



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱. تمرین: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف. اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد،  $4k+1$  مربع کامل است.

ب. هر دو عدد صحیح متوالی، نسبت به هم اول هستند.

ج. گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ وجود ندارد.

الف: درست    ب: نادرست (طبیعی)    ج: درست

۲. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  گنگ باشند و  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha + 2\beta$  گنگ است.

برهان خلف: فرض کنیم حکم داده شده درست نیست، یعنی  $\alpha + 2\beta$  گنگ نیست (فرض خلف). پس

$$\alpha + 2\beta \notin Q' \Rightarrow \alpha + 2\beta \in Q \stackrel{\alpha + \beta \in Q}{\Rightarrow} (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) \in Q \Rightarrow \beta \in Q$$

که یک تناقض است، پس فرض خلف نادرست و  $\alpha + 2\beta$  عددی گنگ است.

۳. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ :  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه  $A, B, C$  داشته باشیم  $A \cup B = A \cup C$  آنگاه  $B = C$

ج) اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k+1$  مربع کامل است.

الف: درست    ب: نادرست    پ: نادرست    ت: درست    ث: نادرست    ج: درست

۴. تمرین: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) اگر  $a|b$  آنگاه  $|a, b| = b$ .

ب) معادله هم‌نهشتی  $a x \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $(a, b) | m$ .

پ) تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.

ت) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر ۶ است.

الف: درست    ب: نادرست    پ: درست



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۵. تمرین: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگتر از ۱، عدد  $3^n - 1$  اول است.

الف: درست    ب: نادرست

۶. تمرین: در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید:

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد.

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با  $\Delta = 3$  حداقل ..... رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.

ج) اگر در گراف  $G$  از مرتبه  $p$  داشته باشیم  $\chi(G) = 1$  در این صورت  $\Delta(G)$  برابر ..... است.

د) مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر ..... است.

الف: ۲۸    ب: ۳    ج:  $p-1$     د: ۱۵

۷. تمرین: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف)  $[a, b] = c$  اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱)  $a|c, b|c$     ۲)  $\forall m > 0, \dots\dots\dots$

ب) گراف  $G$  را ..... می نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

ج) مقدار  $\chi(C_n)$  به ازای هر عدد طبیعی  $n > 2$  برابر است با: .....

الف:

۸. تمرین: ثابت کنید

$$\text{الف. } x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{ب. } x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

اثبات بازگشتی

الف: اثبات رفت



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2 \cdot x \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2 \cdot x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ است بدیهی}$$

اثبات برگشت

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2 \cdot x \Rightarrow x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2 \cdot x \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x + \frac{1}{x} \geq 2$$

ب: اثبات رفت

$$x + \frac{1}{x} \leq -2 \stackrel{x<0}{\Rightarrow} x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq -2 \cdot x \Rightarrow x^2 + 1 \geq -2 \cdot x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 0 \text{ است بدیهی}$$

اثبات برگشت

$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq -2 \cdot x \Rightarrow x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq -2 \cdot x \stackrel{x<0}{\Rightarrow} x + \frac{1}{x} \leq -2$$

توجه: شیوه اثبات بازگشتی در واقع، روشی برای یافتن نقطه شروع اثبات و همچنین روش رسیدن به حکم است. ممکن است همه مسیر برگشت پذیر نباشد.

۹. تمرین: برای دو عدد حقیقی و مثبت  $x, y$ ، ثابت کنید  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

اثبات رفت:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Rightarrow xy \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

اثبات برگشت:

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow xy \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2xy \stackrel{xy>0}{\Rightarrow} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

۱۰. تمرین: برای دو عدد حقیقی  $x, y$ ، ثابت کنید  $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ .

اثبات رفت:



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 1 &\geq xy + x + y \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 1) \geq 2(xy + x + y) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \\ \Rightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 &\geq 2xy + 2x + 2y \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

اثبات برگشت: با شما

۱۱. تمرین: برای دو عدد حقیقی  $x, y$  ثابت کنید  $x^2 + y^2 \geq xy + x + y - 1$ .

۱۲. تمرین: برای سه عدد حقیقی  $x, y, z$  ثابت کنید  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ .

