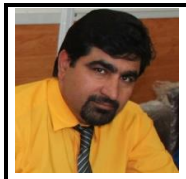


۱. روابط طولی در مثلث

در این بخش می خواهیم روابط بین اجزا طولی مثلث را بیابیم.

در ابتدا برخی از روابط مورد نیاز را یادآوری می کنیم

۲. یادآوری یک: روابط مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

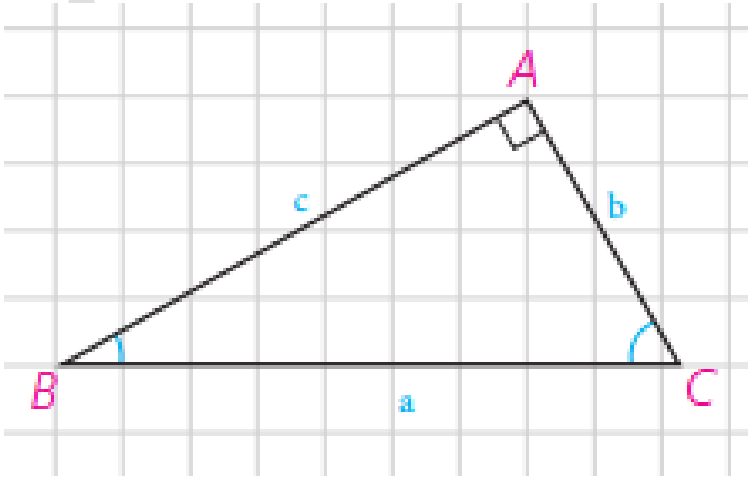
فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه باشد ($A=90^o, BC=a, AB=c, AC=b$)

$$\text{Sin}\,\hat{B}=\text{Cos}\,\hat{C}=\frac{b}{a}$$

$$\text{Sin}\,\hat{C}=\text{Cos}\,\hat{B}=\frac{c}{a}$$

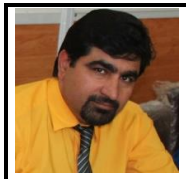
$$\tan\hat{B}=\cot\hat{C}=\frac{b}{c}$$

$$\tan\hat{C}=\cot\hat{B}=\frac{c}{b}$$



دکتر مرزبان حبیبی

1 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



یادآوری دو: ارتفاع وارد بر وتر در مثل قائم الزاویه

فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه بوده و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد

($A=90^o, BC=a, AB=c, AC=b$)

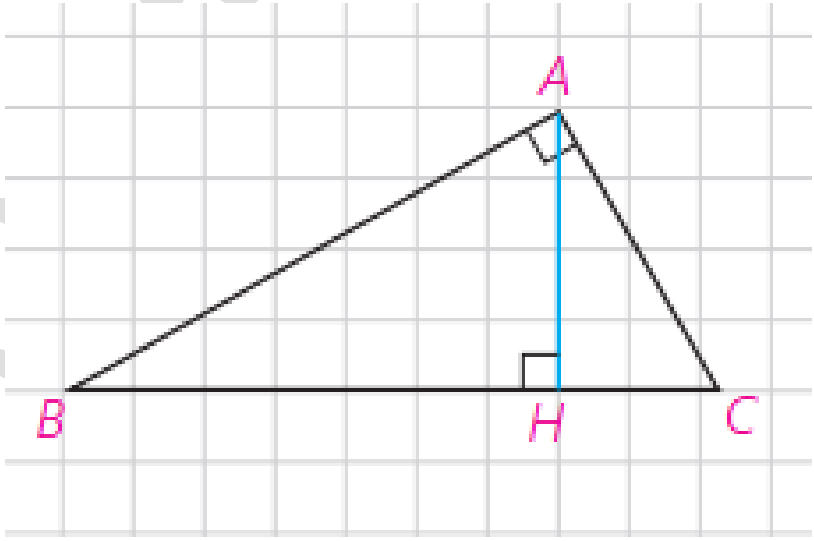
$$AH^2 = BH \times CH$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

