ , \ \bar{v} = ۱۰۷/۴ \ , \ \sum_{i=۱}^{۱۰}(v_i - \bar{v})^۲ = ۷۶۰/۶$$

$$n_۲ = ۶ \ , \ \sum_{i=۱}^{۶} w_i = ۶۷۴ \ , \ \bar{w} = ۱۱۲/۳۳ \ , \ \sum_{i=۱}^{۶}(w_i - \bar{w})^۲ = ۵۳۳/۳۳$$

پس

$$\hat{\mu}_۱ = ۱۰۷/۴ \quad , \quad \hat{\mu}_۲ = ۱۱۲/۳۳$$

$$\hat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{۱۰ + ۶}[۷۶۰/۴ + ۵۳۳/۳۳] = ۸۰/۸۵۸.$$

حل تمرین فصل چهارم
برآورد: کاربردها

۱-۴. فرض کنید X متغیری تصادفی دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد آنگاه

$$1-\alpha = P(0<\theta<kX) = P(X>\frac{\theta}{k})$$
$$= \int_{\frac{\theta}{k}}^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\theta}{k}x} dx = -e^{-\frac{\theta}{k}x} \Big|_{\frac{\theta}{k}}^{+\infty} = e^{-\frac{1}{k}}$$

در نتیجه

$$e^{-1/k} = 1-\alpha$$
$$-\tfrac{1}{k} = \ln(1-\alpha)$$
$$k = -\tfrac{1}{\ln(1-\alpha)}.$$

۲-۴. از روی تابع چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β،

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع چگالی یکنواخت با مقادیر $\alpha=0$ و $\beta=\theta$ به‌دست می‌آید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

برای تعیین مقدار k در فاصله‌ی اطمینان $0<\theta<k(x_1+x_2)$، با سطح اطمینان $100(1-\alpha)\%$، برای θ، از روی توزیع X_1+X_2 انجام می‌گیرد. بنابر برای حل معادله-ی

$$P(0<\theta<k(X_1+X_2)) = 1-\alpha$$

توزیع $Y = X_1+X_2$، را که X_2 و X_1 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند، را بیابیم.

$$f(x_1,x_2) = f(x_1).f(x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^2} & 0<x<\theta,\ 0<x_2<\theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ابتدا متغیر x_1 را ثابت در نظرمی‌گیریم. $x_2 = y - x_1$ در نتیجه $0 < x_2 = y - x_1 < \theta$، و یا $x_1 < y < x_1 + \theta$ است.

$$g(x_1, y) = \left|\frac{\partial x_2}{\partial y}\right| f(x_1, y - x_1) = 1 . \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

و لذا

$$g(x_1, y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} & 0 < x_1 < \theta \,,\, x_1 < y < x_1 + \theta \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

با خارج کردن متغیر x_1، تابع چگالی متغیر Y، حاصل می‌شود. برای تعیین حدود متغیر x_1، باید دو شرطی که در تابع چگالی فوق آمده همزمان برقرار باشد، پس

$$\begin{aligned} \{0 < x_1 < \theta \,,\, x_1 < y < x_1 + \theta\} &= \{0 < x_1 < \theta \,,\, x_1 < y \,,\, x_1 > y - \theta\} \\ &= \{\max(0, y - \theta) < x_1 < \min(\theta, y)\} \\ &= \begin{cases} 0 < x_1 < y & \text{اگر } 0 < y < \theta \text{،} \\ y - \theta < x_1 < \theta & \text{اگر } \theta < y < 2\theta \text{،} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, y) dx_1 \\ &= \int_0^y \frac{1}{\theta^2} dx_1 = \frac{y}{\theta^2}, \qquad 0 < y < \theta \\ &= \int_{y-\theta}^{\theta} \frac{1}{\theta^2} dx_1 = \frac{2\theta - y}{\theta^2}, \qquad \theta < y < 2\theta \end{aligned}$$

به‌طور کامل‌تر

$$g_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{\theta^2} & 0 < y < \theta \\ \frac{2\theta - y}{\theta^2} & \theta < y < 2\theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به‌سادگی می‌توان دید که

$$1 = \underbrace{\int_0^{\theta} \frac{y}{\theta^2} dy}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{\theta}^{2\theta} \frac{2\theta - y}{\theta^2} dy}_{=\frac{1}{2}}$$

حال معادله‌ی هدف را بازنویسی می‌کنیم.

$$1-\alpha = P(0<\theta<k(X_1+X_2)) = P(0<\theta<kY) = P(Y>\frac{\theta}{k}) = \int_{\theta/k}^{2\theta} g(y)dy.$$

اگر $\alpha \le \frac{1}{2}$ و یا $1-\alpha \ge \frac{1}{2}$، آنگاه مقدار احتمال شامل تمام قسمت اوّل و بخشی از قسمت دوّم است. پس باید $\theta \le \frac{\theta}{k}$ و یا $k \le 1$ باشد.

$$1-\alpha = \frac{1}{2} + \int_{\theta}^{\theta/k} g(y)dy = \frac{1}{2} + \int_{\theta}^{\theta/k} \frac{2\theta-y}{\theta^2}dy = \frac{1}{2} + \int_{1}^{1/k}(2-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{1/k} = \frac{1}{2} + \{\frac{2}{k} - \frac{1}{2k^2} - (2-\frac{1}{2})\}$$

$$= \frac{2}{k} - \frac{1}{2k^2} - 1$$

با داشتن مقدار α، مقدار k تعیین می شود.

$$2-\alpha = \frac{2}{k} - \frac{1}{2k^2} \to 2k^2(2-\alpha) = 4k-1 \to 2(2-\alpha)k^2 - 4k + 1 = 0$$

یا

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times 2(2-\alpha)}}{4(2-\alpha)} = \frac{\left(2\pm\sqrt{\alpha}\right)}{(2-\alpha)} \xrightarrow{k\le 1} k = \frac{2-\sqrt{\alpha}}{2-\alpha}$$

اگر $\alpha \ge \frac{1}{2}$ و یا $1-\alpha \le \frac{1}{2}$، آنگاه مقدار احتمال شامل فقط شامل بخشی از قسمت اوّل است. پس باید $\theta \ge \frac{\theta}{k}$ و یا $k \ge 1$ باشد.

$$1-\alpha = \int_0^{\theta/k} g(y)dy = \int_0^{\theta/k} \frac{y}{\theta^2}dy = \int_0^{1/k} x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/k} = \frac{1}{2k^2}$$

با داشتن مقدار α، مقدار k تعیین می‌شود.

$$1-\alpha = \frac{1}{2k^2} \to k^2 = \frac{1}{2(1-\alpha)} \to k = \pm\sqrt{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \xrightarrow{k\ge 1} k = \sqrt{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$$

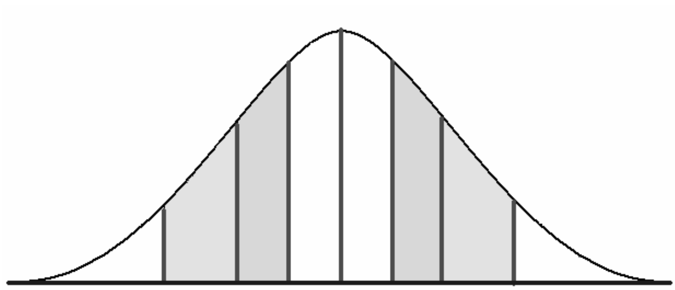
۳-۴. برای فاصله‌ی اطمینان اوّلی طولی به اندازه‌ی $l_1 = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و برای فاصله‌ی اطمینان دوّمی طولی به اندازه‌ی $l_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{\alpha/3} - z_{2\alpha/3})$ است. اگر بنا باشد $l_1 < l_2$، پس

$$z_{\alpha/۳} - z_{۲\alpha/۳} > ۲z_{\alpha/۲}$$

یا

$$z_{\alpha/۲} - z_{۲\alpha/۳} < z_{\alpha/۳} - z_{\alpha/۲}.$$

همانگونه که ملاحظه می‌کنید اختلاف اندیس‌ها در طرف راست با اختلاف اندیس‌ها در طرف چپ با هم برابراست، $\frac{\alpha}{۶} = \frac{\alpha}{۳} - \frac{\alpha}{۲} = \frac{\alpha}{۲} - \frac{۲\alpha}{۳}$، ولی اگر در توزیع نرمال، سطح زیر منحنی را به قسمت‌های مساوی مثلاً $\frac{\alpha}{۶}$، تقسیم کنیم هر قدر از مبدأ مختصات فاصله‌ی بگیریم طول‌های بزرگتری ایجاد می‌شود (شکل زیر) (چرا؟) بنابراین رابطه‌ی فوق به علت آنکه طرف چپ در موقعیتی نزدیک به مبدأ مختصات قرار می‌گیرد، برقرار است.



۴-۴. با مقدار خطای داده شده رابطه‌ی $P(|\bar{X} - \mu| < e) = ۱ - \alpha$ برقرار است. با فرض اینکه $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲/n$،

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{e}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = ۱ - \alpha$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/۲}\right) = ۱ - \alpha$$

در نتیجه

$$e = z_{\alpha/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/۲}\,\sigma}{e}$$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/۲}\,\sigma}{e}\right)^{۲}$$

۴-۵. برآوردکننده‌ی $S_p^{۲} = \dfrac{(n_۱ - ۱)S_۱^{۲} + (n_۲ - ۱)S_۲^{۲}}{n_۱ + n_۲ - ۲}$، ترکیبی از واریانس نمونه‌ای دو نمونه است. نااریبی $S_p^{۲}$ برای $\sigma^{۲}$، معادل آن است رابطه‌ی $E(S_p^{۲}) = \sigma^{۲}$ برقرار باشد.

$$\begin{aligned}
E(S_p^{۲}) &= E\left(\frac{(n_۱ - ۱)S_۱^{۲} + (n_۲ - ۱)S_۲^{۲}}{n_۱ + n_۲ - ۲}\right)\\
&= \frac{۱}{n_۱ + n_۲ - ۲}\left[(n_۱ - ۱)E(S_۱^{۲}) + (n_۲ - ۱)E(S_۲^{۲})\right]\\
&= \frac{۱}{n_۱ + n_۲ - ۲}\left[(n_۱ - ۱)\sigma^{۲} + (n_۲ - ۱)\sigma^{۲}\right]\\
&= \frac{۱}{n_۱ + n_۲ - ۲}(n_۱ + n_۲ - ۲)\sigma^{۲} = \sigma^{۲}
\end{aligned}$$

واریانس $S_p^{۲}$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(S_p^{۲}) &= \mathrm{var}\left(\frac{(n_۱ - ۱)S_۱^{۲} + (n_۲ - ۱)S_۲^{۲}}{n_۱ + n_۲ - ۲}\right)\\
&= \frac{۱}{(n_۱ + n_۲ - ۲)^{۲}}\mathrm{var}[(n_۱ - ۱)S_۱^{۲} + (n_۲ - ۱)S_۲^{۲}]\\
&= \frac{۱}{(n_۱ + n_۲ - ۲)^{۲}}[(n_۱ - ۱)^{۲}\underbrace{\mathrm{var}\,S_۱^{۲}}_{=\frac{۲\sigma^{۲}}{n_۱ - ۱}} + (n_۲ - ۱)^{۲}\underbrace{\mathrm{var}\,S_۲^{۲}}_{=\frac{۲\sigma^{۲}}{n_۲ - ۱}}]\\
&= \frac{۲\sigma^{۲}}{(n_۱ + n_۲ - ۲)^{۲}}[(n_۱ - ۱) + (n_۲ - ۱)] = \frac{۲\sigma^{۲}}{(n_۱ + n_۲ - ۲)}
\end{aligned}$$

۴-۶. دو متغیر تصادفی

$$Z=\frac{\overline{X}_۱-\overline{X}_۲-(\mu_۱-\mu_۲)}{\sigma\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}}\sim N(۰,۱)$$

و

$$Y=\frac{(n_۱+n_۲-۲)S_p^۲}{\sigma^۲}\sim\chi^۲_{n_۱+n_۲-۲}$$

مستقل هستند، پس $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n_۱+n_۲-۲}}}\sim t(n_۱+n_۲-۲)$،

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n_۱+n_۲-۲}}}=\frac{[\frac{\overline{X}_۱-\overline{X}_۲-(\mu_۱-\mu_۲)}{\sigma\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}}]}{\sqrt{\frac{[\frac{(n_۱+n_۲-۲)S_p^۲}{\sigma^۲}]}{n_۱+n_۲-۲}}}=\frac{\overline{X}_۱-\overline{X}_۲-(\mu_۱-\mu_۲)}{S_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}}\sim t(n_۱+n_۲-۲)$$

۴-۷. مقدار خطا $e=z_{\alpha/۲}.\sigma/\sqrt{n}$، خواسته‌ی تمرین است. با قراردادن معلومات، $n=۱۵۰$، $\sigma=۹/۴$، $۱-\alpha=۰/۰۵$، $\alpha/۲=۰/۰۲۵$، و $z_{\alpha/۲}=z_{۰/۰۲۵}=۱/۹۶$ داریم

$$e=z_{\alpha/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=۱/۹۶\frac{۹/۴}{\sqrt{۱۵۰}}=۱/۵۰۴.$$

۴-۸. با $n=۱۵۰$، $\overline{x}=۶۱/۸$، $\sigma=۹/۴$، $z_{\alpha/۲}=z_{۰/۰۰۵}=۲/۵۷۵$، فاصله‌ی اطمینان برابر است با:

$$۶۱/۸-۲/۵۷۵\times\frac{۹/۴}{\sqrt{۱۵۰}}<\mu<۶۱/۸<+۲/۵۷۵\times\frac{۹/۴}{\sqrt{۱۵۰}}$$

یا

$$۵۹/۸۲<\mu<۶۳/۷۸.$$

۴-۹. $n=۱۲۰$، $\sigma=۱۰/۵$، $z_{۰/۰۰۵}=۲/۵۷۵$،

$$e=z_{\alpha/۲}.\sigma/\sqrt{n}=۲/۵۷۵\times\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۱۲۰}}=۲/۴۶۸.$$

۴-۱۰. با $n=۱۲۰$، $\overline{x}=۱۴۱/۸$، $\sigma=۱۰/۵$، و $z_{۰/۰۱}=۲/۳۳$، فاصله‌ی اطمینان برای

میانگین جامعه عبارت است از:

$$\bar{x}-z_{\alpha/۲}\sigma/\sqrt{n}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/۲}\sigma/\sqrt{n}$$

$$۱۴۱/۸-۲/۳۳\times\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۱۲۰}}<\mu<۱۴/۸+۲/۳۳\times\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۱۲۰}}$$

یا

$$۱۳۹/۵۷<\mu<۱۴۴/۰۳.$$

۴-۱۱. داده‌های مسئله $n=۶۴$، $\bar{x}=۵۲/۸۰$، $\sigma=۴/۵$، و $z_{۰/۰۰۵}=۲/۵۷۵$، در نتیجه برای $\bar{x}-z_{\alpha/۲}\sigma/\sqrt{n}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/۲}\sigma/\sqrt{n}$ داریم:

$$۵۲/۸۰-۲/۵۷۵\times\frac{۴/۵}{\sqrt{۶۴}}<\mu<۵۲/۸۰+۲/۵۷۵\times\frac{۴/۵}{\sqrt{۶۴}}$$

یا

$$۵۱/۳۵<\mu<۵۴/۲۵.$$

۴-۱۲. قرار دهید $n=۴۰$، $\sigma=۲/۶۸$، $z_{۰/۰۲۵}=۱/۹۶$،

$$e=z_{\alpha/۲}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=z_{۰/۰۲۵}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=۱/۹۶\times\frac{۲/۶۸}{\sqrt{۴۰}}=۰/۸۳$$

حداکثر خطا در سطح ۹۵ درصد برابر ۰/۸۳ است.

۴-۱۳. با توجه به نتیجه‌ی تمرین ۳-۴، و

$$e=\tfrac{۱}{۳}\ \text{ساعت}=۲۰\ \text{دقیقه}$$

$\sigma=۳/۲$، $z_{\alpha/۲}=z_{۰/۰۰۲۵}=۱/۹۶$،

$$n=\left(z_{\alpha/۲}\frac{\sigma}{e}\right)^۲=\left(۱/۹۶\times\frac{۳/۲}{\frac{۱}{۳}}\right)^۲=۳۵۴/۰۴۱۸\cong ۳۵۵$$

به تعداد $n=۳۵۵$ حداقل نمونه لازم است، تا $P(|\bar{X}-\mu|<\tfrac{۱}{۳})=۰/۰۵$ برقرار باشد.

۴-۱۴. با مجهول بودن σ، و $n<۳۰$، از تابع آزمون برمبنای توزیع t استفاده می‌کنیم. اطلاعات تمرین عبارتند از: $n=۱۰$، $\bar{x}=۵/۶۸$، $s=۰/۲۹$، $t_{\alpha/۲,n-۱}=t_{۰/۰۲۵,۹}=۲/۲۶۲$،

$$\bar{x}-t_{\alpha/۲,n-۱}\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{\alpha/۲,n-۱}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$۵/۶۸-۲/۲۶۲\times\frac{۰/۲۹}{\sqrt{۱۰}}<\mu<۵/۶۸+۲/۲۶۲\times\frac{۰/۲۹}{\sqrt{۱۰}}$$

و یا

$$۵/۴۷<\mu<۵/۸۹.$$

۴–۱۵. داریم: $n_۱=۱۶$، $\sigma_۱=۴/۸$، $\bar{x}_۱=۱۸/۲$، $n_۲=۲۵$، $\sigma_۲=۳/۵$، $\bar{x}_۲=۲۳/۴$، $z_{\alpha/۲}=z_{۰/۰۵}=۱/۶۴$، پس

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)-z_{\alpha/۲}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}<\mu_۱-\mu_۲<(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)+z_{\alpha/۲}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}$$

$$(۱۸/۲-۲۳/۴)-۱/۶۴۵\sqrt{\frac{(۴/۵)^۲}{۱۶}+\frac{(۳/۵)^۲}{۲۵}}<\mu_۱-\mu_۲<(۱۸/۲-۲۳/۴)-۱/۶۴۵\sqrt{\frac{(۴/۵)^۲}{۱۶}+\frac{(۳/۵)^۲}{۲۵}}$$

یا

$$-۷/۴۸۵<\mu_۱-\mu_۲<-۲/۹۱۵.$$

۴–۱۶. داده‌های تمرین، $n_۱=۶۱$، $s_۱=۱۹/۴$، $\bar{x}_۱=۸۰/۷$، $n_۲=۶۱$، $s_۲=۱۸/۸$، $\bar{x}_۲=۸۸/۱$، $z_{\alpha/۲}=z_{۰/۰۰۵}=۲/۵۷۵$، پس

$$(۸۰/۷-۸۸/۱)-۲/۵۷۵.\sqrt{\frac{(۱۹/۴)^۲}{۶۱}+\frac{(۱۸/۸)^۲}{۶۱}}<\mu_۱-\mu_۲<(۸۰/۷-۸۸/۱)+۲/۵۷۵.\sqrt{\frac{(۱۹/۴)^۲}{۶۱}+\frac{(۱۸/۸)^۲}{۶۱}}$$

و یا

$$-۱۶/۳۰۶۶<\mu_۱-\mu_۲<۱-۵۰۶۶۵.$$

۴–۱۷. با توجه به مقادیر $n_۱$ و $n_۲$ که کمتر ۳۰ هستند و شرط $\sigma_۱=\sigma_۲$، فرضیات تمرین را مرور می‌کنیم: $n_۱=۱۲$، $n_۲=۱۵$، $\bar{x}_۱=۱۳/۸$، $\bar{x}_۲=۱۲/۹$، $s_۱=۱/۲$، $s_۲=۱/۵$، $t_{\alpha/۲,n_۱+n_۲-۲}=t_{۰/۰۲۵,۲۵}=۲/۰۶۰$، پس در فرمول

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)-t_{\alpha/۲,n_۱+n_۲-۲}.s_p.\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}<\mu_۱-\mu_۲<$$

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)+t_{\alpha/۲,n_۱+n_۲-۲}.s_p.\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}$$

ابتدا مقدار واریانس آمیخته را به‌دست می‌آوریم:

$$s_p = \frac{(n_۱ - ۱)s_۱^۲ + (n_۲ - ۱)s_۲^۲}{n_۱ + n_۲ - ۲}$$

$$= \frac{(۱۲ - ۱)(۱/۲)^۲ + (۱۵ - ۱)(۱/۵)^۲}{۲۵} = ۱/۸۹۳۶$$

در نتیجه

$$(۱۳/۸ - ۱۲/۹) - ۲/۰۶ \times ۱/۳۷۶ \times \sqrt{\frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۵}} < \mu_۱ - \mu_۲ < (۱۳/۸ - ۱۲/۹) + ۲/۰۶ \times ۱/۳۷۶ \times \sqrt{\frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۵}}$$

یا

$$-۰/۱۹۸ < \mu_۱ - \mu_۲ < ۱/۹۹۸.$$

۴–۱۸. شرایط $n_۱, n_۲ < ۳۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۲$، برقرار است. با داشتن مقادیر $n_۱ = ۵$، $n_۲ = ۵$، $t_{\alpha/۲, n_۱ + n_۲ - ۲} = t_{۰/۰۰۵, ۸} = ۳/۳۵۵$، و از روی داده‌های خام

$$\begin{cases} \bar{x}_۱ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i = \frac{۱}{۵}(۸۵۰۰ + ۸۳۳۰ + ۸۴۸۰ + ۷۹۶۰ + ۸۰۳۰) = ۸۲۶۰ \\ \bar{x}_۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i = \frac{۱}{۵}(۷۷۱۰ + ۸۷۹۰ + ۷۹۲۰ + ۸۲۷۰ + ۷۸۶۰) = ۷۹۳۰ \\ s_۱^۲ = \frac{۱}{n_۱ - ۱}\sum_{i=۱}^{n} (x_i - \bar{x}_۱)^۲ = ۶۳۴۵۰ \\ s_۲^۲ = \frac{۱}{n_۲ - ۱}\sum_{i=۱}^{n} (x_i - \bar{x}_۲)^۲ = ۴۲۶۵۰ \\ s_p^۲ = \frac{(n_۱ - ۱)s_۱^۲ + (n_۲ - ۱)s_۲^۲}{n_۱ + n_۲ - ۲} = \frac{۴ \times (۶۳۴۵۰) + ۴ \times (۴۲۶۵۰)}{۵ + ۵ - ۲} = \frac{۴۲۴۴۰۰}{۸} = ۵۳۰۵۰ \\ s_p = ۲۳۰/۳۲۶ \end{cases}$$

فاصله‌ی اطمینان مورد نظر برابر است با:

$$(۸۲۶۰ - ۷۹۳۰) - ۳/۳۵۵ \times ۲۳۰/۳۲۶\sqrt{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵}} < \mu_۱ - \mu_۲ < (۸۲۶۰ - ۷۹۳۰) + ۳/۳۵۵ \times ۲۳۰/۳۲۶\sqrt{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵}}$$

یا

$$-۱۵۸/۷۲۶ < \mu_۱ - \mu_۲ < ۸۱۸/۷۲۶$$

.۴–۱۹

$$e=z_{\alpha/۲}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}=(۲/۳۳)\sqrt{\frac{(۴/۸)^۲}{۱۶}+\frac{(۳/۵)^۲}{۲۵}}.$$

۴–۲۰. $n<۳۰$، و σ نامعلوم است، پس با اطلاعات $n=۱۸$، $\bar{x}=۶۳/۸۴$، $s=۲/۷۵$، $t_{\alpha/۲,n-۱}=t_{۰/۰۰۵,۱۷}=۲/۸۹۸$، داریم

$$\bar{x}-t_{۰/۰۰۵,۱۷}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{۰/۰۰۵,۱۷}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

با جایگزینی

$$۶۳/۸۴-۲/۸۹۸\times\frac{۲/۵۷}{\sqrt{۱۸}}<\mu<۶۳/۸۴+۲/۸۹۸\times\frac{۲/۵۷}{\sqrt{۱۸}}$$

یا

$$۶۱/۹۶<\mu<۶۵/۷۲.$$

۴–۲۱. از دو معادله‌ی داده شده می‌توان نوشت:

$$z_{\alpha/۲}^۲=\frac{(x-n\theta)^۲}{n\theta(۱-\theta)}$$

$$z_{\alpha/۲}^۲[n\theta(۱-\theta)]=(x-n\theta)^۲$$

$$-z_{\alpha/۲}^۲[n\theta(۱-\theta)]+(x-n\theta)^۲=۰$$

$$(nz_{\alpha/۲}^۲+n^۲)\theta^۲-(nz_{\alpha/۲}^۲+۲nx)\theta+x^۲=۰$$

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم فوق،

$$\Delta=(nz_{\alpha/۲}^۲+۲nx)^۲-۴(nz_{\alpha/۲}^۲+n^۲)x^۲$$

$$=[۲nz_{\alpha/۲}(\frac{z_{\alpha/۲}}{۲}+\frac{x}{z_{\alpha/۲}})]^۲-[۴n^۲z_{\alpha/۲}^۲(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{z_{\alpha/۲}^۲})]$$

$$=۴n^۲z_{\alpha/۲}^۲[(\frac{z_{\alpha/۲}}{۲}+\frac{x}{z_{\alpha/۲}})^۲-x^۲(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{z_{\alpha/۲}^۲})]$$

$$=۴n^۲z_{\alpha/۲}^۲\left[\frac{z_{\alpha/۲}^۲}{۴}+\frac{x^۲}{z_{\alpha/۲}^۲}+x-\frac{x^۲}{n}+\frac{x^۲}{z_{\alpha/۲}^۲}\right]=۴n^۲z_{\alpha/۲}^۲\left[\frac{z_{\alpha/۲}^۲}{۴}+\frac{x(n-x)}{n}\right]$$

و لذا

$$\theta_1,\theta_2=\frac{(nz_{\alpha/2}^2+2nx)\pm\sqrt{\Delta}}{2(nz_{\alpha/2}^2+n^2)}$$
$$=\frac{(nz_{\alpha/2}^2+2nx)\pm 2nz_{\alpha/2}\sqrt{\frac{z_{\alpha/2}^2}{4}+\frac{x(n-x)}{n}}}{2(nz_{\alpha/2}^2+n^2)}$$
$$=\frac{(\frac{1}{2}z_{\alpha/2}^2+x)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{z_{\alpha/2}^2}{4}+\frac{x(n-x)}{n}}}{n+z_{\alpha/2}^2}.$$

۲۲-۴. فرض کنید X_1 و X_2 تعداد موفقیت‌ها برای دو نمونه‌ی مستقل باشند که به ترتیب برآوردکننده‌های پارامتر مجهول جامعه را به‌دست می‌دهند: $\hat{\theta}_1=\frac{X_1}{n_1}$، $\hat{\theta}_2=\frac{X_2}{n_2}$. از آنجا که $P(-z_{\alpha/2}<Z<z_{\alpha/2})=1-\alpha$، و با استفاده از $Z=\frac{(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}}$، داریم:

$$P\left(-z_{\alpha/2}<\frac{(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}}<z_{\alpha/2}\right)$$
$$=P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}<(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-(\theta_1-\theta_2)\right.$$
$$\left.<-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1}+\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}\right)$$

برای اندازه‌های نمونه‌ها به‌قدر کافی بزرگ، به‌جای θ_1 و θ_2 برآوردگرهای آنها را قرار می‌دهیم:

$$P[(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}<\theta_1-\theta_2$$
$$<(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}]=1-\alpha$$

عبارت داخل احتمال یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$، برای $\theta_1-\theta_2$ است.