اثبات رفت:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &\geq xy + xz + yz \\ \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) &\geq 2(xy + xz + yz) \\ \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 &\geq 2xy + 2xz + 2yz \\ \Rightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 &\geq 2xy + 2xz + 2yz \\ \Rightarrow (x^2 - 2xz + z^2) + (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yx + z^2) &\geq 0 \\ \Rightarrow (x-z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

اثبات برگشت: با شما

۱۳. تمرین: برای سه عدد حقیقی  $x, y, z$  ثابت کنید  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + z(x+y)$ .



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱۴. ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \quad \text{یعنی:}$$

اثبات رفت:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{x \cdot y} \Rightarrow (x+y)^2 \geq (2\sqrt{x \cdot y})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

اثبات برگشت:

۱۵. تمرین: اگر  $a > 1$  و  $a|5k+3$  و  $a|9k+4$  ، مقدار  $a$  را بیابید.

$$\left. \begin{array}{l} a|5k+3 \Rightarrow a|9(5k+3) \Rightarrow a|45k+27 \\ a|9k+4 \Rightarrow a|5(9k+4) \Rightarrow a|45k+20 \end{array} \right\} \Rightarrow a|(35k+27) - (45k+20) \Rightarrow a|7$$

$$\Rightarrow a = \pm 1, \pm 7 \stackrel{a>1}{\Rightarrow} a = 7$$

۱۶. تمرین: اگر  $5|4k+1$  ، ثابت کنید  $5|16k^2+28k+6$ .

$$5|4k+1 \Rightarrow 5|(4k+1)^2 \Rightarrow 5|16k^2+8k+1 \stackrel{5|20k+5}{\Rightarrow} 5|16k^2+28k+6$$

۱۷. تمرین: اگر  $a > 1$  و  $a|6k+14$  و  $a|4k+9$  ، مقدار  $a$  را بیابید.

۱۸. تمرین: اگر  $a \in \mathbb{N}$  ، حاصل  $[21a^2, 35a^3]$  را تعیین کنید.

$$[21a^2, 35a^3] = [3 \cdot 7 \cdot a^2, 5 \cdot 7 \cdot a^3] = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^3$$



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱۹. اگر  $a$  عددی فرد باشد و  $b|a+2$ ، آنگاه باقیمانده تقسیم  $a^2+b^2+3$  را بر ۸ را بیابید.

حل: از آنجا که  $a$  فرد است پس  $a+2$  نیز فرد خواهد بود و لذا  $b$  نیز فرد است.

چون  $a$  و  $b$  فرد هستند پس به صورت  $8k+1$  نوشته می شوند، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} a = 8k + 1 \\ b = 8k' + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = (8k + 1)^2 + (8k' + 1)^2 + 3 = 64k^2 + 16k + 1 + 64k'^2 + 16k' + 1 + 3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 8 \underbrace{(8k + 2k + 8k' + 2k')} + 5 = 8t + 5$$

۲۰. اگر باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد  $a$  را بر ۵۶

بیابید.

$$\begin{cases} a = 7k + 5 \\ a = 8k' + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = 56k + 40 \\ 7a = 56k' + 49 \end{cases} \Rightarrow 8a - 7a = (56k + 40) - (56k' + 49) \Rightarrow a = 56(k - k') - 9$$

پس باقیمانده برابر ۴۷ است.  $56 - 9 = 47$

۲۱. اگر دو عدد  $(3a-5)$  و  $(4a-7)$  رقم یکسان برابر داشته باشند رقم یکسان عدد  $(9a+6)$  را به دست

آورید

روش اول:

$$\begin{cases} 3a - 5 = 10k + r \\ 4a - 7 = 10k' + r \end{cases} \Rightarrow (4a - 7) - (3a - 5) = (10k + r) - (10k' + r)$$

$$\Rightarrow a - 2 = 10(k - k') \Rightarrow a = 10(k - k') + 2$$

روش دوم:

$$(4a - 7) \equiv (3a - 5) \pmod{10} \Rightarrow (4a - 3a) \equiv (7 - 5) \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow a = 10k + 2$$

۲۲. ثابت کنید عدد  $23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$  بر عدد ۱۳۲ بخشپذیر است.



