

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

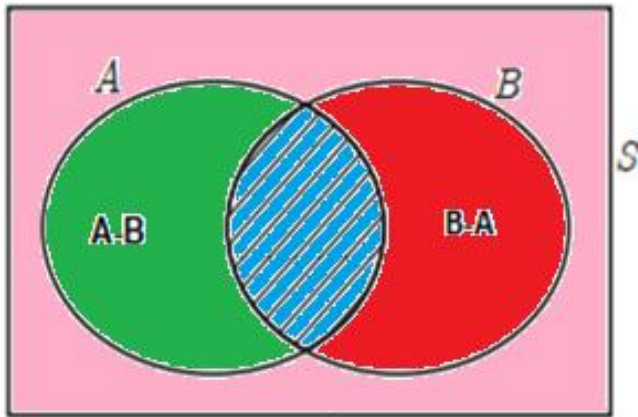
۱. اصل شمول و عدم شمول (اجرای فایل ۱۳۱)

حالت دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، به شکل یک توجه کنید

بخش هاشور زده، اشتراک دو مجموعه است، بنابراین

$$|A-B| + |B-A| + |A \cap B| = |A \cup B|$$

$$|A-B| + |B-A| + |A \cap B| + |A \cap B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$



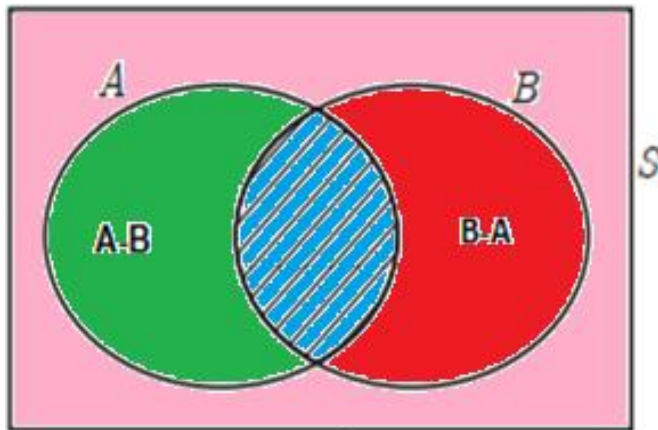
شکل ۱



۱. اصل شمول و عدم شمول (اجرای فایل ۱۳۱)

حالت دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، به شکل یک توجه کنید

بخش هاشور زده، اشتراک دو مجموعه است، بنابراین



شکل ۱

$$|A - B| + |B - A| + |A \cap B| = |A \cup B|$$

$$|A - B| + |B - A| + |A \cap B| + |A \cap B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

$$(|A - B| + |A \cap B|) + (|B - A| + |A \cap B|) = |A \cup B| + |A \cap B|$$

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cup B|$$



۱. اصل شمول و عدم شمول (اجرای فایل ۱۳۱)

حالت دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، به شکل یک توجه کنید

بخش هاشور زده، اشتراک دو مجموعه است، بنابراین

$$|A - B| + |B - A| + |A \cap B| = |A \cup B|$$

$$|A - B| + |B - A| + |A \cap B| + |A \cap B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

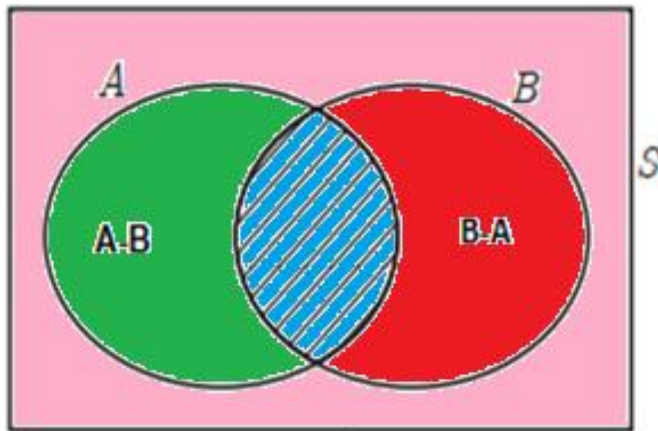
$$(|A - B| + |A \cap B|) + (|B - A| + |A \cap B|) = |A \cup B| + |A \cap B|$$

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cup B|$$

رابطه اخیر را اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه می گویند.