۴-۲۳. با $n=300$، $x=204$، $z_{\alpha/2}=z_{0/025}=1/96$، $\hat{\theta}=\frac{x}{n}=\frac{204}{300}=0/68$،

$$\hat{\theta}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}<\theta<\hat{\theta}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}$$
$$0/68-1/96\sqrt{\frac{0/68(1-0/68)}{300}}<\theta<0/68+1/96\frac{0/68(1-0/68)}{300}$$

یا

$$0/627<\theta<0/733.$$

۴-۲۴. الف) $n=250$، $x=190$، $\hat{\theta}=\frac{x}{n}=\frac{190}{250}=0/76$، $z_{\alpha/2}=z_{0/005}=2/575$،

$$\hat{\theta}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}<\theta<\hat{\theta}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}$$
$$0/76-2/575\sqrt{\frac{0/76(1-0/76)}{250}}<\theta<0/76+2/575\sqrt{\frac{0/76(1-0/76)}{250}}$$

یا

$$0/69<\theta<0/83.$$

ب) با محاسبه‌ی مقادیر، فاصله‌ی اطمینان $0/69<\theta<0/83$ حاصل می‌شود.

۴-۲۵. $n=100$، $x=18$، $\hat{\theta}=\frac{x}{n}=\frac{18}{100}$، $z_{\alpha/2}=z_{0/005}=2/575$،

$$\hat{\theta}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}<\theta<\hat{\theta}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}$$
$$0/18-2/575\sqrt{\frac{0/18(1-0/18)}{100}}<\theta<0/18+2/575\sqrt{\frac{0/18(1-0/18)}{100}}$$

یا

$$0/081<\theta<0/279.$$

۴-۲۶. $n=120$ ، $\hat{\theta}=\frac{x}{n}=\frac{54}{120}=0/45$ ، $z_{\alpha/2}=z_{0/05}=1/64$ ،

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}}=1/64\sqrt{\frac{0/45(1-0/45)}{120}}=0/0745.$$

۴-۲۷.

$$\begin{aligned}P(|\hat{\theta}-\theta|<0/05)&=P\left(\frac{|\hat{\theta}-\theta|}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}<\frac{0/05}{\sqrt{\frac{0/34(1-0/34)}{300}}}\right)\\&=P(|Z|<1/83)=2P(0<Z<1/83)\\&=(2)(0/4664)=0/9328.\end{aligned}$$

۴-۲۸. در فاصله‌ی $0<\theta<1$ تابع $f(\theta)=\theta(1-\theta)$ ، در نقطه‌ی $\theta=\frac{1}{2}$، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند، پس

$$e=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}$$

$$n=\frac{z_{\alpha/2}^2\theta(1-\theta)}{e^2}<\frac{z_{\alpha/2}^2}{4e^2}$$

ب) $$n=\frac{z_{\alpha/2}^2}{4e^2}=\frac{(2/575)^2}{4(0/04)^2}=1036/03\cong 1037$$

۴-۲۹. $n_1=250$ ، $x_1=84$ ، $n_2=250$ ، $x_2=156$ ، $z_{\alpha/2}=z_{0/025}=1/96$ ،

$$\hat{\theta}_1=\frac{x_1}{n_1}=\frac{84}{250}=0/336 \quad , \quad \hat{\theta}_2=\frac{x_2}{n_2}=\frac{156}{250}=0/624$$

و لذا

$$\begin{aligned}(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}&<\theta_1-\theta_2\\&<(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}\end{aligned}$$

با جایگذاری داریم

$$(0/33-0/624)-1/96\sqrt{\frac{0/33(1-0/33)}{250}+\frac{0/624(1-0/624)}{250}}<\theta_1-\theta_2$$
$$<(0/33-0/624)+1/96\sqrt{\frac{0/33(1-0/33)}{250}+\frac{0/624(1-0/624)}{250}}$$

و یا

$$-0/372<\theta_1-\theta_2<-0/24.$$

۴-۳۰. $n_1=500$، $x_1=48$، $n_2=400$، $x_2=68$، $z_{\alpha/2}=z_{0/005}=2/575$،

$$\hat{\theta}_1=\frac{x_1}{n_1}=\frac{48}{500}=0/096 \quad , \quad \hat{\theta}_2=\frac{x_2}{n_2}=\frac{68}{400}=0/17$$

با استفاده از فرمول

$$(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)-z_{0/005}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}<\theta_1-\theta_2$$
$$<(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)+z_{0/005}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1}+\frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}$$

داریم

$$(0/096-0/17)-2/575\sqrt{\frac{0/096(1-0/096)}{500}+\frac{0/624(1-0/17)}{400}}<\theta_1-\theta_2$$
$$<(0/096-0/624)+2/575\sqrt{\frac{0/096(1-0/096)}{500}+\frac{0/624(1-0/17)}{400}}$$

و یا

$$-0/1331<\theta_1-\theta_2<-0/0149.$$

۴-۳۱. S_1^2 و S_2^2 واریانس‌های نمونه‌ای، از جامعه‌های مستقل نرمال هستند. اگر به ترتیب اندازه‌ی نمونه‌ها n_1 و n_2 باشد آنگاه $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}$ دارای توزیع اف با n_1-1 و n_2-1 درجه‌ی آزادی است. پس

$$P(f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}<\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}<f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1})=1-\alpha$$

یا

$$P(f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1})$$

$$= P(\frac{S_2^2}{S_1^2} f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < \frac{S_2^2}{S_1^2} f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1})$$

$$= P(\frac{S_2^2}{S_1^2} \frac{1}{f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < \frac{S_2^2}{S_1^2} f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1})$$

$$= P(\frac{1}{\frac{S_2^2}{S_1^2} f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{\frac{S_2^2}{S_1^2} \frac{1}{f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}}})$$

$$= P(\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1})$$

$$= 1-\alpha$$

بنابراین یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$، برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، عبارت است از:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}.$$

۴–۳۲. از آنجا که توزیع حدی $z = \frac{S-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}}$، نرمال استاندارد است، پس

$$1-\alpha = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{S-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}} < z_{\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2} < \frac{S}{\sigma} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2}\right) = P\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2} < \frac{S}{\sigma} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2}} < \frac{\sigma}{S} < \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2}}\right) = P\left(\frac{S}{1+\frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2}} < \sigma < \frac{S}{1-\frac{1}{\sqrt{2n}} z_{\alpha/2}}\right)$$

به‌طور خلاصه یک فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)100\%$، برای σ، وقتی اندازه‌ی n بزرگ

باشد، برابر است با:

$$\frac{S}{1+\frac{1}{\sqrt{2n}}z_{\alpha/2}}<\sigma<\frac{S}{1-\frac{1}{\sqrt{2n}}z_{\alpha/2}}.$$

۴-۳۳. $n=10$، $s=0/29$، $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}=\chi^2_{0/975,5}=2/7$، و
$\chi^2_{\alpha/2,n-1}=\chi^2_{0/025,9}=19/023$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\frac{(10-1)(0/29)^2}{19/023}<\sigma^2<\frac{(10-1)(0/29)^2}{2/7}$$

یا

$$0/0397<\sigma^2<0/2803.$$

۴-۳۴. $n=64$، $s=4/5$، $1-\alpha=0/99$، $z_{\alpha/2}=z_{0/005}=2/575$،

$$\frac{S}{1+\frac{1}{\sqrt{2n}}z_{\alpha/2}}<\sigma<\frac{S}{1-\frac{1}{\sqrt{2n}}z_{\alpha/2}}$$

$$\frac{4/5}{1+\frac{2/575}{\sqrt{2\times 64}}}<\sigma<\frac{4/5}{1-\frac{2/575}{\sqrt{2\times 64}}}$$

یا

$$3/666<\sigma<5/826.$$

۴-۳۵. $n_1=n_2=61$، $\bar{x}_1=80/7$، $s_1=1/94$، $\bar{x}_2=88/1$، $s_2=18/8$،

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{s_1^2}{s_2^2}f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$$

$$f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}=f_{0/01,60,60}=1/84,\quad f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}=f_{0/01,60,60}=1/84$$

$$\frac{(19/4)^2}{(18/8)^2}\cdot\frac{1}{1/84}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{(19/4)^2}{(18/8)^2}\cdot(1/84)$$

$$0/5788<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1/960.$$

۴-۳۶. $n_1 = ۱۲$، $s_1 = ۱/۲$، $n_۲ = ۱۵$، $s_۲ = ۱/۵$،

$$\frac{s_1^۲}{s_۲^۲}\cdot\frac{۱}{f_{\alpha/۲, n_1-۱, n_۲-۱}} < \frac{\sigma_1^۲}{\sigma_۲^۲} < \frac{s_1^۲}{s_۲^۲} f_{\alpha/۲, n_۲-۱, n_1-۱}$$

$$f_{\alpha/۲, n_1-۱, n_۲-۱} = f_{۰/۰۱,۱۱,۱۴} = ۴/۳۷, \quad f_{\alpha/۲, n_۲-۱, n_1-۱} = f_{۰/۰۱,۱۱,۱۴} = ۳/۸۷$$

$$\frac{(۱/۲)^۲}{(۱/۵)^۲}\cdot\frac{۱}{۴/۳۷} < \frac{\sigma_1^۲}{\sigma_۲^۲} < \frac{(۱/۲)^۲}{(۱/۵)^۲}\cdot(۳/۸۷)$$

یا

$$۰/۱۴۷ < \frac{\sigma_1^۲}{\sigma_۲^۲} < ۲/۴۷۷.$$

۴-۳۷. $n_1 = n_۲ = ۵$، $\bar{x}_1 = ۸۲۶۰$، $\bar{x}_۲ = ۷۹۳۰$،

$$s_1^۲ = \frac{۱}{n_1-۱}\sum(x_i - \bar{x}_1)^۲ = ۶۳۴۵۰ \;, \quad s_۲^۲ = \frac{۱}{n_۲-۱}\sum(x_i - \bar{x}_۲)^۲ - ۴۲۶۵۰$$

$$\frac{s_1^۲}{s_۲^۲}\cdot\frac{۱}{f_{\alpha/۲, n_1-۱, n_۲-۱}} < \frac{\sigma_1^۲}{\sigma_۲^۲} < \frac{s_1^۲}{s_۲^۲} f_{\alpha/۲, n_۲-۱, n_1-۱}$$

$$f_{\alpha/۲, n_1-۱, n_۲-۱} = f_{۰/۰۵,۴,۴} = ۶/۳۹, \; f_{\alpha/۲, n_۲-۱, n_1-۱} = f_{۰/۰۵,۴,۴} = ۶/۳۹$$

$$\frac{۶۳۴۵۰}{۴۲۶۵۰}\cdot\frac{۱}{۶/۳۹} < \frac{\sigma_1^۲}{\sigma_۲^۲} < \frac{۶۳۴۵۰}{۴۲۶۵۰}\cdot(۶/۳۹)$$

یا

$$۰/۲۳۲۸ < \frac{\sigma_1^۲}{\sigma_۲^۲} < ۹/۵۰۶۳.$$

حل تمرین فصل پنجم
آزمون فرض: نظریه

۵-۱. الف) ساده، زیرا توزیع پواسون کاملاً مشخص می‌شود.

ب) مرکب

ج) مرکب، زیرا مقدار واریانس σ، مشخص نیست.

۵-۲. X متغیری تصادفی که دارای توزیع فوق هندسی است، پس توزیع احتمال آن تحت شرایط $x = ۰,۱,\ldots,n$، $x \leq k$، $n - x \leq N - k$، به شکل زیر است:

$$f(x; n, N, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{k-x}}{\binom{N}{n}}$$

با مفروضات تمرین، $N = ۷$، $n = ۲$،

$$f(x; ۲, ۷, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{۷-k}{۲-x}}{\binom{۷}{۲}}$$

آزمون فرض به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} H_۰ : k = ۲ \\ H_۱ : k = ۴ \end{cases}$$

بنابر تعریف خطای نوع اوّل، و با توجه به اینکه، $H_۰$ در صورتی رد می‌شود که مقدار مشاهده شده متغیر تصادفی ۲ باشد، داریم

$$\alpha = P(H_۰ \text{رد} \mid \text{باشد} \quad \text{درست} \quad H_۰)$$

$$= f(۲; ۲, ۷, k \mid k = ۲) = f(۲; ۲, ۷, ۲) = \frac{\binom{۲}{۲}\binom{۷-۲}{۲-۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۱}{۲۱}$$

و همچنین برای خطای نوع دوّم داریم

$$\beta = P(H_\circ \text{قبول} \mid \text{درست باشد } H_\circ)$$
$$= f(1;2,7,k \mid k=4) + f(0;2,7,k \mid k=4) = f(1;2,7,4) + f(0;2,7,4)$$
$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{7-4}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{12}{21} + \frac{3}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

۵-۳. همان‌گونه که در فرض صفر آمده است، $\theta = 0/9$، و در فرض مقابل $\theta = 0/6$، مقدار پارامتر مجهول تعیین شده است. آماره‌ی آزمون X، تعداد بهبودی‌های مشاهده شده در ۲۰ آزمایش است و فرض صفر رد می‌شود هرگاه $x \leq 16$. پس

$$\alpha = P(\text{رد فرض } H_\circ \mid \text{قبول فرض } H_\circ) = P(X \leq 16 \mid \theta = 0/9)$$
$$= 1 - P(X > 16 \mid \theta = 0/9) = 1 - P(X \geq 17 \mid \theta = 0/9)$$
$$= 1 - \sum_{x=17}^{20} b(x;20,0/9)$$

چون مقدار θ از $0/5$ بزرگتر است، برای استفاده از جدول توزیع دوجمله‌ای، داریم

$$\alpha = 1 - \sum_{x=17}^{20} b(20-x;20,1-0/9) = 1 - \sum_{x=17}^{20} b(20-x;20,0/1)$$
$$= 1 - [0/1901 + 0/2852 + 0/2702 + 0/1216] = 1 - 0/8671 = 0/1329$$

و همچنین برای خطای نوع دوّم می‌نویسیم:

$$\beta = P(H_\circ \text{قبول} \mid \text{نادرست باشد } H_\circ)$$
$$= P(X > 16 \mid \theta = 0/6) = \sum_{x=17}^{20} b(x;20,0/6)$$

مجدداً، چون مقدار θ از $0/5$ بزرگتر است، برای استفاده از جدول توزیع دوجمله‌ای، داریم

$$\beta = \sum_{x=17}^{20} b(20-x;20,1-0/6) = \sum_{x=17}^{20} b(20-x;20,0/4)$$
$$= 0/0123 + 0/0031 + 0/0005 + 0/0 = 0/0159$$

۵-۴. از روی تابع چگالی توزیع نمایی

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & x>0,\theta>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

و آزمون فرض

$$\begin{cases}H_0:\theta=2\\ H_1:\theta=5\end{cases}$$

مقادیر خطاهای نوع اوّل و دوّم را به‌دست می‌آوریم.

$$\alpha=P(\text{رد فرض } H_0 \mid \text{درست باشد } H_0)=P(X\ge 3\mid\theta=2)$$

$$=\int_3^\infty \frac{1}{2}e^{-x/2}dx=[e^{-x/2}|_3^\infty]=e^{-3/2}=0/223$$

$$\beta=P(\text{قبول فرض } H_0 \mid \text{نادرست باشد } H_0)=P(X<3\mid\theta=5)$$

$$=\int_0^3 \frac{1}{5}e^{-x/5}dx=(e^{-x/5}|_0^3)=1-e^{-3/5}=0/4512$$

۵-۵. با توجه به مفهوم ناحیه‌ی رد و آزمون فرض‌های

$$\begin{cases}H_0:\mu=\mu_0\\ H_1:\mu=\mu_1>\mu_0\end{cases}$$

در توزیع نرمال، خطاهای اوّل و دوّم را محاسبه می‌کنیم.

$$\alpha=P(\text{رد فرض } H_0 \mid \text{قبول فرض } H_0)=P(\overline{X}>\mu_0+1\mid\mu=\mu_0)$$

$$=P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{\mu_0+1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})=P(Z>\frac{1}{\sigma/\sqrt{n}})=P(Z>\frac{\sqrt{n}}{\sigma})=1-\Phi(\frac{\sqrt{n}}{\sigma})$$

به‌ازای $\sigma=1$، و $n=2$،

$$\alpha=1-\Phi(\sqrt{2})=0/5-P(0<Z<\sqrt{2})=0/5-0/4207=0/0793$$

۶-۵. از روی توزیع یکنواخت،

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

و آزمون فرض‌های

$$\begin{cases}H_0:\beta=\beta_0\\ H_1:\beta=\beta_0+2\end{cases}$$

و اینکه H_0 رد می‌شود هرگاه $X>\beta_0+1$، دو خطای نوع اوّل و دوّم را به‌دست می‌آوریم.

$$\alpha = P(\text{رد فرض } H_\circ \mid \text{درست باشد } H_\circ) = P(X > \beta_\circ + 1 \mid \beta = \beta_\circ)$$
$$= 1 - P(X < \beta_\circ + 1 \mid \beta = \beta_\circ)$$

با داشتن $\beta_\circ$، و $\alpha = \circ$،

$$\alpha = 1 - \int_\circ^{\beta_\circ + 1} \frac{1}{\beta_\circ} dx = 1 - \frac{1}{\beta_\circ}(x|_\circ^{\beta_\circ + 1}) = 1 - \frac{1}{\beta_\circ}(\beta_\circ + 1) = 1 - \frac{\beta_\circ + 1}{\beta_\circ}$$
$$\beta = P(\text{قبول فرض } H_\circ \mid \text{نادرست باشد } H_\circ) = P(X \leq \beta_\circ + 1 \mid \beta = \beta_\circ + 2)$$
$$= \int_\circ^{\beta_\circ + 1} \frac{1}{\beta_\circ + 2} dx = \frac{1}{\beta_\circ + 2}(x|_\circ^{\beta_\circ + 1}) = \frac{\beta_\circ + 1}{\beta_\circ + 2}.$$

۵-۷. تابع چگالی توأم X_2 و X_1 عبارت است از:

$$f(x_1, x_2; \theta) = f(x_1, \theta).f(x_2, \theta) = \begin{cases} \theta^2 x_1^{\theta - 1} x_2^{\theta - 1} & \circ < x_1 < 1, \circ < x_2 < 1 \\ \circ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

آزمون فرض‌های ساده

$$\begin{cases} H_\circ : \theta = 1 \\ H_1 : \theta = 2 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. $\theta = 2$

$$\pi(\theta = 2) = P_{\theta = 2}(\text{رد } H_\circ) = 1 - P_{\theta = 2}(\text{رد } H_1) = 1 - \beta.$$

$$\pi(\theta=۲)=۱-P(H_{۰} \text{ قبول} \mid \text{باشد} \quad \text{نادرست } H_{۰})$$

$$=۱-P(X_۱X_۲<\frac{۳}{۴}\mid\theta=۲)=P(X_۱X_۲\geq\frac{۳}{۴}\mid\theta=۲)$$

$$=\iint\limits_{x_۱x_۲\geq\frac{۳}{۴}} f(x_۱,x_۲;\theta)dx_۱dx_۲=\int_{\frac{۳}{۴}}^{۱}\int_{\frac{۳}{۴x_۲}}^{۱}(۲)^۲x_۱x_۲dx_۱dx_۲$$

$$=۴\int_{\frac{۳}{۴}}^{۱}x_۲\left(\frac{x_۱^۲}{۲}\right]_{\frac{۳}{۴x_۲}}^{۱}dx_۲=۴\int_{\frac{۳}{۴}}^{۱}x_۲\left[\frac{۱}{۲}-\frac{۹}{۳۲x_۲^۲}\right]dx_۲$$

$$=۴\int_{\frac{۳}{۴}}^{۱}\left[\frac{x_۲}{۲}-\frac{۹}{۳۲x_۲}\right]dx_۲=۴\left(\frac{x_۲^۲}{۴}-\frac{۹}{۳۲}\ln(x_۲)\right]_{\frac{۳}{۴}}^{۱}$$

$$=\left(x_۲^۲-\frac{۹}{۸}\ln(x_۲)\right]_{\frac{۳}{۴}}^{۱}=۱-(\frac{۹}{۱۶}-\frac{۹}{۸}\ln(\frac{۳}{۴}))=\frac{۷}{۱۶}+\frac{۹}{۸}\ln(\frac{۳}{۴}).$$

۸-۵. دو کمیت درستنمایی،

$$L_۰=(۲\pi)^{\frac{-n}{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu_۰)^۲} \quad , \quad L_۱=(۲\pi)^{\frac{-n}{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu_۱)^۲}$$

و لذا

$$\frac{L_۰}{L_۱}=e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu_۰)^۲+\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\mu_۱)^۲}$$

$$=e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i^۲+\mu_۰^۲-۲\mu_۰x_i)+\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i^۲+\mu_۱^۲-۲\mu_۱x_i)}$$

$$=e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲+\frac{n}{۲}\mu_۰^۲+\mu_۰\sum_{i=۱}^{n}x_i+\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲+\frac{n}{۲}\mu_۱^۲+\mu_۱\sum_{i=۱}^{n}x_i}$$

$$=e^{\frac{n}{۲}(\mu_۱^۲-\mu_۰^۲)+(\mu_۰-\mu_۱)\sum_{i=۱}^{n}x_i}$$

مقدار ثابت k، و ناحیه از فضای نمونه‌ای مانند C را به نحوی می‌یابیم تا

$$e^{\frac{n}{۲}(\mu_۱^۲-\mu_۰^۲)+(\mu_۰-\mu_۱)\sum_{i=۱}^{n}x_i}\leq k, \qquad \text{در داخل } C$$

و یا

$$\frac{n}{۲}(\mu_۱^۲-\mu_۰^۲)+(\mu_۰-\mu_۱)\sum_{i=۱}^{n}x_i \le \log k = k', \qquad C \text{ در داخل}$$

از طرفین مقدار $\frac{n}{۲}(\mu_۱^۲-\mu_۰^۲)$، را کم می‌کنیم

$$(\mu_۰-\mu_۱)\sum_{i=۱}^{n}x_i \le k'-\frac{n}{۲}(\mu_۱^۲-\mu_۰^۲)=k'', \qquad C \text{ در داخل}$$

و یا

$$\sum_{i=۱}^{n}x_i \le k''/\frac{n}{۲}(\mu_۱^۲-\mu_۰^۲)=k'', \qquad C \text{ در داخل}$$

و در آخر

$$\bar{x} \le K, \qquad C \text{ در داخل}$$

مقدار K، برحسب k، n، $\mu_۰$، و $\mu_۱$، است. با در نظر گرفتن توزیع جامعه، داریم $-z_\alpha = \frac{K-\mu_۰}{\frac{۱}{\sqrt{n}}}$، و یا

$$K=\mu_۰ - z_\alpha \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

بنابر تواناترین ناحیه‌ی بحرانی به اندازه‌ی α برای آزمون فرض صفر $\mu=۰$ در برابر فرض مقابل $\mu=\mu_۱$ (با $\mu_۰>\mu_۱$) برای جامعه‌ی نرمال مفروض عبارت است از: $\bar{x}\le \mu_۰ - z_\alpha \frac{۱}{\sqrt{n}}$.

۹-۵. از روی تابع چگالی نمایی،

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\theta}e^{-x/\theta} & x>۰,\theta>۰\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

داریم

$$L_۰=\left(\frac{۱}{\theta_۰}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta_۰}} \quad , \quad L_۱=\left(\frac{۱}{\theta_۱}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta_۱}}$$

بنابر شیوه‌ی آزمون نسبت درستنمایی، ناحیه‌ی بحرانی عبارت است از:

$$\frac{L_۰}{L_۱}=\frac{\left(\frac{۱}{\theta_۰}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta_۰}}}{\left(\frac{۱}{\theta_۱}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i}{\theta_۱}}}=\left(\frac{\theta_۱}{\theta_۰}\right)^n e^{-\sum_{i=۱}^{n}x_i\left(\frac{۱}{\theta_۰}-\frac{۱}{\theta_۱}\right)} \le k$$

یا

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n x_i (\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})} \geq k$$

$$\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n - \sum_{i=1}^n x_i (\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}) \leq k'$$

$$\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n - \sum_{i=1}^n x_i (\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}) \geq k'$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}) \leq k''$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}) \geq k''$$

اگر $\theta_1 > \theta_0$، آنگاه $\frac{1}{\theta_0} > \frac{1}{\theta_1}$، در نتیجه $0 < \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}$. طرفین رابطه‌ی فوق را بر عبارت مثبت $(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0})$ تقسیم می‌کنیم، ناحیه‌ی رد به‌صورت زیر می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq K$$

یا

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq K$$

مقدار K، برحسب k، n، θ_0، θ_1 است. توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل که توزیع θ دارند، توزیع گاما با پارامتر $\alpha = n$، و $\beta = \theta_0$ است، پس K را می‌توان با استفاده از اینکه $\sum_{i=1}^n X_i$، دارای توزیع گاما با $\alpha = n$ و $\beta = \theta_0$ است، مشخص است.