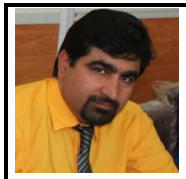
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$



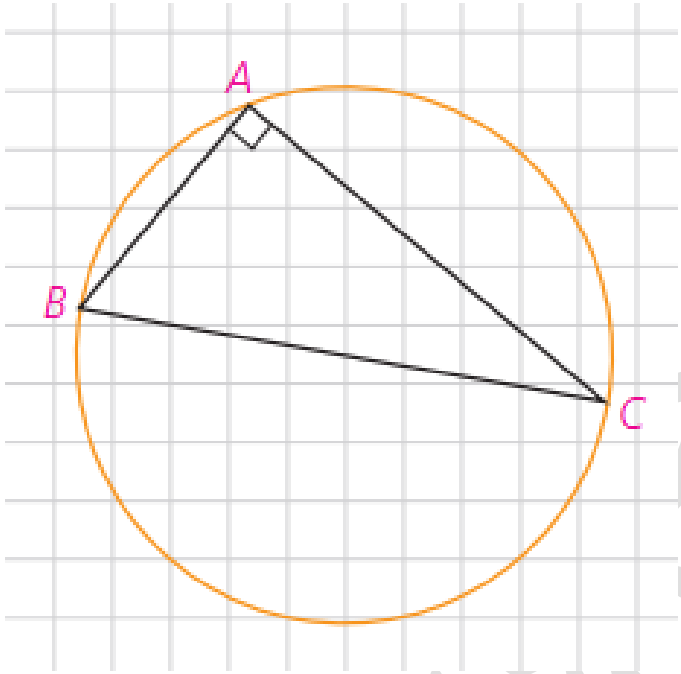
فعالیت یک: روابط قبل را به عنوان فعالیت کلاسی، اثبات کنید.

2 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۳. یادآوری سه: همرسی عمود منصف های اضلاع مثلث

اگر ABC مثلث دلخواهی باشد، آنگاه عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس هستند و اگر O نقطه همرسی عمود منصف‌های مثلث باشد، آنگاه $OA=OB=OC=R$ بنابراین دایره به مرکز O و شعاع R، از هر سه راس مثلث می گذرد.

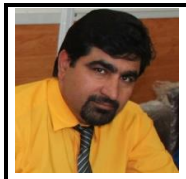


این دایره را **دایره محیطی مثلث** می گویند.

در ضمن اگر مثلث قائم الزاویه باشد، وتر مثلث یکی از قطرهای دایره محیطی خواهد بود.

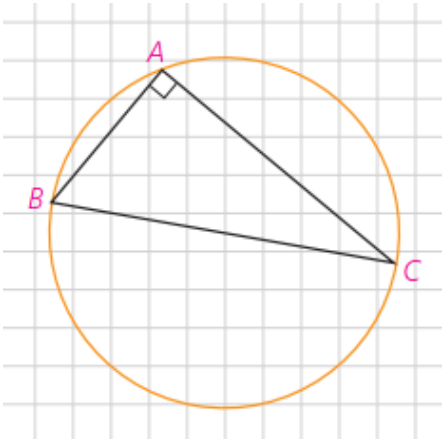
دکتر مزبان حبیبی

3 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۴. **فعالیت دو:** مثلث زیر را در نظر بگیرید و سینوس دو زاویه غیرقائم را حساب کنید .

توجه کنید که وتر مثلث، قطر دایره بوده و دو برابر شعاع دایره محیطی است.



$$\text{Sin}\,\hat{B}=\frac{b}{a}\Rightarrow \text{Sin}\,\hat{B}=\frac{b}{2R}\Rightarrow 2R=\frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}}$$

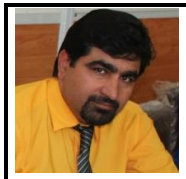
$$\text{Sin}\,\hat{C}=\frac{c}{a}\Rightarrow \text{Sin}\,\hat{C}=\frac{c}{2R}\Rightarrow 2R=\frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}$$