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cup B|$$



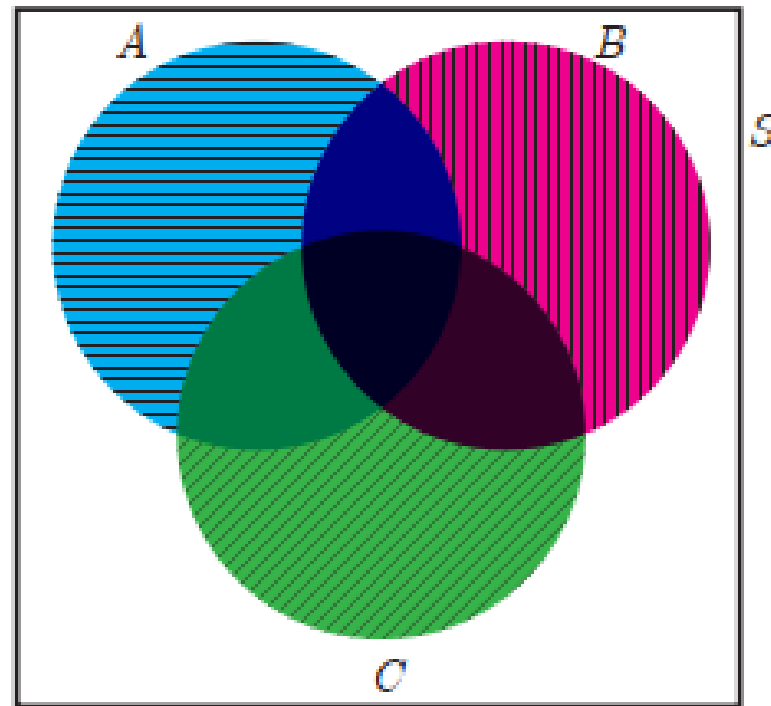
شکل ۱

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲. حالت سه مجموعه: اگر A و B و C سه مجموعه دلخواه باشند

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|$$



شکل ۲

$$|A'| = |S| - |A| \quad .a$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \quad .b$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \quad .c$$





$$\left| (A \cup B \cup C)' \right| = |S| - |(A \cup B \cup C)| \quad .d$$

$$\begin{aligned} \left| (A \cup B \cup C)' \right| &= \\ |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \end{aligned} \quad .e$$

$$\left| (A \cup B)' \right| = |S| - |(A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \quad .f$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' \Rightarrow |A' \cap B'| = |(A \cup B)'| \quad \text{g}$$

$$A' \cup B' = (A \cap B)' \Rightarrow |A' \cup B'| = |(A \cap B)'| \quad \text{h}$$





$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{i}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{j}$$

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۴. مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال و ۹ نفر هم والیبال و هم فوتبال بازی بازی می کنند، چند نفر در این کلاس

هستند که نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال؟

حل: فرض کنیم A و B به ترتیب مجموعه کسانی است که فوتبال و والیبال باز می کنند، پس

دکتر مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$|S| = 25,$$

$$|A| = 15, |B| = 14,$$

$$|A \cap B| = 9$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 25 - 15 - 14 + 9 = 5$$

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات کسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۵. تمرین:

در یک کلاس ۳۲ نفری، ۲۰ نفر در فعالیتهای هنری و ۱۸ نفر در فعالیتهای ورزشی شرکت کرده اند و ۵ نفر هم هر دو فعالیت، چند نفر در این کلاس هستند در هیچ یک از این دو فعالیت حضور ندارند؟



$$|S| = \dots,$$

$$|A| = \dots, |B| = \dots,$$

$$|A \cap B| = \dots$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= \dots - \dots - \dots + \dots = \dots$$