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n$$

$$(12+11)^{51} \equiv 12^{51} + 11^{51} \Rightarrow 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv 0 \Rightarrow 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} = 132k$$

۲۳. اگر باقیمانده تقسیم  $m$  و  $n$  بر ۱۳ به ترتیب ۲ و ۹ باشد، باقیمانده تقسیم  $5n-3m$  بر ۱۳ را بیابید.

$$\begin{cases} m = 13k + 2 \\ n = 13k' + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 39k + 6 \\ 5n = 65k' + 45 \end{cases} \Rightarrow 5n - 3m = (65k' + 45) - (39k + 6)$$

$$\Rightarrow 5n - 3m = (65k' - 39k) + (6 + 45) \Rightarrow 5n - 3m = 13 \underbrace{(5k' - 3k + 3)}_t \Rightarrow 5n - 3m = 13t$$

۲۴. اگر باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۵ و ۶ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقیمانده تقسیم  $a$  بر ۳۰ را بیابید.

۲۵. رقم یکان عدد  $1!+2!+3!+4!+\dots+500!$  را بیابید.

$$\begin{cases} 1! \equiv 1, 2! \equiv 2, 3! \equiv 6, 4! \equiv 24 \equiv 4 \\ 5! \equiv 120 \equiv 0 \\ n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 1!+2!+3!+4!+\dots+500! \equiv 1+2+6+4 \equiv 13 \equiv 3$$

۲۶. باقیمانده تقسیم  $1000^{13} \times 12 + 11$  بر 7 را بیابید.

$$1000 \equiv 6 \Rightarrow 1000^7 \equiv -1 \Rightarrow (1000)^{13} \equiv (-1)^{13} \Rightarrow (1000)^{13} \equiv -1 \Rightarrow 12(1000)^{13} \equiv -12$$

$$\Rightarrow 12(1000)^{13} + 11 \equiv -1 \Rightarrow 12(1000)^{13} + 11 \equiv 6$$



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۲۷. باقیمانده تقسیم  $27^7 + 19$  بر 13 را بیابید.

$$27 \equiv 1 \Rightarrow (27)^7 \equiv 1^7 \Rightarrow (27)^7 \equiv 1 \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 20 \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 7$$

۲۸. باقیمانده تقسیم  $13^{22}$  بر 17 را بیابید.

$$13 \equiv -4 \Rightarrow (13)^2 \equiv (-4)^2 \Rightarrow (13)^2 \equiv 16 \equiv -1 \Rightarrow ((13)^2)^{11} \equiv (-1)^{11} \Rightarrow 13^{22} \equiv -1 \equiv 16$$

۲۹. اگر  $a, b, c \in Z$  و  $a \equiv b$  ثابت کنید  $a \cdot c \equiv b \cdot c$ .

قضیه کتاب

۳۰. معادله همبستگی  $3x \equiv 13$  را حل کنید و جواب عمومی آن را بنویسید.

$$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 \Rightarrow 3x \equiv 6 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

۳۱. اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

از اول مهر ماه تا هفتم اسفند،

$$5(30) + 7 = 157, 157 \equiv 3$$

پس هفتم اسفند، سه روز بعد از یکشنبه خواهد بود، یعنی چهارشنبه

۳۲. اگر اول مهرماه شنبه باشد، ۱۲ بهمن همان سال چند شنبه است؟





## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه منع است.

۳۳. اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

از سی و یکم مرداد تا دوازدهم بهمن:

$$1 + 31 + 4(30) + 12 = 163, 163 \equiv 2^7$$

پس سی و یکم مرداد، دو روز قبل از جمعه است، یعنی چهارشنبه

۳۴. به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$x \equiv 3kg, y \equiv 5kg$$

$$3x + 5y = 23 \Rightarrow 3x \equiv 23 \Rightarrow 3x \equiv 23 - 5 = 18 \stackrel{(3,5)=1}{\Rightarrow} x \equiv 6 \equiv 1 \Rightarrow x = 5k + 1$$

$$3x + 5y = 23 \Rightarrow 3(5k + 1) + 5y = 23 \Rightarrow 15k + 3 + 5y = 23 \Rightarrow 5y = -15k + 20 \Rightarrow y = -3k + 4$$

$$\begin{cases} x = 5k + 1 \geq 0 \\ y = -3k + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-1}{5} \\ \frac{4}{3} \geq k \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} \geq k \geq \frac{-1}{5} \Rightarrow k = 0, 1$$