یعنی:

$$\frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}}=\frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}=2R$$

دکتر مزبان حبیبی

4 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۵. قضیه سینوس ها:

در مثلث دلخواه ثابت کنید $\frac{a}{\text{Sin}\,\hat{A}}=\frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}}=\frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}=2R$

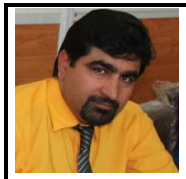
اثبات: فرض می‌کنیم شعاع دایره محیطی مثلث، R باشد،

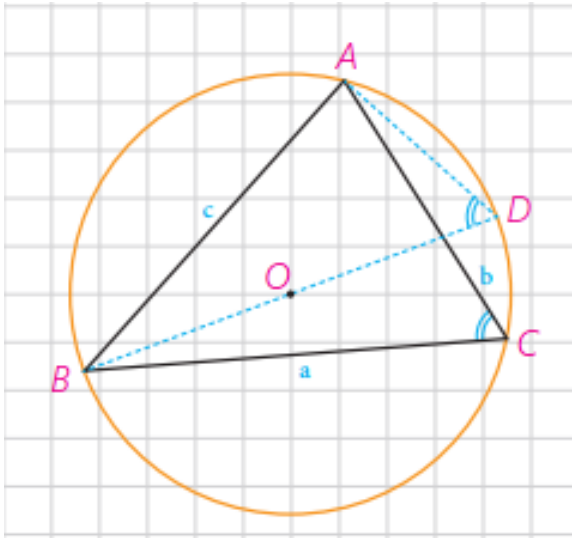
قطری از دایره محیط مثلث که از راس B می گذرد را رسم می کنیم.

توجه: برای حالتی که مثلث زاویه ای بزرگتر از ۹۰ درجه داشته باشد، از متمم آن زاویه در دایره محیطی، کمک می گیریم.

دکتر مزبان حبیبی

5 www.mezbanhabibi.ir +989176193511





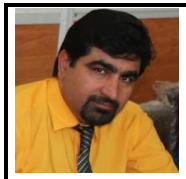
$$\hat{C} = \hat{D} \Rightarrow \text{Sin}\,\hat{C} = \text{Sin}\,\hat{D}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{c}{\text{Sin}\,\hat{D}} = 2R \Rightarrow \frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}} = 2R$$

اگر همین کار را برای زاویه های و انجام دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\text{Sin}\,\hat{A}} = 2R, \frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}} = 2R$$

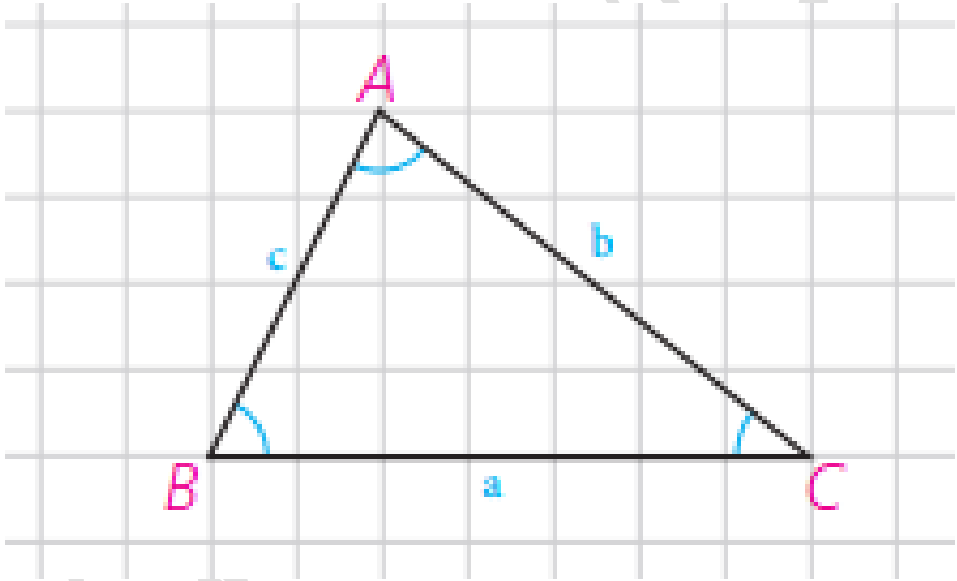
6 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



