



جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱. حد راست و حد چپ (حدهای یکطرفه)

در این فصل برآنیم تا رفتار برخی توابع خاص را بررسی کنیم،

۲. یادآوری: همسایگی

اگر بازه (a, b) شامل x_0 باشد، یعنی $x_0 \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) را یک همسایگی برای x_0 می نامیم.

مثال: بازه های $(1, 5)$ و $(1.99, 2.01)$ همسایگی برای 2 هستند اما بازه $(3, 4)$ همسایگی برای 2 نیست.

مثال: دو همسایگی برای 1 بنویسید:



جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۳. تمرین: اگر $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی برای 2 باشد، حدود x کدام است؟

حل:

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow x-1 < 2 < 2x+3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 2 \\ 2 < 2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ -1 < 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ -\frac{1}{2} < x \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{2} < x < 3$$

۴. همسایگی مجذوف:



۵. یادآوری: میل کردن

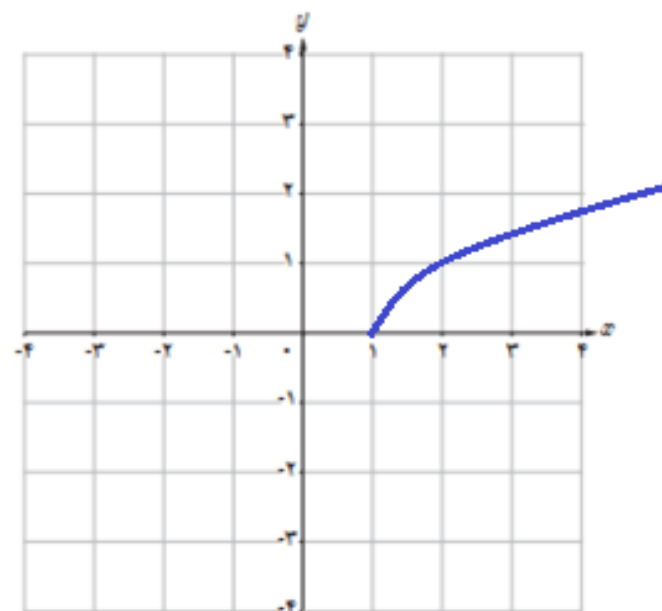
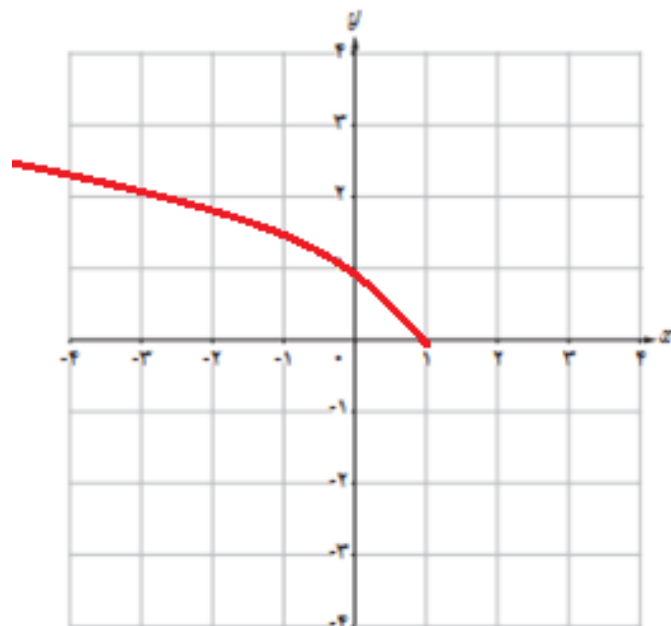
هرگاه مقادیر متغیری مانند x به عددی مانند a چنان نزدیک شود، که اولاً فاصله آن تا عدد مورد نظر کاهش یابد و ثانیاً هرچقدر بخواهد بتواند به آن نزدیک شود، می گوئیم x به a میل می کند. (نزدیک می شود) و می نویسیم $x \rightarrow a$.