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۶. تمرین:

چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ وجود دارد که نه مضرب سه هستند و نه مضرب پنج؟



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حل: فرض می کنیم A و B شامل اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ هستند که به ترتیب بر سه و پنج بخش پیر باشند،

در این صورت

$$|S| = 1000,$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, |B| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200,$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 5} \right\rfloor = 66$$

$$\begin{aligned} |(A \cup B)'| &= |S| - |(A \cup B)| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= 1000 - 333 - 200 + 66 = 533 \end{aligned}$$

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۷. تمرین:

چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۳۰۰ وجود دارد
که نه مضرب دو هستند و نه مضرب هفت؟



$$|S| = \dots,$$

$$|A| = \left[\frac{300}{2} \right] = \dots, |B| = \left[\frac{300}{7} \right] = \dots,$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{300}{2 \times 7} \right] = \dots$$

$$\begin{aligned} |(A \cup B)'| &= |S| - |(A \cup B)| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= 300 - \dots - \dots + \dots = \dots \end{aligned}$$



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات کسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۸. تمرین:

چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ وجود دارد
که نه مضرب ۳ هستند و نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵؟



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حل: فرض کنیم مضارب طبیعی ۳ و ۴ و ۵ کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ را به ترتیب A و B و C بنامیم، پس

$$|S| = 1000,$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, |B| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250, |C| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200,$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 4} \right\rfloor = 83, |A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 5} \right\rfloor = 66, |B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{4 \times 5} \right\rfloor = 50,$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 4 \times 5} \right\rfloor = 16$$

$$|(A \cup B \cup C)'|$$

$$= |S| - |(A \cup B \cup C)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 1000 - 333 - 250 - 200 + 83 + 66 + 50 - 16 = 400$$

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات کسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۹. تمرین:

چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۶۵۰ وجود دارد
که نه مضرب دو هستند، نه مضرب سه و نه مضرب پنج؟



$$|S| = 1000,$$

$$|A| = \left[\frac{650}{2} \right] = \dots, |B| = \left[\frac{650}{3} \right] = \dots, |C| = \left[\frac{650}{5} \right] = \dots,$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{650}{\dots} \right] = \dots, |A \cap C| = \left[\frac{650}{\dots} \right] = \dots, |B \cap C| = \left[\frac{650}{\dots} \right] = \dots,$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{650}{\dots} \right] = \dots$$

$$|(A \cup B \cup C)'| = |S| - |(A \cup B \cup C)|$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 650 - \dots - \dots - \dots + \dots + \dots + \dots - \dots = \dots$$



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۰. تمرین:

چند عدد طبیعی مانند n با شرط $1 \leq n \leq 400$ وجود دارد
که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۱. تمرین:

چند عدد طبیعی مانند n با شرط $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد
که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۲. تمرین:

چند عدد طبیعی بین اعداد ۱ تا ۹۰ وجود دارد

که بر دو یا سه بخش پذیر هستند؟



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۳. تمرین:

چند عدد طبیعی بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ وجود دارد
که بر ۴ بخش پذیر باشند اما بر ۷ بخش پذیر نباشند؟



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۴. تمرین: در کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. می

دانیم ۱۰ نفر هیچ کدام از این بازی ها را انجام نمی دهند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و

بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند.