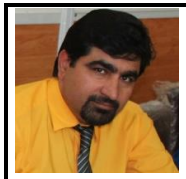
۶. **تمرین:**

در مثلث ABC**، داریم** $BC=10cm, \hat{A}=120^o, AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}cm$ ،

اندازه دو زاویه، اندازه ضلع شوم و اندازه شعاع دایره محیطی مثلث را بیابید.



7 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



حل:

$$\frac{a}{\text{Sin}\,\hat{A}}=\frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}}=\frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}=2R\Rightarrow\frac{10}{\text{Sin}120^o}=\frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\text{Sin}\,\hat{B}}=\frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}=2R$$

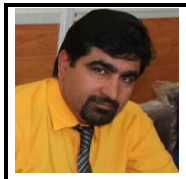
$$10\,\text{Sin}\,\hat{B}=\frac{10\sqrt{6}}{3}\text{Sin}120^o\Rightarrow\text{Sin}\,\hat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\hat{B}=45^o\,or\,135^o\overset{\hat{B}<90}{\Rightarrow}\hat{B}=45^o$$

$$\frac{10}{\text{Sin}120^o}=2R\Rightarrow\frac{10}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=2R\Rightarrow R=\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\hat{C}=180-120-45=15$$

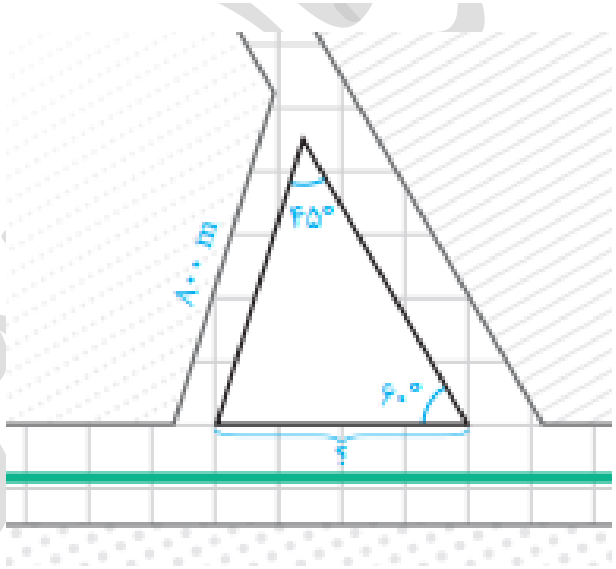
$$\frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}}=2R\Rightarrow\frac{c}{\text{Sin}15^o}=2R\Rightarrow c=2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right).\text{Sin}15^o$$

دکتر مرزبان حبیبی

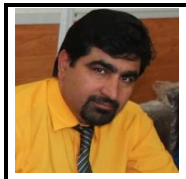


۷. تمرین:

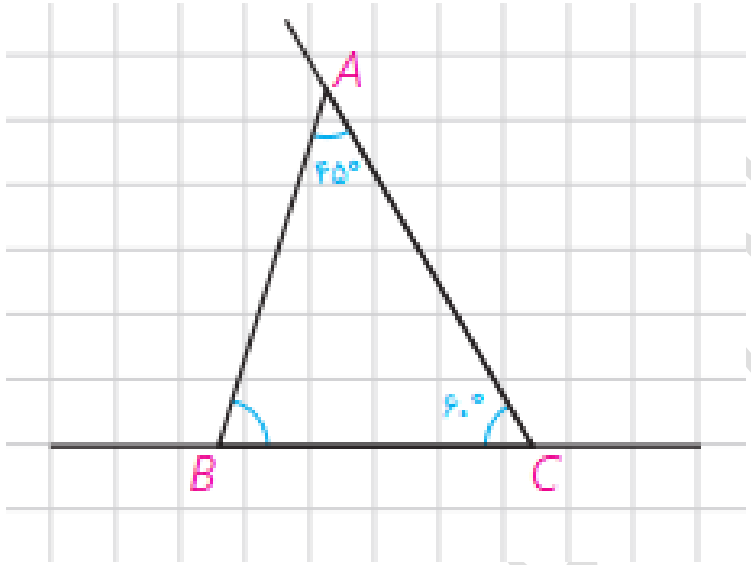
از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ 60° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ 60° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟



9 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



حل: شکل زیر را در نظر بگیرید و قضیه سینوس‌ها را برای آن بنویسید

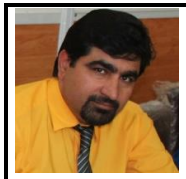


$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۸۰۰}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{BC}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=$$

$$\frac{۸۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{۸۰۰\sqrt{۶}}{۳}\approx ۶۵۳/۲\text{m}$$

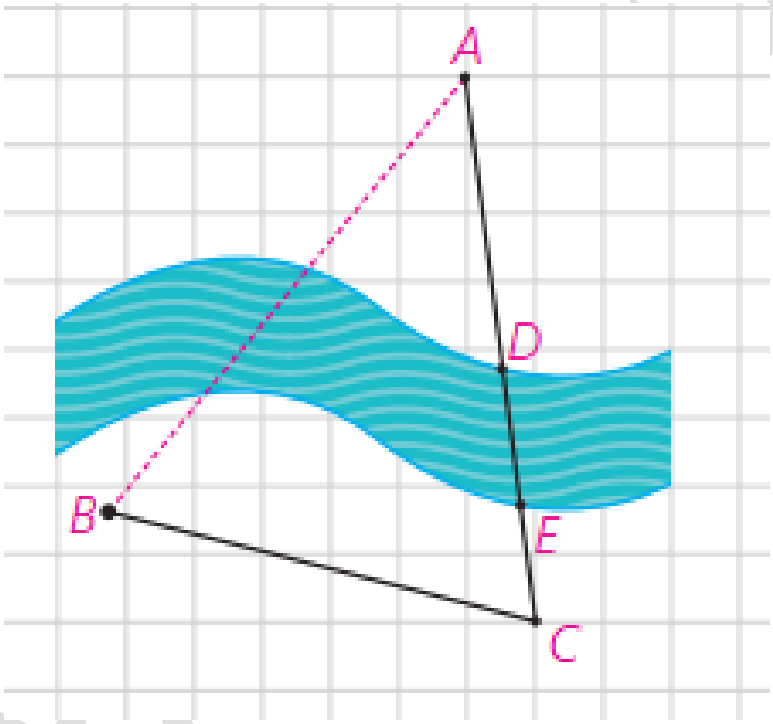
یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی ۶۵۳/۲ متر با زاویهٔ ۷۵° بنا کنیم.

10 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

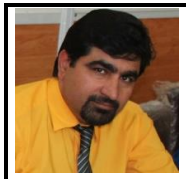


۸. تمرین: در شکل زیر، در مثلث ABC

اگر اندازه زاویه های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ اندازه ضلع BC را داشته باشیم، طول ضلع AB را بیابید.



11 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



حل:

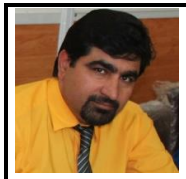
در مثلث داده شده، می‌دانیم مجموع زاویه‌ها، ۱۸۰ درجه است و لذا زاویه سوم را محاسبه کرده و در قضه سینوس ها جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\hat{A} = 180 - \hat{B} - \hat{C}$$

$$\frac{a}{\text{Sin}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{Sin}\,\hat{C}} \Rightarrow \frac{BC}{\text{Sin}\,\hat{A}} = \frac{AB}{\text{Sin}\,\hat{C}} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \text{Sin}\,\hat{C}}{\text{Sin}\,\hat{A}}$$

دکتر مزبان حبیبی

12 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۹. تمرین:

ثابت کنید

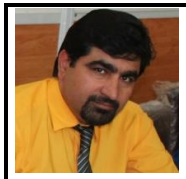
در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم :

$$\frac{۱}{h_a^{۲}}=\frac{۱}{b^{۲}}+\frac{۱}{c^{۲}}$$

حل: می دانیم $b^2+c^2=a^2$ **و** $a\times h_a=b\times c$ **پس**

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2\times c^2}=\frac{a^2}{(b\times c)^2}=\frac{a^2}{(a\times h_a)^2}=\frac{a^2}{a^2\times {h_a}^2}=\frac{1}{{h_a}^2}$$

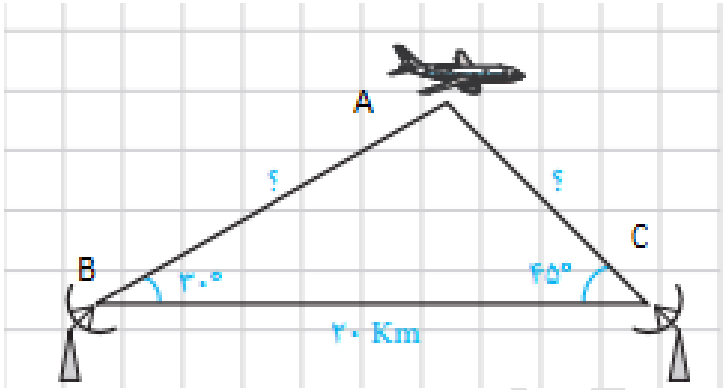
13 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۱۰. تمرین:

دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.

حل:

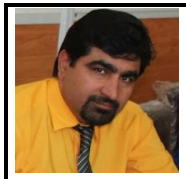


$$\hat{A} = 180 - \hat{B} - \hat{C} = 180 - 30 - 45 = 105$$

$$AB = \frac{BC \times \operatorname{Sin} \hat{C}}{\operatorname{Sin} \hat{A}} = \frac{\cdots \times \cdots}{\cdots} = \cdots$$

$$AC = \frac{BC \times \operatorname{Sin} \hat{B}}{\operatorname{Sin} \hat{A}} = \frac{\cdots \times \cdots}{\cdots} = \cdots$$

14 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

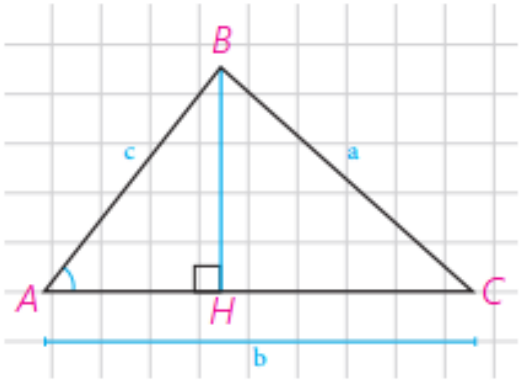


۱۱. قضیه کسینوس‌ها:

$$\cos A = \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow AH = \cdots \times \cdots \quad \text{و} \quad CH = b - AH = \cdots$$

$$\sin A = \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow BH = \cdots \times \cdots$$

$$\Delta BHC : BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \Rightarrow a^{۲} = (\cdots\cdots)^{۲} + (\cdots\cdots)^{۲}$$

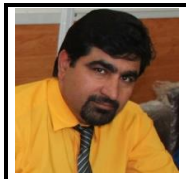


در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{Cos}\,\hat{A}$$

در حالتی که زاویه مثلث از ۹۰ درجه بیشتر باشد، به طور مشابه اثبات خواهدشد.