توجه: میل کردن از راست و چپ نیز به طور مشابه تعریف می شود.



جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

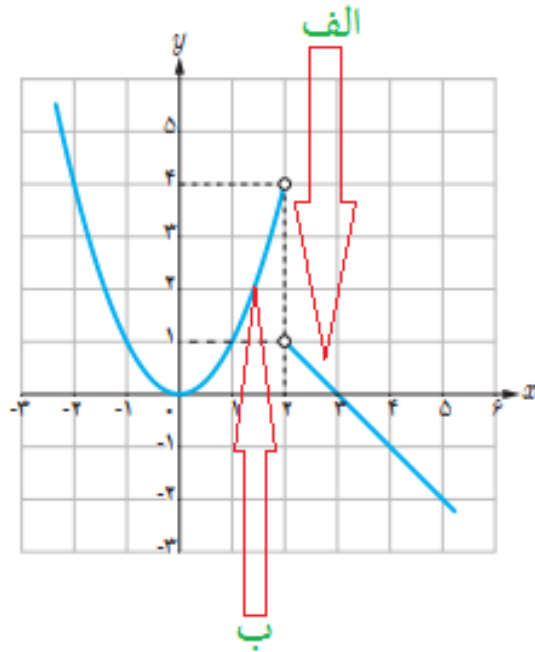
۶. مثال: نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $f(x) = \sqrt{1-x}$ به صورت زیر است



این توابع در نقطه $x=1$ فاقد حد هستند، چرا؟



۷. مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x > 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$ را در نظر داشته باشید، نمودار تابع در شکل زیر است.



۸. الف) وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، مقادیر تابع f به چه عددی نزدیک می شوند؟

۹. ب) وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مقادیر تابع f به چه عددی نزدیک می شوند؟

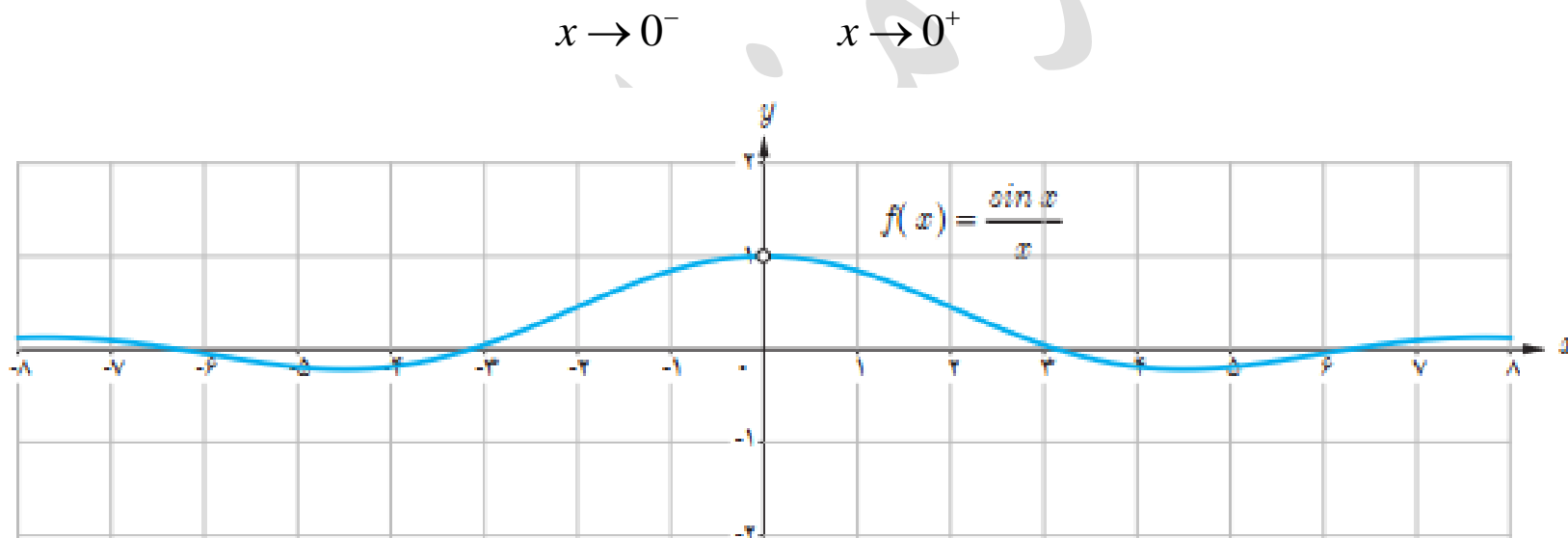
۱۰. ج) آیا تابع f در $x \rightarrow 2$ حد دارد؟