۵-۱۰. بنا به توزیع دوجمله‌ای،

$$b(x;n,\theta) = \binom{n}{x}\theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n$$

کمیت‌های مربوط آزمون نسبت درستنمایی،

$$\begin{cases} L_0 = \binom{n}{x}^n \theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\ L_1 = \binom{n}{x}^n \theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \end{cases}$$

و لذا

$$\frac{L_0}{L_1}=\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

مقدار k، و ناحیه‌ای از فضای نمونه‌ای مانند C بیابیم به‌طوری‌که

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\times\frac{1}{\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}}\right)^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\times\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n\le k$$

یا

$$\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\times\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)\sum_{i=1}^n x_i+n\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)\le k'$$

با کم کردن $n.\ln(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1})$، از طرفین نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\times\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)\sum_{i=1}^n x_i\le k''$$

با قدری ساده کردن،

$$\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)-\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)=\ln\theta_0-\ln\theta_1-\ln(1-\theta_0)+\ln(1-\theta_1)$$

$$=\ln\frac{1-\theta_1}{\theta_1}-\ln\frac{1-\theta_0}{\theta_0}$$

با فرض $\theta_1<\theta_0$، درنتیجه $\frac{1}{\theta_0}<\frac{1}{\theta_1}$، و یا $1-\frac{1}{\theta_0}>1-\frac{1}{\theta_1}$، و یا $\frac{1-\theta_0}{\theta_0}<\frac{1-\theta_1}{\theta_1}$،

صعودی بودن تابع لگاریتم نتیجه می‌دهد که $\ln\frac{1-\theta_0}{\theta_0}<\ln\frac{1-\theta_1}{\theta_1}$، پس

$$\ln\frac{1-\theta_1}{\theta_1}-\ln\frac{1-\theta_0}{\theta_0}>0$$

$$\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)-\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)>0$$

پس فرم ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^n x_i\ge K$$

مقدار K، برحسب k، n، θ_0، θ_1 قابل محاسبه است. در حالتی که اندازه‌ی n،

بزرگ باشد می‌توان از روی توزیع مجانبی $\frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}$، نرمال استاندارد، مقدار K را مشخص نمود.

۵-۱۱. ابتدا باید مقدار K، را تعیین نمود و سپس به محاسبه‌ی مقدار خطای نـوع دوّم پرداخت.

$$\alpha = P(H_{\circ} \text{ درست } H_{\circ} \text{ باشد} | \text{ رد فرض }) = P(\sum_{i=۱}^{n} X_i \leq K \mid \theta = \circ/۴)$$

اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و θ باشد، آنگـاه توزیـع $Z = \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}$، برای حالت $n \to \infty$، نرمال استاندارد است. پس با مقدار خطای نـوع اوّل، $\alpha = \circ/\circ۵$، داریم:

$$\circ/\circ۵ = P(Z \leq \frac{K - ۱\circ\circ(\circ/۴)}{\sqrt{۱\circ\circ(\circ/۴)(\circ/۶)}}) = P(Z \leq \frac{K - ۴\circ}{\sqrt{۲۴}})$$

در نتیجه

$$\frac{K - ۴\circ}{\sqrt{۲۴}} = -۱/۶۴۵$$
$$K = ۳۱/۹۴$$

در دنباله‌ی حل تمرین،

$$\begin{aligned}
\beta &= P(H_۱ \text{ درست } H_۱ \text{ باشد} | \text{ رد فرض }) \\
&= P(\sum_{i=۱}^{۱\circ\circ} X_i \geq K \mid \theta = \circ/۳) \\
&= P(\sum_{i=۱}^{۱\circ\circ} X_i \geq ۳۱/۹۴ \mid \theta = \circ/۳) \\
&= P(Z \geq \frac{۳۱/۹۴ - \circ/۵ - ۱\circ(\circ/۳)}{\sqrt{۱\circ\circ(\circ/۳)(\circ/۷)}}) \\
&= ۱ - P(Z \leq \circ/۳۱۴) = ۱ - [\circ/۵ + P(\circ < Z < \circ/۳۱۴)] \\
&= ۱ - [\circ/۵ + \circ/۱۲۳] = ۱ - \circ/۶۲۳۲ = \circ/۳۷۶۸
\end{aligned}$$

۵-۱۲. بنا به تابع چگالی نرمال،

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^۲},\qquad -\infty<x<\infty,\sigma>۰,\ \mu\in R$$

با قرار دادن $\mu=۰$،

$$f(x;\sigma)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}\frac{x^۲}{\sigma^۲}}$$

عبارت‌های درستنمایی را به‌دست می‌آوریم:

$$L_۰=\left(\sigma_۰\sqrt{۲\pi}\right)^{-n}e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۰^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲}\qquad,\qquad L_۱=\left(\sigma_۱\sqrt{۲\pi}\right)^{-n}e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۱^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲}$$

و لذا

$$\frac{L_۰}{L_۱}=\frac{(\sigma_۰\sqrt{۲\pi})^{-n}e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۰^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲}}{(\sigma_۱\sqrt{۲\pi})^{-n}e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۱^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲}}=\frac{(\sigma_۰)^{-n}e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۰^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲}}{(\sigma_۱)^{-n}e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۱^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲}}=(\sigma_۱/\sigma_۰)^n e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۰^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲(\frac{۱}{\sigma_۰^۲}-\frac{۱}{\sigma_۱^۲})}$$

مقدار k، و ناحیه‌ی بحرانی برای آزمون مربوطه را می‌یابیم. فرض صفر رد می‌شود هرگاه

$$(\sigma_۱/\sigma_۰)^n e^{-\frac{۱}{۲\sigma_۰^۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲(\frac{۱}{\sigma_۰^۲}-\frac{۱}{\sigma_۱^۲})}\le k$$

یا

$$n\ln(\sigma_۱/\sigma_۰)^n-\tfrac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲(\frac{۱}{\sigma_۰^۲}-\frac{۱}{\sigma_۱^۲})\le k'$$

یا

$$\tfrac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^n x_i^۲(\frac{۱}{\sigma_۰^۲}-\frac{۱}{\sigma_۱^۲})\ge k''$$

بنا به فرض‌های آزمون $\sigma_۱>\sigma_۰$، یا $\sigma_۱^۲>\sigma_۰^۲$، در نتیجه $\frac{۱}{\sigma_۱^۲}<\frac{۱}{\sigma_۰^۲}$، پس عبارت $[\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\sigma_۱^۲}-\frac{۱}{\sigma_۰^۲})]$، یک کمیت مثبت است، پس

$$\sum_{i=۱}^n x_i^۲\ge K$$

مقدار K، برحسب مقادیر k، n، $\sigma_۱$، و $\sigma_۰$ قابل محاسبه است. از آنجا که توزیع $\frac{۱}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^n X_i^۲$، خی‌دو با n درجه‌ی آزادی است، درنتیجه با معلوم بودن خطای نوع اوّل می‌توان مقدار K، را تعیین نمود.

۵-۱۳. بنا به تعریف، داریم:

$$\alpha = P(\text{فرض } H_0 \text{ رد} \mid \text{باشد } H_0 \text{ درست})$$
$$\beta = P(\text{فرض } H_1 \text{ رد} \mid \text{باشد } H_1 \text{ درست}) = P(H_0 \text{ قبول} \mid \text{باشد } H_0 \text{ نادرست})$$

و فرض‌های مطرح عبارتند از:(درصد مسافرین مخالف کشیدن سیگار$=\theta$)

$$\begin{cases} H_0 : \theta = ۰/۶۰ \\ H_1 : \theta \neq ۰/۶۰ \end{cases}$$

با این واقعیت که مقدار واقعی در فرض صفر درست باشد، درصورتی که دریک نمونه-گیری، تعداد در نمونه از مخالفین، از ۶۰درصد فاصله‌ی معنی‌داری داشت، فرض صفر به ناحق رد می‌شود و مرتکب خطای اوّل شدیم. برای حالتی که ۶۰درصد مقدار واقعی درصد مخالفین کشیدن سیگار نباشد، ولی براساس تصمیم از روی نمونه، فرض صفر را رد نکردیم، مرتکب خطای نوع دوّم شدیم.

۵-۱۴.

$$\begin{cases} H_0 : \text{مدیر اجرایی قادر به پذیرش مسئولیتهای بیشتر است} \\ H_1 : \text{مدیر اجرایی قادر به پذیرش مسئولیتهای بیشتر نیست} \end{cases}$$

خطای نوع اوّل: در حالی که مدیر اجرایی قادر به پذیرش مسئولیت‌های بیشتر است، به وی مسئولیت جدیدی داده نشود.

خطای نوع دوّم: برای مدیری که قادر به انجام مسئولیت‌های بیشتر نیست، کارهای جدیدی محول شود.

۵-۱۵. الف) $\mu < ۲۰$، ب) $\mu > ۲۰$.

۵-۱۶. برای انجام آزمون $H_0 : \mu = ۱۲/۳$ در مقابل $H_1 : \mu \neq ۱۲/۳$، از ناحیه‌ی بحرانی زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱۲/۰ > \bar{x} \quad \text{یا} \quad \bar{x} > ۱۲/۶$$

با مشاهده‌ی مقدار $\bar{x} = ۱۲/۹$، فرض H_0 را رد می‌کنیم.

الف) اگر $\mu = ۱۲/۵$ مقدار واقعی پارامتر مجهول باشد، در نتیجه تصمیم‌گیری فوق، به حق بوده است.

ب) اگر $\mu = ۱۲/۳$، به ناحق فرض صفر را رد کرده‌ایم.

۵–۱۷. برای آزمودن $H_0 : \lambda = 10$، در برابر $H_1 : \lambda < 10$، ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت زیر داده شده است

$$x > 12/5$$

با مشاهده‌ی $\bar{x} = 11/2$، برای رد فرض H_0، دلیلی نداریم.

الف) با $\lambda = 11/5$، و مشاهده‌ی $\bar{x} = 11/2$، فرض صفر به حق رد شده است.

ب) با $\lambda = 10$، و مشاهده‌ی $\bar{x} = 11/2$، فرض صفر به ناحق رد شده است.

۵–۱۸. به‌طور کلی در خانواده‌ی نمایی، برای آزمودن فرض $H_0 : \theta = \theta_0$، در برابر فرض $H_1 : \theta = \theta_1$، به‌ازای $\theta_0 < \theta_1$، ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$ تعریف می‌شود.

الف) اگر $\theta_0 = 35000 < \theta_1 = 45000$ به $\theta_1 = 50000$ تغییر کند، همچنان شرط $\theta_0 < \theta_1$، برقرار است.

ب) به‌ازای $\theta_1 > 35000$، شرط $\theta_0 < \theta_1$ برقرار است، لذا ناحیه‌ی بحرانی تغییری نخواهد کرد.

۵–۱۹. به‌ازای $k = 0,1,2$، مقادیر خطای نوع اوّل را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha = P(X = 2 \mid k = 0) = \frac{\binom{0}{2}\binom{7-0}{2-2}}{\binom{7}{2}} = 0$$

$$\alpha = P(X = 2 \mid k = 1) = \frac{\binom{1}{2}\binom{7-1}{2-2}}{\binom{7}{2}} = \frac{0 \times \binom{6}{0}}{\binom{7}{2}} = 0$$

$$\alpha = P(X = 2 \mid k = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{7-2}{2-2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1 \times \binom{5}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21} = 0/048$$

و به‌ازای مقادیر $k = 4,5,6,7$، خطای نوع دوّم را به‌دست می‌آوریم

$$\beta = P(X < ۲ \mid k = ۴) = P(X = ۰ \mid k = ۴) + P(X = ۱ \mid k = ۴)$$
$$= \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۷-۴}{۲-۰}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۷-۴}{۲-۱}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{۴\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۳+۴\times۳}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۱۵}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۱۵}{۲۱} = ۰/۷۱$$

$$\beta = P(X < ۲ \mid k = ۵) = P(X = ۰ \mid k = ۵) + P(X = ۱ \mid k = ۵)$$
$$= \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۷-۵}{۲-۰}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۷-۶}{۲-۱}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۱}{\binom{۷}{۲}} + \frac{۵\binom{۲}{۱}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۱+۵\times۲}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۱۱}{۲۱} = ۰/۵۲$$

$$\beta = P(X < ۲ \mid k = ۶) = P(X = ۰ \mid k = ۶) + P(X = ۱ \mid k = ۶)$$
$$= \frac{\binom{۶}{۰}\binom{۷-۶}{۲-۰}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{\binom{۶}{۱}\binom{۷-۶}{۲-۱}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۰}{\binom{۷}{۲}} + \frac{۶}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۶}{۲۱} = ۰/۲۹$$

$$\beta = P(X < ۲ \mid k = ۷) = P(X = ۰ \mid k = ۷) + P(X = ۱ \mid k = ۷)$$
$$= \frac{\binom{۷}{۰}\binom{۷-۷}{۲-۰}}{\binom{۷}{۲}} + \frac{\binom{۷}{۱}\binom{۷-۷}{۲-۱}}{\binom{۷}{۲}} = ۰$$

و نتیجه‌ی محاسبات

k	احتمال خطای نوع I $\alpha(k)$	احتمال خطای نوع II $\beta(k)$	احتمال رد H_0 $\pi(k)$
۰	۰		۰
۱	۰		۰
۲	۰/۰۴۸		۰/۰۴۸
۴		۰/۷۱	۰/۲۹
۵		۰/۵۲	۰/۴۸
۶		۰/۲۹	۰/۷۱
۷		۰	۱

۵-۲۰. به‌ازای مقادیر مختلف θ، خطاهای نوع اوّل و دوّم را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha = P(X \le ۱۵ \mid \theta = ۰/۹۵) = ۰/۰۰۲۵$$
$$\alpha = P(X \le ۱۵ \mid \theta = ۰/۹۵) = ۰/۰۴۳۲$$

$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۸۵) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۸۵) = ۱ - ۰/۱۷۰۲$$
$$= ۰/۸۲۹۸$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۸) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۸) = ۱ - ۰/۳۷۰۴ = ۰/۶۲۹۶$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۷۵) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۷۵) = ۱ - ۰/۵۸۵۲$$
$$= ۰/۴۱۴۸$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۷) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۷) = ۱ - ۰/۷۶۲۶ = ۰/۲۳۷۴$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۶۵) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۶۵)$$
$$= ۱ - ۰/۸۸۱۷ = ۰/۱۱۸۳$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۶) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۶) = ۱ - ۰/۹۴۹۱ = ۰/۰۵۰۹$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۵۵) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۵۵)$$
$$= ۱ - ۰/۹۸۱۲ = ۰/۰۱۸۸$$
$$\beta = P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۵) = ۱ - P(X > ۱۵ \mid \theta = ۰/۵) = ۱ - ۰/۹۹۴۱ = ۰/۰۰۵۹$$

با توجه به رابطه‌ی $\pi = ۱ - \beta$،

θ	احتمال خطای نوع I α	احتمال خطای نوع II β	احتمال رد $H_۰$ π
۰/۹۵	۰/۰۰۲۵		۰/۰۰۲۵
۰/۹	۰/۰۴۳۲		۰/۰۴۳۲
۰/۸۵		۰/۸۲۹۸	۰/۱۷۰۲
۰/۸		۰/۶۲۹۶	۰/۳۷۰۴
۰/۷۵		۰/۴۱۴۸	۰/۵۸۵۲
۰/۷		۰/۲۳۷۴	۰/۷۶۲۶
۰/۶۵		۰/۱۱۸۳	۰/۸۸۱۷
۰/۶		۰/۰۵۰۹	۰/۹۴۹۱
۰/۵۵		۰/۰۱۸۸	۰/۹۸۱۲
۰/۵		۰/۰۰۵۹	۰/۹۹۴۱

۵-۲۱.

$$\lambda=\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$
$$=\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]\}$$
$$=\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]\}$$
$$=\exp\{-\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\}$$

۵-۲۲. آزمودن فرض $H_0:\theta=\frac{1}{2}$، در برابر $H_1:\theta\neq\frac{1}{2}$، مورد نظر است. فضای پارامتری شامل نقطه‌ی $\theta_0=\frac{1}{2}$، است و لذا

$$\max_{\theta=\frac{1}{2}} L=\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-x}=\binom{n}{x}2^{-n}$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی برای پارامتر θ، عبارت است از: $\hat{\theta}=\frac{x}{n}$، پس

$$\max_{\theta\in(0,1)} L=\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}$$

مقدار آماره‌ی نسبت درستنمایی برابر است با:

$$\lambda=\frac{\max_{\theta=\frac{1}{2}} L}{\max_{\theta\in(0,1)} L}=\frac{\binom{n}{x}2^{-n}}{\binom{n}{x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}=\frac{2^{-n}}{\left(\frac{x}{n}\right)^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}=\frac{n^n 2^{-n}}{x^x(n-x)^{n-x}}.$$

ب) ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $\lambda<k$ است، لذا

$$\frac{n^n 2^{-n}}{x^x(n-x)^{n-x}}<k$$

با لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق داریم:

$$x\ln x+(n-x)\ln(n-x)\geq k'.$$

ج) تابع $f(x)$، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. مقدار x را به‌نحوی می‌یابیم که

$$f(x)=x\ln x+(n-x)\ln(n-x)\geq k'$$

تابع $f(x)$، تابعی پیوسته از x، در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$f'(x)=1+\ln(x)-\ln(n-x)=0 \rightarrow x=\frac{n}{2}$$

نقطه‌ی به‌دست آمده نقطه‌ی مینیمم و نقطه‌ی تقارن تابع $f(x)$، است پس

$$f(x)<k' \leftrightarrow |x-\tfrac{n}{2}|>k_0$$

۵-۲۳. الف) در خانواده‌ی نمایی، آزمون $H_0:\theta=\theta_0$، در برابر $H_1:\theta\neq\theta_0$، پیش رو داریم.

$$\max_{\theta=\theta_0} L=\left(\frac{1}{\theta_0}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i}$$

از طرفی می‌دانیم برآورد درستنمایی ماکسیمم، $\hat{\theta}=\bar{x}$، است.

$$\max_{\theta>0} L=\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^n e^{-\frac{1}{\bar{x}}\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\frac{\max_{\theta=\theta_0} L}{\max_{\theta>0} L}=\frac{\left(\frac{1}{\theta_0}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i}}{\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^n e^{-\frac{1}{\bar{x}}\sum_{i=1}^n x_i}}=\left(\frac{\bar{x}}{\theta_0}\right)^n e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta_0}+n}$$

ب) ناحیه‌ی بحرانی به صورت $\lambda\le k$، است. لذا

$$\left(\frac{\bar{x}}{\theta_0}\right)^n e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta_0}+n}\le k$$

با لگاریتم‌گیری از طرفین

$$n\ln\left(\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}\right)-\frac{n\bar{x}}{\theta_\circ}+n\leq k'$$

$$\ln\left(\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}\right)-\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}\leq k'$$

$$e^{\ln(\frac{\bar{x}}{\theta_\circ})-\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}}\leq k''$$

$$\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}.e^{-\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}}\leq k''$$

$$\bar{x}e^{-\frac{\bar{x}}{\theta_\circ}}\leq k$$

۵-۲۴. تحت تابع چگالی داده شده، فرض $H_\circ:\theta=\circ$، درمقابل $H_۱:\theta\neq\circ$، را در نظر می‌گیریم.

$$\alpha=P(\text{رد}\ \text{فرض}\ H_\circ \mid \text{باشد}\ \text{درست}\ H_\circ)=P(X\leq\alpha\mid\theta=\circ)=\int_\circ^\alpha ۱.dx=\alpha$$

$$P(\text{رد}\ \text{فرض}\ H_\circ\mid\theta=-۱)=P(X\leq\alpha\mid\theta=-۱)=\int_\circ^\alpha\left[۱+(\frac{۱}{۲}-x)\right]dx$$

$$=\int_\circ^\alpha(\frac{۳}{۲}-x)dx=\frac{\alpha}{۲}(۳-\alpha)>\frac{۳\alpha}{۲}-\frac{\alpha}{۲}=\alpha$$

$$P(\text{رد}\ \text{فرض}\ H_\circ\mid\theta=۱)=P(X\leq\alpha\mid\theta=۱)=\int_\circ^\alpha\left[۱+(\frac{۱}{۲}-x)\right]dx$$

$$=\frac{\alpha}{۲}(۳-\alpha)>\alpha$$

بنابر $\circ<\alpha<۱$، هر دو احتمال فوق از α بزرگتر است.

۵-۲۵. در جامعه‌ای نمایی، فرض $H_\circ:\theta=۱\circ$، در برابر $H_۱:\theta\neq ۱\circ$ را درنظرمی‌گیریم.

$$\alpha=P(\text{رد}\ \text{فرض}\ H_\circ\mid\text{باشد}\ \text{درست}\ H_\circ)=P(X<۸\ \text{یا}\ X>۱۲\mid\theta=۱\circ)$$

$$=۱-P(۸<X<۱۲\mid\theta=۱\circ)$$

$$=۱-\int_۸^{۱۲}\frac{۱}{۱\circ}e^{-x/۱\circ}dx=۱-e^{-۱۲/۱\circ}+e^{-۸/۱\circ}=۱-e^{-۴/۵}+e^{-۶/۵}=\circ/۸۵۲$$

$$\beta=P(\text{قبول}\ H_\circ\mid\text{باشد}\ \text{درست}\ H_۱)=P(۸\leq X\leq ۱۲\mid\theta\neq ۱\circ)$$

$$\beta=P(۸\leq X\leq ۱۲\mid\theta=۲)$$

$$=\int_۸^{۱۲}\frac{۱}{۲}e^{-x/۲}dx=-[e^{-۱۲/۱}-e^{-۸/۲}]=e^{-۴}-e^{-۶}=\circ/\circ۱۶$$

$$\beta = P(۸ \le X \le ۱۲ \mid \theta = ۴)$$

$$= \int_{۸}^{۱۲} \frac{۱}{۴} e^{-x/۴} dx = -[e^{-۱۲/۴} - e^{-۸/۴}] = e^{-۲} - e^{-۳} = ۰/۰۸۵$$

$$\beta = P(۸ \le X \le ۱۲ \mid \theta = ۶)$$

$$= \int_{۸}^{۱۲} \frac{۱}{۶} e^{-x/۶} dx = -[e^{-۱۲/۶} - e^{-۸/۶}] = e^{-۴/۳} = e^{-۴/۳} - e^{-۲} = ۰/۱۲۸$$

$$\beta = P(۸ \le X \le ۱۲ \mid \theta = ۸)$$

$$= \int_{۸}^{۱۲} \frac{۱}{۶} e^{-x/۸} dx = -[e^{-۱۲/۸} - e^{-۱}] = ۰/۱۴۵$$

$$\beta = P(۸ \le X \le ۱۲ \mid \theta = ۱۲)$$

$$= \int_{۸}^{۱۲} \frac{۱}{۱۲} e^{-x/۱۲} dx = -[e^{-۱} - e^{-۸/۱۲}] = ۰/۱۴۶$$

$$\beta = P(۸ \le X \le ۱۲ \mid \theta = ۱۶)$$

$$= \int_{۸}^{۱۲} \frac{۱}{۱۶} e^{-x/۱۶} dx = -[e^{-۱۲/۱۶} - e^{-۱/۲}] = ۰/۱۳۴$$

$$\beta = P(۸ \le X \le ۱۲ \mid \theta = ۲۰)$$

$$= \int_{۸}^{۱۲} \frac{۱}{۲۰} e^{-x/۲۰} dx = -[e^{-۱۲/۲۰} - e^{-۸/۲۰}] = ۰/۱۲۲$$

θ	احتمال خطای نوع I $\alpha(\theta)$	احتمال خطای نوع II $\beta(\theta)$	احتمال رد H_0 $\pi(\theta)$
۲		۰/۰۱۶	۰/۹۸۴
۴		۰/۰۸۵	۰/۹۱۵
۶		۰/۱۲۸	۰/۸۷۲
۸		۰/۱۴۵	۰/۸۵۵
۱۰	۰/۸۵۲		۰/۸۵۲
۱۲		۰/۱۴۶	۰/۸۵۴
۱۶		۰/۱۳۴	۰/۸۶۶
۲۰		۱۲۲	۰/۸۷۸

۵-۲۶. در جامعه‌ی نرمال، آزمون فرض $H_0: \mu \le ۴۰$، در برابر $H_1: \mu > ۴۰$، را در نظر می‌گیریم. مطابق تمرین، ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $\{x : \bar{x} > ۴۳/۵\}$، است. در نتیجه

$$\alpha = P(\overline{X} > ۴۳/۵ \mid \mu \le ۴۰)$$

$$\alpha = P(\overline{X} > ۴۳/۵ \mid \mu = ۳۷) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۳۷}{۱۶/\sqrt{۶۴}})$$

$$= ۰/۵ - P(۰ < Z < ۳/۲۵) = ۰/۵ - ۰/۵ = ۰$$

$$\alpha = P(\overline{X} > ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۳۸) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۳۸}{۱۶/\sqrt{۶۴}})$$

$$= ۰/۵ - P(۰ < Z < ۲/۷۵) = ۰/۵ - ۰/۴۹۷۰ = ۰/۰۰۳$$

$$\alpha = P(\overline{X} > ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۳۹) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۳۹}{۱۶/\sqrt{۶۴}})$$

$$= ۰/۵ - P(۰ < Z < ۲/۲۵) = ۰/۵ - ۰/۴۸۷۸ = ۰/۰۱۲۲$$

$$\alpha = P(\overline{X} > ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۰) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۰}{۱۶/\sqrt{۶۴}}) = ۰/۵ - P(۰ < Z < ۱/۷۵)$$

$$= ۰/۵ - ۰/۴۵۹۹ = ۰/۰۴۰۱$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu > ۴۰)$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۱) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۱}{۱۶/\sqrt{۶۴}}) = P(X \le ۱۲/۵)$$

$$= ۰/۵ + P(۰ < Z < ۱/۲۵) = ۰/۵ + ۰/۳۹۴۴ = ۰/۸۹۴۴$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۲) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۲}{۲}) = P(X \le ۰/۷۵)$$

$$= ۰/۵ + P(۰ < Z < ۰/۷۵) = ۰/۵ + ۰/۲۷۳۴ = ۰/۷۷۳۴$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۳) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۳}{۲}) = P(X \le ۰/۲۵)$$

$$= ۰/۵ + P(۰ < Z < ۰/۲۵) = ۰/۵ + ۰/۰۹۸۷ = ۰/۵۹۸۷$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۴) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۴}{۲}) = P(X \le -۰/۲۵)$$

$$= ۰/۵ - ۰/۰۹۸۷ = ۰/۴۰۱۳$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۵) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۵}{۲}) = ۰/۵ + P(Z \le -۰/۷۵)$$

$$= ۰/۵ - ۰/۲۷۳۴ = ۰/۲۲۶۶$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۶) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۶}{۲}) = P(X \le -۱/۲۵)$$

$$= ۰/۵ - ۰/۳۹۴۴ = ۰/۱۰۵۶$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۷) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۷}{۲}) = P(X \le -۱/۷۵)$$

$$= ۰/۵ - ۰/۴۵۹۹ = ۰/۰۴۰۱$$

$$\beta = P(\overline{X} \le ۴۳/۵ \,|\, \mu = ۴۸) = P(Z > \frac{۴۳/۵ - ۴۸}{۲}) = P(X \le -۲/۲۵)$$

$$= ۰/۵ - ۰/۴۸۷۸ = ۰/۰۱۲۲$$

μ	احتمال خطای نوع I $\alpha(\mu)$	احتمال خطای نوع II $\beta(\mu)$	احتمال رد H_0 $\pi(\mu)$
۳۷	۰		۰
۳۸	۰/۰۰۳		۰/۰۰۳
۳۹	۰/۰۱۲۲		۰/۱۲۲
۴۰	۰/۰۴۰۱		۰/۰۴۰۱
۴۱		۰/۸۹۴۴	۰/۱۰۵۶
۴۲		۰/۷۷۳۴	۰/۲۲۶۶
۴۳		۰/۵۹۸۷	۰/۴۰۱۳
۴۴		۰/۴۰۱۳	۰/۵۹۸۷
۴۵		۰/۲۲۶۶	۰/۷۷۳۴
۴۶		۰/۱۰۵۶	۰/۸۹۴۴
۴۷		۰/۰۴۰۱	۰/۹۵۹۹
۴۸		۰/۰۱۲۲	۰/۹۸۷۸

۵-۲۷. در جامعه‌ی پواسن، آزمون فرض $H_0: \lambda > 2$، در برابر $H_1: \lambda \leq 2$، را با ناحیه‌ی بحرانی $\{x: \sum_{i=1}^{5} x_i \leq 5\}$، را در نظر می‌گیریم.

