



بروزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مهربان حبیبی

استاد ارشد این بزم بدون کب اجازه ممنوع است.

سوالات باینری و کوتاه پاسخ

۱. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \frac{2i}{j+1}$ ، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم است.

ب. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $|-A|$ برابر است با

الف. $a_{32} = \frac{2.3}{2+1} = 2$ ب. $|A| = (-2).(-1).(-1) = 8 \Rightarrow |-A| = (-1)^3 .|A| = -8$

۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A باشد
 ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.
 پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک می شود.
 ت) حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} که بر هم عمود هستند، برابر است.

الف. ناصفر ب. ویژگی مشترک پ. دایره یا خط راست ت. صفر

۳. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف. ماتریس قطری را که درایه های روی قطر اصلی آن برابر باشند، ماتریس می نامیم.
 ب. حاصل ضرب ماتریس ها، خاصیت جابه جای

الف. اسکالر ب. ندارد



بزه های آموزش، امتحان نهایی هنده سه، ویژه خرداد و شهرور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاده از این بزه بدون کب اجازه ممنوع است.

۴. درستی یا نادرستی

الف. در حالی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود بوده و از رأس آن عبور نکند، مشترک فصل حاصل یک دایره خواهد بود.

ب. اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه، ناصفر باشد، دستگاه جواب ندارد.

الف. درست ب. نادرست

۵. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف. هر ماتریس اسکالر، یک ماتریس قطری است.

ب. معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 < 4c$.

ج. اگر خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد آنگاه بیضی به یک پاره خط تبدیل می شود.

الف. درست ب. نادرست ج. نادرست

۶. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) اگر برای ماتریس های متمایز A, B و C داشته باشیم، $AB=AC$ ، آنگاه لزوماً $B=C$ است.

ب) در حالی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (I) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از

دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

پ) نقطه $A(2, -3, 0)$ روی صفحه xoy قرار دارد.

الف. نادرست ب. نادرست پ. درست

۷. پاسخ کوتاه

الف. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $|A^3|$ کدام است؟

ب. مکان هندسی نقطه ای که از یک خط و یک نقطه غیر واقع بر آن به یک فاصله باشد، کدام است؟

الف. ۵۱۲ ب. سهمی



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۸. پاسخ کوتاه

الف. معادله $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ معادله کدام محور است؟

ب. معادله $x=0$ معادله کدام صفحه است؟

ج. نقطه A به طول ۲ روی محور طولها قرار دارد و $B(-4, 6, -3)$. مختصات نقطه وسط AB را

بنویسید.

الف. ارتفاع YOZ ب. $\left(-1, 3, \frac{-3}{2}\right)$ ج.

۹. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف. مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند، نیمساز زاویه بین دو خط است.

ب. صفحه ای با محور مخروط دواری موازی است و از راس آن عبور نمی کند، فصل مشترک صفحه و

سطح مخروطی، یک بیضی است.

ج. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع درایه های سطر سوم A^3 برابر ۵ است.



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

سوالات فصل اول

۱۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ را چنان بیابید که $A^2 - B = \bar{0}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5-4a-b \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{cases} 5-a-b=0 \\ 5-4a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=5$$

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $|A^3|$ را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2) \cdot (-3) \cdot (5) = -30 \Rightarrow |A^3| = |A|^3 = (-30)^3 = -27000$$

۱۲. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, i > j \\ i - j, i = j \\ j - i, i < j \end{cases}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ تعریف شود،

الف. حاصل $A \cdot B$ را بیابید. ب. دترمینان ماتریس B را بیابید.



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مهران حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه منع است.

۱۳. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i, j, i > j \\ i^2, i = j \\ 2i - j, i < j \end{cases}$ تعریف شود، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - 3I = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

۱۴. اگر A ماتریس 3×3 بوده و $|A| = -2$ باشد، حاصل $|A \cdot A|$ را بیابید.

$$|A \cdot A| = |A|^3 \cdot |A| = |A|^4 = (-2)^4 = 16$$

۱۵. از معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مقدار x را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x-6 & -6x+12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3x+6-6x+12=0 \Rightarrow -9x=-18 \Rightarrow x=2$$

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، دترمینان $B \cdot A$ را بیابید.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

۱۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل A^7 را بیابید.



برزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد ارشد این برزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۱۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+y=5 \Rightarrow 3+y=5 \Rightarrow y=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

۱۹. اگر ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، حاصل

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \cdot [x \ 2 \ -y] \text{ را بیابید.}$$

۲۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ ، $b_{ij} = i + j$ ، $A^2 + B^2 + A \cdot B$ را بیابید.