الف: چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب: چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

ج: چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

د: چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۵. تمرین:

چند رمز سه رقمی وجود دارد

که حداقل یک رقم دو و حداقل یک رقم سه دارد؟





حل: فرض کنیم A مجموعه شامل رمزهایی است که شامل دو نیستند و B مجموعه شامل رمزهایی است که شامل سه نیستند.

$$|S| = 10 \times 10 \times 10 = 1000,$$

$$|A| = |B| = 9 \times 9 \times 9 = 729,$$

$$|A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)|$$

$$= |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 1000 - 729 - 729 + 512 = 54$$

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۶. تمرین:

چند رمز چهار رقمی وجود دارد

که حداقل یک رقم دو و حداقل یک رقم سه دارد؟



$$|S| = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000,$$

$$|A| = |B| = \dots = \dots,$$

$$|A \cap B| = \dots = \dots$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)|$$

$$= |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 10000 - \dots - \dots + \dots = \dots$$



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات کسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۷. تمرین:

چند رمز چهار رقمی وجود دارد که شامل ارقام ۲ و ۳ و ۷ باشد.

دکتر مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حل: فرض می کنیم به ترتیب مجموعه هایی از رمزهایی باشند که شامل ۲ و ۳ و ۴ نیستند

$$|S| = 10^4,$$

$$|A| = |B| = |C| = 9^4, |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 8^4,$$

$$|A \cap B \cap C| = 7^4$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)|$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 10^4 - 9^4 - 9^4 - 9^4 + 8^4 + 8^4 + 8^4 - 7^4 = \dots$$



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات کسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱۸. تمرین :

چند رمز سه رقمی وجود دارد که شامل ارقام ۲ و ۳ و ۷ باشد.



$$|S| = 10^3,$$

$$|A| = |B| = |C| = \dots, |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = \dots,$$

$$|A \cap B \cap C| = \dots$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)|$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= \dots - \dots - \dots - \dots + \dots + \dots + \dots - \dots = \dots$$



به چند طریق می توان بین سه روستا، جاده هایی احداث کنیم
به طوری که هر روستا حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد؟



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حل: اگر گراف مورد نظر ترسیم جاده های مساله باشد، درجه راس متناظر با هیچ روستایی نباید صفر باشد. فرض می کنیم A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب مجموعه های شامل همه گراف هایی باشند که در آنها روستاهای شماره یک، دو و سه تنها هستند.

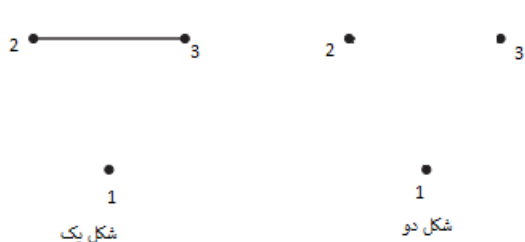
$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = 8, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^1 = 2,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$\begin{aligned} |(A \cup B)'| &= |S| - |(A \cup B)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= 8 - 2 - 2 - 2 + 1 + 1 + 1 - 1 = 4 \end{aligned}$$

دلیل اینکه تعداد حالت هایی که یک روستا تنها بماند برابر دو است، در شکل زیر نشان داده شده است.



توجه: در مساله های این چنینی، با رسم نمودار هم می توان به پاسخ رسید.

فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ ، تعداد توابعی را بیابید

که برد آنها برابر B باشد. (یعنی $f : A \rightarrow B, R_f = B$)



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حل: فرض کنیم $A_k = \{f \mid f : A \rightarrow B, R_f = B - \{k\}\}, k = 1, 2, 3$

به عنوان مثال A_1 مجموعه شامل توابعی است که برد آنها شامل عدد یک نیست.

$$|S| = 3^5 = 243, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^5 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0^5 = 0$$

$$\begin{aligned} |(A \cup B)'| &= |S| - |(A \cup B)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= 243 - 32 - 32 - 32 + 1 + 1 + 1 - 0 = 150 \end{aligned}$$

توجه: تعداد توابع یک به یک از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ برابر است با

$$m > n, P(m, n) = (m)_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۲۱. تمرین:

فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2\}$ ، تعداد

توابعی را بیابید که برد آنها برابر B باشد.



بزه های آموزشی، فصل سوم ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۲۲. تمرین:

فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ ،

تعداد توابعی را بیابید که برد آنها برابر B باشد.

پیروز باشید

مزبان حبیبی