اگر X_iها دارای توزیع پواسن با پارامتر λ باشند، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} X_i$ نیز دارای توزیع پواسن با پارامتر $n\lambda$ خواهد شد.

$$\lambda = 2/2 \to n\lambda = 5 \times 2/2 = 11$$

$$\alpha = P(\sum_{i=1}^{5} X_i \leq 5 \mid \lambda = 2/2) = \sum_{i=0}^{5} p(x;11) = 0/0375$$

$$\lambda = 2/4 \to n\lambda = (5)(2/4) = 12$$

$$\alpha = P(\sum_{i=1}^{5} X_i \leq 5 \mid \lambda = 2/4) = \sum_{i=0}^{5} p(x;14) = 0/0203$$

$$\lambda = 2/6 \to n\lambda = (5)(2/6) = 13$$

$$\alpha = P(\sum_{i=1}^{5} X_i \leq 5 \mid \lambda = 2/6) = \sum_{i=0}^{5} p(x;13) = 0/0107$$

$$\lambda = 2/8 \to n\lambda = 14$$

$$\alpha = P(\sum_{i=1}^{5} X_i \leq 5 \mid \lambda = 2/8) = \sum_{i=0}^{5} p(x;14) = 0/0055$$

$$\lambda = 3 \to n\lambda = 15$$

$$\alpha = P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i \le ۵ \mid \lambda = ۳) = \sum_{i=۰}^{۵} p(x;۱۵) = ۰/۰۰۲۸$$

$$\beta = P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i > ۵ \mid \lambda \le ۲) = ۱ - P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i \le ۵ \mid \lambda \le ۲)$$

$$\lambda = ۲ \rightarrow n\lambda = ۱۰$$

$$\beta = ۱ - P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i \le ۵ \mid \lambda \le ۲) = ۱ - \sum_{i=۰}^{۵} p(x;۱۰) = ۱ - ۰/۰۶۷۱ = ۰/۹۳۲۹$$

$$\lambda = ۱/۵ \rightarrow n\lambda = ۷/۵$$

$$\beta = ۱ - P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i \le ۵ \mid \lambda \le ۱/۵) = ۱ - \sum_{i=۰}^{۵} p(x;۷/۵) = ۱ - ۰/۲۴۱۴ = ۰/۷۵۸۶$$

$$\lambda = ۱ \rightarrow n\lambda = ۵$$

$$\beta = ۱ - P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i \le ۵ \mid \lambda = ۱) = ۱ - \sum_{i=۰}^{۵} p(x;۵) = ۱ - ۰/۶۱۶۰ = ۰/۳۸۴۰$$

$$\lambda = ۰/۵ \rightarrow n\lambda = ۲/۵$$

$$\beta = ۱ - P(\sum_{i=۱}^{۵} X_i \le ۵ \mid \lambda = ۰/۵) = ۱ - \sum_{i=۰}^{۵} p(x;۲/۵) = ۱ - ۰/۹۵۸۰ = ۰/۰۴۲$$

λ	احتمال خطای نوع I $\alpha(\lambda)$	احتمال خطای نوع II $\beta(\lambda)$	احتمال رد $H_۰$ $\pi(\lambda)$
۰/۵		۰/۰۴۲	۰/۹۵۸
۱		۰/۳۸۴۰	۰/۶۱۶
۱/۵		۰/۷۵۸۶	۰/۲۴۱۴
۲		۰/۹۳۲۹	۰/۰۶۷۱
۲/۲	۰/۰۳۷۵		۰/۰۳۷۵
۲/۴	۰/۰۲۰۳		۰/۰۲۰۳
۲/۶	۰/۰۱۰۷		۰/۰۱۰۷
۲/۸	۰/۰۰۵		۰/۰۰۵۵
۳	۰/۰۰۲۸		۰/۰۰۲۸

حل تمرین فصل ششم
آزمون فرض: کاربردها

۶-۱. برای آزمودن فرض $H_{۰}:\mu=\mu_{۰}$ در مقابل فرض $H_{۱}:\mu\neq\mu_{۰}$، تحت شرط جامعه‌ی نرمال با واریانس معلوم $\sigma^{۲}$، آماره‌ی آزمون $z=\frac{\bar{x}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}$ با ناحیه‌ی رد $\{z>z_{\alpha/۲}$ یا $z<-z_{\alpha/۲}\}$ استفاده می‌شود. می‌توان شکل ناحیه‌ی رد به اندکی تغییر به‌صورت زیر نوشت

$$|z|=|\frac{\bar{x}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}|>z_{\alpha/۲}$$

و یا

$$\left(\frac{\bar{x}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^{۲}>z^{۲}_{\alpha/۲}$$

از روی تعریف خطای نوع اوّل، توزیع مربع آماره‌ی آزمون، ناحیه‌ی رد برمبنای توزیع خی‌دو به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\alpha &= P(H_{۰}\ \text{رد فرض}\ |\ H_{۰}\ \text{درست است})\\ &=P(|\frac{\bar{X}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}|>z_{\alpha/۲})=P(\left(\frac{\bar{X}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^{۲}>z^{۲}_{\alpha/۲})\\ &=P(\chi^{۲}(۱)>z^{۲}_{\alpha/۲})=P(\chi^{۲}(۱)>\chi^{۲}_{\alpha})\end{aligned}$$

۶-۲. بنابر معین بودن خطای نوع اوّل و خطای نوع دوّم، و شکل ناحیه‌ی رد که به صورت $\bar{x}>c$، داریم:

$$\alpha=P(\bar{X}>c\,|\,\mu=\mu_{۰})=P(\frac{\bar{X}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{c-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}})=P(\frac{\bar{X}-\mu_{۰}}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{\alpha})$$

$$\beta=P(\bar{X}<c\,|\,\mu=\mu_{۱})=P(\frac{\bar{X}-\mu_{۱}}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{c-\mu_{۱}}{\sigma/\sqrt{n}})=P(\frac{\bar{X}-\mu_{۱}}{\sigma/\sqrt{n}}<-z_{\beta})$$

با مقایسه‌ی دو عبارت فوق، دستگاه زیر را می‌سازیم:

$$\begin{cases}\dfrac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=z_\alpha\\[2mm] \dfrac{c-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}=-z_\beta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=z_\alpha\sigma/\sqrt{n}+\mu_0\\[2mm] \dfrac{\left(z_\alpha\sigma/\sqrt{n}+\mu_0\right)-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}=-z_\beta\end{cases}$$

پس

$$\begin{aligned}\left(z_\alpha\sigma/\sqrt{n}+\mu_0\right)-\mu_1&=-z_\beta\sigma/\sqrt{n}\\ \mu_0-\mu_1&=-z_\alpha\sigma/\sqrt{n}-z_\beta\sigma/\sqrt{n}\\ \sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)&=-\sigma\left(z_\alpha+z_\beta\right)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$n=\frac{\sigma^2(z_\alpha+z_\beta)^2}{(\mu_1-\mu_0)^2}.$$

۳-۶. به روش تمرین۶-۲، این تمرین نیز حل می‌شود.

$$\begin{cases}\dfrac{c-\delta}{\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}=z_\alpha\\[3mm] \dfrac{c-\delta'}{\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}=-z_\beta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}+\delta\\[3mm] \dfrac{\left(z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}+\delta\right)-\delta'}{\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}=-z_\beta\end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\left(z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}+\delta\right)-\delta'&=-z_\beta\sqrt{\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\\ \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(z_\alpha+z_\beta)&=\delta'-\delta\end{aligned}$$

در آخر

$$n=\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(z_\alpha+z_\beta)^2}{(\delta'-\delta)^2}.$$

۴-۶. $n=\dfrac{(9^2+13^2)(z_{0/014}+z_{0/01})^2}{(86-80)^2}=\dfrac{260(2/326+2/326)^2}{36}\cong 151$.

۶-۵. فرض صفر رد می‌شود هرگاه

$$\text{مقدار} - p \leq ۰/۰۵$$

در نتیجه به‌ازای ۰/۰۱، باید از روی p − مقدار، قضاوت کرد. به‌ازای سطح معنی‌دار بودن ۰/۱، می‌توان نتیجه گرفت اگر در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵، فرض صفر رد شده است به‌ازای تمامی مقادیر بزرگتر از ۰/۰۵ نیز فرض صفر رد می‌شود.

۶-۶. الف) $۰/۰۳۱۶ \nleq ۰/۰۱$ پس فرض صفر رد نمی‌شود.

ب) $۰/۰۳۱۶ \leq ۰/۰۵$ پس فرض صفر رد می‌شود.

ج) $۰/۰۳۱۶ \leq ۰/۱$ پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۷. ۱. تعیین فرض‌های آزمون و میزان سطح آزمون $\begin{cases} H_۰ : \mu = ۸۴/۳ \\ H_۱ : \mu > ۸۴/۳ \end{cases}$ ، $\alpha = ۰/۰۱$،

۲. تعیین ناحیه‌ی بحرانی $z > z_\alpha = z_{۰/۰۱} = ۲/۳۳$،

۳. جایگذاری در آماره‌ی آزمون، $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$: $\bar{x} = ۸۷/۸$، $\mu = ۸۴/۳$، $\sigma = ۸/۶$، $n = ۴۵$،

$$z = \frac{۸۷/۸ - ۸۴/۳}{۸/۶ / \sqrt{۴۵}} = ۲/۷۳.$$

۴. از مقایسه مقادیر $z = ۲/۷۳$ و $z_{۰/۰۱} = ۲/۳۳$، $(z > z_\alpha)$ نتیجه می‌شود که فرض صفر را باید رد کرد.

۶-۸. ۱. تعیین فرض‌های آزمون و میزان سطح آزمون $\begin{cases} H_۰ : \mu = ۳۰ \\ H_۱ : \mu \neq ۳۰ \end{cases}$ ، $\alpha = ۰/۰۱$،

۲. تعیین ناحیه‌ی بحرانی، $|z| > z_{\alpha/۲}$، با $z_{\alpha/۲} = z_{۰/۰۰۵} = ۲/۵۷۵$،

۳. جایگذاری در آماره‌ی آزمون، $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$: $\bar{x} = ۳۰/۸$، $\mu = ۳۰$، $n = ۳۲$، $\sigma = ۱/۵$،

$$z = \frac{۳۰/۸ - ۳۰}{۱/۵ / \sqrt{۳۲}} = ۳/۰۱۶ \cong ۳/۰۲.$$

۴. مقایسه مقادیر $|z| = ۳/۰۱۶$ و $z_{۰/۰۰۵} = ۲/۵۷۵$، $(|z| > z_{\alpha/۲})$، نشان می‌دهد که فرض صفر رد می‌شود. به عبارت دیگر متوسط هر گشت ۳۰ دقیقه نیست.

۶-۹. ۱. تعیین فرض‌های آزمون و میزان سطح آزمون $\begin{cases} H_۰ : \mu = ۳۵ \\ H_۱ : \mu < ۳۵ \end{cases}$ ، $\alpha = ۰/۰۵$،

۲. با $n<30$، و σ^2 نامعلوم، ناحیه‌ی رد به صورت $t \le -t_{\alpha,n-1}$ است که در این تمرین $n-1=12-1=11$، و $t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$.

۳. $\bar{x}=33/6$، $s=2/3$، $n=12$، $\mu_0=35$، پس آماره‌ی آزمون برابر است با:

$$t=\frac{33/6-35}{2/3/\sqrt{12}}=-2/108.$$

۴. از آنجا که $-2/108<-t_{0/05,11}=-1/796$، پس فرض صفر رد می‌شود. نتیجه می‌گیریم متوسط زمان سیر هر دور قایق ۳۵ثانیه نیست.

۶-۱۰. ۱. تعیین فرض‌های آزمون و میزان سطح آزمون، $\begin{cases} H_0: \mu=14 \\ H_1: \mu\neq 14 \end{cases} \quad \alpha=0/05,$ ،

۲. $n<30$، و σ^2 نامعلوم، ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $|t|>t_{\alpha/2,n-1}$، با $|t|>t_{0/025,4}=2/776$ است.

۳. برای محاسبه‌ی $t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$، کمیت‌ها را از روی داده‌های تمرین محاسبه می‌کنیم

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}=\frac{72}{5}=14/4 \quad , \quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=0/025.$$

$\mu_0=14$ و $n=5$،

$$t=\frac{14/4-14}{0/158/\sqrt{5}}=5/657.$$

۴. چون $t=5/657$ از $t_{0/025,4}=2/77$ بزرگتر است بنابراین فرض صفر رد می‌شود.

۶-۱۱. ۱. تعیین فرض‌های آزمون و میزان سطح آزمون، $\begin{cases} H_0: \mu_1-\mu_2=0 \\ H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0 \end{cases} \alpha=0/05,$ ،

۲. تعیین ناحیه‌ی بحرانی، $|z|\ge z_{\alpha/2}$ که در آن $z_{\alpha/2}=z_{0/025}=1/96$،

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_1}}}.$$

۳. محاسبه‌ی آماره‌ی آزمون،

$$z=\frac{(9/1-8)-(0)}{\sqrt{\frac{(1/9)^2}{40}+\frac{(2/1)^2}{50}}}=2/604.$$

۴. مقدار $z=2/606$ از ۱/۹۶ بزرگتر است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۱۲. ۱. تعیین فرض‌های آزمون و میزان سطح آزمون، $\begin{cases} H_۰: \mu_۱ - \mu_۲ = -۰/۵ \\ H_۱: \mu_۱ - \mu_۲ < -۰/۵ \end{cases}$ ، $\alpha = ۰/۰۵$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی $z \le -z_{۰/۰۵} = -۱/۶۴۵$، که در آن $z = \dfrac{(\bar{x}_۱ - \bar{x}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{\sqrt{(s_۱^۲/n_۱) + (s_۲^۲/n_۲)}}$ است،

۳. $n_۱ = ۴۰۰$، $\bar{x}_۱ = ۵۳/۲$، $s_۱ = ۲/۴$، $n_۲ = ۵۰۰$، $\bar{x}_۲ = ۵۴/۵$، $s_۲ = ۲/۵$، مقدار آماره‌ی آزمون برابر است با

$$z = \frac{(۵۳/۲ - ۵۴/۵) - (-۰/۵)}{\sqrt{\frac{(۲/۴)^۲}{۴۰۰} + \frac{(۲/۵)^۲}{۴۰۰}}} = -۴/۸۷۷.$$

۴. مقدار آماره‌ی آزمون $z = -۴/۸۷۷$، کوچکتر از $-z_{۰/۰۵} = -۱/۶۴۵$ است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۱۳. ۱. آزمون آماری و میزان خطای نوع اول، $\begin{cases} H_۰: \mu_۱ - \mu_۲ = ۰ \\ H_۱: \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۰ \end{cases}$ ، $\alpha = ۰/۰۵$،

۲. مقادیر مشاهدات از دو جامعه، $n_۱$، و $n_۲$، کوچکتر از ۳۰، هستند و دوجامعه مستقل دارای توزیع نرمال با واریانس‌های برابر فرض شده‌اند، پس ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $|t| \ge t_{\alpha/۲, n_۱-۱, n_۲-۲}$، با $t = \dfrac{(\bar{x}_۱ - x_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{s_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}}}$، $s_p^۲ = \dfrac{(n_۱ - ۱)s_۱^۲ + (n_۲ - ۱)s_۲^۲}{(n_۱ + n_۲ - ۲)}$، $t_{\alpha/۲, n_۱+n_۲-۲} = t_{۰/۰۰۵,۱۰} = ۳/۱۶$ است.

۳. $n_۱ = ۶$، $\bar{x}_۱ = ۷۷/۴$، $s_۱ = ۳/۳$، $n_۲ = ۶$، $\bar{x}_۱ = ۷۲/۲$، $s_۲ = ۲/۱$،

$$s_p^۲ = \frac{(۶-۱)(۳/۳)^۲ + (۶-۱)(۲/۱)^۲}{۶+۶-۲} = ۷/۶۵ \Rightarrow s_p = ۲/۷۶$$

درنتیجه

$$t = \frac{(۷۷/۴ - ۷۲/۲) - ۰}{۲/۷۶\sqrt{۱/۶ + ۱/۶}} = ۳/۲۵۶.$$

۴. ۳/۲۵۶ از $t_{۰/۰۰۵,۱۰} = ۳/۱۶$ بزرگتر نیست، پس دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

۶-۱۴. ۱. $\begin{cases} H_۰: \mu_۱ - \mu_۲ = ۰ \\ H_۱: \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۰ \end{cases}$ ، $\alpha = ۰/۰۵$

۲. ناحیه‌ی رد به‌صورت $|t| \geq t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$، با $t = \dfrac{(\bar{x}_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$،

$s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$، $t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} = t_{0/005, 10} = 3/169$ است.

۳. برای محاسبه‌ی $s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$، ابتدا باید s_1^2 و s_2^2 به‌دست آیند.

$$s_2^2 = 202 \qquad \text{و} \qquad s_1^2 = 363/2$$

در نتیجه

$$s_p^2 = \frac{5(363/2) + (202)}{12 - 2} = 282/6 \Rightarrow s_p = 16/81$$

با داشتن $\bar{x}_1 = 144$، $\bar{x}_2 = 149$، $n_1 = n_2 = 6$، مقدار t برابر است با:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{144 - 149 - 0}{16/8\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = -0/515.$$

۴. مقدار ۰/۵۱ از ۳/۱۶۹ بزرگتر نیست پس فرض صفر رد نمی‌شود.

۶-۱۵. به علت وابستگی درونی جفت مشاهدات، از روش آزمون‌های مقایسه‌ی جفتی استفاده می‌کنیم. برای به‌دست آوردن $\bar{d}$ و s_d، متغیرها را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

y_i : وزن بعد از ورزش و x_i : وزن قبل از ورزش

$$d_i = x_i - y_i$$

d_i	d_i
۱۳	۶
۷	۱
−۱	۴
۵	۳
۳	۲
۲	۶
−۱	۱۲
۰	۴

۱. آزمون آماری و میزان خطای نوع اول، $\begin{cases} H_{\circ}: \bar{d} = \circ \\ H_{1} = \bar{d} > \circ \end{cases}$، $\alpha = \circ/\circ ۵$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی $t > t_{\alpha, n-1}$، که درآن $t = \dfrac{\bar{d} - \circ}{s_d / \sqrt{n}}$، و $t_{\alpha, n-1} = t_{\circ/\circ ۵, ۱۶-1} = ۱/۷۵۳$،

۳. از روی مقادیر $\bar{d} = ۴/۱۲۵$، $s_d = ۴/\circ ۶۴$، $n = ۱۶$، مقدار t، را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{۴/۱۲۵}{۴/\circ ۶۴/\sqrt{۱۶}} = ۴/\circ ۶.$$

۴. نتیجه‌گیری از روی مقایسه‌ی $t = ۴/\circ ۶$ و $t_{\circ/\circ ۵, ۱۵} = ۱/۷۵۳$ انجام می‌گیرد که منجر به رد فرض صفر می‌گردد.

۶-۱۶. براساس نمادگذاری زیر، آزمون مقایسه‌ی جفتی را انجام می‌دهیم.

بعد از برنامه ایمنی : y_i

قبل از برنامه ایمنی : x_i

$$d_i = x_i - y_i$$

و لذا مشاهدات به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند.

d_i	d_i
۶	۹
۶	۱۳
۵	۲
۲	۵
۶	۲−

۱. $\begin{cases} H_{\circ}: \bar{d} = \circ \\ H_{1} = \bar{d} > \circ \end{cases}$، $\alpha = \circ/\circ ۵$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $t > t_{\alpha, n-1}$،با $t = \dfrac{\bar{d} - \circ}{s_d / \sqrt{n}}$، $t_{\alpha, n-1} = t_{\circ/\circ ۵, ۱\circ -1} = ۱/۸۳۳$،

۳. با مقادیر $\bar{d} = ۵/۲$، $s_d = ۴/\circ ۷۷$، $n = ۱\circ$، داریم

$$t = \frac{۵/۲ - \circ}{۴/\circ ۷۷/\sqrt{۱\circ}} = ۴/\circ ۳۳.$$

۴. مقایسه‌ی $t = ۴/\circ ۳۳$ و $t_{\circ/\circ ۵, ۹} = ۱/۸۳۳$، به رد فرض $H_{\circ}$ منجر می‌شود.

۶-۱۷. تحت شرط نرمال بودن با واریانس σ^2 جامعه، در نمونه‌های n تـایی، واریـانس

نمونه‌ای S^2، ناآریب با واریانس $\frac{2\sigma^2}{n-1}$ است. پس با nهـای بـزرگ، $Z=\frac{S^2-\sigma^2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2(n-1)}}}$

دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. برای انجام آزمون

$$\begin{cases}\sigma^2=\sigma_0^2\\ \sigma^2>\sigma_0^2\end{cases}$$

از ناحیه‌ی ردی به‌صورت $S^2\geq c$، در نظر می‌گیریم. با معین بودن خطای نوع اول،

$$\alpha=P(H_0\text{ فرض رد }|\text{ باشد درست } H_0\text{ فرض })=P(S^2\geq c\,|\,\sigma^2=\sigma_0^2)$$

$$=P(\frac{S^2-\mu_{s^2}}{\sigma_{s^2}}\geq\frac{c-\mu_{s^2}}{\sigma_{s^2}}\,|\,\sigma^2=\sigma_0^2)=P(\frac{S^2-\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^4/(n-1)}}\geq\frac{-\sigma_0^2}{\sqrt{2(n-1)}})$$

$$=P(Z>\underbrace{\frac{c-\sigma_0^2}{\sqrt{2\sigma_0^4/(n-1)}}}_{z_\alpha})$$

پس

$$z_\alpha=\frac{c-\sigma_0^2}{\sqrt{2\sigma_0^2/(n-1)}}\quad\text{یا}\quad c-\sigma_0^2=z_\alpha\sqrt{2\sigma_0^2/(n-1)}$$

$$c=\sigma_0^2+z_\alpha\sigma_0^2\sqrt{2\sigma_0^2/(n-1)}$$

یا

$$c=\sigma_0^2(1+z_\alpha\sqrt{2\sigma_0^2/(n-1)})$$

به‌طریق مشابه برای انجام آزمون $\begin{cases}\sigma^2=\sigma_0^2\\ \sigma^2<\sigma_0^2\end{cases}$، ناحیه‌ی رد به‌صورت $S^2\leq -c$، است که در آن $c=\sigma_0^2(1-z_\alpha\sqrt{2\sigma_0^2/(n-1)})$ به‌دست می‌آید.