۲۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^2 + A \cdot B + 3I$ را بیابید.

۲۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^2 + B - 2I$ را بیابید.

۲۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^2 - B^2 + 3A \cdot B - 5I$ را بیابید.

۲۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^2 + B^2$ را بیابید.

۲۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^2 + 2B - 3I$ را بیابید.

۲۶. دو ماتریس هم مرتبه A, B بنویسید که $A \neq \bar{0}$ ، $B \neq \bar{0}$ ، $A \cdot B = \bar{0}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \bar{0}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \bar{0}, A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$



بزه های آموزشی، آزمون نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۲۷. سه ماتریس هم مرتبه A, B, C بنویسید که $A \neq B, A.C = B.C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.C = A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \neq B$$

۲۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{27} را بیابید.

۲۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{1397} را بیابید.

۳۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^7 + A^8$ را بیابید.

۳۱. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{17} + A^{18}$ را بیابید.

۳۲. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{1399} را بیابید.

۳۳. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{1399} + A^{2019}$ را بیابید.

۳۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{1399} را بیابید.

۳۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{2019} را بیابید.

۳۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^9 + 2A + 3I$ را بیابید.

۳۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{2019} را بیابید.

۳۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{2019} + A^{1399}$ را بیابید.

۳۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{1397}$ را بیابید.



بروزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بروزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۴۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{27} را بیابید.

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{27} را بیابید.

۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{500} را بیابید.

۴۳. اگر $X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 2I$ ، $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ماتریس X را بیابید.

۴۴. اگر $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2I$ ، ماتریس X را بیابید.

۴۵. دستگاه $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ را در صورت وجود جواب، به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{3 - (-10)} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

۴۶. دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots\dots\dots} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

۴۷. دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{m+4} \Rightarrow m^2 + 4m = 12 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow (m+6) \cdot (m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 2 \end{cases}$$



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مهابان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۴۸. دستگاه $\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از m جواب منحصر به فرد دارد؟

$$\frac{m-3}{4} \neq \frac{3}{m+1} \Rightarrow m^2 - 2m - 3 \neq 12 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 \neq 0 \Rightarrow (m+3) \cdot (m-5) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 5 \end{cases}$$

۴۹. مقدار m را چنان بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2m - 4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

۵۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه وارون ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 3 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

۵۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه وارون ماتریس A^2 را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \cdot \begin{bmatrix} 28 & -7 \\ -21 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots} \cdot \begin{bmatrix} 28 & -7 \\ -21 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۵۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه وارون ماتریس $A+I$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{|A+I|} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$



برزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این برزه بدون کب اجازه ممنوع است.

۵۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه وارون ماتریس $A-2I$ را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A-2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{|A-2I|} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۵۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه وارون ماتریس A^2+2I را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$A^2+2I = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$(A^2+2I)^{-1} = \frac{1}{|A^2+2I|} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots} \cdot \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۵۵. اگر $X+3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس X را کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X + 3I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{10-9} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$$

۵۶. اگر $X-2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس X را کدام است؟

۵۷. اگر دستگاه $\begin{cases} -2x+my=2 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ فقط یک جواب داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۵۸. اگر دستگاه $\begin{cases} -2x+my=2 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ فقط بیشمار جواب داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۵۹. اگر دستگاه $\begin{cases} 2x+my=-2 \\ mx+8y=m \end{cases}$ فقط بیشمار جواب داشته باشد، مقدار m کدام است؟



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر فرزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۶۰. دو خط $l: y = mx + 2, l': 3y = 2x + 1$ موازی هستند، مقدار کدام است؟

۶۱. دو خط $l: y = mx + 2, l': 3y = 2x + 1$ بر هم عمود هستند، مقدار m کدام است؟

۶۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 3|A| & 2|A| \end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ کدام است؟

۶۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2m+1 & 3 \\ m-2 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار m کدام باشد که $|A| = 7$ ؟

۶۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A را حساب کنید.

۶۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A را حساب کنید.

۶۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس های $A, B, A+B$ را حساب کنید.

۶۷. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A^2 را حساب کنید.

۶۸. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $|A| = 7$ آنگاه $|5.A|$ کدام است؟

۶۹. اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $|A| = 7$ آنگاه $|5.A|$ کدام است؟

۷۰. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $|A| = 4$ آنگاه $||A|.A|$ کدام است؟

۷۱. اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $|A| = 4$ آنگاه $||A|.A|$ کدام است؟

۷۲. وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ را بیابید.

۷۳. اگر $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ ماتریس A^{1399} را بیابید.