۳۵. با تبدیل به معادله همزهستی، جواب های معادله سیاله  $5x + 2y = 18$  را بیابید.

$$5x + 2y = 18 \Rightarrow 5x \equiv 18 \Rightarrow 5x \equiv 18 - 8 \Rightarrow 5x \equiv 10 \Rightarrow x \equiv 2 \equiv 0 \Rightarrow x = 2k$$

$$5x + 2y = 18 \Rightarrow 5(2k) + 2y = 18 \Rightarrow 10k + 2y = 18 \Rightarrow 2y = -10k + 18 \Rightarrow y = -5k + 9$$

۳۶. با تبدیل به معادله همزهستی، جواب های معادله سیاله  $2000x + 5000y = 29000$  را بیابید.

۳۷. به چند طریق میتوان 29000 تومان را به اسکناسهای 2000 و 5000 تومانی تبدیل کرد؟

۳۸. جواب های معادله سیاله  $9x + 13y = 7$  را بیابید.



# جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کسب اجازه ممنوع است.

۳۹. شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و

مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورتهایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟

$$x \equiv 7 \text{ point } s, y \equiv 9 \text{ point } s$$

$$7x + 9y = 73 \Rightarrow 7x \equiv 73 \Rightarrow \dots \equiv \dots \Rightarrow \dots \equiv \dots \Rightarrow x = 9k + \dots$$

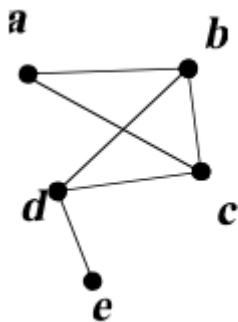
$$7x + 9y = 73 \Rightarrow 7(\dots) + 9y = 73 \Rightarrow \dots + 9y = 73 \Rightarrow 9y = \dots k + \dots \Rightarrow y = \dots k + \dots$$

$$\begin{cases} x = \dots \geq 0 \\ y = \dots \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow k = \dots$$

۴۰. ثابت کنید تعداد راس های فرد در هر گراف ساده، عددی زوج است.

کتاب درسی

۴۱. نمودار گراف  $G$  به صورت زیر است.



الف. مقادیر  $\delta(G), \Delta(G)$  را تعیین کنید.

ب. مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

ج. مجموعه همسایگی بسته راس  $b$  را بنویسید.

د. اگر  $N_G(d) = \{e, x, b\}$  آنگاه  $x$  کدام راس است؟

الف:  $\delta(G) = 1, \Delta(G) = 3$  ب:  $p = 5, q = 6$  ج:  $N_G[b] = \{a, b, c, d\}$  د:  $x = c$

۴۲. نمودار گراف  $G$  به صورت زیر است.

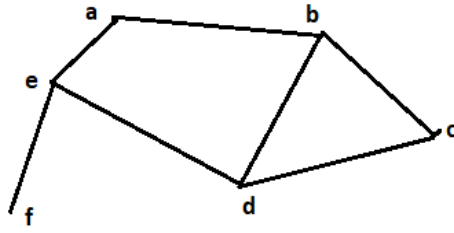
الف. مقادیر  $\delta(G), \Delta(G)$  را تعیین کنید. ب. مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

ج. مجموعه  $N_G[b]$  را بنویسید. د. اگر  $N_G(d) = \{e, x, b\}$  آنگاه  $x$  کدام راس است؟



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.



۴۲. گراف  $C_{10}$  را رسم کنید و

الف. یک مجموعه احاطه گر چهار عضوی برای آن بنویسید.

ب. عدد احاطه گری این گراف چیست؟

ج. دو مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.

۴۴. الف. یک گراف شش راسی با احاطه گری دو رسم کنید که دقیقاً یک مجموعه احاطه گر مینیمم داشته

باشد.

۴۵. ب. یک گراف شش راسی با احاطه گری دو رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر مینیمم

داشته باشد.

۴۶. الف. گراف  $k$ -منتظم از مرتبه  $p$  را تعریف کنید.

گرافی با  $p$  راس که درجه هر راس آن  $k$  باشد.

ب. آیا گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ چرا؟



# جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر نازبان حبیبی

استاد این جزوه بدون کسب اجازه ممنوع است.

