

۱- اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m > 3$ (۲) $3 < m < 4$ (۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید معادله $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' > 0 \Rightarrow 4 - 2(m - 3) > 0 \Rightarrow 10 > 2m \Rightarrow m < 5 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3 \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow 3 < m < 5$$

۲- اگر $\log(x - 2) = 2 \log 2 - \log(x - 4)$ ، حاصل $\log_5(x - 3)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $\log(x - 2) = \log 4 - \log(x - 4) \Rightarrow \log(x - 2)(x - 4) = \log 4$

$$x^2 - 6x + 8 = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 5 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{5}$$

$$\log_5(x - 3) = \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

۳- اعداد 2^a ، $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی از تصاعد هندسی اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\sqrt{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$

۴- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{جابه جایی } a \text{ و } b \rightarrow 3! \times 2 \\ \text{حالت های کلی} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{-} \frac{3}{-} \frac{b}{-} \frac{2}{-} \frac{1}{-} \rightarrow 3! \times 2 \\ \frac{3}{-} \frac{a}{-} \frac{2}{-} \frac{b}{-} \frac{1}{-} \rightarrow 3! \times 2 \\ \frac{3}{-} \frac{2}{-} \frac{a}{-} \frac{1}{-} \frac{b}{-} \rightarrow 3! \times 2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \rightarrow 36$$

۵- در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x_1 = 3x_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$4x_2 = \frac{14}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}$$

$$3\left(\frac{7}{3}\right) - 17\left(\frac{7}{3}\right) + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

۶- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{2} + \cos x (-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۷- حاصل عبارت $\frac{1}{\cos 20^\circ} + 2$ برابر کدام است؟

- (۱) $2 \sin 40^\circ$ (۲) $4 \cos 40^\circ$ (۳) $2 \cos 40^\circ$ (۴) $4 \sin 40^\circ$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\cos 20^\circ} + 2 = \frac{1 + 2 \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{4 \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 4 \cos 40^\circ$$

۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = -\infty [0^-] = -\infty \times -1 = +\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۹- تابع $y = x \sqrt{x^2}$ با ضابطه $y = x$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در صفر چگونه است؟

- (۱) پیوسته و مشتق پذیر است. (۲) پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.
 (۳) نه پیوسته است و نه مشتق پذیر (۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق پذیر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $x = 0$ پیوسته است. $f(x) = x|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f'(0^+) = 0 \\ f'(0^-) = 0 \end{cases} \text{ مشتق پذیر}$$

۱۰- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x| + 3})$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. $f'(2) = -\frac{1}{3}$

$$(f(\sqrt{|x| + 3}))' = (f(\sqrt{-x + 3}))' = \frac{-1}{2\sqrt{-x + 3}} f'(\sqrt{-x + 3}) = \frac{-1}{4} f'(2) = -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

۱۱- تابع $y = ax + b + \frac{x^2}{2x - 1}$ با ضابطه $y = ax + b$ هموگرافیکی است که محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند. $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{2ax^2 + 2bx - ax - b + x^2}{2x - 1} = \frac{(2a + 1)x^2 + (2b - a)x - b}{2x - 1}$$

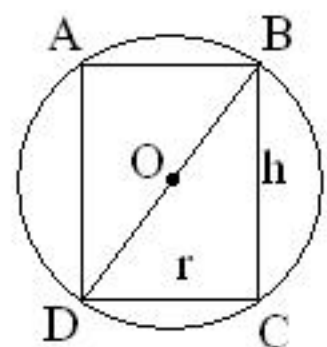
$$2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \in f \Rightarrow 1 = \frac{-b}{-1} \Rightarrow b = 1$$

$$a + b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

۱۲- مستطیل های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می دهیم تا استوانه های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه ها بیشترین مقدار را دارد. ارتفاع آن کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{2}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر یک مستطیل را حول یک ضلعش مثلاً BC دوران دهیم یک استوانه به شعاع AB و ارتفاع BC به دست می آید. پس:



$$\left. \begin{array}{l} v = \pi r^2 h \\ r^2 + h^2 = 36 \rightarrow r^2 = 36 - h^2 \end{array} \right\} v = \pi(36h - h^3)$$

$$v' = \pi(36 - 3h^2) = 0 \rightarrow h^2 = 12 \rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