بزه های آموزش، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد ازان بزه بدون کب اجازه ممنوع است.

۷۴. اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ماتریس A^{1399} را بیابید.

۷۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{200} را بیابید.

۷۶. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان $|2A|$ را بیابید.

۷۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان $|A|$ را بیابید.

۷۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{-1} - B^{-1}$ را بیابید.

۷۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه $(A - B)^{-1}$ را بیابید.

۸۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه $2A^{-1} - 3B^{-1}$ را بیابید.

۸۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه $(2A - 3B)^{-1}$ را بیابید.



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

سوالات فصل دوم

۸۲. اگر $A(3,1,2)$ و $B(3,-2,2)$ ،

الف. اندازه پاره خط AB را بیابید.

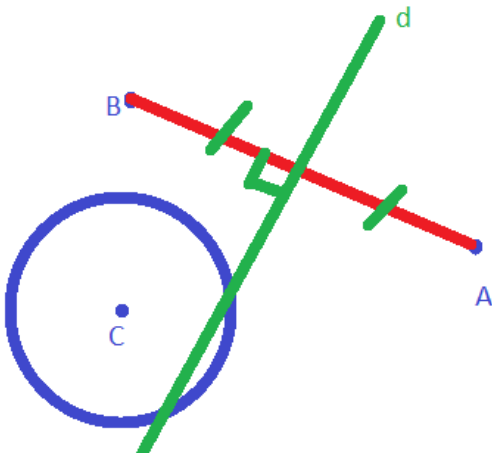
$$AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{0+9+0} = 3$$

ب. مختصات نقطه وسط پاره خط AB را تعیین کنید

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \\ z_M &= \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M = \left(3, -\frac{1}{2}, 2 \right)$$

۸۳. سه نقطه A, B, C مفروضند، نطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از نقطه C به فاصله

کمتر از ۳ سانتی متر باشد. (در مورد وجود و تعداد جوابها، بحث کنید)



عمود منصف پاره خط A, B, C و دایره به مرکز A, B, C به شعاع A, B, C را رسم می کنیم. نقاطه

مشترک دایره و عمود منصف جواب مساله هستند. با توجه به وضعیت عمود منصف نسبت به دایره، مساله

ممکن است صفر، یک یا دو جواب داشته باشد.



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مهربان حبیبی

استاد ازان بزه بدون کب اجازه ممنوع است.

۸۴. معادله دایره ای را بنویسید که $O(2,3)$ مرکز آن و بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس باشد.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 1 + 4 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} O' = (-1, 2) \\ R' = 3 \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, R + R' = OO' \Rightarrow R = OO' - R' = \sqrt{10} - 3$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{10}-3)^2$$

۸۵. معادله دایره های را بنویسید که نقطه $O(-2,3)$ مرکز آن و $M(1,-1)$ یک نقطه از آن باشد.

$$R = OM = \sqrt{9+16} = 5$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = (5)^2$$

۸۶. معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن باشند و خط

$$4x+3y=-5 \text{ بر دایره مماس باشد.}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, -1 \Rightarrow O(2,-1)$$

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - 3 + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

۸۷. از نقطه $A(2,3)$ مماسی بر دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ رسم کرده ایم، معادله این مماس را

بنویسید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \\ 4 + 9 - 4 - 6 = 3 \end{cases} \Rightarrow A \in C$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} O(1,1) \\ R = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$m_{OA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{-1-1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m' = \frac{-1}{m_{OA}} = \frac{2}{3}$$

$$(y - y_A) = m' \cdot (x - x_A) \Rightarrow (y + 1) = \frac{2}{3} \cdot (x - 4)$$



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه منع است.

۸۸. معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(4, -1)$ و $B(-2, 1)$ دو سر یکی از قطرهایش باشند.

$$2R = AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

$$O = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{-1 + 1}{2} \right) = (1, 0)$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 10$$

۸۹. وضعیت خط $3x + y = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 7$ را نسبت به هم تعیین کنید.

روش اول:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 7 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 15 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(2, 2) \\ R = \sqrt{15} \end{array} \right\} \Rightarrow OH < R$$

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

خط و دایره متقاطع هستند.

روش دوم:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 7 \stackrel{y=-3x}{\Rightarrow} x^2 + (-3x)^2 - 4x - 4(-3x) = 7 \Rightarrow 10x^2 + 8x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(10)(-7) = 344 > 0$$

چون مبین (دلتا) معادله مثبت است پس دو ریشه متمایز دارد و لذا خط و دایره دو نقطه مشترک دارند

و در نتیجه متقاطع هستند.

۹۰. حدود a را چنان بیابید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ یک دایره باشد.