خیر، تعداد راس های فرد در هر گراف ساده، عددی زوج است.

۴۷. تمرین:

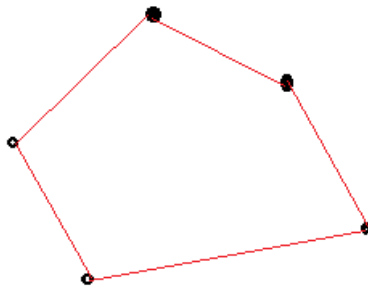
الف) گراف  $P_8$  را رسم کنید.

ب) یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

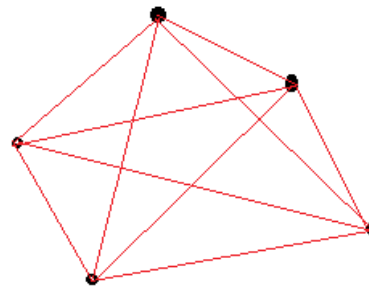
ج) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۴۸. گراف ناتهی  $k$ -منتظم از مرتبه ۵ رسم کنید که:

الف. درجه هر راس حداکثر مقدار ممکن باشد. ب. درجه هر راس حداقل مقدار ممکن باشد.



2-منتظم از مرتبه 5



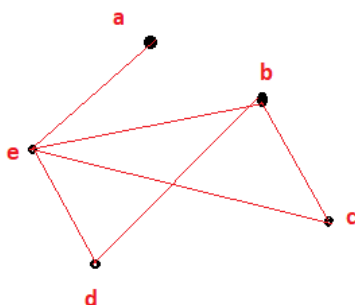
4-منتظم از مرتبه 5

۴۹. گراف  $G$  با مجموعه رئوس  $V = \{a, b, c, d, e\}$  و مجموعه یال های  $E = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$

مفروض است. بدون رسم نمودار گراف

الف. مجموعه  $N_G(d)$  را بنویسید. ب. یک مسیر به طول ۵ از راس  $d$  به راس  $a$  بنویسید.

ج. مجموع درجات رئوس گراف چند است؟ د. مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.



الف:  $N_G(d) = \{b, e\}$  ب:  $dbcea$

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q = 2 \cdot 6 = 12 \quad \text{ج:}$$

$$p = 5, q = 6 \quad \text{د:}$$



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر نریمان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه منع است.

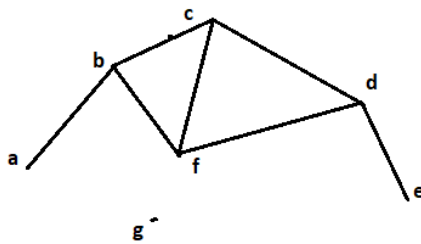
۵۰. گراف  $G$  با مجموعه رئوس  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  و مجموعه یال های

$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$  را رسم کنید.

الف. مجموعه  $N_G[b]$  را بنویسید. ب. یک مسیر به طول ۵ از راس  $G$  به راس  $G$  بنویسید.

ج. آیا این گراف دور دارد؟ د. مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

۵۱. نمودار گراف  $G$  به صورت زیر است،

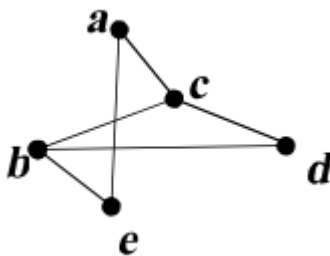


الف. دوری به طول ۵ بنویسید.

ب. دو مسیر متفاوت از  $a$  به  $d$  بنویسید.

ج. مکمل گراف را رسم کنید.

۵۲. نمودار گراف  $G$  به صورت زیر است



الف. دوری به طول ۵ بنویسید.

ب. دو مسیر متفاوت از  $a$  به  $d$  بنویسید.

ج. مکمل گراف را رسم کنید.

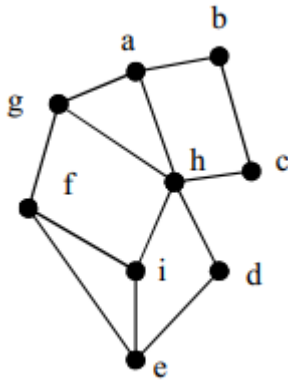
۵۳. در گراف زیر، ابتدا یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال برای گراف بنویسید و سپس با حذف

برخی از راسها، آن را به مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید.