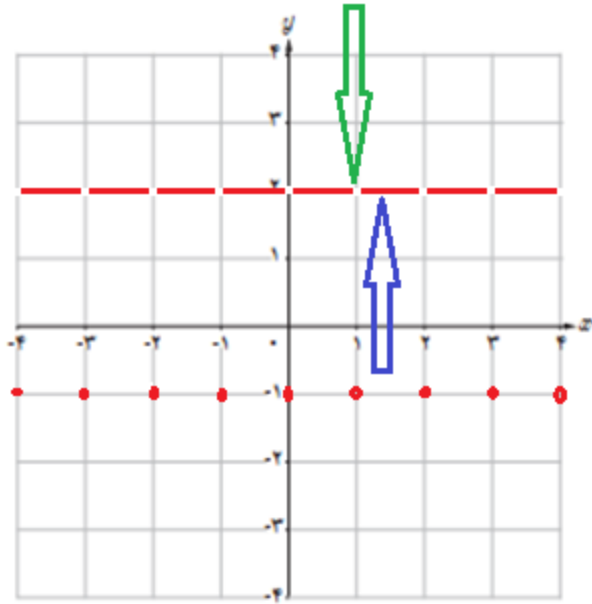


جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۱. مثال: تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید،

رفتار تابع را وقتی $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$ بررسی کنید.





تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$

بیبی



۱۳. حد راست:

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوئیم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

۱۴. حد چپ:

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$



جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۵. تذکر:

تابع f در نقطه $x = a$ دارای حد است اگر و تنها اگر،
حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر باشند.

۱۶. تذکر:

اگر تابع f در نقطه $x = a$ دارای حد راست و حد چپ
نابرابر باشد، آنگاه در این نقطه، حد ندارد.

جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۷. مثال: تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه $x=0$ حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{و}$$

۱۸. مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x > 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \quad \text{چون}$$



جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۹. مثال: تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 3$ حد ندارد چون

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

اما در نقطه $x = \pi$ حد دارد چون

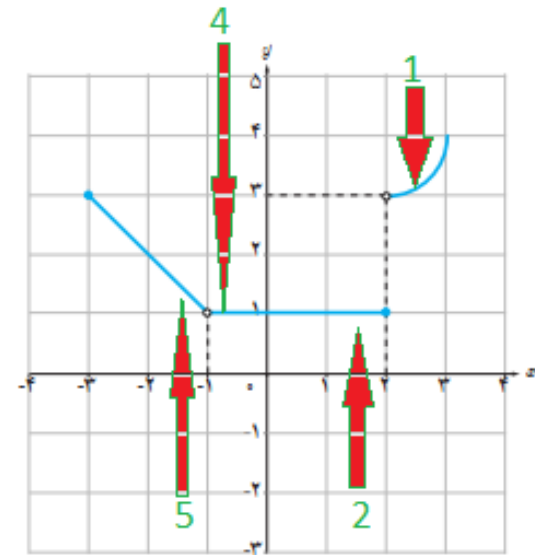
$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = [\pi] = 3$$



۲۰. تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است،

مقادیر خواسته شده را در صورت وجود بنویسید.