۱۳- در کدام مجموعه زیر از اعداد حقیقی، یکی از کرانهای پایین در خود مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x|x| \leq -1\}$ (۲) $\{x : [x] = 2\}$ (۳) $\{x : [-x] = -2\}$ (۴) $\{x : 2 - x \geq |x|\}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

نکته: به شرطی یکی از کران‌های پایین عضو مجموعه است که مجموعه دارای می‌نیم باشد.

عضو مینیم $x = 2$ کران پایین عضو خود مجموعه است $2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2$

گزینه‌ی ۱ و ۴ از پایین کران‌دار نمی‌باشند و فقط ماکزیم دارند، گزینه‌ی ۳ هم کران‌دار است ولی مینیم ندارد.

۱۴- کدام دنباله همگرا است؟

$$(1) \left\{ n(-1)^{2n-1} \right\} \quad (2) \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$$

$$(3) \left\{ \left[2 + \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\} \quad (4) \left\{ \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. توجه: $(-1)^{2n-1} = -1$ همگرا به صفر $n^{-1} = \frac{1}{n}$

۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

$$(1) \frac{\pi}{3} \quad (2) -\frac{\pi}{3} \quad (3) \frac{2\pi}{3} \quad (4) \frac{3\pi}{2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$

$$H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{\frac{2}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

۱۶- کدام بیان درباره پیوستگی تابع درست است؟

- (۱) اگر تابعی در بازه (a, b) یکنوا و کراندار باشد، در این بازه پیوسته است.
- (۲) اگر تابعی در بازه $[a, b]$ کراندار و دارای ماکسیمم و می‌نیم باشد، در این بازه پیوسته است.
- (۳) اگر تابعی در بازه (a, b) پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و می‌نیم مطلق دارد.
- (۴) اگر تابعی در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و می‌نیم مطلق دارد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فضیحه‌ی ۱۵ فصل سوم کتاب درسی (صفحه‌ی ۶۷)

۱۷- معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x-2}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام یک است؟

$$(1) 2y - 2x - 3 = 0 \quad (2) 2y + 2x - 3 = 0 \quad (3) 2y - 2x + 3 = 0 \quad (4) 2y + 2x + 3 = 0$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.
 $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + x^2}{x-2}} = \sqrt{x^2 + 3x + 6 + \frac{12}{x-2}}$

$$(x^3 + x^2) \div (x-2) = x^2 + 3x + 6$$

$$y = \sqrt{x^2 + 3x + 6} \sim \left| x + \frac{3}{2} \right| \Rightarrow (x \rightarrow -\infty \Rightarrow y = -x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2y + 2x + 3 = 0)$$

۱۸- کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟

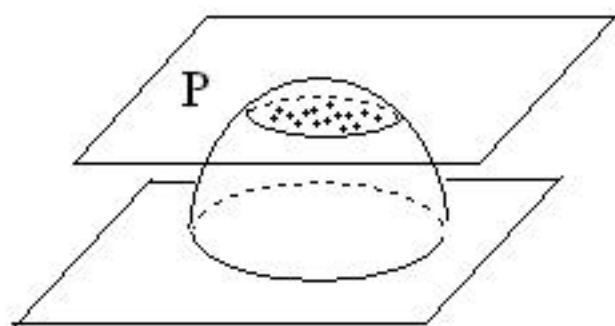
- (۱) می‌نیمم مطلق دارد.
 (۲) ماکسیمم مطلق دارد.
 (۳) دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.
 (۴) فاقد اکسترمم نسبی

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 - 3 < 0 \Rightarrow f(x) = x(-x^2 + 3) = -x^3 + 3x$$

چون نقاط بحرانی فقط نقاط مرزی بازه هستند $x = \pm 1 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 = 0$ پس تابع اکسترمم نسبی

ندارد. پس عبارت گزینه‌ی ۳ عبارتی نادرست است.