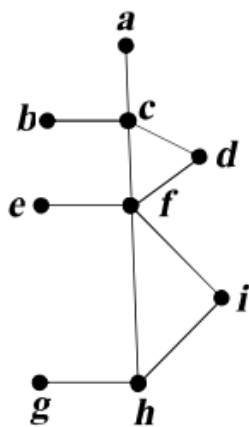
# جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.



۵۴. در گراف مقابل

الف. یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوب بنویسید.



ب. یک مجموعه احاطه گر مینیمال برای گراف بنویسید.

۵۵. گراف  $C_{10}$  را رسم کنید

الف. یک  $\gamma$ -مجموعه برای این گراف بنویسید.

ب. یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی برای آن بنویسید.

ج. عدد احاطه گری آن را بیابید.

۵۶. گراف  $P_{12}$  را رسم کنید

الف. یک  $\gamma$ -مجموعه برای این گراف بنویسید.



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

ب. یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی برای آن بنویسید.

ج. عدد احاطه گری آن را بیابید.

۵۷. اگر  $n$  تعداد رئوس و  $\Delta$  مازیمم درجه در یک گراف باشد،

الف. گرافی رسم کنید که عدد احاطه گری آن برابر  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  باشد.

ب. گرافی رسم کنید که عدد احاطه گری آن بیشتر از  $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$  باشد.

۵۸. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، آنگاه چند رمز ۵ رقمی می توان نوشت که دقیقا

شامل دو رقم متمایز از مجموعه  $A$  باشد.

۵۹. با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵، چند عدد نه رقمی می توان نوشت؟

۶۰. با حروف کلمه (مسی سی سی پی) چند جایگشت ۸ حرفی می توان نوشت؟ (معنای کلمه مهم نیست)



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۶۱. شش دانش آموز پایه دوازدهم و پنج دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می توانند کنار هم قرار

گیرند که:

- الف. یک در میان باشند.
- ب. دانش آموزان یازدهم در کنار هم باشند.
- ج. یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم، در کنار هم باشند.

۶۲. چهار کتاب ریاضی و پنج کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد که:

- الف. کتاب ها یک در میان ریاضی و فیزیک باشد.
- ب. کتاب های فیزیک در کنار هم باشند.
- ج. هیچ دو کتاب ریاضی در کنار هم نباشند.
- د. یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص، در کنار هم باشند.

۶۳. شش کتاب ریاضی و پنج کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد که:

- الف. کتاب ها یک در میان ریاضی و فیزیک باشد.
- ب. کتاب های ریاضی در کنار هم باشند.
- ج. کتاب های ریاضی در کنار هم و کتاب های فیزیک هم در کنار هم باشند.

۶۴. معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$  با شرط  $x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$ ، چند جواب صحیح نامنفی دارد؟





## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۶۵. معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$  با شرط  $x_1 > 2$  و  $x_5 \geq 4$ ، چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۶۶. معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$  با شرط  $x_1 > 2$  و  $x_2 > 3$ ، چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۶۷. به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان تقسیم کرد که به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟

۶۸. به چند طریق می توان ۵ خودکار متمایز را بین ۳ نفر چنان تقسیم کرد که به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟



## جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۶۹. سه دوست هم سایز، قرار است سه کت و سه پیراهن را در سه روز متفاوت استفاده کنند، برنامه ای بنویسید که هر نفر هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کند و در ضمن هر کت دقیقاً با یکی از پیراهن ها استفاده شود.

۷۰. قرار است چهار مدرس  $T_1, T_2, T_3, T_4$  در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس  $C_1, C_2, C_3, C_4$  به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک بار تدریس کند، برای اینکار برنامه ریزی کنید.

۷۱. دو مربع لاتین متعامد از مرتبه سه بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.

۷۲. آیا مربع های لاتین زیر متعامد هستند؟ (با رسم)

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2



جزوه های آموزشی، امتحان نهایی ریاضیات گسسته، ویژه خرداد و شهریور ۱۳۹۹، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

سروزباشید

مزبان حبیبی