



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی استاد ارایین جزوه بدون کب اجازه ممنوع است.

درس سه، فصل چهارم، حسابان دو، دوازدهم ریاضی

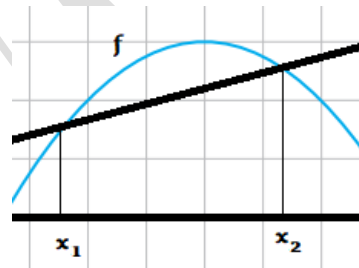
۱. آهنگ تغییر متوسط (اجرای فایل ۱۲۷)

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در بازه ای مانند $[x_1, x_2]$ پیوسته باشد، آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازه مورد نظر را به صورت

زیر تعریف می کنیم:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

تفسیر هندسی:



۲. مثال ۱. اگر $f(x) = x^3 + 2$ آنگاه آهنگ تغییر متوسط این تابع را در بازه $[1, 5]$ حساب کنید.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{127 - 3}{5 - 1} = \frac{124}{4} = 31$$



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد ارشد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۳. مثال ۲. فرض کنیم یک خودرو در مسیر منحنی با معادله $f(t) = -5t^2 + 20t$ در حال حرکت باشد که t بر حسب ثانیه بوده و $0 \leq t \leq 5$ ، آهنگ تغییر متوسط حرکت این خودرو را در بازه های $[1, 2]$ و $[1, 1.5]$ و $[1, 1.1]$ بیابید.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1} = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(\dots) - f(\dots)}{\dots - \dots} = \frac{\dots - \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

توضیح:

۴. آهنگ لحظه ای (سرعت لحظه ای): اجرای فایل ۱۲۸

همانند آنچه دیدیم، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ در بازه ای مانند $[a, a+h]$ برابر کسر $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

است.



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مهربان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

آهنگ لحظه ای (آنی) تغییرات این تابع در لحظه $x = a$ به صورت زیر تعریف می شود

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right)$$

تفسیر هندسی:

توضیح:



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد ارشد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۵. تمرین: اگر $f(x) = x^2$ آنگاه

الف: آهنگ تغییر تابع را در بازه $[2, 5]$ محاسبه کنید

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

ب: آهنگ تغییر تابع را در $x = 3$ و $x = 3.5$ بیابید.

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^2 + 6h + h^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3.5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3.5+h) - f(3.5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3.5+h)^2 - 3.5^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3.5^2 + 7h + h^2 - 3.5^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(7+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (7+h) = 7 \end{aligned}$$



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

6. تمرین: اگر $f(x) = x^3 + x$ ، آنگاه آهنگ تغییر تابع در $x=1$ چقدر از آهنگ تغییر تابع در بازه $[1, 2]$ کمتر است؟

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{10 - 2}{1} = \frac{8}{1} = 8$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 + 1) = 4 \\ 8 - 4 &= 4 \end{aligned}$$

7. تمرین: اگر $f(x) = x^2 + x$ ، آنگاه آهنگ تغییر تابع در $x=1$ چقدر از آهنگ تغییر تابع در بازه $[1, 2]$ کمتر است؟

8. تمرین: اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ، آنگاه آهنگ تغییر تابع در $x=1$ چقدر از آهنگ تغییر تابع در بازه $[1, 2]$ کمتر است؟



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۹. تمرین: اگر $f(x) = x^2 - x + 10$ ، آنگاه آهنگ تغییر تابع در $x = 2$ چقدر از آهنگ تغییر تابع در بازه $[1, 5]$ کمتر است؟

۱۰. تمرین: اگر $f(x) = x^3 + x$ ، آنگاه آهنگ تغییر تابع در $x = 1$ چقدر از آهنگ تغییر تابع در بازه $[1, 2]$ کمتر است؟



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

$$f'(49) = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{f(x) - f(49)}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 49} \frac{(7\sqrt{x} + 50) - (49 + 50)}{x - 49} = \lim_{x \rightarrow 25} \dots$$

۱۱. کاربرد آهنگ تغییر: آهنگ رشد قد اجرای فایل ۱۲۹

میدانیم که تابع رشد قد در دوران نوزادی، $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ است که در آن x سن نوزاد بر حسب ماه است.

الف: آهنگ تغییر قد نوزاد از زمان تولد تا پایان پنج سالگی را حساب کنید. (در بازه $[0, 60]$)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \dots$$

ب: آهنگ تغییر قد نوزاد از زمان تولد تا ۲۵ ماه را حساب کنید. (در بازه $[0, 25]$)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \dots$$



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد ارایین جزوه بدون کب اجازه ممنوع است.