۱۹- در یک نیمکره به شعاع ۲۵ واحد، صفحه P همواره موازی صفحه فاعده با سرعت 0.4 از آن دور می‌شود، در حالی که فاصله‌ی دو صفحه ۱۲ واحد است، سرعت کاهش مساحت دایره مقطع صفحه P و نیمکره کدام است؟

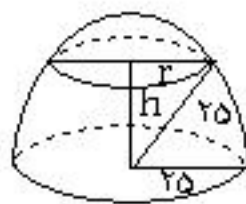
- (۱) 0.48π
 (۲) 0.72π
 (۳) 0.84π
 (۴) 0.96π

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$r^2 + h^2 = 625$$

$$S = \pi r^2 = \pi(625 - h^2)$$

$$S'_t = \pi(-2hh't) = \pi\left(-2 \times 12 \times \frac{4}{100}\right) = -\frac{96}{100}\pi$$



۲۰- در فضیه مقدار میانگین در مورد مشتق، برای تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx + 1$ روی بازه $[0, b]$ اگر $C = 1$ در شرایط فضیه موجود باشد. آنگاه b کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) $\sqrt{3}$

$$f(x) = x^3 + bx + 1$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 3x^2 + b$$

$$\frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 + b^2 + 1 - 1}{b} = 3b^2 + b \Rightarrow b^2 + b = 3(1)^2 + b$$

$$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

۲۱- تفرع نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{4}{x^2} - 4x^{\frac{1}{2}}$ در بازه (a, b) رو به پایین است، بیش‌ترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ∞

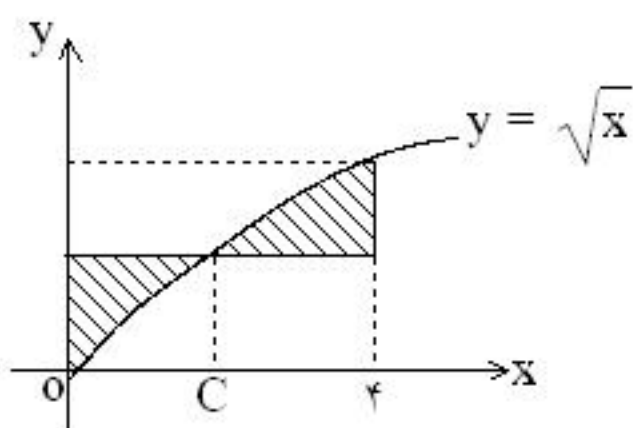
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\left(x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f''(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \right) = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} \right) = \frac{4}{9} x \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}$$

x	-2	0
f''(x)	+	-

(-2, 0) b - a = 2



۲۲- با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، به ازای کدام مقدار C مساحت دو ناحیه سایه زده شکل مقابل، برابرند؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$
 (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{16}{9}$

$$\int_0^c \sqrt{x} dx = \sqrt{c}(4-0) \quad \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_c^4 = 4\sqrt{c}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{16}{3} = 4\sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{16}{9}$$

۲۳- حاصل $\int_{-2}^1 (x[x] - 1) dx$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\int_{-2}^1 x([x] - 1) dx = \int_{-2}^{-1} x(-2 - 1) dx + \int_{-1}^0 x(-1 - 1) dx + \int_0^1 x(-1) dx$$

$$-\frac{3x^2}{2} \Big|_{-2}^{-1} + \left(-x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \left(-\frac{3}{2} \right) - (-6) + (0) - (-1) + \left(-\frac{1}{2} \right) - 0 = 5$$