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 9 + 25 - 4a > 0 \Rightarrow 34 > 4a \Rightarrow \frac{34}{4} > a$$



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزده بدون کب اجازه منع است.

۹۱. دایره های زیر، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad x^2 + y^2 - 2x = 4$$

روش اول:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 &\Rightarrow \begin{cases} O = (0,0) \\ R = 2 \end{cases} \\ x^2 + y^2 - 2x = 4 &\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} O' = (1,0) \\ R' = \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} OO' = 1 \\ R + R' = 2 + \sqrt{3} \\ |R - R'| = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |R - R'| < OO' < R + R'$$

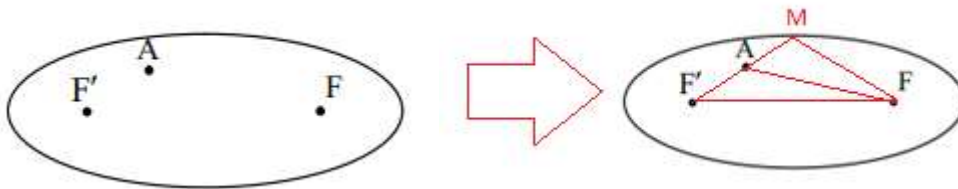
یعنی دو دایره متقاطع هستند.

روش دوم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2 - 2x) - (x^2 + y^2) = 4 - 4 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4 \stackrel{x=0}{\Rightarrow} y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} A(0,2) \\ B(0,-2) \end{cases}$$

۹۲. اگر نقطه A درون بیضی بوده و نقاط F و F' کانونهای بیضی باشند، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کمتر از قطر بزرگ بیضی است.



$$MF + MF' = 2a$$

$$AF < AM + MF \Rightarrow AF + AF' < AM + MF + AF' \Rightarrow AF + AF' < AM + MF' \Rightarrow AF + AF' < 2a$$

۹۳. خروج از مرکز بیضی را حساب کنید که اندازه قطرهایش ۱۰ و ۶ سانتی متر باشد.

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۹۴. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و اندازه قطر کوچک آن ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ و فاصله کانونی

بیضی را بیابید.

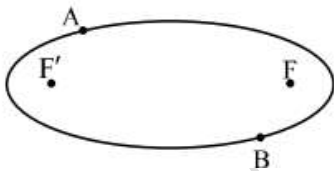
$$e = \frac{3}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{3}{5}a$$

$$2b = 16 \Rightarrow b = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 64 + \left(\frac{3}{5}a\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = 64 \Rightarrow a = 10$$

$$\begin{cases} 2a = 20 \\ 2c = 2\left(\frac{3}{5}a\right) = 2\left(\frac{3}{5} \cdot 10\right) = 12 \end{cases}$$

۹۵



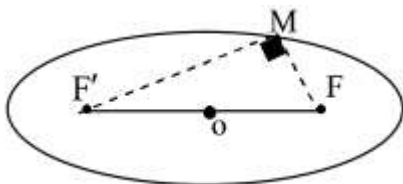
دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانونهای بیضی اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی اند.

$$\begin{cases} AF + AF' = 2a \\ BF + BF' = 2a \end{cases} \Rightarrow AF + AF' = BF + BF' \Rightarrow AF = BF'$$

پس چهارضلعی AFBF' متوازی الاضلاع است و لذا $AF = BF'$.

۹۶. نقطه M روی بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ قرار دارد و فاصله این نقطه از مرکز بیضی ۴ سانتی متر و

مثلث MFF' قائم الزاویه است، اندازه MF را بیابید.



$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ \Rightarrow c = 4 \Rightarrow FF' = 8 \end{cases}$$

$$MF = x \Rightarrow MF' = 2a - x = 10 - x$$

$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow 64 = x^2 + (10 - x)^2 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{7}$$



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مهربان حبیبی

استاد این بزه بدون کب اجازه ممنوع است.

۹۷. اگر اندازه قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک باشد، اندازه زاویه \widehat{FBF}' چند درجه است؟

$$a = 2b \Rightarrow b = \frac{a}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = c^2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\widehat{FBF}'}{2}\right) = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\widehat{FBF}'}{2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FBF}' = 120$$

۹۸. اگر نقطه $A(2,3)$ رأس سهمی و $y=7$ معادله خط هادی آن باشد،

الف. معادله سهمی را بنویسید. ب. مختصات کانون سهمی را بیابید.

$$\begin{cases} A(2,3) \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow a = 7 - 3 = 4 \Rightarrow (x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta) \Rightarrow (x - 2)^2 = -16(y - 3)$$

$$F = (2, 3 - 4)$$

۹۹. سهمی $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است، دایره به مرکز کانون سهمی و شعاع ۳ سانتی متر رسم

کرده ایم. الف. معادله دایره را بنویسید. ب. مختصات نقاط مشترک سهمی و دایره را بیابید.

