فصل سوم، هندسه سه، دوازدهم ریاضی

۱. تعریف ضرب خارجی دو بردار،

تعریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

۲. مثال ۱:

$$\vec{a}=(2,1,5),\vec{b}=(1,2,3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.i-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.j+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.k$$

$$=(3-10).i-(6-5).j+(4-1).k=-7i-1j+3k$$

۳. مثال ۲:

$$\vec{a}=(0,1,2),\vec{b}=(3,-1,0)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.i-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.j+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.k$$

$$=(\cdots-\cdots).i-(\cdots-\cdots).j+(\cdots-\cdots).k=\cdots i-\cdots j+\cdots k$$

۴. تمرین: اگر داشته باشیم $\vec{a}=-3i+2j+k$ و $\vec{b}=(\quad 2\ -, \quad)$ آنگاه $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ و $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.

$$2\vec{a}+3\vec{b}=$$

$$\vec{a}-\vec{b}=$$

$$\vec{a}+\vec{b}=$$

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.i-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.j+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.k$$

$$=(\cdots-\cdots).i-(\cdots-\cdots).j+(\cdots-\cdots).k=\cdots i-\cdots j+\cdots k$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.i-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.j+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.k$$

$$=(\cdots-\cdots).i-(\cdots-\cdots).j+(\cdots-\cdots).k=\cdots i-\cdots j+\cdots k$$

۵. تمرین: اگر $\vec{a}=i+j+3k$ و $\vec{b}=(2,1,2)$ آنگاه $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.

$$\vec{a}=i+j+3k$$

$$\vec{b}=(2,1,2)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=$$

$$\vec{a}-\vec{b}=$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \\ & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.i-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.j+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

$$=(\cdots-\cdots).i-(\cdots-\cdots).j+(\cdots-\cdots).k=\cdots i-\cdots j+\cdots k$$

۶. خواص ضرب خارجی دو بردار::

خاصیت ۱ : فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0 \quad , \quad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

می‌توان نشان داد که برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روابط زیر برقرار است :

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \ , \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \ , \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \ , \ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \ , \ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

خاصیت ۲ : $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

خاصیت ۳ : $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$.

خاصیت ۴ : اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه : $r\,\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\,\vec{b}$.

خاصیت ۵ : برای سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ داریم :

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

خاصیت ۶ : دو بردار غیر صفر $\vec{a},\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

اثبات :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0\Leftrightarrow\sin=0\Leftrightarrow\theta=0 \text{ یا } \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۷. مساحت متوازی الاضلاع: اگر متوازی الاضلاع بر دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ بنا شود، آنگاه

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

۸. مثال: مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده بر دو بردار $\vec{a}=i+j+3k$ و $\vec{b}=(2,1,2)$ را بیابید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.i-\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.j+\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.k$$

$$=(\cdots-\cdots).i-(\cdots-\cdots).j+(\cdots-1)\cdots.k=\cdots i-\cdots j+\cdots k$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\cdots+\cdots+\cdots}=$$

۹. نتیجه مساحت مثلث: اگر مثلث بر دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ بنا شده باشد، آنگاه

$$\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_{۱} & a_{۲} & a_{۳} \\ b_{۱} & b_{۲} & b_{۳} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

۱۰. تمرین: مساحت مثلث ایجاد شده بر دو بردار بردار $\vec{a}=2i-j+k$ و

$\vec{b}=i+2j+k$ را به دست آورید.

۱۱. نتیجه:

$$S_{ABC}=\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$$

۱۲. مثال: اگر $A(1,2,-2)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(0,2,1)$، راس های مثلث ABC باشند، مساحت مثلث را بیابید.

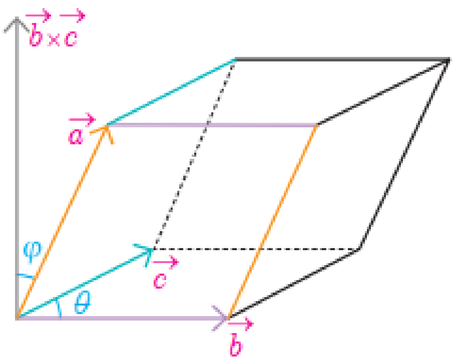
۱۳. تمرین: اگر داشته باشیم $\vec{a}=2i+j+3k$ و $\vec{b}=k-2i$ آنگاه حاصل $(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})$ را به دست آورید.

۱۴. تمرین: اگر داشته باشیم $\vec{a}=i-j+2k$ و $\vec{b}=(2,1,1)$ آنگاه حاصل $\left|(\vec{a}+\vec{b}-\vec{j})\times(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{i})\right|$ را به دست آورید.

۱۵. تمرین: اگر داشته باشیم $\vec{a}=i+2j+k$ و $\vec{b}=i+2j+3k$ آنگاه حاصل $\left|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})\right|$ را به دست آورید.

۱۶. تمرین: اگر داشته باشیم $\vec{a}=2i+j+3k$ و $\vec{b}=k-2i$ آنگاه حاصل $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+3\left|\vec{a}.\vec{b}\right|$ را به دست آورید.

۱۷. حجم متوازی السطوح: فرض کنید $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ سه بردار سه یال متوازی السطوح باشند.



$$K=\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

۱۸. مثال:

حجم متوازی‌السطوحی را به‌دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ ، $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ ، $\vec{c}=(۱,۰,۱)$ تولید می‌شود.

حل : با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به‌دست می‌آید.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(۱,۱,-۱)$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به‌دست می‌آید.

$$V=|\ \vec{a}\ .\ (\vec{b}\times\vec{c})\ |=|\ (۱,۱,۰).\ (۱,۱,-۱)\ |=|\ ۱+۱+۰\ |=۲$$

۱۹. بردارهای هم صفحه: اگر حجم متوازی السطوح ایجاد شده بر سه بردار، برابر صفر باشد آنگاه سه بردار در یک صفحه قرار دارند.

۲۰. مثال:

آیا بردارهای $\vec{a}=(۱,۴,۱)$, $\vec{b}=(۱,-۱,۳)$, $\vec{c}=(۱,۹,-۱)$ در یک صفحه‌اند؟

حل: برای این منظور کافی است $\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(-۲۶,۴,۱۰)\Rightarrow\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})=-۲۶+۱۶+۱۰=۰\Rightarrow$$ سه بردار در یک صفحه هستند.

۲۱. تمرین: سه بردار $\vec{a}=2i+3j-2k$ و $\vec{b}=i+j+k$ و $c=mi+j-2k$ در یک صفحه قرار دارند، مقدار را بیابید.

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ m & 1 & -2\end{vmatrix}=\cdots$$

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0\Rightarrow\cdots$$

۲۲. تمرین:

برداری عمود بر دو $\vec{b}=(-2,1,-5)$, $\vec{a}=(1,-3,2)$ بردار پیدا کنید.

۲۳. تمرین:

سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۲۴. تمرین:

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}| = ۳$ ، $|\vec{b}| = ۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۲۵. **تمرین:**

مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (۳,۵,۷)$ ، $B = (۵,۵,۰)$ ، $C = (-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

۲۶. **تمرین:** **مساحت متوازی السطوحی را بیابید که مبدا مختصات و سه نقطه $A(1,1,1), B(0,2,-1), C(2,1,5)$ سه راس مجار مبدا باشند.**

پیروز باشید

مزبان حبیبی