همچنین در آزمون $\begin{cases}H_0:\sigma^2=\sigma_0^2\\ H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2\end{cases}$، ناحیه‌ی رد در سطح α، به‌صورت زیر بـه‌دسـت می‌آید:

$$s^2\leq\sigma_0^2(1-z_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)})\ \text{یا}\ s^2\leq\sigma_0^2(1+z_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)})$$

۶-۱۸. ۱. $\begin{cases} H_0 : \sigma = 0/01 \\ H_1 : \sigma < 0/01 \end{cases}$, $\alpha = 0/05$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha, n-1} = \chi^2_{0/95, 8} = 2/73$ ، با $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$، است.

۳. مقدار آماره‌ی آزمون از روی مقادیر $s^2 = (0/0086)^2$ ، $\sigma_0^2 = (0/01)^2$، و $n = 9$، برابر است با:

$$\chi^2 = \frac{8(0/0086)^2}{(0/01)^2} = 5/9168.$$

۴. مقایسه‌ی $\chi^2 = 5/9168$ با $2/73$ نشان می‌دهد که فرض صفر رد می‌شود.

۶-۱۹. ۱. $\begin{cases} H_0 : \sigma = 250 \\ H_1 : \sigma \neq 250 \end{cases}$, $\alpha = 0/01$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت

$$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha, n-1} = \chi^2_{0/995, 23} = 9/26 \quad \text{یا} \quad \chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0/005, 23} = 44/81$$

با $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$، است.

۳. $n = 24$ ، $s = 238$ ، $\sigma_0 = 250$، در نتیجه

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{23(238)^2}{(250)^2} = 20/84.$$

۴. مقدار $\chi^2 = 20/84$ از $44/81$ بزرگتر نیست و از $9/26$ کوچکتر نیست، پس در ناحیه‌ی رد قرار نمی‌گیرد، در نتیجه فرض H_0 رد نمی‌شود.

۶-۲۰. مشابه‌ی تمرین فوق حل می شود.

۶-۲۱. ۱. $\begin{cases} H_0 : \sigma = 0/41 \\ H_1 : \sigma < 0/41 \end{cases}$, $\alpha = 0/05$ ،

۲. ناحیه‌ی بحرانی $z > z_\alpha = z_{0/05} = 1/645$، با

$$z = \left(\frac{s}{\sigma_0} - 1\right)\sqrt{2(n-1)}.$$

۳. $s = 0/49$ ، $n = 50$ ، $\sigma_0 = 0/41$، پس

$$z=\left(\frac{۰/۴۹}{۰/۴۱}-۱\right)\sqrt{۲(۵۰-۱)}=(۰/۱۹۵)(۹/۸۹۹)=۱/۹۳.$$

۴. مقایسه‌ی $z=۱/۹۳$ با $۱/۶۴۵$ منجر به رد فرض صفر می‌گردد.

۶-۲۲. ۱. $\begin{cases}H_۰:\sigma_۱-\sigma_۲=۰\\ H_۱:\sigma_۱-\sigma_۲>۰\end{cases}$ یا $\begin{cases}H_۰:\sigma_۱=\sigma_۲\\ H_۱:\sigma_۱<\sigma_۲\end{cases}$ ، $\alpha=۰/۰۵$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $f\geq f_{\alpha,n_۱-۱,n_۲-۱}=f_{۰/۰۵,۴-,۴-۱}=۹/۲۸$ ، با $f=\dfrac{\sigma_۲^۲s_۱^۲}{\sigma_۱^۲s_۲^۲}$ ،

۳. $s_۱=۳۱$ ، $s_۲=۲۶$ ، $\sigma_۱=\sigma_۲$ ، $f=\dfrac{s_۱^۲}{s_۲^۲}=\dfrac{(۳۱)^۲}{(۲۶)^۲}=۱/۴۲$ ،

۴. از کوچکی مقدار $f=۱/۴۲$ در مقایسه با عدد جدول، ۹/۲۸، نتیجه می‌گیریم که فرض صفر رد می‌شود.

۶-۲۳. ۱. $\begin{cases}H_۰:\sigma_۱^۲=\sigma_۲^۲\\ H_۱:\sigma_۱^۲\neq\sigma_۲^۲\end{cases}$ ، $\alpha=۰/۱$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت $f\geq f_{\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}=f_{۰/۰۵,۵,۵}=۵/۰۵$ ، با $f=\dfrac{\sigma_۲^۲s_۱^۲}{\sigma_۱^۲s_۲^۲}$ ،

۳. $s_۱=۳/۳$ ، $s_۲=۲/۱$ ، $\sigma_۱^۲=\sigma_۲^۲$ ، $f=\dfrac{s_۱^۲}{s_۲^۲}=\dfrac{(۳/۳)^۲}{(۲/۱)^۲}=۲/۴۶۹$ ،

۴. $f=۲/۴۹$ از مقدار $۵/۰۵$ کوچکتر است، پس دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

۶-۲۴. ۱. $\begin{cases}H_۰:\sigma_۱^۲=\sigma_۲^۲\\ H_۱:\sigma_۱^۲\neq\sigma_۲^۲\end{cases}$ ، $\alpha=۰/۰۲$،

۲. $f\geq f_{\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}=f_{۰/۰۱,۵,۵}=۱۱$ با $f=\dfrac{\sigma_۲^۲s_۱^۲}{\sigma_۱^۲s_۲^۲}$ ،

۳. $s_۱^۲=۳۶۳/۲$ ، $s_۲^۲=۲۰۲$ ، $f=\dfrac{s_۱^۲}{s_۲^۲}=\dfrac{۳۶۳/۲}{۲۰۲}=۱/۷۹۸$ ،

۴. مقدار $f=۱/۷۹۸$ از ۱۱ کوچکتر است پس فرض صفر رد نمی‌شود.

۶-۲۵. ۱. $\begin{cases} H_0: \theta_1 = \theta_2 \\ H_1: \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$, $\alpha = 0/05$،

۲. $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-1}$، با $\chi^2_{\alpha,k-1} = \chi^2_{0/05,1} = 3/841$، $\hat{\theta} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$، $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{x_i - n_i\hat{\theta}}{\sqrt{n_i\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}}\right)^2$،

۳. $x_1 = 46$، $n_1 = 400$، $x_2 = 18$، $n_2 = 200$، $\hat{\theta} = \frac{46+18}{400+200} = 0/1067$،

$$\chi^2 = \frac{(46 - 400(0/106))^2}{400(0/1067)(0/894)} + \frac{(18 - 200(0/106))^2}{200(0/106)(0/894)} = 0/874.$$

۴. $\chi^2 = 0/874$ که کوچکتر از $\chi^2_{0/05,1}$ است در نتیجه فرض صفر رد می‌شود.

۶-۲۶. از اینکه نمونه‌های تصادفی از دو جامعه‌ی دو جمله‌ای مستقل آمده است پس برای دو برآوردگر $\hat{\theta}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ و $\hat{\theta}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ ،

$$E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \theta_1 - \theta_2 \quad , \quad \operatorname{var}(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}.$$

برای متغیر تصادفی X با توزیع دوجمله‌ای، بنابه قضیه‌ی حد مرکزی که $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$، دارای توزیع نرمال است. با قرار دادن $X = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$، $\mu = E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)$، و $\sigma^2 = \operatorname{var}(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)$،

$$Z = \frac{(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) - E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)}{\sqrt{\operatorname{var}(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)}} = \frac{\left(\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}\right) - \theta_1 - \theta_2}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

کمیتی حاصل می‌شود که ترکیبی از پارامترهای مجهول و برآوردگرهای آنهاست ولی توزیع‌اشان به پارامتر مجهول بستگی ندارد. پس می‌تواند یک کمیت لولایی تلقی شود. بنابراین، برای انجام آزمون $H_0: \theta_1 = \theta_2$، در برابر $H_1: \theta_1 > \theta_2$، ناحیه‌ی رد به صورت $z > z_\alpha$ می‌شود:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{فرض } H_0 \text{ رد} | \text{ درست باشد } H_0) = P(Z > z_\alpha | \theta_1 = \theta_2) \\
&= P\left(\frac{(X_1/n_1 - X_2/n_2) - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)/(n_1) + \theta_2(1-\theta_2)/(n_2)}} > z_\alpha | \theta_1 = \theta_2\right) \\
&= P\left(\frac{X_1/n_1 - X_2/n_2}{\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)/n_1 + \theta_2(1-\theta_2)/n_2}} > z_\alpha\right) = P\left(\frac{X_1/n_1 - X_2/n_2}{\sqrt{\theta(1-\theta)(1/n_1 + 1/n_2)}} > z_\alpha\right)
\end{aligned}$$

تحت فرض صفر $\theta_۱=\theta_۲=\theta$، برآورد θ ترکیبی از $x_۱$، $n_۱$، $x_۲$، و $n_۲$، با فرمول $\hat{\theta}=\frac{x_۱+x_۲}{n_۱+n_۲}$، با شرط بزرگ بودن $n_۲$ و $n_۱$، است. و لذا در تابع آزمون فوق به‌جای کمیت نامعلوم θ، از برآوردگر آن استفاده می‌کنیم. برحسب آزمون $H_۰:\theta_۱=\theta_۲$، در برابر $H_۱:\theta_۱<\theta_۲$، ناحیه‌ی رد به‌صورت $z<-z_\alpha$ در نظر گرفته می‌شود، همچنین در آزمون $\begin{cases}H_۰:\theta_۱=\theta_۲\\ H_۱:\theta_۱\neq\theta_۲\end{cases}$، ناحیه‌ی رد به‌صورت $|z|>z_{\alpha/۲}$ استفاده می‌شود که در آن

$$\hat{\theta}=\frac{x_۱+x_۲}{n_۱+n} \quad , \quad z=\frac{x_۱/n_۱-x_۲/n_۲}{\sqrt{\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})(۱/n_۱+۱/n_۲)}}$$

است.

۶–۲۷. با $e_{i۲}=n_i(۱-\hat{\theta})$ و $e_{i۱}=n_i\hat{\theta}$ داریم

$$\begin{aligned}
\chi^۲&=\sum_{i=۱}^{k}\frac{(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}=\sum_{i=۱}^{k}\frac{[(۱-\hat{\theta})+\hat{\theta}](x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}\\
&=\sum_{i=۱}^{k}\left\{\frac{(۱-\hat{\theta})(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}+\frac{\hat{\theta}(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}\right\}\\
&=\sum_{i=۱}^{k}\left\{\frac{(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}}+\frac{(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i(۱-\hat{\theta})}\right\}\\
&=\sum_{i=۱}^{k}\left\{\frac{(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}}+\frac{(n_i(۱-(۱-\hat{\theta}))-x_i)^۲}{n_i(۱-\hat{\theta})}\right\}\\
&=\sum_{i=۱}^{k}\left\{\frac{(x_i-n_i\hat{\theta})^۲}{n_i\hat{\theta}}+\frac{((n_i-x_i)-n_i(۱-\hat{\theta}))^۲}{n_i(۱-\hat{\theta})}\right\}\\
&=\sum_{i=۱}^{k}\left\{\frac{(f_{i۱}-e_{i۱})^۲}{e_{i۱}}+\frac{(f_{i۲}-e_{i۲})^۲}{e_{i۲}}\right\}=\sum_{i=۱}^{n}\left\{\sum_{j=۱}^{۲}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^۲}{e_{ij}}\right\}\\
&=\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{۲}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^۲}{e_{ij}}.
\end{aligned}$$

۶–۲۸. با $k=۲$،

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{2}\frac{(x_i-n_i\hat{\theta})^2}{n_i\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(x_i-n_i\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)^2}{n_i\left(\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)\left(1-\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)}$$

$$=\frac{\left(x_1-n_1\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)^2}{n_1\left(\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{(n_1+n_2)-(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)}+\frac{\left(x_2-n_2\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)^2}{n_2\left(\dfrac{(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)\left(\dfrac{(n_1+n_2)-(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{x_1(n_1+n_2)-n_1(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)^2}{n_1\left(\dfrac{(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}{(n_1+n_2)^2}\right)}+\frac{\left(\dfrac{x_2(n_1+n_2)-n_2(x_1+x_2)}{n_1+n_2}\right)^2}{n_2\left(\dfrac{(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}{(n_1+n_2)^2}\right)}$$

$$=\frac{[x_1(n_1+n_2)-n_1(x_1+x_2)]^2}{n_1(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}-\frac{[x_2(n_1+n_2)-n_2(x_1+x_2)]^2}{n_2(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}$$

$$=\frac{n_2[x_1(n_1+n_2)-n_1(x_1+x_2)]^2+n_1[x_2(n_1+n_2)-n_2(x_1+x_2)]^2}{n_1n_2(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}$$

$$=\frac{n_2[n_2x_1-n_1x_2]^2+n_1[-(x_1n_2-n_1x_2)]^2}{n_1n_2(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}$$

$$=\frac{(n_2x_1-n_1+x_2)^2(n_1+n_2)}{n_1n_2(x_1+x_2)[(n_1+n_2)-(x_1+x_2)]}$$

۶-۲۹. ۱. $\begin{cases}H_0:\theta_1=\theta_2\\ H_1:\theta_1>\theta_2\end{cases}\quad,\quad \alpha=0/05$،

۲. $z>z_{0/05}=1/645$، با $\hat{\theta}=\dfrac{x_1+x_2}{n_1+n_2}\ ,\ z=\dfrac{x_1/n_1-x_2/n_2}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})(1/n_1+1/n_2)}}$،

۳. $x_1=82$، $n_1=200$، $x_2=87$، $n_2=300$، $\hat{\theta}=\frac{82+87}{200+300}=0/338$،

$$z=\frac{\frac{۸۲}{۲۰۰}-\frac{۸۷}{۳۰۰}}{\sqrt{۰/۳۳۸(۰/۶۶۲)(\frac{۱}{۲۰۰}+\frac{۱}{۳۰۰})}}=\frac{۰/۱۲}{۰/۰۴۳}=۲/۷۸.$$

۴. $|z|=۲/۷۸$ از ۱/۶۴۵ بزرگتر است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۳۰. برای آزمون فرض $\theta=\theta_۰$، در برابر $\theta\neq\theta_۰$، ناحیه‌ی بحرانی به‌صورت

$$x\le k'_{\alpha/۲} \quad \text{یا} \quad x>k_{\alpha/۲}$$

است که در آن $k'_{\alpha/۲}$ بزرگترین عدد صحیحی است که برای آن $\sum_{y=۰}^{k'_{\alpha/۲}}b(y;n,\theta_۰)\le\alpha/۲$، و $k_{\alpha/۲}$ کوچکترین عدد صحیحی است که برای آن $\sum_{y=k_{\alpha/۲}}^{n}b(y;n,\theta)\le\alpha/۲$. مطابق با مفروضات تمرین، $n=۲۰$ در نتیجه با انتخاب $k_{\alpha/۲}=۱۵$ از جدول توزیع دوجمله‌ای در پیوست کتاب، داریم

$$\sum_{y=۰}^{k'_{\alpha/۲}}b(y;۲۰,۰/۵)\le۰/۰۲۰۶$$

همچنین از روی جدول، $k'_{\alpha/۲}=۵$ است. پس ناحیه‌ی رد به‌صورت $x\ge۱۵$ یا $x\le۵$، می‌شود.

۵-۳۱. ۱. $\begin{cases}H_۰:\theta=۰/۴\\ H_۱:\theta>۰/۴\end{cases}$, $\alpha=۰/۰۵$،

۲. در سطح $\alpha=۰/۰۵$، اگر احتمال وقوع آنکه X از بزرگتر از مقدار همتای یافته‌اش شود($P-$ مقدار)، کوچکتر α، فرض صفر را رد می‌کنیم.

۳. $x=۱۰$، $n=۱۸$، $\theta=۰/۴$،

$$\text{مقدار}-P=P(X\ge۱۰)=\sum_{x=۱۰}^{۱۸}b(x;۱۸,۰/۴)=۰/۰۷۷۱+۰/۰۳۷۴$$
$$+۰/۰۱۴۵+۰/۰۰۴۵+۰/۰۰۱+۰/۰۰۰۲=۰/۱۳۴۸.$$

۴. مقدار $P=۰/۱۳۴۸-$ مقدار از ۰/۰۵ بزرگتر است پس دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

۶-۳۲. ۱. $\begin{cases} H_0 : \theta_1 = 0/3 \\ H_1 : \theta_1 < 0/3 \end{cases}$, $\alpha = 0/05$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی از مقایسه‌ی $P-$ مقدار و $\alpha = 0/05$ انجام می‌شود. در این تمرین $P-$ مقدار، عبارت است از احتمال وقوع پیشامد اینکه X کمتر از همتای یافته‌ی خود کمتر باشد.

۳. به‌ازای $x=1$، $n=19$، $\theta = 0/3$،

$$P- \text{مقدار} = P(X \le 1) == b(0;19,0/3) + b(1;19,0/3)$$
$$= 0/0011 + 0/0093 = 0/0104$$

۴. $P- = 0/0104$ مقدار از $\alpha = 0/05$ کمتر است، پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۳۳. ۱. $\begin{cases} H_0 : \theta = 0/4 \\ H_1 : \theta \ne 0/4 \end{cases}$, $\alpha = 0/01$،

۲. اگر $P-$ مقدار از $\alpha = 0/01$ کوچکتر باشد، فرض صفر رد می‌شود. در اینجا اگر X تعداد موفقیت‌ها باشد آنگاه

$$P- \text{مقدار} = 2\max(P(X \ge x), P(X \le x))$$

۳. $x=12$، $n=14$، $\theta = 0/4$،

$$P- \text{مقدار} = P(X \ge 12) = 2\sum_{x=12}^{14} b(x;14,0/4)$$
$$= 2[b(12;14,0/41) + b(13;14,0/4) + b(14;14,0/4)]$$
$$= 2(0/0005 + 0/0001 + 0) = 2(0/0006) = 0/0012$$

۴. $P- = 0/0012$ مقدار و کمتر از $\alpha = 0/01$ است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۳۴. مشابه‌ی تمرین ۶-۳۱، است.

۱. $\begin{cases} H_0 : \theta_1 = 0/2 \\ H_1 : \theta_1 > 0/2 \end{cases}$, $\alpha = 0/01$،

۲. $P-$ مقدار کمتر از $\alpha = 0/01$، منجر به رد فرض صفر می‌شود.

۳. با $x=6$، $n=12$، $\theta = 0/2$، I

$$P- \text{مقدار} = P(X \ge 6) = 2\sum_{x=6}^{12} b(x;12,0/2)$$
$$= 0/0155 + 0/0033 + 0/0005 + 0/001 + 0 + 0 + 0 = 0/0194.$$

۴. $P- = 0/0194$ مقدار، از مقدار $\alpha = 0/01$ بزرگتر است پس دلیلی برای رد فرض

صفر نداریم.

۶-۳۵. مشابه‌ی تمرین ۶-۳۳ است.

۱. $\begin{cases} H_0 : p = 0/6 \\ H_1 : p \neq 0/6 \end{cases} \quad , \quad \alpha = 0/05$،

۲. $P-$ مقدار کمتر از $\alpha = 0/05$، منجر به رد فرض صفر می‌شود.

۳. با $x = 7$، $n = 18$، $\theta = 0/6$،

$$\text{مقدار} - P = P(X \leq 6) = 2\sum_{x=0}^{7} b(x;18,0/6) = 0/1154$$

۴. $P-$ مقدار از $\alpha = 0/05$ بزرگتر است پس دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

۶-۳۶. ۱. $\begin{cases} H_0 : \theta = 0/3 \\ H_1 : \theta \neq 0/3 \end{cases} \quad , \quad \alpha = 0/05$،

۲. $P-$ مقدار کمتر از $\alpha = 0/05$، فرض صفر را رد می‌کند.

۳. $x = 157$، $n = 600$، $\theta = 0/3$،

$$\begin{aligned} \text{مقدار} - P = P(X \leq 157) &= 2P\left(\frac{X - n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0(1-\theta_0)}} \leq \frac{157 - 600(0/3)}{\sqrt{600(0/3)(0/7)}}\right) \\ &= 2P\left(Z < \frac{-23}{11/224}\right) = 2P(Z < -2/05) = 2(0/5 - 0/4798) \\ &= 2(0/0202) = 0/404. \end{aligned}$$

۴. $P = 0/0404 -$ مقدار از $\alpha = 0/05$ کمتر است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۳۷. بنابر تعریف

$$e_{ij} = \hat{\theta}_{i.}\,\hat{\theta}_{.j}\, f = \frac{f_{i.}}{f}\frac{f_{.j}}{f}\, f = \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{f}$$

جمع فراوانی‌های سطری و ستونی عبارتند از:

$$e_{i.} = \sum_{j=1}^{c} e_{ij} = \sum_{j=1}^{c} \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{f} = \frac{f_{i.}}{f}\sum_{j=1}^{c} f_{.j} = f_{i.}$$

$$e_{j.} = \sum_{i=1}^{r} e_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{f} = \frac{f_{.j}}{f}\sum_{j=1}^{c} f_{i.} = f_{.j}$$

لذا

$$\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}e_{ij}=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}\frac{f_{i.}\times f_{.j}}{f}=\frac{1}{f}\left\{\sum_{j=1}^{c}f_{i.}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{r}f_{.j}\right\}=f=\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}f_{ij}$$

۶–۳۸. فرمول بخش مورد نظر $\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$، پس

$$\begin{aligned}\chi^2&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(f_{ij}^2-2f_{ij}e_{ij}+e_{ij}^2)}{e_{ij}}\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}-2f_{ij}+e_{ij}\right)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}-2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}f_{ij}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}e_{ij}\end{aligned}$$

از طرفی چون $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}e_{ij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}f_{ij}=f$ ، بنابراین

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}-2f+f=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}-f$$

۶–۳۹. با توجه به رابطه‌ی $\chi^2+f=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}=f\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}$، داریم:

$$C^2=\frac{\chi^2}{\chi^2+f}=\frac{f\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}-f}{f\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}}=1-\frac{1}{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}}$$

مسئله معادل آن است که بگوییم بیشترین مقداری که $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}$ می‌تواند داشته

باشد چقدر است. فرض کنید $۰ \le a, b, p, q \le ۱$،

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۲}\frac{f_{ij}^{۲}}{f_{i.}f_{.j}} &= \sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۲}\frac{f_{ij}}{f_{i.}}\times\frac{f_{ij}}{f_{.j}} \\
&= pa+(۱-p)b+q(۱-a)+(۱-b)(۱-q) \\
&= p(a-b)+b+q(۱-a-۱+b)+۱-b \\
&= p(a-b)+q(-a+b)+۱ \\
&= (p-q)(a-b)+۱ \le pa+۱ \le ۲
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} \\ f_{۲۱} & f_{۲۲} \end{matrix}} \xrightarrow{f_{ij}/f_{i.}} \boxed{\begin{matrix} \frac{f_{۱۱}}{f_{۱.}} & \frac{f_{۱۲}}{f_{۱.}} \\ \frac{f_{۲۱}}{f_{۲.}} & \frac{f_{۲۲}}{f_{۲.}} \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} p & ۱-p \\ q & ۱-q \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} \\ f_{۲۱} & f_{۲۲} \end{matrix}} \xrightarrow{f_{ij}/f_{.j}} \boxed{\begin{matrix} \frac{f_{۱۱}}{f_{.۱}} & \frac{f_{۱۲}}{f_{.۲}} \\ \frac{f_{۲۱}}{f_{.۱}} & \frac{f_{۲۲}}{f_{.۲}} \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} a & b \\ ۱-a & ۱-b \end{matrix}}$$

بنابراین،

$$C^{۲} = \frac{\chi^{۲}}{\chi^{۲}+f} = ۱-\frac{۱}{\sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۲}\frac{f_{ij}^{۲}}{f_{i.}f_{.j}}} \le ۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$C \le \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای جدول ۳×۳، شیوه‌ی کار بدین منوال است.

۶-۴۰. با اطلاعات داده شده از صورت مسئله، اگر دو متغیر به ترتیب تعداد فرزندان و عکس‌العمل والدین نسبت به درسی الزامی که در دبیرستان عرضه می‌شود، تعریف کنیم:

۱. $\begin{cases} H_۰: \text{مستقل اند } X \text{ و } Y \\ H_۱: \text{وابسته اند } X \text{ و } Y \end{cases}$، $\alpha = ۰/۰۵$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{0/05,(3-1)(3-1)}$ است که در آن $\chi^2_{0/05,4} = 9/48$،
$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}} - f$،

۳. محاسبه‌ی کمیت آماره‌ی آزمون

تعداد فرزندان	۱	۲	۳ یا بیشتر	
ضعیف	۴۸	۴۰	۱۲	$100 = f_{1.}$
مناسب	۵۵	۵۳	۲۹	$137 = f_{2.}$
خوب	۵۷	۴۶	۲۰	$123 = f_{3.}$
	$f_{.1} = 160$	$f_{.2} = 139$	$f_{.3} = 61$	

$$f = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f_{ij} = 360$$

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{(100)(160)}{360} = 44/44 \\ e_{21} = \frac{(137)(160)}{360} = 60/89 \\ e_{31} = \frac{(123)(160)}{360} = 54/66 \end{cases} \quad \begin{cases} e_{12} = 38/61 \;,\; e_{13} = 16/94 \\ e_{22} = 52/9 \;,\; e_{23} = 23/21 \\ e_{32} = 47/49 \;,\; e_{33} = 20/84 \end{cases}$$

و لذا مقدار χ^2 برابر است با:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}} - f = \frac{(48)^2}{44/44} + \frac{(40)^2}{38/61} + \cdots + \frac{(20)^2}{20/84} - 360$$
$$= 364/328 - 360 = 4/328.$$

۴. $\chi^2 = 4/328$ از مقدار $9/48$ کوچکتر است پس دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

۶-۴۱. متغیرهای تصادفی عبارتند از: صافی صدا و درستگیری صدا.