با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.



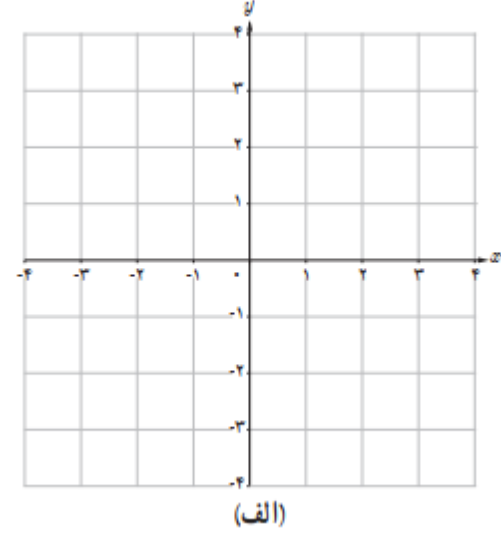
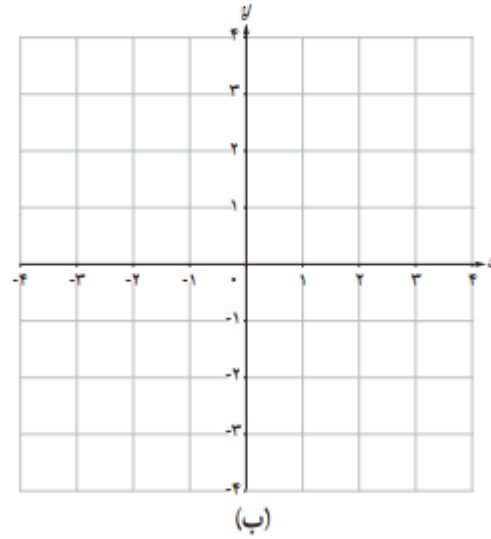
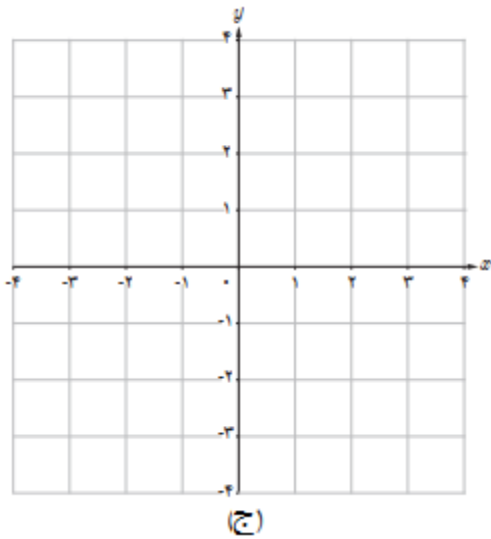
- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \dots$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \dots$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \dots$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \dots$ | 5. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \dots$ | 6. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \dots$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \dots$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \dots$ | 9. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \dots$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \dots$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \dots$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \dots$ |

پپی

الف: تابعی رسم کنید که در یک همسایگی $x=1$ تعریف شده اما در این نقطه حد نداشته باشد.

ب: تابعی رسم کنید که در $x=1$ حد راست و چپ برابر داشته باشد.

ج: تابعی رسم کنید که در $x=1$ حد راست و چپ نابرابر داشته باشد.