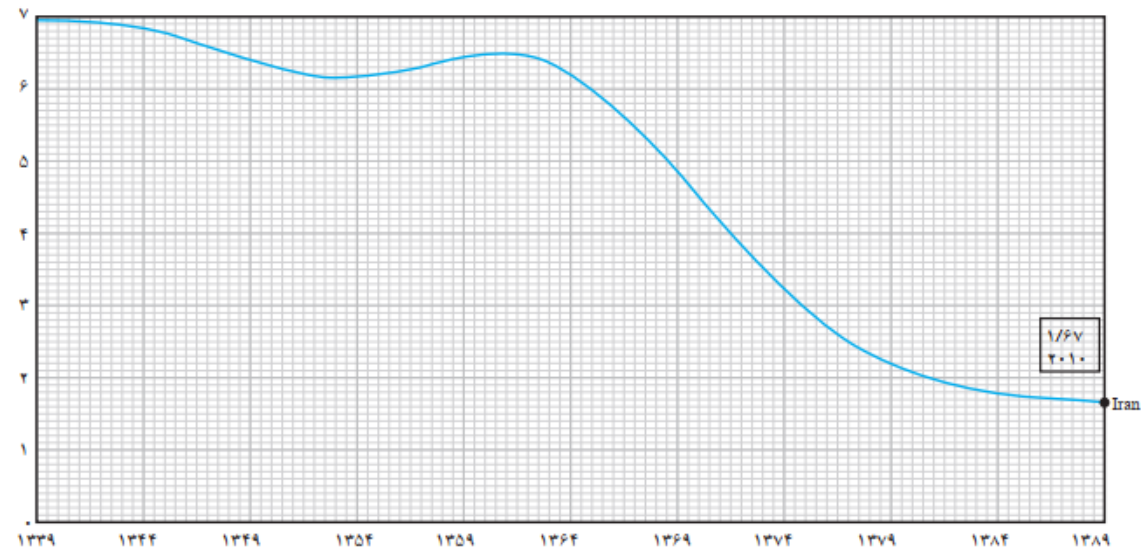
ج: آهنگ تغییر رشد قد نوزاد را در $x=25$ و $x=49$ محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} f'(25) &= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{f(x) - f(25)}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{(7\sqrt{x} + 50) - (35 + 50)}{x - 25} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{7(\sqrt{x} - 5)}{x - 25} \\ &= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{7(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)}{(x - 25)(\sqrt{x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{7(x - 25)}{(x - 25)(\sqrt{x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{7}{\sqrt{x} + 5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱۲. تمرین: نمودار زیر، مربوط به نرخ باروری در کشور ایران است.



میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

الف: آهنگ تغییر نرخ باروری را در بازه [1339,1389] بیابید.

ب: آهنگ تغییر نرخ باروری را در بازه [1354,1374] بیابید.



۱۳. رابطه مشتق و سرعت لحظه ای اجرای فایل ۱۳۰

۱۴. تمرین: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی به سمت بالا پرتاب می کنیم، ارتفاع جسم از سطح زمین از

رابطه $f(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید که در آن t بر حسب ثانیه بوده و $0 \leq t \leq 8$.

الف: سرعت متوسط جسم را در بازه های $[0,1]$ و $[1,2]$ و $[2,3]$ و $[3,4]$ محاسبه کنید

$$v_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dots$$

$$v_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dots$$

$$v_3 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \dots$$

$$v_4 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \dots$$



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

ب: سرعت لحظه ای جسم را در $t=1$ و $t=2$ و $t=3$ و $t=4$ بیابید.

$$f(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow f'(t) = -10t + 40 \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 30 \\ f'(2) = 20 \\ f'(3) = 10 \\ f'(4) = 0 \end{cases}$$

۱۵. تمرین: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی به سمت بالا پرتاب می کنیم، ارتفاع جسم از سطح زمین از

رابطه $f(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید که در آن t بر حسب ثانیه بوده و $0 \leq t \leq 8$.

الف در چه لحظه ای سرعت ۳۵ خواهد بود؟

ب: در چه لحظه ای سرعت صفر است؟

ج: حداکثر ارتفاع جسم کدام است؟



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱۶. تمرین:

جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

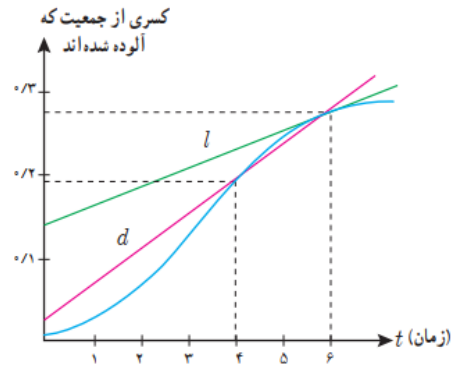
ساعت t	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

- آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :
- (الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.
- (ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.
- (پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.



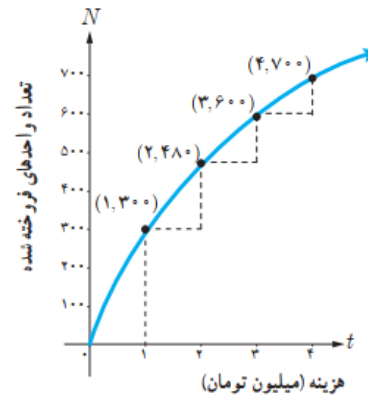
جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی استاد ارشد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱۷. تمرین:



کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است. الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند. ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

۱۸. تمرین:



نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است. الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد از این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۱۹. تمرین:

کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

- الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.
 ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.
 پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$

۲۰. تمرین:

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

- الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟
 ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟



جزوه های آموزشی، فصل چهارم حسابان دو، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی
استاد این جزوه بدون کتب اجازه ممنوع است.

۲۱. تمرین:

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

پیروز باشید
مزبان حبیبی