۱. $\begin{cases} H_0: \text{مستقل اند } X \text{ و } Y \\ H_1: \text{وابسته اند } X \text{ و } Y \end{cases}$، $\alpha = 0/01$،

۲. فرض صفر رد می‌شود هرگاه $\chi^2 \geq \chi^2_{0/01,(3-1)(3-1)}$، که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}} - f \quad \text{و} \quad \chi^2_{0/01,4} = 13/277.$$

۳. برای محاسبه‌ی آماره‌ی آزمون چنین عمل می‌کنیم

		صافی صدا			
		ضعیف	متوسط	قوی	
درستگیری	ضعیف	۷	۱۲	۳۱	$f_{1.}=۵۰$
	متوسط	۳۵	۵۹	۱۸	$f_{2.}=۱۱۲$
	قوی	۱۵	۱۳	۰	$f_{3.}=۲۸$
		$f_{.1}=۵۷$	$f_{.2}=۸۴$	$f_{.3}=۴۹$	

$$f=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} f_{ij}=190$$

$$\begin{cases} e_{11}=\frac{(50)(57)}{190}=15 \\ e_{21}=\frac{(112)(57)}{190}=33/6 \\ e_{31}=\frac{(28)(57)}{190}=8/4 \end{cases} \quad \begin{cases} e_{12}=22/1 \\ e_{22}=49/52 \\ e_{32}=12/38 \end{cases} \quad \begin{cases} e_{13}=12/89 \\ e_{23}=28/88 \\ e_{33}=7/22 \end{cases}$$

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}-f=\frac{(7)^2}{15}+\frac{(12)^2}{22/1}+\cdots+\frac{(0)^2}{7/22}-190$$

$$=242/75-190=52/76.$$

۴. $\chi^2=52/76$ از ۱۳/۲۷۷ بزرگتر است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶–۴۲. متغیرهای تصادفی فروشنده و تعداد موارد ناسالم است.

۱. $\begin{cases} H_0: \text{کیفیت محصولات سه فروشنده یکی است} \\ H_1: \text{کیفت محصولات سه فروشنده یکی نیست} \end{cases}$، $\alpha=0/01$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{0/01,(3-1)(3-1)}$، با

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}}-f \quad \text{و} \quad \chi^2_{0/01,4}=13/277.$$

۳.

فروشنده	تعداد موارد ناسالم: رد	قابل پذیرش	سالم	
A	۱۲	۲۳	۸۹	$f_{1.}=۱۲۴$
B	۸	۶۲	۶۲	$f_{2.}=۱۳۲$
C	۲۱	۳۰	۱۱۹	$f_{3.}=۱۷۰$
	$f_{.1}=۴۱$	$f_{.2}=۱۱۵$	$f_{.3}=۲۷۰$	

$$\begin{cases} e_{11} = 11/93 \\ e_{21} = 12/7 \\ e_{31} = 16/36 \end{cases} \quad \begin{cases} e_{12} = 11/93 \\ e_{22} = 35/63 \\ e_{32} = 45/89 \end{cases} \quad \begin{cases} e_{13} = 78/59 \\ e_{23} = 83/66 \\ e_{33} = 107/75 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{f_{ij}^2}{e_{ij}} - f = 465/53 - 426 = 39/53.$$

۴. مقدار $\chi^2 = 39/53$ از $13/277$ بزرگتر است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۴۳. ۱. $\begin{cases} H_0 : \text{سکه‌ها سالم است} \\ H_1 : \text{سکه‌ها سالم نیست} \end{cases}$, $\alpha = 0/01$،

۲. ناحیه‌ی بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, m-t-1}$، که در آن مقدار آماره‌ی آزمون را بخش ۶-۸، با تعداد طبقه‌های ۵، که مقدار مورد انتظار هر یک از روی توزیع دوجمله‌ای قابل محاسبه است، در نظر می‌گیریم.

$$P(X=0) = b(0;4,0/5) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = b(1;4,0/5) = \frac{4}{16}$$

$$P(X=2) = \frac{6}{16}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{16}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{16}$$

تعداد شیرها	۰	۱	۲	۳	۴	جمع
f_i	۱۹	۵۴	۵۸	۲۳	۶	۱۶۰
e_i	۱۰	۴۰	۶۰	۴۰	۱۰	۱۶۰

پس

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5}\frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{e_i} - f = 181/89 - 160 = 21/89.$$

۴. $\chi^2_{0/05,4} = 9/488$ از $\chi^2 = 21/89$ کمتر است دلیلی بر ناسالم بودن سکه‌ها نداریم.

۶-۴۴. فرض کنید متغیر تصادفی X، تعداد اشعه‌ی گامایی که در هر ثانیه از یک

ماده‌ی رادیواکتیو خارج می‌شود، باشد.

۱. $\begin{cases} H_0 : X \sim P(2/4) \\ H_1 : X \nsim P(2/4) \end{cases}, \alpha = 0/05$،

۲. $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,m-1}$، براساس طبقه‌بندی مشاهدات و محاسبه‌ی احتمالات هر طبقه، مقادیر فراوانی‌های نظری به‌دست می‌آیند. در اینجا $m = 7$ می‌باشد.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

۳.

تعداد اشعه گاما	فراوانی f_i	احتمالهای پواسون با $\lambda = 2/4$ $= p_i$	$e_i = np_i$
۰	۱۹	۰/۰۹۰۷	۲۷/۲۱
۱	۴۸	۰/۲۱۷۷	۶۵/۳۱
۲	۶۶	۰/۲۶۱۳	۷۸/۳۹
۳	۷۷	۰/۲۰۹۰	۶۲/۷
۴	۴۴	۰/۱۲۵۴	۳۷/۶۲
۵	۳۵	۰/۰۶۰۲	۱۸/۰۶
$\begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases}$	$14\begin{cases} 10 \\ 4 \end{cases}$	$0/0324\begin{cases} 0/0241 \\ 0/0084 \end{cases}$	$9/72\begin{cases} 7/23 \\ 2/49 \end{cases}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(19 - 27/21)^2}{27/21} + \frac{(48 - 65/31)^2}{65/31} + \cdots + \frac{(14 - 9/72)^2}{9/72}$$
$$= 31/14.$$

۴. $\chi^2 = 31/14$ از $\chi^2_{0/05,6} = 12/592$ بزرگتر است پس فرض اینکه متغیر تـصادفی از این توزیع مشخص آمده باشد رد می‌شود.

۴۵-۶. ۱. $\begin{cases} H_0 : X \sim B(3, p) \\ H_1 : X \nsim B(3, p) \end{cases}, \alpha = 0/05$،

۲. ناحیه‌ی رد $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,m-t-1} = \chi^2_{\alpha,m-1-1} = \chi^2_{\alpha,m-2}$، با $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$،

۳. در توزیع مطرح شده در فرض صفر مقدار p، باید برآورد شود

$$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{nk} = \frac{0(1) + 1(16) + 2(55) + 3(288)}{(300)(3)} = 0/9$$

$$\begin{cases} P(X=0)=\binom{3}{0}(0/9)^0(1-0/9)^{3-0}=0/001 \\ P(X=1)=0/027\ ,\ P(X=2)=0/243\ ,\ P(X=3)=0/729 \end{cases}$$

$$e_1=(300)(0/001)=0/3\ ,\ e_2=8/1\ ,\ e_3=72/9\ ,\ e_4=218/7$$

تعداد کیک‌های به فروش رفته	فراوانی‌های مشاهده شده f_i	احتمال‌های دو جمله ای با $p=0/9, n=3$	فراوانی‌های انتظارمورد e_i
$\begin{cases}0\\1\end{cases}$	$17\begin{cases}1\\16\end{cases}$	$\begin{cases}0/001\\0/027\end{cases}$	$8/4\begin{cases}0/3\\8/1\end{cases}$
۲	۵۵	۰/۲۴۳	۷۲/۹
۳	۲۲۸	۰/۷۲۹	۲۱۸/۷

کوچکی مقدار ۰/۳، منجر ادغام با طبقه بعدی شده است.

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{(f_i-e_i)^2}{e_i}$$
$$=\frac{(17-8/4)^2}{8/4}+\frac{(55-72/9)^2}{72/9}+\frac{(228-218/7)^2}{218/7}=13/595.$$

۴. $\chi^2=13/595$ از $\chi^2_{0/05,1}=3/841$ $\chi^2_{0/05,3-1-1}=$ بزرگتر است پس فرض صفر رد می‌شود.

۶-۴۶. الف)

تعدادها ذره	x_i	f_i
۵ − ۹	۷	۱
۱۰ − ۱۴	۱۲	۱۰
۱۵ − ۱۹	۱۷	۳۷
۲۰ − ۲۴	۲۲	۳۶
۲۵ − ۲۹	۲۷	۱۳
۳۰ − ۳۴	۳۲	۲
۳۵ − ۳۹	۳۹	۱

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}=\frac{(1)(7)+\cdots+(1)(39)}{1+10+\cdots+2+1}=\frac{2000}{100}=20$$

$$s^{۲}=\frac{۱}{n}\sum f_i(x_i-\overline{x})^{۲}=\frac{۱}{۱۰۰}[۱-(۷-۲۰)^{۲}+\cdots+۱(۳۹-۲۰)^{۲}]=۲۵$$

$$s=\sqrt{۲۵}=۵$$

ب)

$$\begin{aligned}P(X<۹/۵)&=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{۹/۵-۲۰}{۵})\\&=P(Z<-۲/۱)=۰/۰۱۷۹,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(۹/۵<X<۱۴/۵)&=P(\frac{۹/۵-۲۰}{۵}<Z<\frac{۱۴/۵-۲۰}{۵})\\&=P(Z>-۱/۱)-P(Z<-۲/۱)\\&=۰/۱۳۵۷-۰/۰۱۷۹=۰/۱۱۷۸,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(۱۴/۵<X<۱۹/۵)&=P(\frac{۱۴/۵-۲۰}{۵}<Z<\frac{۱۹/۵-۲۰}{۵})\\&=P(Z>-۰/۱)-P(Z<-۱/۱)=۰/۴۶۰۲-۰/۱۳۵۷=۰/۳۲۴۵,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(۱۹/۵<X<۲۴/۵)&=P(\frac{۱۹/۵-۲۰}{۵}<Z<\frac{۲۴/۵-۲۰}{۵})\\&=P(Z>-۰/۹)-P(Z<-۰/۱)=۰/۸۱۵۹-۰/۴۶۰۲=۰/۳۵۵۷,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(۲۴/۵<X<۲۹/۵)&=P(\frac{۲۴/۵-۲۰}{۵}<Z<\frac{۲۹/۵-۲۰}{۵})\\&=P(Z>-۱/۹)-P(Z<-۰/۹)=۰/۹۷۱۳-۰/۸۱۵۹=۰/۱۵۵۴,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(۲۹/۵<X<۳۴/۵)&=P(\frac{۲۹/۵-۲۰}{۵}<Z<\frac{۳۴/۵-۲۰}{۵})\\&=P(Z>-۲/۹)-P(Z<-۱/۹)=۰/۹۹۸۱-۰/۹۷۱۳=۰/۰۲۶۸,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X>۳۴/۵)&=P(Z>\frac{۳۴/۵-۲۰}{۵})=۱-P(Z<۲/۹)\\&=۱-۰/۹۹۸۱=۰/۰۰۱۹.\end{aligned}$$

<table>
<tr><th>تعداد ذره</th><th colspan="2">فراوانی f_i</th><th colspan="2">e_i</th></tr>
<tr><td>۵ − ۹</td><td rowspan="2">۱۱</td><td>۱</td><td rowspan="2">۱۳/۵۷</td><td>۱/۷۹</td></tr>
<tr><td>۱۰ − ۱۴</td><td>۱۰</td><td>۱۱/۷۸</td></tr>
<tr><td>۱۵ − ۱۹</td><td colspan="2">۳۷</td><td colspan="2">۳۲/۴۵</td></tr>
<tr><td>۲۰ − ۲۴</td><td colspan="2">۳۶</td><td colspan="2">۳۵/۵۷</td></tr>
<tr><td>۲۵ − ۲۹</td><td rowspan="3">۱۶</td><td>۱۳</td><td rowspan="3">۱۸/۴۱</td><td>۱۵/۵۴</td></tr>
<tr><td>۳۰ − ۳۴</td><td>۲</td><td>۲/۶۸</td></tr>
<tr><td>۳۵ − ۳۹</td><td>۱</td><td>۰/۱۹</td></tr>
</table>

$$\chi^۲ = \sum \frac{(f_i - e_i)^۲}{e_i} = \sum \frac{f_i^۲}{e_i} - f$$

$$= \left[\frac{۱۱^۲}{۱۳/۵۷} + \frac{۳۷^۲}{۳۲/۴۵} + \frac{۳۶^۲}{۳۵/۵۷} + \frac{۱۶}{۱۸/۴۱} \right] - ۱۰۰$$

$$= ۱۰۱/۴۵ - ۱۰۰ = ۱/۴۵$$

اگر آزمون را به‌صورت $\begin{cases} H_۰ : X \sim N(\mu, \sigma^۲) \\ H_۱ : X \nsim N(\mu, \sigma^۲) \end{cases}$، در نظر بگیریم، چون مقدار $\chi^۲ = ۱/۴۵$ از $\chi^۲_{۰/۰۵, ۴-۲-۱} = \chi^۲_{۰/۰۵, ۱} = ۳/۸۴۱$ کوچکتر است دلیلی برای رد فرض صفر نداریم.

حل تمرین فصل هفتم
رگرسیون

۱-۷. ابتدا چگالی حاشیه‌ای Y را به‌دست می‌آوریم:

$$g(y) = \int f(x,y)dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dx = \frac{1}{(1+y)^2}; \qquad y > 0$$

با داشتن چگالی فوق و چگالی توأم، تابع چگالی شرطی X به شرط $Y = y$ محاسبه می‌شود.

$$w(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{g(y)} = \frac{xe^{-x(1+y)}}{\frac{1}{(1+y)^2}}$$
$$= (1+y)^2 xe^{-x(1+y)} \qquad x > 0$$

بنابراین به‌ازای $y > 0$، مقدار امید شرطی X به شرط $Y = y$ برابر است با:

$$\mu_{X|y} = E(X \mid Y = y) = \int xw(x \mid y)dx$$
$$= \int_{0}^{+\infty} x\,(1+y)^2 xe^{-x(1+y)}dx$$
$$= \frac{2}{1+y}.$$

۲-۷. مشابه‌ی تمرین ۷-۱ است.

$$g(y) = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x+3y)dx = \frac{2}{5}(1+3y) \qquad 0 < y < 1$$
$$g(x) = \int_{0}^{1} \frac{2}{5}(2x+3y)dy = \frac{1}{5}(4x+3) \qquad 0 < x < 1$$
$$w(x \mid y) = \frac{2x+3y}{1+3y} \qquad 0 < x < 1$$
$$w(y \mid x) = \frac{4x+6y}{4x+3} \qquad 0 < y < 1$$

در نتیجه امیدهای شرطی به‌ترتیب عبارتند از

$$\mu_{Y|x} = \int_0^1 y \frac{4x+6y}{4x+3} dy = \frac{2x+2}{4x+3}$$

$$\mu_{X|y} = \int_0^1 x \frac{2x+3y}{1+3y} dx = \frac{4+9y}{6(1+3y)}.$$

۷–۳. برای یافتن $\mu_{X|y}$، ابتدا چگالی حاشیه‌ای Y را به‌دست می‌آوریم:

$$g(y) = \int_0^y 6x dx = 3x^2 |_0^y = 3y^2$$

و یا

$$g(y) = \begin{cases} 3y^2 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

بنابراین

$$w(x|y) = \frac{f(x,y)}{g(y)} = \frac{6x}{3y^2} = \frac{2x}{y^2}$$

یا

$$w(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2} & 0 < x < y \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

امید ریاضی شرطی عبارت است از

$$\mu_{X|y} = \int_0^y x.\frac{2x}{y^2} dx = \frac{2}{3y^2} x^3 |_0^y = \frac{2}{3} y.$$

به‌طور مشابه عملیات را برای به‌دست آوردن $\mu_{Y|x}$، انجام می‌دهیم

$$g(y) = \int_x^1 6x dx = 6xy |_x^1 = 6x - 6x^2$$

و یا

$$g(y) = \begin{cases} 6x - 6x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در نتیجه

$$w(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & x<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

و لذا

$$\begin{aligned}\mu_{Y|x} &= \int_x^1 y.\frac{1}{1-x}dy\\ &=\frac{1}{2(1-x)}y^2\,|_x^1\\ &=\frac{1}{2(1-x)}(1-x^2)\\ &=\frac{1+x}{2}.\end{aligned}$$

۴-۷. باید نشان دهیم $\rho=0$، برای این کار کمیت

$$\sigma_{12}=E(XY)-E(X)E(Y)$$

را محاسبه می‌کنیم.

$$E(XY)=\int_0^1\int_{-y}^{y}x\,y\,dx\,dy=\int_0^1\frac{x^2}{2}\,|_{-y}^{y}=\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy=0$$

و

$$E(Y)=\int_0^1\int_{-y}^{y}y\,dx\,dy=\int_0^1 y(y+y)dy=\int_0^1 2y^2\,dy=\frac{2}{3}y^3\,|_0^1=\frac{2}{3}$$

و

$$E(X)=\int_0^1\int_{-y}^{y}x\,dx\,dy=\int_0^1 y\,(\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2})\,dy=\int_0^1 y^3\,dy=0$$

در نتیجه

$$\sigma_{12}=0-0\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

یا

$$\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\ \sigma_2}=0.$$

برای برقرار نبودن استقلال بین دو متغیر تصادفی X و Y، برقرار نبودن تساوی

بین حاصل‌ضرب چگالی‌های حاشیه‌ای با چگالی توأم، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$g(y) = \int_{-y}^{y} dx = y + y = ۲y$$

یا

$$g(y) = \begin{cases} ۲y & ۰ < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و

$$h(x) = \int_{-x}^{۱} dy + \int_{x}^{۱} dy = ۱ + x + ۱ - x = ۲$$

یا

$$h(x) = \begin{cases} ۲ & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

با انتخاب $x = \frac{۱}{۳}$ و $y = \frac{۱}{۳}$،

$$f(\tfrac{۱}{۳}, \tfrac{۱}{۴}) \neq h(\tfrac{۱}{۳}).g(\tfrac{۱}{۳})$$

به عبارت دیگر

$$۱ \neq ۲ \times \tfrac{۲}{۳}$$

۷–۵. الف) داریم $n = ۷$، $\sum x = ۷۰$، $\sum x^{۲} = ۸۱۲$، $\sum y = ۶۸$، $\sum xy = ۸۶۲$،

$$s_{xx} = ۸۱۲ - \tfrac{۱}{۷}(۷۰)^{۲} = ۱۱۲$$
$$s_{sy} = ۸۶۲ - \tfrac{۱}{۷}(۷۰)(۶۸) = ۱۸۲$$

در نتیجه

$$\hat{\beta} = \tfrac{۱۸۲}{۱۱۲} = ۱/۶۲۵.$$
$$\hat{\alpha} = \tfrac{۶۸}{۷} - (۱/۶۲۸)(\tfrac{۷۰}{۷}) = -۶/۵۴$$

و معادله‌ی خط کمترین مربعات خطا برابر می‌شود با

$$\hat{y} = -۶۸۵۴ + ۱/۶۲۵x.$$

ب) با قرار دادن $x = ۷$، مقدار پیش‌بینی برابر است با

$$\hat{y} = -۶/۵۴ + ۱/۶۲۵(۷) = ۶/۸$$

تقریباً $\hat{y} = ۵$ می‌شود.

۷–۶. داریم: $n = ۱۲$، $\sum x = ۵۰۷$، $\sum x^{۲} = ۲۲۲۶۵$، $\sum y = ۱۴۴$، $\sum xy = ۶۳۱۴$،

$$s_{xx} = ۲۲۲۶۵ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰۷)^{۲} = ۸۴۴/۲۵$$
$$s_{xy} = ۶۳۱۴ - \frac{۱}{۱۲}(۵۰۷)(۱۴۴) = ۲۳۰$$

پس

$$\hat{\beta} = \frac{۲۳۰}{۸۴۴/۵} = ۰/۲۷$$
$$\alpha = \frac{۱۴۴}{۱۲} - (۰/۲۷)(\frac{۵۰۷}{۱۲}) = ۰/۴۹$$

معادله‌ی خط کمترین مربعات

$$\hat{y} = ۰/۴۹ + ۰/۲۷x.$$

ب) به‌ازای $x = ۳۸$،

$$\hat{y} = ۰/۴۹ + (۰/۲۷)(۳۸) = ۱۰/۸۴ \cong ۱۱.$$

جدول ۱. احتمال‌های تجمعی دو جمله‌ای $P[X\le c]=\sum_{x=0}^{c}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$

		p										
	c	**0/05**	**0/1**	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**	**0/95**
n=1	**0**	0/950	0/900	0/800	0/700	0/600	0/500	0/400	0/300	0/200	0/100	0/050
	1	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=2	**0**	0/903	0/810	0/640	0/490	0/360	0/250	0/160	0/090	0/040	0/010	0/003
	1	0/998	0/990	0/960	0/910	0/840	0/750	0/640	0/510	0/360	0/190	0/098
	2	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=3	**0**	0/857	0/729	0/512	0/343	0/216	0/125	0/064	0/027	0/008	0/001	0/000
	1	0/993	0/972	0/896	0/784	0/648	0/500	0/352	0/216	0/104	0/028	0/007
	2	1/000	0/999	0/992	0/973	0/936	0/875	0/784	0/657	0/488	0/271	0/143
	3	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=4	**0**	0/815	0/656	0/410	0/240	0/130	0/063	0/026	0/008	0/002	0/000	0/000
	1	0/986	0/948	0/819	0/652	0/475	0/313	0/179	0/084	0/027	0/004	0/000
	2	1/000	0/996	0/973	0/916	0/821	0/688	0/525	0/348	0/181	0/052	0/014
	3	1/000	1/000	0/998	0/992	0/974	0/938	0/870	0/760	0/590	0/344	0/185
	4	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=5	**0**	0/774	0/590	0/328	0/168	0/078	0/031	0/010	0/002	0/000	0/000	0/000
	1	0/977	0/919	0/737	0/528	0/337	0/188	0/087	0/031	0/007	0/000	0/000
	2	0/999	0/991	0/942	0/837	0/683	0/500	0/317	0/163	0/058	0/009	0/001
	3	1/000	1/000	0/993	0/969	0/913	0/813	0/663	0/472	0/263	0/081	0/023
	4	1/000	1/000	1/000	0/998	0/990	0/969	0/922	0/832	0/672	0/410	0/226
	5	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=6	**0**	0/735	0/531	0/262	0/118	0/047	0/016	0/004	0/001	0/000	0/000	0/000
	1	0/967	0/886	0/655	0/420	0/233	0/109	0/041	0/011	0/002	0/000	0/000
	2	0/998	0/984	0/901	0/744	0/544	0/344	0/179	0/070	0/017	0/001	0/000
	3	1/000	0/999	0/983	0/930	0/821	0/656	0/456	0/256	0/099	0/016	0/002
	4	1/000	1/000	0/998	0/989	0/959	0/891	0/767	0/580	0/345	0/114	0/033
	5	1/000	1/000	1/000	0/999	0/996	0/984	0/953	0/882	0/738	0/469	0/265
	6	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=7	**0**	0/698	0/478	0/210	0/082	0/028	0/008	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/956	0/850	0/577	0/329	0/159	0/063	0/019	0/004	0/000	0/000	0/000
	2	0/996	0/974	0/852	0/647	0/420	0/227	0/096	0/029	0/005	0/000	0/000
	3	1/000	0/997	0/967	0/874	0/710	0/500	0/290	0/126	0/033	0/003	0/000
	4	1/000	1/000	0/995	0/971	0/904	0/773	0/580	0/353	0/148	0/026	0/004
	5	1/000	1/000	1/000	0/996	0/981	0/938	0/841	0/671	0/423	0/150	0/044
	6	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/992	0/972	0/918	0/790	0/522	0/302
	7	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