۱۰۰. سهمی $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است، نمودار سهمی را رسم کرده و مختصات راس،

کانون و خط هادی آن را تعیین کنید.

$$y^2 - 2y + 8x + 9 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x - 8 \Rightarrow (y - 1)^2 = -8(x + 1) \Rightarrow \begin{cases} 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \\ A = (-1, 1) \\ F = (-1 - 2, 1) \\ \Delta: x = -1 + 2 \end{cases}$$

۱۰۱. معادله سهمی را بنویسید که $F(1, -2)$ کانون آن بوده و $S(1, 2)$ راس سهمی باشد. معادله

خط هادی سهمی را بنویسید.

$$a = FS = \sqrt{0 + 16} = 4$$

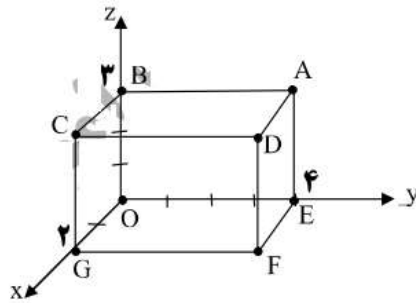
$$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta) \Rightarrow (x - 1)^2 = -16(y + 2)$$



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مهران حبیبی

استاد این بزده بدون کب اجازه ممنوع است.

سوالات فصل سوم



۱۰۲. با توجه به شکل روبرو

الف. مختصا نقطه A را بنویسید.

ب. معادله یال AD را بنویسید.

ج. معادله وجه CDFG را بنویسید

الف. $A = (2, 4, 3)$ ب. $AD: \begin{cases} y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ ج. $CDFG: x = 2$

۱۰۳. اگر $\vec{a} = 2i - k$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، اندازه بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به دست آورید.

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 0, -1) - 2(1, 2, 1) = (0, -4, -3) \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

۱۰۴. اگر $\vec{a} = 2i + j - 2k$ و $\vec{b} = (1, 2, 2)$ باشد، اندازه بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(2, 1, -2) - (1, 2, 2) = (3, 0, -6) \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

۱۰۵. اگر $\vec{a} = 2i - k + j$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، اندازه بردار $\vec{a} - 2\vec{b} + i - j$ را به دست آورید.

$$\vec{a} - 2\vec{b} + i - j = (2, -1, 1) - 2(1, 2, 1) + (1, 0, 0) - (0, 1, 0) = (1, -6, -1)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{38}$$

۱۰۶. اگر $\vec{a} = i + j + k$ و $\vec{b} = 2i - 2j + k$ باشد، اندازه بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را به دست آورید.

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 1, 1) + (2, -2, 1) = (3, -1, 2) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{14}$$

۱۰۷. اگر $\vec{a} = 4i + 2j - k$ و $\vec{b} = (3, 1, -1)$ و $r = 2$ ، بردار $r\vec{b} - \vec{a}$ را به دست آورید.



بزه های آموزشی، امتحان نهایی هندسه سه، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این بزرگوار کسب اجازه ممنوع است.

$$2\vec{b} - \vec{a} = 2(3, 1, -1) - (4, 2, -1) = (2, 0, -1) \Rightarrow |2\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

۱۰۸. اگر $\vec{a} = 4i + 2j - k$ و $\vec{b} = (3, 1, -1)$ دو ضلع یک مثلث باشند، ضلع سوم مثلث را به دست آورید.

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, 2, -1) + (3, 1, -1) = (7, 3, -2) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{49 + 9 + 4} = \sqrt{62}$$

۱۰۹. اگر $A(1, 2, 3)$ و $B(0, 1, 1)$ و $C(-1, 0, 4)$ راس هاس مثلث باشند، اندازه محیط مثلث را به

دست آورید.

$$|AB| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|AC| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|BC| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$AB + AC + BC = \sqrt{6} + 3 + \sqrt{11}$$

۱۱۰. اگر $A(1, 0, 3)$ و $B(1, 1, 0)$ و $C(-3, 1, 2)$ راس هاس مثلث باشند، اندازه محیط مثلث را به

دست آورید.

$$|AB| = \sqrt{0+1+9} = \sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$$

$$|BC| = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{21}$$

$$AB + AC + BC = \sqrt{10} + \sqrt{18} + \sqrt{21}$$

سروزباشید

مزبان حبیبی