15 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



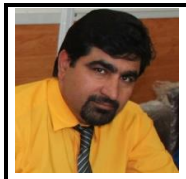
۱۲. **نتیجه:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{Cos}\,\hat{A}$$

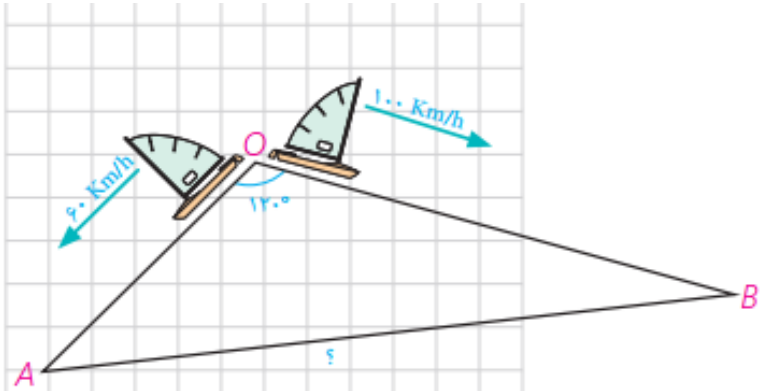
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\mathrm{Cos}\,\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{Cos}\,\hat{C}$$

دکتر مزبان حبیبی



۱۳. تمرین:



مثال : دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰km/h و ۱۰۰km/h و با زاویهٔ 120° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل : با توجه به نقطهٔ شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

$OA=۶۰\times ۰/۵=۳۰$ و $OB=۱۰۰\times ۰/۵=۵۰$

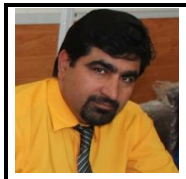
حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$\cos ۱۲۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$ و $AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA.OB.\cos ۱۲۰^\circ$

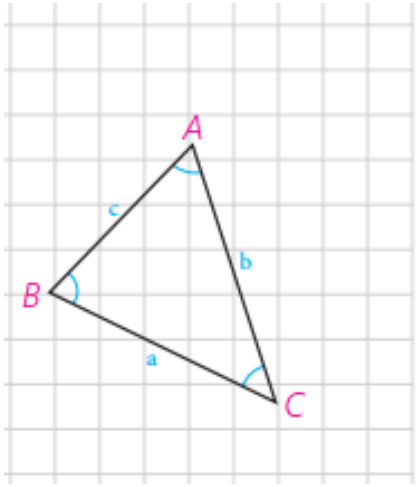
$AB^۲=۹۰۰+۲۵۰۰-۲\times ۳۰\times ۵۰\ (-\frac{۱}{۲})\ =۴۹۰۰\Rightarrow$

$AB=۷۰km$

17 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۱۴. **تمرین:**



در مثلث ABC، $AB = ۲\sqrt{۲}$ و $AC = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$

۱ــ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$BC^۲ = \cdots^۲ + \cdots^۲ - ۲ \times \cdots \times \cdots \times \cdots \Rightarrow$

$BC^۲ = \cdots + \cdots - \cdots \Rightarrow$

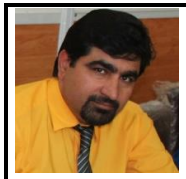
$BC^۲ = \cdots$ و $BC = \cdots$

۲ــ اندازهٔ $\hat{C}$ را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازهٔ $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\ldots} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰} \Rightarrow \sin C = \cdots \text{ و } \hat{C} = \cdots$$

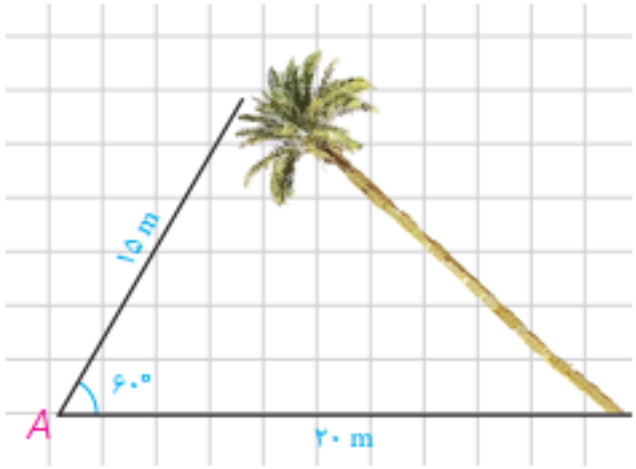
$$\Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{C}) = \cdots$$