ادامه‌ی جدول ۱

							p					
	c	**0/05**	**0/1**	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**	**0/95**
n=8	**0**	0/663	0/430	0/168	0/058	0/017	0/004	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/943	0/813	0/503	0/255	0/106	0/035	0/009	0/001	0/000	0/000	0/000
	2	0/994	0/962	0/797	0/552	0/315	0/145	0/050	0/011	0/001	0/000	0/000
	3	1/000	0/995	0/944	0/806	0/594	0/363	0/174	0/058	0/010	0/000	0/000
	4	1/000	1/000	0/990	0/942	0/826	0/637	0/406	0/194	0/056	0/005	0/000
	5	1/000	1/000	0/999	0/989	0/950	0/855	0/685	0/448	0/203	0/038	0/006
	6	1/000	1/000	1/000	0/999	0/991	0/965	0/894	0/745	0/497	0/187	0/057
	7	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/996	0/983	0/942	0/832	0/570	0/337
	8	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=9	**0**	0/630	0/387	0/134	0/040	0/010	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/929	0/775	0/436	0/196	0/071	0/020	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/992	0/947	0/738	0/463	0/232	0/090	0/025	0/004	0/000	0/000	0/000
	3	0/999	0/992	0/914	0/730	0/483	0/254	0/099	0/025	0/003	0/000	0/000
	4	1/000	0/999	0/980	0/901	0/733	0/500	0/267	0/099	0/020	0/001	0/000
	5	1/000	1/000	0/997	0/975	0/901	0/746	0/517	0/270	0/086	0/008	0/001
	6	1/000	1/000	1/000	0/996	0/975	0/910	0/768	0/537	0/262	0/053	0/008
	7	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/980	0/929	0/804	0/564	0/225	0/071
	8	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/990	0/960	0/866	0/613	0/370
	9	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=10	**0**	0/599	0/349	0/107	0/028	0/006	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/914	0/736	0/376	0/149	0/046	0/011	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/988	0/930	0/678	0/383	0/167	0/055	0/012	0/002	0/000	0/000	0/000
	3	0/999	0/987	0/879	0/650	0/382	0/172	0/055	0/011	0/001	0/000	0/000
	4	1/000	0/998	0/967	0/850	0/633	0/377	0/166	0/047	0/006	0/000	0/000
	5	1/000	1/000	0/994	0/953	0/834	0/623	0/367	0/150	0/033	0/002	0/000
	6	1/000	1/000	0/999	0/989	0/945	0/828	0/618	0/350	0/121	0/013	0/001
	7	1/000	1/000	1/000	0/998	0/988	0/945	0/833	0/617	0/322	0/070	0/012
	8	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/989	0/954	0/851	0/624	0/264	0/086
	9	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/994	0/972	0/893	0/651	0/401
	10	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=11	**0**	0/569	0/314	0/086	0/020	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/898	0/697	0/322	0/113	0/030	0/006	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/985	0/910	0/617	0/313	0/119	0/033	0/006	0/001	0/000	0/000	0/000
	3	0/998	0/981	0/839	0/570	0/296	0/113	0/029	0/004	0/000	0/000	0/000
	4	1/000	0/997	0/950	0/790	0/533	0/274	0/099	0/022	0/002	0/000	0/000
	5	1/000	1/000	0/988	0/922	0/753	0/500	0/247	0/078	0/012	0/000	0/000
	6	1/000	1/000	0/998	0/978	0/901	0/726	0/467	0/210	0/050	0/003	0/000
	7	1/000	1/000	1/000	0/996	0/971	0/887	0/704	0/430	0/161	0/019	0/002
	8	1/000	1/000	1/000	0/999	0/994	0/967	0/881	0/687	0/383	0/090	0/015
	9	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/994	0/970	0/887	0/678	0/303	0/102
	10	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/980	0/914	0/686	0/431
	11	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

ادامه‌ی جدول ۱

		p										
	c	**0/05**	**0/1**	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**	**0/95**
n=12	**0**	0/540	0/282	0/069	0/014	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/882	0/659	0/275	0/085	0/020	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/980	0/889	0/558	0/253	0/083	0/019	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/998	0/974	0/795	0/493	0/225	0/073	0/015	0/002	0/000	0/000	0/000
	4	1/000	0/996	0/927	0/724	0/438	0/194	0/057	0/009	0/001	0/000	0/000
	5	1/000	0/999	0/981	0/882	0/665	0/387	0/158	0/039	0/004	0/000	0/000
	6	1/000	1/000	0/996	0/961	0/842	0/613	0/335	0/118	0/019	0/001	0/000
	7	1/000	1/000	0/999	0/991	0/943	0/806	0/562	0/276	0/073	0/004	0/000
	8	1/000	1/000	1/000	0/998	0/985	0/927	0/775	0/507	0/205	0/026	0/002
	9	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/981	0/917	0/747	0/442	0/111	0/020
	10	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/980	0/915	0/725	0/341	0/118
	11	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/986	0/931	0/718	0/460
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=13	**0**	0/513	0/254	0/055	0/010	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/865	0/621	0/234	0/064	0/013	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/975	0/866	0/502	0/202	0/058	0/011	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/997	0/966	0/747	0/421	0/169	0/046	0/008	0/001	0/000	0/000	0/000
	4	1/000	0/994	0/901	0/654	0/353	0/133	0/032	0/004	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/999	0/970	0/835	0/574	0/291	0/098	0/018	0/001	0/000	0/000
	6	1/000	1/000	0/993	0/938	0/771	0/500	0/229	0/062	0/007	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/999	0/982	0/902	0/709	0/426	0/165	0/030	0/001	0/000
	8	1/000	1/000	1/000	0/996	0/968	0/867	0/647	0/346	0/099	0/006	0/000
	9	1/000	1/000	1/000	0/999	0/992	0/954	0/831	0/579	0/253	0/034	0/003
	10	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/989	0/942	0/798	0/498	0/134	0/025
	11	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/987	0/936	0/766	0/379	0/135
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/990	0/945	0/746	0/487
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=14	**0**	0/488	0/229	0/044	0/007	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/847	0/585	0/198	0/047	0/008	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/970	0/842	0/448	0/161	0/040	0/006	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/996	0/956	0/698	0/355	0/124	0/029	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	1/000	0/991	0/870	0/584	0/279	0/090	0/018	0/002	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/999	0/956	0/781	0/486	0/212	0/058	0/008	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	1/000	0/988	0/907	0/692	0/395	0/150	0/031	0/002	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/998	0/969	0/850	0/605	0/308	0/093	0/012	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	1/000	0/992	0/942	0/788	0/514	0/219	0/044	0/001	0/000
	9	1/000	1/000	1/000	0/998	0/982	0/910	0/721	0/416	0/130	0/009	0/000
	10	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/971	0/876	0/645	0/302	0/044	0/004
	11	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/994	0/960	0/839	0/552	0/158	0/030
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/992	0/953	0/802	0/415	0/153
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/993	0/956	0/771	0/512
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

ادامه‌ی جدول ۱

		p										
	c	0/05	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	0/95
n=15	0	0/463	0/206	0/035	0/005	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/829	0/549	0/167	0/035	0/005	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/964	0/816	0/398	0/127	0/027	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/995	0/944	0/648	0/297	0/091	0/018	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/999	0/987	0/836	0/515	0/217	0/059	0/009	0/001	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/998	0/939	0/722	0/403	0/151	0/034	0/004	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	1/000	0/982	0/869	0/610	0/304	0/095	0/015	0/001	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/996	0/950	0/787	0/500	0/213	0/050	0/004	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/999	0/985	0/905	0/696	0/390	0/131	0/018	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	1/000	0/996	0/966	0/849	0/597	0/278	0/061	0/002	0/000
	10	1/000	1/000	1/000	0/999	0/991	0/941	0/783	0/485	0/164	0/013	0/001
	11	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/982	0/909	0/703	0/352	0/056	0/005
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/973	0/873	0/602	0/184	0/036
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/995	0/965	0/833	0/451	0/171
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/995	0/965	0/794	0/537
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=16	0	0/440	0/185	0/028	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/811	0/515	0/141	0/026	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/957	0/789	0/352	0/099	0/018	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/993	0/932	0/598	0/246	0/065	0/011	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/999	0/983	0/798	0/450	0/167	0/038	0/005	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/997	0/918	0/660	0/329	0/105	0/019	0/002	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/999	0/973	0/825	0/527	0/227	0/058	0/007	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/993	0/926	0/716	0/402	0/142	0/026	0/001	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/999	0/974	0/858	0/598	0/284	0/074	0/007	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	1/000	0/993	0/942	0/773	0/473	0/175	0/027	0/001	0/000
	10	1/000	1/000	1/000	0/998	0/981	0/895	0/671	0/340	0/082	0/003	0/000
	11	1/000	1/000	1/000	1/000	0/995	0/962	0/833	0/550	0/202	0/017	0/001
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/989	0/935	0/754	0/402	0/068	0/007
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/982	0/901	0/648	0/211	0/043
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/974	0/859	0/485	0/189
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/972	0/815	0/560
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=17	0	0/418	0/167	0/023	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/792	0/482	0/118	0/019	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/950	0/762	0/310	0/077	0/012	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/991	0/917	0/549	0/202	0/046	0/006	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/999	0/978	0/758	0/389	0/126	0/025	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/995	0/894	0/597	0/264	0/072	0/011	0/001	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/999	0/962	0/775	0/448	0/166	0/035	0/003	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/989	0/895	0/641	0/315	0/092	0/013	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/997	0/960	0/801	0/500	0/199	0/040	0/003	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	1/000	0/987	0/908	0/685	0/359	0/105	0/011	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	1/000	0/997	0/965	0/834	0/552	0/225	0/038	0/001	0/000

ادامه‌ی جدول ۱

		p										
	c	**0/05**	**0/1**	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**	**0/95**
	11	1/000	1/000	1/000	0/999	0/989	0/928	0/736	0/403	0/106	0/005	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/975	0/874	0/611	0/242	0/022	0/001
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/994	0/954	0/798	0/451	0/083	0/009
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/988	0/923	0/690	0/238	0/050
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/981	0/882	0/518	0/208
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/977	0/833	0/582
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=18	**0**	0/397	0/150	0/018	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/774	0/450	0/099	0/014	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/942	0/734	0/271	0/060	0/008	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/989	0/902	0/501	0/165	0/033	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/998	0/972	0/716	0/333	0/094	0/015	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/994	0/867	0/534	0/209	0/048	0/006	0/000	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/999	0/949	0/722	0/374	0/119	0/020	0/001	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/984	0/859	0/563	0/240	0/058	0/006	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/996	0/940	0/737	0/407	0/135	0/021	0/001	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	0/999	0/979	0/865	0/593	0/263	0/060	0/004	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	1/000	0/994	0/942	0/760	0/437	0/141	0/016	0/000	0/000
	11	1/000	1/000	1/000	0/999	0/980	0/881	0/626	0/278	0/051	0/001	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	1/000	0/994	0/952	0/791	0/466	0/133	0/006	0/000
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/985	0/906	0/667	0/284	0/028	0/002
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/967	0/835	0/499	0/098	0/011
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/992	0/940	0/729	0/266	0/058
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/986	0/901	0/550	0/226
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/982	0/850	0/603
	18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=19	**0**	0/377	0/135	0/014	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/755	0/420	0/083	0/010	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/933	0/705	0/237	0/046	0/005	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/987	0/885	0/455	0/133	0/023	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/998	0/965	0/673	0/282	0/070	0/010	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/991	0/837	0/474	0/163	0/032	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/998	0/932	0/666	0/308	0/084	0/012	0/001	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/977	0/818	0/488	0/180	0/035	0/003	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/993	0/916	0/667	0/324	0/088	0/011	0/000	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	0/998	0/967	0/814	0/500	0/186	0/033	0/002	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	1/000	0/989	0/912	0/676	0/333	0/084	0/007	0/000	0/000
	11	1/000	1/000	1/000	0/997	0/965	0/820	0/512	0/182	0/023	0/000	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	0/999	0/988	0/916	0/692	0/334	0/068	0/002	0/000
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/968	0/837	0/526	0/163	0/009	0/000
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/990	0/930	0/718	0/327	0/035	0/002
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/977	0/867	0/545	0/115	0/013
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/995	0/954	0/763	0/295	0/067
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/990	0/917	0/580	0/245
	18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/986	0/865	0/623

ادامه‌ی جدول ۱

						p						
	c	**0/05**	**0/1**	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**	**0/95**
n=20	**0**	0/358	0/122	0/012	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/736	0/392	0/069	0/008	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/925	0/677	0/206	0/035	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/984	0/867	0/411	0/107	0/016	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/997	0/957	0/630	0/238	0/051	0/006	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/989	0/804	0/416	0/126	0/021	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/998	0/913	0/608	0/250	0/058	0/006	0/000	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	1/000	0/968	0/772	0/416	0/132	0/021	0/001	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/990	0/887	0/596	0/252	0/057	0/005	0/000	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	0/997	0/952	0/755	0/412	0/128	0/017	0/001	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	0/999	0/983	0/872	0/588	0/245	0/048	0/003	0/000	0/000
	11	1/000	1/000	1/000	0/995	0/943	0/748	0/404	0/113	0/010	0/000	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	0/999	0/979	0/868	0/584	0/228	0/032	0/000	0/000
	13	1/000	1/000	1/000	1/000	0/994	0/942	0/750	0/392	0/087	0/002	0/000
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/979	0/874	0/584	0/196	0/011	0/000
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/994	0/949	0/762	0/370	0/043	0/003
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/984	0/893	0/589	0/133	0/016
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/965	0/794	0/323	0/075
	18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/992	0/931	0/608	0/264
	19	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/988	0/878	0/642
	20	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=21	**0**	0/341	0/109	0/009	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/717	0/365	0/058	0/006	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/915	0/648	0/179	0/027	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/981	0/848	0/370	0/086	0/011	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/997	0/948	0/586	0/198	0/037	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	1/000	0/986	0/769	0/363	0/096	0/013	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/997	0/891	0/551	0/200	0/039	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	0/999	0/957	0/723	0/350	0/095	0/012	0/001	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/986	0/852	0/524	0/192	0/035	0/002	0/000	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	0/996	0/932	0/691	0/332	0/085	0/009	0/000	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	0/999	0/974	0/826	0/500	0/174	0/026	0/001	0/000	0/000
	11	1/000	1/000	1/000	0/991	0/915	0/668	0/309	0/068	0/004	0/000	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	0/998	0/965	0/808	0/476	0/148	0/014	0/000	0/000
	13	1/000	1/000	1/000	0/999	0/988	0/905	0/650	0/277	0/043	0/001	0/000
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/961	0/800	0/449	0/109	0/003	0/000
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/987	0/904	0/637	0/231	0/014	0/000
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/963	0/802	0/414	0/052	0/003
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/989	0/914	0/630	0/152	0/019
	18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/973	0/821	0/352	0/085
	19	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/994	0/942	0/635	0/283
	20	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/991	0/891	0/659
	21	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

ادامه‌ی جدول ۱

		p										
	c	**0/05**	**0/1**	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**	**0/95**
n=22	**0**	0/324	0/098	0/007	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/698	0/339	0/048	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/905	0/620	0/154	0/021	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/978	0/828	0/332	0/068	0/008	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/996	0/938	0/543	0/165	0/027	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	0/999	0/982	0/733	0/313	0/072	0/008	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/996	0/867	0/494	0/158	0/026	0/002	0/000	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	0/999	0/944	0/671	0/290	0/067	0/007	0/000	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/980	0/814	0/454	0/143	0/021	0/001	0/000	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	0/994	0/908	0/624	0/262	0/055	0/004	0/000	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	0/998	0/961	0/772	0/416	0/121	0/014	0/000	0/000	0/000
	11	1/000	1/000	1/000	0/986	0/879	0/584	0/228	0/039	0/002	0/000	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	0/996	0/945	0/738	0/376	0/092	0/006	0/000	0/000
	13	1/000	1/000	1/000	0/999	0/979	0/857	0/546	0/186	0/020	0/000	0/000
	14	1/000	1/000	1/000	1/000	0/993	0/933	0/710	0/329	0/056	0/001	0/000
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/974	0/842	0/506	0/133	0/004	0/000
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/992	0/928	0/687	0/267	0/018	0/001
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/973	0/835	0/457	0/062	0/004
	18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/992	0/932	0/668	0/172	0/022
	19	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/998	0/979	0/846	0/380	0/095
	20	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/952	0/661	0/302
	21	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/993	0/902	0/676
	22	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
n=23	**0**	0/307	0/089	0/006	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	1	0/679	0/315	0/040	0/003	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	2	0/895	0/592	0/133	0/016	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	3	0/974	0/807	0/297	0/054	0/005	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	4	0/995	0/927	0/501	0/136	0/019	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	5	0/999	0/977	0/695	0/269	0/054	0/005	0/000	0/000	0/000	0/000	0/000
	6	1/000	0/994	0/840	0/440	0/124	0/017	0/001	0/000	0/000	0/000	0/000
	7	1/000	0/999	0/928	0/618	0/237	0/047	0/004	0/000	0/000	0/000	0/000
	8	1/000	1/000	0/973	0/771	0/388	0/105	0/013	0/001	0/000	0/000	0/000
	9	1/000	1/000	0/991	0/880	0/556	0/202	0/035	0/002	0/000	0/000	0/000
	10	1/000	1/000	0/997	0/945	0/713	0/339	0/081	0/007	0/000	0/000	0/000
	11	1/000	1/000	0/999	0/979	0/836	0/500	0/164	0/021	0/001	0/000	0/000
	12	1/000	1/000	1/000	0/993	0/919	0/661	0/287	0/055	0/003	0/000	0/000
	13	1/000	1/000	1/000	0/998	0/965	0/798	0/444	0/120	0/009	0/000	0/000
	14	1/000	1/000	1/000	0/999	0/987	0/895	0/612	0/229	0/027	0/000	0/000
	15	1/000	1/000	1/000	1/000	0/996	0/953	0/763	0/382	0/072	0/001	0/000
	16	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/983	0/876	0/560	0/160	0/006	0/000
	17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/995	0/946	0/731	0/305	0/023	0/001
	18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/981	0/864	0/499	0/073	0/005
	19	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/995	0/946	0/703	0/193	0/026
	20	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/984	0/867	0/408	0/105
	21	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/997	0/960	0/685	0/321
	22	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/994	0/911	0/693
	23	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

جدول ۲. احتمال‌های پواسون $P[X \leq c] = \sum_{x=\circ}^{c} \frac{e^{-m}m^{x}}{x!}$

c	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	1
0	0/905	0/819	0/741	0/670	0/607	0/549	0/497	0/449	0/407	0/368
1	0/995	0/982	0/963	0/938	0/910	0/878	0/844	0/809	0/772	0/736
2	1/000	0/999	0/996	0/992	0/986	0/977	0/966	0/953	0/937	0/920
3	1/000	1/000	1/000	0/999	0/998	0/997	0/994	0/991	0/987	0/981
4	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/998	0/996
5	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999
6	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
7	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

					m					
c	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	2
0	0/333	0/301	0/273	0/247	0/223	0/202	0/183	0/165	0/150	0/135
1	0/699	0/663	0/627	0/592	0/558	0/525	0/493	0/463	0/434	0/406
2	0/900	0/879	0/857	0/833	0/809	0/783	0/757	0/731	0/704	0/677
3	0/974	0/966	0/957	0/946	0/934	0/921	0/907	0/891	0/875	0/857
4	0/995	0/992	0/989	0/986	0/981	0/976	0/970	0/964	0/956	0/947
5	0/999	0/998	0/998	0/997	0/996	0/994	0/992	0/990	0/987	0/983
6	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/999	0/998	0/997	0/997	0/995
7	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/999
8	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
9	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

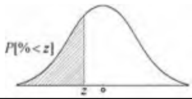
					m					
c	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	2/9	3
0	0/122	0/111	0/100	0/091	0/082	0/074	0/067	0/061	0/055	0/050
1	0/380	0/355	0/331	0/308	0/287	0/267	0/249	0/231	0/215	0/199
2	0/650	0/623	0/596	0/570	0/544	0/518	0/494	0/469	0/446	0/423
3	0/839	0/819	0/799	0/779	0/758	0/736	0/714	0/692	0/670	0/647
4	0/938	0/928	0/916	0/904	0/891	0/877	0/863	0/848	0/832	0/815
5	0/980	0/975	0/970	0/964	0/958	0/951	0/943	0/935	0/926	0/916
6	0/994	0/993	0/991	0/988	0/986	0/983	0/979	0/976	0/971	0/966
7	0/999	0/998	0/997	0/997	0/996	0/995	0/993	0/992	0/990	0/988
8	1/000	1/000	0/999	0/999	0/999	0/999	0/998	0/998	0/997	0/996
9	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/999	0/999
10	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
11	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
12	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

ادامه‌ی جدول ۲

c	m 3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	3/9	4
0	0/045	0/041	0/037	0/033	0/030	0/027	0/025	0/022	0/020	0/018
1	0/185	0/171	0/159	0/147	0/136	0/126	0/116	0/107	0/099	0/092
2	0/401	0/380	0/359	0/340	0/321	0/303	0/285	0/269	0/253	0/238
3	0/625	0/603	0/580	0/558	0/537	0/515	0/494	0/473	0/453	0/433
4	0/798	0/781	0/763	0/744	0/725	0/706	0/687	0/668	0/648	0/629
5	0/906	0/895	0/883	0/871	0/858	0/844	0/830	0/816	0/801	0/785
6	0/961	0/955	0/949	0/942	0/935	0/927	0/918	0/909	0/899	0/889
7	0/986	0/983	0/980	0/977	0/973	0/969	0/965	0/960	0/955	0/949
8	0/995	0/994	0/993	0/992	0/990	0/988	0/986	0/984	0/981	0/979
9	0/999	0/998	0/998	0/997	0/997	0/996	0/995	0/994	0/993	0/992
10	1/000	1/000	0/999	0/999	0/999	0/999	0/998	0/998	0/998	0/997
11	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/999
12	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
13	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
14	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

c	m 4/5	5	5/5	6	6/5	7	7/5	8	8/5	9
0	0/011	0/007	0/004	0/002	0/002	0/001	0/001	0/000	0/000	0/000
1	0/061	0/040	0/027	0/017	0/011	0/007	0/005	0/003	0/002	0/001
2	0/174	0/125	0/088	0/062	0/043	0/030	0/020	0/014	0/009	0/006
3	0/342	0/265	0/202	0/151	0/112	0/082	0/059	0/042	0/030	0/021
4	0/532	0/440	0/358	0/285	0/224	0/173	0/132	0/100	0/074	0/055
5	0/703	0/616	0/529	0/446	0/369	0/301	0/241	0/191	0/150	0/116
6	0/831	0/762	0/686	0/606	0/527	0/450	0/378	0/313	0/256	0/207
7	0/913	0/867	0/809	0/744	0/673	0/599	0/525	0/453	0/386	0/324
8	0/960	0/932	0/894	0/847	0/792	0/729	0/662	0/593	0/523	0/456
9	0/983	0/968	0/946	0/916	0/877	0/830	0/776	0/717	0/653	0/587
10	0/993	0/986	0/975	0/957	0/933	0/901	0/862	0/816	0/763	0/706
11	0/998	0/995	0/989	0/980	0/966	0/947	0/921	0/888	0/849	0/803
12	0/999	0/998	0/996	0/991	0/984	0/973	0/957	0/936	0/909	0/876
13	1/000	0/999	0/998	0/996	0/993	0/987	0/978	0/966	0/949	0/926
14	1/000	1/000	0/999	0/999	0/997	0/994	0/990	0/983	0/973	0/959
15	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/998	0/995	0/992	0/986	0/978
16	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/998	0/996	0/993	0/989
17	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/998	0/997	0/995
18	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999	0/998
19	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	0/999	0/999
20	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
21	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000
22	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000	1/000

جدول ۳. احتمال‌های نرمال استاندارد



z	0	0/01	0/02	0/03	0/04	0/05	0/06	0/07	0/08	0/09
-3/5	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002	0/0002
-3/4	0/0003	0/0003	0/0003	0/0003	0/0003	0/0003	0/0003	0/0003	0/0003	0/0002
-3/3	0/0005	0/0005	0/0005	0/0004	0/0004	0/0004	0/0004	0/0004	0/0004	0/0003
-3/2	0/0007	0/0007	0/0006	0/0006	0/0006	0/0006	0/0006	0/0005	0/0005	0/0005
-3/1	0/0010	0/0009	0/0009	0/0009	0/0008	0/0008	0/0008	0/0008	0/0007	0/0007
-3	0/0013	0/0013	0/0013	0/0012	0/0012	0/0011	0/0011	0/0011	0/0010	0/0010
-2/9	0/0019	0/0018	0/0018	0/0017	0/0016	0/0016	0/0015	0/0015	0/0014	0/0014
-2/8	0/0026	0/0025	0/0024	0/0023	0/0023	0/0022	0/0021	0/0021	0/0020	0/0019
-2/7	0/0035	0/0034	0/0033	0/0032	0/0031	0/0030	0/0029	0/0028	0/0027	0/0026
-2/6	0/0047	0/0045	0/0044	0/0043	0/0041	0/0040	0/0039	0/0038	0/0037	0/0036
-2/5	0/0062	0/0060	0/0059	0/0057	0/0055	0/0054	0/0052	0/0051	0/0049	0/0048
-2/4	0/0082	0/0080	0/0078	0/0075	0/0073	0/0071	0/0069	0/0068	0/0066	0/0064
-2/3	0/0107	0/0104	0/0102	0/0099	0/0096	0/0094	0/0091	0/0089	0/0087	0/0084
-2/2	0/0139	0/0136	0/0132	0/0129	0/0125	0/0122	0/0119	0/0116	0/0113	0/0110
-2/1	0/0179	0/0174	0/0170	0/0166	0/0162	0/0158	0/0154	0/0150	0/0146	0/0143
-2	0/0228	0/0222	0/0217	0/0212	0/0207	0/0202	0/0197	0/0192	0/0188	0/0183
-1/9	0/0287	0/0281	0/0274	0/0268	0/0262	0/0256	0/0250	0/0244	0/0239	0/0233
-1/8	0/0359	0/0351	0/0344	0/0336	0/0329	0/0322	0/0314	0/0307	0/0301	0/0294
-1/7	0/0446	0/0436	0/0427	0/0418	0/0409	0/0401	0/0392	0/0384	0/0375	0/0367
-1/6	0/0548	0/0537	0/0526	0/0516	0/0505	0/0495	0/0485	0/0475	0/0465	0/0455
-1/5	0/0668	0/0655	0/0643	0/0630	0/0618	0/0606	0/0594	0/0582	0/0571	0/0559
-1/4	0/0808	0/0793	0/0778	0/0764	0/0749	0/0735	0/0721	0/0708	0/0694	0/0681
-1/3	0/0968	0/0951	0/0934	0/0918	0/0901	0/0885	0/0869	0/0853	0/0838	0/0823
-1/2	0/1151	0/1131	0/1112	0/1093	0/1075	0/1056	0/1038	0/1020	0/1003	0/0985
-1/1	0/1357	0/1335	0/1314	0/1292	0/1271	0/1251	0/1230	0/1210	0/1190	0/1170
-1	0/1587	0/1562	0/1539	0/1515	0/1492	0/1469	0/1446	0/1423	0/1401	0/1379
-0/9	0/1841	0/1814	0/1788	0/1762	0/1736	0/1711	0/1685	0/1660	0/1635	0/1611
-0/8	0/2119	0/2090	0/2061	0/2033	0/2005	0/1977	0/1949	0/1922	0/1894	0/1867
-0/7	0/2420	0/2389	0/2358	0/2327	0/2296	0/2266	0/2236	0/2206	0/2177	0/2148
-0/6	0/2743	0/2709	0/2676	0/2643	0/2611	0/2578	0/2546	0/2514	0/2483	0/2451
-0/5	0/3085	0/3050	0/3015	0/2981	0/2946	0/2912	0/2877	0/2843	0/2810	0/2776
-0/4	0/3446	0/3409	0/3372	0/3336	0/3300	0/3264	0/3228	0/3192	0/3156	0/3121
-0/3	0/3821	0/3783	0/3745	0/3707	0/3669	0/3632	0/3594	0/3557	0/3520	0/3483
-0/2	0/4207	0/4168	0/4129	0/4090	0/4052	0/4013	0/3974	0/3936	0/3897	0/3859
-0/1	0/4602	0/4562	0/4522	0/4483	0/4443	0/4404	0/4364	0/4325	0/4286	0/4247
0	0/5000	0/4960	0/4920	0/4880	0/4840	0/4801	0/4761	0/4721	0/4681	0/4641