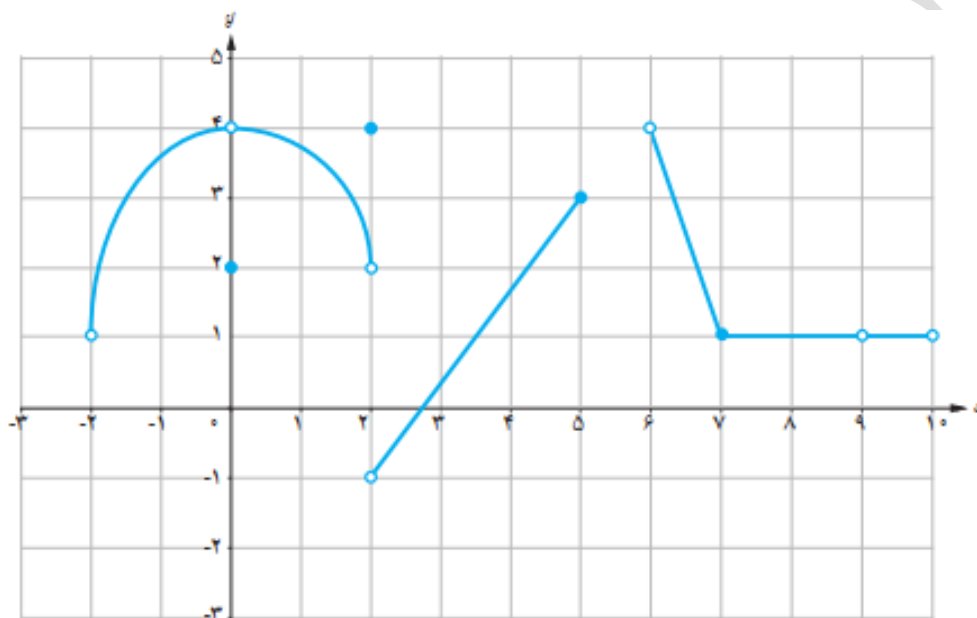




جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۲۲. تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است،

مقادیر خواسته شده را در صورت وجود بنویسید.



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) =$$

جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر زبانه حبیبی



۲۳. توابع مساوی و حد:

۲۴. تمرین:

مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$ را محاسبه کنید.

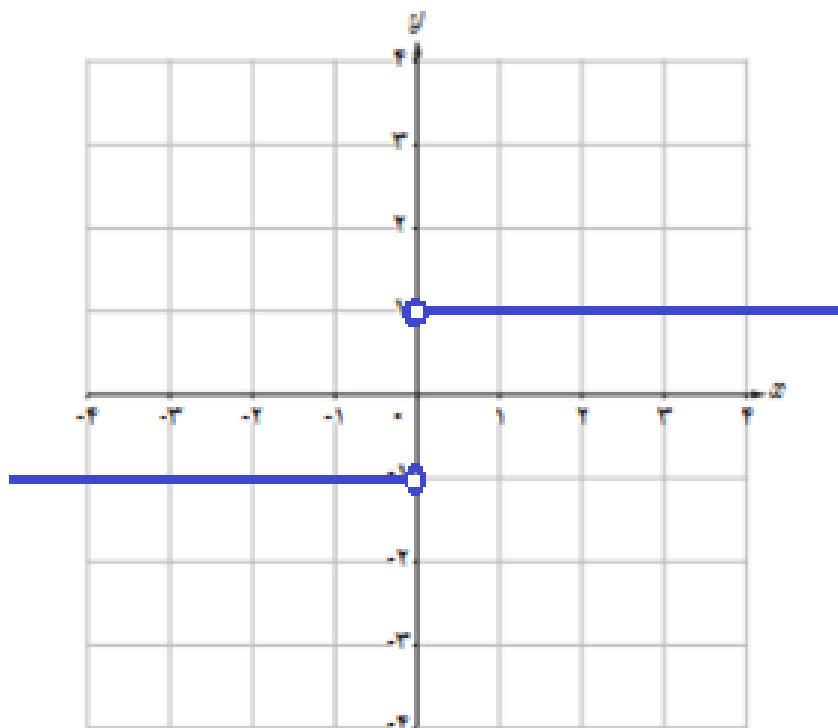
از آنجا که برای $x \in (0, 1)$ داریم $[x] = 0$,

پس $\frac{[x]}{x} = 0$, $x \rightarrow 0^+$ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$

توجه: این تابع برای حالت $x \rightarrow 0^-$ ، تعریف نمی شود و لذا در این نقطه حد ندارد.



مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ را محاسبه کنید.

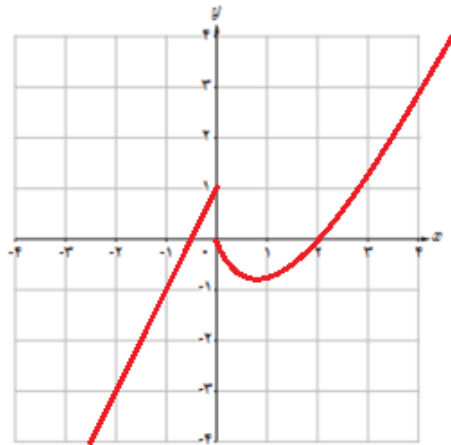


جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲۶. **تمرین:** نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$ را رسم کرده و مقادیر حد راست و چپ تابع

را در نقطه $x=0$ بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$$

۲۷. **تمرین:** نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ را رسم کرده و مقادیر حد راست و چپ تابع را در نقطه

$x=0$ بیابید.



جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۲۸. **تمرین:** حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

حل: دامنه تابع را تعیین می کنیم

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ or } x \leq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ وجود ندارد و لذا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود ندارد.

۲۹. **تمرین:** حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

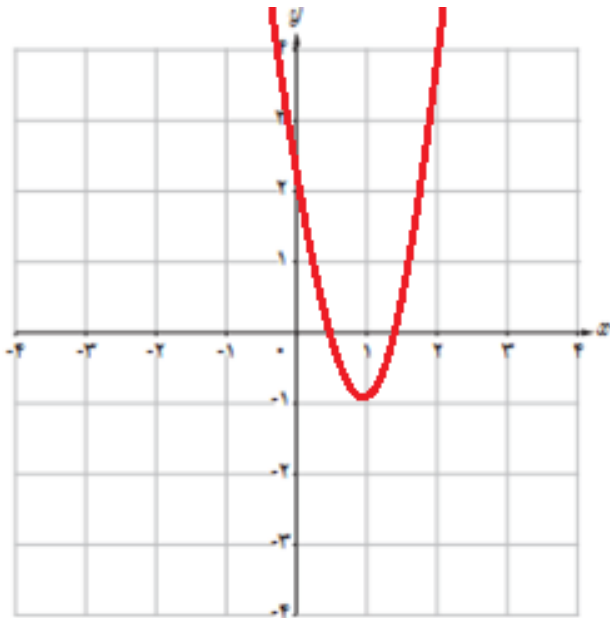
۳۰. **تمرین:** حد تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۳۱. الف: نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم کنید.

ب: مقادیر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$ و $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ بیابید.



از آنجا که

$$f(x) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

نمودار تابع از انتقال سهمی $y = x^2$ به سمت

راس و پایین، به دست می آید. بدیهی است که

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

از نمودار پیداست که وقتی $x \rightarrow 1$ مقادیر تابع در بازه $(-1, 0)$ قرار دارند و لذا

$$\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] = \left[(-1)^+ \right] = -1$$

جزوه های آموزشی، فصل پنجم حسابان یک درس اول و درس دوم، یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۳۲. الف: نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را رسم کنید.

ب: مقادیر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ و $\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [f(x)]$ بیابید.

۳۳. الف: نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم کنید.

ب: مقادیر $\lim_{x \rightarrow a} |x|$ و $\left[\lim_{x \rightarrow a} |x| \right]$ و $\lim_{x \rightarrow a} [|x|]$ بیابید. ($a \in R$)

پیروز باشید

مزبان حبیبی