18 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۱۵. **تمرین:**

۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ 60° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

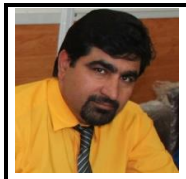


الف) طول درخت

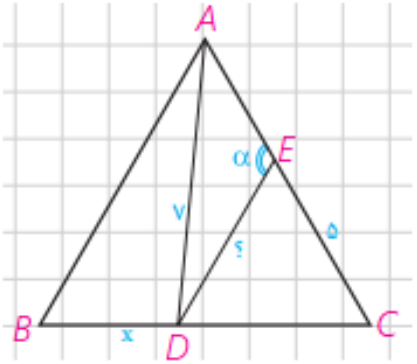
ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین

19 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



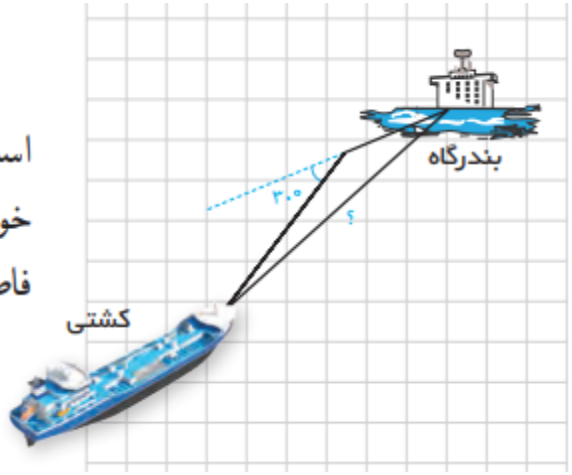
۱۶. تمرین:



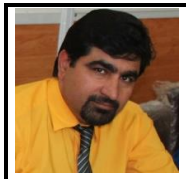
در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟

۱۷. تمرین:

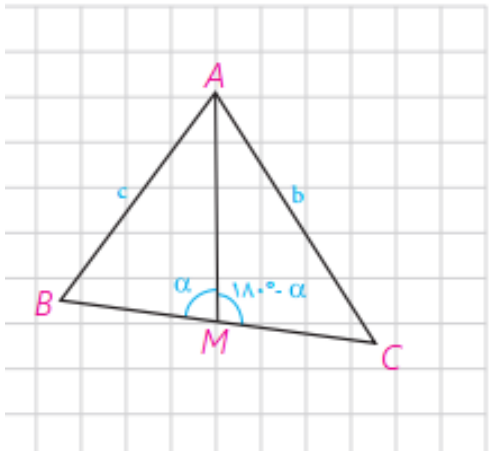
۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



20 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۱۸. تمرین:

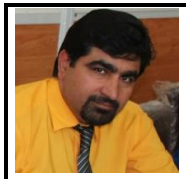


در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

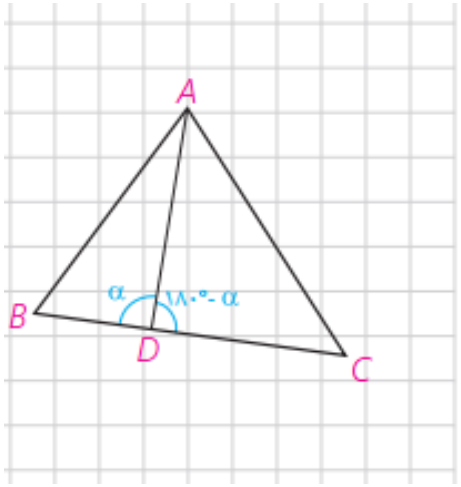
$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیهٔ میانه‌ها)

در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.

21 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



۱۹. تمرین:



در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$AB^2 . DC + AC^2 . DB = AD^2 . BC + DB . DC . BC$ (قضیهٔ استوارت)

به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

پیروز باشید

مزبان حبیبی

22 www.mezbanhabibi.ir +989176193511