ادامه‌ی جدول ۳

z	0	0/01	0/02	0/03	0/04	0/05	0/06	0/07	0/08	0/09
0	0/5000	0/5040	0/5080	0/5120	0/5160	0/5199	0/5239	0/5279	0/5319	0/5359
0/1	0/5398	0/5438	0/5478	0/5517	0/5557	0/5596	0/5636	0/5675	0/5714	0/5753
0/2	0/5793	0/5832	0/5871	0/5910	0/5948	0/5987	0/6026	0/6064	0/6103	0/6141
0/3	0/6179	0/6217	0/6255	0/6293	0/6331	0/6368	0/6406	0/6443	0/6480	0/6517
0/4	0/6554	0/6591	0/6628	0/6664	0/6700	0/6736	0/6772	0/6808	0/6844	0/6879
0/5	0/6915	0/6950	0/6985	0/7019	0/7054	0/7088	0/7123	0/7157	0/7190	0/7224
0/6	0/7257	0/7291	0/7324	0/7357	0/7389	0/7422	0/7454	0/7486	0/7517	0/7549
0/7	0/7580	0/7611	0/7642	0/7673	0/7704	0/7734	0/7764	0/7794	0/7823	0/7852
0/8	0/7881	0/7910	0/7939	0/7967	0/7995	0/8023	0/8051	0/8078	0/8106	0/8133
0/9	0/8159	0/8186	0/8212	0/8238	0/8264	0/8289	0/8315	0/8340	0/8365	0/8389
1	0/8413	0/8438	0/8461	0/8485	0/8508	0/8531	0/8554	0/8577	0/8599	0/8621
1/1	0/8643	0/8665	0/8686	0/8708	0/8729	0/8749	0/8770	0/8790	0/8810	0/8830
1/2	0/8849	0/8869	0/8888	0/8907	0/8925	0/8944	0/8962	0/8980	0/8997	0/9015
1/3	0/9032	0/9049	0/9066	0/9082	0/9099	0/9115	0/9131	0/9147	0/9162	0/9177
1/4	0/9192	0/9207	0/9222	0/9236	0/9251	0/9265	0/9279	0/9292	0/9306	0/9319
1/5	0/9332	0/9345	0/9357	0/9370	0/9382	0/9394	0/9406	0/9418	0/9429	0/9441
1/6	0/9452	0/9463	0/9474	0/9484	0/9495	0/9505	0/9515	0/9525	0/9535	0/9545
1/7	0/9554	0/9564	0/9573	0/9582	0/9591	0/9599	0/9608	0/9616	0/9625	0/9633
1/8	0/9641	0/9649	0/9656	0/9664	0/9671	0/9678	0/9686	0/9693	0/9699	0/9706
1/9	0/9713	0/9719	0/9726	0/9732	0/9738	0/9744	0/9750	0/9756	0/9761	0/9767
2	0/9772	0/9778	0/9783	0/9788	0/9793	0/9798	0/9803	0/9808	0/9812	0/9817
2/1	0/9821	0/9826	0/9830	0/9834	0/9838	0/9842	0/9846	0/9850	0/9854	0/9857
2/2	0/9861	0/9864	0/9868	0/9871	0/9875	0/9878	0/9881	0/9884	0/9887	0/9890
2/3	0/9893	0/9896	0/9898	0/9901	0/9904	0/9906	0/9909	0/9911	0/9913	0/9916
2/4	0/9918	0/9920	0/9922	0/9925	0/9927	0/9929	0/9931	0/9932	0/9934	0/9936
2/5	0/9938	0/9940	0/9941	0/9943	0/9945	0/9946	0/9948	0/9949	0/9951	0/9952
2/6	0/9953	0/9955	0/9956	0/9957	0/9959	0/9960	0/9961	0/9962	0/9963	0/9964
2/7	0/9965	0/9966	0/9967	0/9968	0/9969	0/9970	0/9971	0/9972	0/9973	0/9974
2/8	0/9974	0/9975	0/9976	0/9977	0/9977	0/9978	0/9979	0/9979	0/9980	0/9981
2/9	0/9981	0/9982	0/9982	0/9983	0/9984	0/9984	0/9985	0/9985	0/9986	0/9986
3	0/9987	0/9987	0/9987	0/9988	0/9988	0/9989	0/9989	0/9989	0/9990	0/9990
3/1	0/9990	0/9991	0/9991	0/9991	0/9992	0/9992	0/9992	0/9992	0/9993	0/9993
3/2	0/9993	0/9993	0/9994	0/9994	0/9994	0/9994	0/9994	0/9995	0/9995	0/9995
3/3	0/9995	0/9995	0/9995	0/9996	0/9996	0/9996	0/9996	0/9996	0/9996	0/9997
3/4	0/9997	0/9997	0/9997	0/9997	0/9997	0/9997	0/9997	0/9997	0/9997	0/9998
3/5	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998	0/9998

جدول ۴. مقادیر توزیع خی‌دو

						α							
df	0/005	0/01	0/025	0/05	0/10	0/20	0/30	0/70	0/80	0/95	0/975	0/99	0/995
1	0/000	0/000	0/001	0/004	0/016	0/064	0/148	1/074	1/642	3/841	5/024	6/635	7/879
2	0/010	0/020	0/051	0/103	0/211	0/446	0/713	2/408	3/219	5/991	7/378	9/210	10/597
3	0/072	0/115	0/216	0/352	0/584	1/005	1/424	3/665	4/642	7/815	9/348	11/345	12/838
4	0/207	0/297	0/484	0/711	1/064	1/649	2/195	4/878	5/989	9/488	11/143	13/277	14/860
5	0/412	0/554	0/831	1/145	1/610	2/343	3/000	6/064	7/289	11/070	12/833	15/086	16/750
6	0/676	0/872	1/237	1/635	2/204	3/070	3/828	7/231	8/558	12/592	14/449	16/812	18/548
7	0/989	1/239	1/690	2/167	2/833	3/822	4/671	8/383	9/803	14/067	16/013	18/475	20/278
8	1/344	1/646	2/180	2/733	3/490	4/594	5/527	9/524	11/030	15/507	17/535	20/090	21/955
9	1/735	2/088	2/700	3/325	4/168	5/380	6/393	10/656	12/242	16/919	19/023	21/666	23/589
10	2/156	2/558	3/247	3/940	4/865	6/179	7/267	11/781	13/442	18/307	20/483	23/209	25/188
11	2/603	3/053	3/816	4/575	5/578	6/989	8/148	12/899	14/631	19/675	21/920	24/725	26/757
12	3/074	3/571	4/404	5/226	6/304	7/807	9/034	14/011	15/812	21/026	23/337	26/217	28/300
13	3/565	4/107	5/009	5/892	7/042	8/634	9/926	15/119	16/985	22/362	24/736	27/688	29/819
14	4/075	4/660	5/629	6/571	7/790	9/467	10/821	16/222	18/151	23/685	26/119	29/141	31/319
15	4/601	5/229	6/262	7/261	8/547	10/307	11/721	17/322	19/311	24/996	27/488	30/578	32/801
16	5/142	5/812	6/908	7/962	9/312	11/152	12/624	18/418	20/465	26/296	28/845	32/000	34/267
17	5/697	6/408	7/564	8/672	10/085	12/002	13/531	19/511	21/615	27/587	30/191	33/409	35/718
18	6/265	7/015	8/231	9/390	10/865	12/857	14/440	20/601	22/760	28/869	31/526	34/805	37/156
19	6/844	7/633	8/907	10/117	11/651	13/716	15/352	21/689	23/900	30/144	32/852	36/191	38/582
20	7/434	8/260	9/591	10/851	12/443	14/578	16/266	22/775	25/038	31/410	34/170	37/566	39/997
21	8/034	8/897	10/283	11/591	13/240	15/445	17/182	23/858	26/171	32/671	35/479	38/932	41/401
22	8/643	9/542	10/982	12/338	14/041	16/314	18/101	24/939	27/301	33/924	36/781	40/289	42/796
23	9/260	10/196	11/689	13/091	14/848	17/187	19/021	26/018	28/429	35/172	38/076	41/638	44/181
24	9/886	10/856	12/401	13/848	15/659	18/062	19/943	27/096	29/553	36/415	39/364	42/980	45/559
25	10/520	11/524	13/120	14/611	16/473	18/940	20/867	28/172	30/675	37/652	40/646	44/314	46/928
26	11/160	12/198	13/844	15/379	17/292	19/820	21/792	29/246	31/795	38/885	41/923	45/642	48/290
27	11/808	12/879	14/573	16/151	18/114	20/703	22/719	30/319	32/912	40/113	43/195	46/963	49/645
28	12/461	13/565	15/308	16/928	18/939	21/588	23/647	31/391	34/027	41/337	44/461	48/278	50/993
29	13/121	14/256	16/047	17/708	19/768	22/475	24/577	32/461	35/139	42/557	45/722	49/588	52/336
30	13/787	14/953	16/791	18/493	20/599	23/364	25/508	33/530	36/250	43/773	46/979	50/892	53/672
40	20/707	22/164	24/433	26/509	29/051	32/345	34/872	44/165	47/269	55/758	59/342	63/691	66/766
50	27/991	29/707	32/357	34/764	37/689	41/449	44/313	54/723	58/164	67/505	71/420	76/154	79/490
60	35/534	37/485	40/482	43/188	46/459	50/641	53/809	65/227	68/972	79/082	83/298	88/379	91/952

جدول ۵. مقادیر توزیع تی

	alpha					
df	0/1	0/05	0/025	0/01	0/005	df
1	6/31	12/71	25/45	63/66	127/32	**1**
2	2/92	4/3	6/21	9/92	14/09	**2**
3	2/35	3/18	4/18	5/84	7/45	**3**
4	2/13	2/78	3/5	4/6	5/6	**4**
5	2/02	2/57	3/16	4/03	4/77	**5**
6	1/94	2/45	2/97	3/71	4/32	**6**
7	1/89	2/36	2/84	3/5	4/03	**7**
8	1/86	2/31	2/75	3/36	3/83	**8**
9	1/83	2/26	2/69	3/25	3/69	**9**
10	1/81	2/23	2/63	3/17	3/58	**10**
12	1/78	2/18	2/56	3/05	3/43	**12**
15	1/75	2/13	2/49	2/95	3/29	**15**
20	1/72	2/09	2/42	2/85	3/15	**20**
24	1/71	2/06	2/39	2/8	3/09	**24**
30	1/7	2/04	2/36	2/75	3/03	**30**
40	1/68	2/02	2/33	2/7	2/97	**40**
60	1/67	2	2/3	2/66	2/91	**60**
120	1/66	1/98	2/27	2/62	2/86	**120**
1000	1/65	1/96	2/24	2/58	2/81	**1000**

جدول ۶. مقادیر $f_{0/05,\nu_1,\nu_2}$

درجه‌ی آزادی ν_1

ν_1 \ ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	1000
1	161/5	18/51	10/13	7/71	6/61	5/99	5/59	5/32	5/12	4/96	4/75	4/54	4/35	4/26	4/17	4/08	4	3/92	3/85
2	199/5	19	9/55	6/94	5/79	5/14	4/74	4/46	4/26	4/1	3/89	3/68	3/49	3/4	3/32	3/23	3/15	3/07	3
3	215/7	19/16	9/28	6/59	5/41	4/76	4/35	4/07	3/86	3/71	3/49	3/29	3/1	3/01	2/92	2/84	2/76	2/68	2/61
4	224/6	19/25	9/12	6/39	5/19	4/53	4/12	3/84	3/63	3/48	3/26	3/06	2/87	2/78	2/69	2/61	2/53	2/45	2/38
5	230/2	19/3	9/01	6/26	5/05	4/39	3/97	3/69	3/48	3/33	3/11	2/9	2/71	2/62	2/53	2/45	2/37	2/29	2/22
6	234	19/33	8/94	6/16	4/95	4/28	3/87	3/58	3/37	3/22	3	2/79	2/6	2/51	2/42	2/34	2/25	2/18	2/11
7	236/8	19/35	8/89	6/09	4/88	4/21	3/79	3/5	3/29	3/14	2/91	2/71	2/51	2/42	2/33	2/25	2/17	2/09	2/02
8	238/9	19/37	8/85	6/04	4/82	4/15	3/73	3/44	3/23	3/07	2/85	2/64	2/45	2/36	2/27	2/18	2/1	2/02	1/95
9	240/5	19/38	8/81	6	4/77	4/1	3/68	3/39	3/18	3/02	2/8	2/59	2/39	2/3	2/21	2/12	2/04	1/96	1/89
10	241/9	19/4	8/79	5/96	4/74	4/06	3/64	3/35	3/14	2/98	2/75	2/54	2/35	2/25	2/16	2/08	1/99	1/91	1/84
11	243/9	19/41	8/74	5/91	4/68	4	3/57	3/28	3/07	2/91	2/69	2/48	2/28	2/18	2/09	2	1/92	1/83	1/76
12	243/9	19/41	8/74	5/91	4/68	4	3/57	3/28	3/07	2/91	2/69	2/48	2/28	2/18	2/09	2	1/92	1/83	1/76
13	244/7	19/42	8/73	5/89	4/66	3/98	3/55	3/26	3/05	2/89	2/66	2/45	2/25	2/15	2/06	1/97	1/89	1/8	1/73
14	245/4	19/42	8/71	5/87	4/64	3/96	3/53	3/24	3/03	2/86	2/64	2/42	2/22	2/13	2/04	1/95	1/86	1/78	1/7
15	246	19/43	8/7	5/86	4/62	3/94	3/51	3/22	3/01	2/85	2/62	2/4	2/2	2/11	2/01	1/92	1/84	1/75	1/68
16	246/5	19/43	8/69	5/84	4/6	3/92	3/49	3/2	2/99	2/83	2/6	2/38	2/18	2/09	1/99	1/9	1/82	1/73	1/65
17	246/9	19/44	8/68	5/83	4/59	3/91	3/48	3/19	2/97	2/81	2/58	2/37	2/17	2/07	1/98	1/89	1/8	1/71	1/63
18	247/3	19/44	8/67	5/82	4/58	3/9	3/47	3/17	2/96	2/8	2/57	2/35	2/15	2/05	1/96	1/87	1/78	1/69	1/61
19	247/7	19/44	8/67	5/81	4/57	3/88	3/46	3/16	2/95	2/79	2/56	2/34	2/14	2/04	1/95	1/85	1/76	1/67	1/6
20	248	19/45	8/66	5/8	4/56	3/87	3/44	3/15	2/94	2/77	2/54	2/33	2/12	2/03	1/93	1/84	1/75	1/66	1/58
21	248/3	19/45	8/65	5/79	4/55	3/86	3/43	3/14	2/93	2/76	2/53	2/32	2/11	2/01	1/92	1/83	1/73	1/64	1/57
22	248/6	19/45	8/65	5/79	4/54	3/86	3/43	3/13	2/92	2/75	2/52	2/31	2/1	2	1/91	1/81	1/72	1/63	1/55
23	248/8	19/45	8/64	5/78	4/53	3/85	3/42	3/12	2/91	2/75	2/51	2/3	2/09	1/99	1/9	1/8	1/71	1/62	1/54
24	249/1	19/45	8/64	5/77	4/53	3/84	3/41	3/12	2/9	2/74	2/51	2/29	2/08	1/98	1/89	1/79	1/7	1/61	1/53
25	249/3	19/46	8/63	5/77	4/52	3/83	3/4	3/11	2/89	2/73	2/5	2/28	2/07	1/97	1/88	1/78	1/69	1/6	1/52
30	250/1	19/46	8/62	5/75	4/5	3/81	3/38	3/08	2/86	2/7	2/47	2/25	2/04	1/94	1/84	1/74	1/65	1/55	1/47
40	251/1	19/47	8/59	5/72	4/46	3/77	3/34	3/04	2/83	2/66	2/43	2/2	1/99	1/89	1/79	1/69	1/59	1/5	1/41
50	251/8	19/48	8/58	5/7	4/44	3/75	3/32	3/02	2/8	2/64	2/4	2/18	1/97	1/86	1/76	1/66	1/56	1/46	1/36
120	253/3	19/49	8/55	5/66	4/4	3/7	3/27	2/97	2/75	2/58	2/34	2/11	1/9	1/79	1/68	1/58	1/47	1/35	1/24
1000	254/2	19/49	8/53	5/63	4/37	3/67	3/23	2/93	2/71	2/54	2/3	2/07	1/85	1/74	1/63	1/52	1/4	1/27	1/11

جدول ۶ (ادامه). مقادیر $f_{0/01,\nu_1,\nu_2}$

درجه‌ی آزادی ν_1

ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	1000
1	4052/2	98/5	34/12	21/2	16/26	13/75	12/25	11/26	10/56	10/04	9/33	8/68	8/1	7/82	7/56	7/31	7/08	6/85	6/66
2	4999/5	99	30/82	18	13/27	10/92	9/55	8/65	8/02	7/56	6/93	6/36	5/85	5/61	5/39	5/18	4/98	4/79	4/63
3	5403/4	99/17	29/46	16/69	12/06	9/78	8/45	7/59	6/99	6/55	5/95	5/42	4/94	4/72	4/51	4/31	4/13	3/95	3/8
4	5624/6	99/25	28/71	15/98	11/39	9/15	7/85	7/01	6/42	5/99	5/41	4/89	4/43	4/22	4/02	3/83	3/65	3/48	3/34
5	5763/7	99/3	28/24	15/52	10/97	8/75	7/46	6/63	6/06	5/64	5/06	4/56	4/1	3/9	3/7	3/51	3/34	3/17	3/04
6	5859	99/33	27/91	15/21	10/67	8/47	7/19	6/37	5/8	5/39	4/82	4/32	3/87	3/67	3/47	3/29	3/12	2/96	2/82
7	5928/4	99/36	27/67	14/98	10/46	8/26	6/99	6/18	5/61	5/2	4/64	4/14	3/7	3/5	3/3	3/12	2/95	2/79	2/66
8	5981/1	99/37	27/49	14/8	10/29	8/1	6/84	6/03	5/47	5/06	4/5	4	3/56	3/36	3/17	2/99	2/82	2/66	2/53
9	6022/5	99/39	27/35	14/66	10/16	7/98	6/72	5/91	5/35	4/94	4/39	3/89	3/46	3/26	3/07	2/89	2/72	2/56	2/43
10	6055/9	99/4	27/23	14/55	10/05	7/87	6/62	5/81	5/26	4/85	4/3	3/8	3/37	3/17	2/98	2/8	2/63	2/47	2/34
11	6106/3	99/42	27/05	14/37	9/89	7/72	6/47	5/67	5/11	4/71	4/16	3/67	3/23	3/03	2/84	2/66	2/5	2/34	2/2
12	6106/3	99/42	27/05	14/37	9/89	7/72	6/47	5/67	5/11	4/71	4/16	3/67	3/23	3/03	2/84	2/66	2/5	2/34	2/2
13	6125/9	99/42	26/98	14/31	9/82	7/66	6/41	5/61	5/05	4/65	4/1	3/61	3/18	2/98	2/79	2/61	2/44	2/28	2/15
14	6142/7	99/43	26/92	14/25	9/77	7/6	6/36	5/56	5/01	4/6	4/05	3/56	3/13	2/93	2/74	2/56	2/39	2/23	2/1
15	6157/3	99/43	26/87	14/2	9/72	7/56	6/31	5/52	4/96	4/56	4/01	3/52	3/09	2/89	2/7	2/52	2/35	2/19	2/06
16	6170/1	99/44	26/83	14/15	9/68	7/52	6/28	5/48	4/92	4/52	3/97	3/49	3/05	2/85	2/66	2/48	2/31	2/15	2/02
17	6181/4	99/44	26/79	14/11	9/64	7/48	6/24	5/44	4/89	4/49	3/94	3/45	3/02	2/82	2/63	2/45	2/28	2/12	1/98
18	6191/5	99/44	26/75	14/08	9/61	7/45	6/21	5/41	4/86	4/46	3/91	3/42	2/99	2/79	2/6	2/42	2/25	2/09	1/95
19	6200/6	99/45	26/72	14/05	9/58	7/42	6/18	5/38	4/83	4/43	3/88	3/4	2/96	2/76	2/57	2/39	2/22	2/06	1/92
20	6208/7	99/45	26/69	14/02	9/55	7/4	6/16	5/36	4/81	4/41	3/86	3/37	2/94	2/74	2/55	2/37	2/2	2/03	1/9
21	6216/1	99/45	26/66	13/99	9/53	7/37	6/13	5/34	4/79	4/38	3/84	3/35	2/92	2/72	2/53	2/35	2/17	2/01	1/87
22	6222/8	99/45	26/64	13/97	9/51	7/35	6/11	5/32	4/77	4/36	3/82	3/33	2/9	2/7	2/51	2/33	2/15	1/99	1/85
23	6229	99/46	26/62	13/95	9/49	7/33	6/09	5/3	4/75	4/34	3/8	3/31	2/88	2/68	2/49	2/31	2/13	1/97	1/83
24	6234/6	99/46	26/6	13/93	9/47	7/31	6/07	5/28	4/73	4/33	3/78	3/29	2/86	2/66	2/47	2/29	2/12	1/95	1/81
25	6239/8	99/46	26/58	13/91	9/45	7/3	6/06	5/26	4/71	4/31	3/76	3/28	2/84	2/64	2/45	2/27	2/1	1/93	1/79
30	6260/7	99/47	26/5	13/84	9/38	7/23	5/99	5/2	4/65	4/25	3/7	3/21	2/78	2/58	2/39	2/2	2/03	1/86	1/72
40	6286/8	99/47	26/41	13/75	9/29	7/14	5/91	5/12	4/57	4/17	3/62	3/13	2/69	2/49	2/3	2/11	1/94	1/76	1/61
50	6302/5	99/48	26/35	13/69	9/24	7/09	5/86	5/07	4/52	4/12	3/57	3/08	2/64	2/44	2/25	2/06	1/88	1/7	1/54
120	6339/4	99/49	26/22	13/56	9/11	6/97	5/74	4/95	4/4	4	3/45	2/96	2/52	2/31	2/11	1/92	1/73	1/53	1/35
1000	6362/7	99/5	26/14	13/47	9/03	6/89	5/66	4/87	4/32	3/92	3/37	2/88	2/43	2/22	2/02	1/82	1/62	1/4	1/16

مراجع

1. Feller, William (1968); An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vols 1 and 2, New York, John Wiley.
2. Gordon & Breach (1970); Elementary Combinatorial Analysis, Science Publishers Inc, New York.
3. Hoel, P., Port, S. C. & Stone. C. J. (1971); Introduction to Probability Theory, Boston, Houghton, Mifflin Co.
4. Hogg, R. V. & Craig, A. T., (1973); Introduction to Mathematical Statistics, New York, Macmillan Publishing Co.
5. Johnson, N. L. & Kotz, S. (1970); Continuous Univarate Distributions, Vols 1 and 2, New York, John Wiley.
6. Hodges, J. L. & Lehmann, E. L. (1970); Basic Concepts of Probability and Statistics, Holden Day San Francisco.
7. Ross, S. (1976), A First Course in Probability, New York Macmillan Publishing Co.
8. Schaeffer, R. L. & Mendenhall (1975); Introduction to probability Theory and Applications, North Scituate, Mass Duxbury Press.
9. Sevastynov, B. A. (1985); Problems in the Theory of Probability, Mir Publishers, Moscow.
10. Ash, R. B. (1972); Real Analysis and Probability, New York Academic Press.
11. Kiyosi Ito (1987); Introduction to Probability Theory, Cambridge University Press.

۱۲. نظریه‌ی مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی تألیف کای‌لای‌چانگ (۱۳۶۴)، ترجمه‌ی دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل، دکتر ابوالقاسم میامئی، مرکز نشر دانشگاهی.
۱۳. آمار ریاضی تألیف جان فروند، دانلد والپول (۱۳۷۱)، ترجمه‌ی دکتر علی عمیدی، دکتر محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی.
۱۴. احتمال، تألیف دکتر علی عمیدی، انتشارات دانشگاه شهید چمران.
۱۵. ریاضیات انتخاب، ترجمه‌ی دکتر علی عمیدی، بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی.
۱۶. مفاهیم پایه‌ای آمار و احتمال، تالیف دکتر عبدالرضا بازرگان‌لاری، مرکز نشر دانشگاه شیراز.
۱۷. آمار و احتمال جغرافیا، تالیف دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل، انتشارات دانشگاه پیام‌نور.