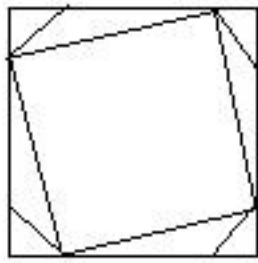
۲۴- سطح محدود به منحنی تابع با ضابطه $f(x) = 2 \sin x \cos 3x$ و محور x ها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{8}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

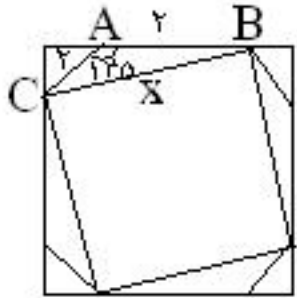
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin x \cos 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4x - \sin 2x) dx = -\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}$$

۲۵- در شکل مقابل اندازه طول اضلاع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟

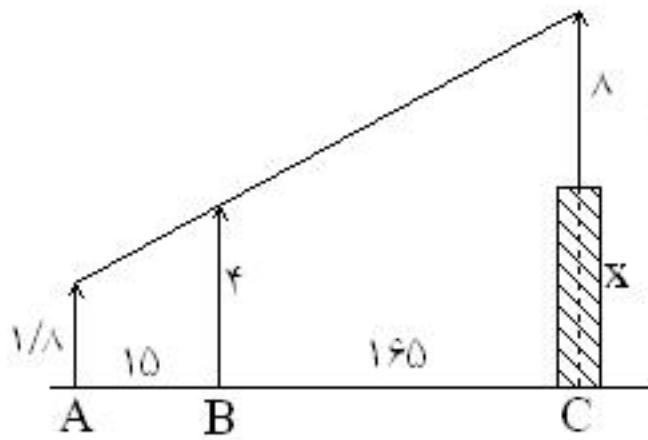


- (۱) $4(1 + \sqrt{2})$
 (۲) $4(2 + \sqrt{2})$
 (۳) $8(1 + \sqrt{2})$
 (۴) $8(2 + \sqrt{2})$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مثلث ABC و قضیه کسینوسها



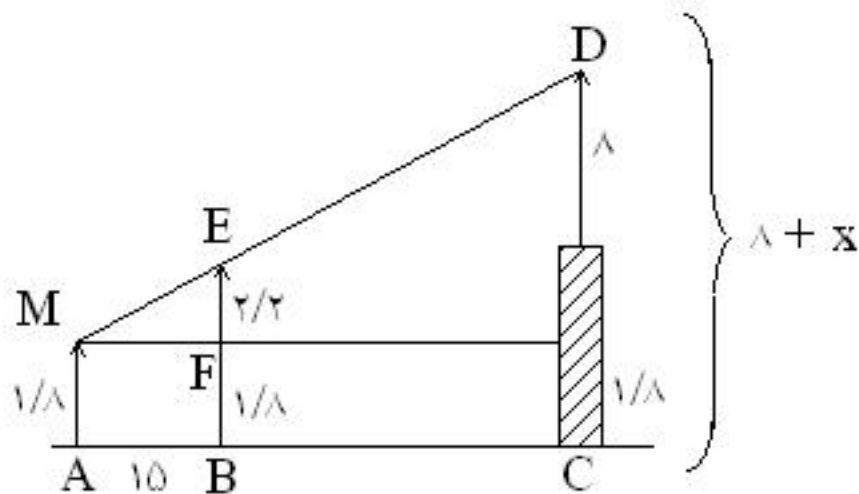
$$x^2 = 2 + 2 - 2 \times 2 \times \cos 135 \Rightarrow x^2 = 8 + 4\sqrt{2}$$



۲۶- در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است، بلندی برج چند متر است؟

- (۱) ۱۹/۸
 (۲) ۲۰/۲
 (۳) ۲۰/۸
 (۴) ۲۱/۲

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. از نقطه M موازی افقی رسم کرده با توجه به شکل

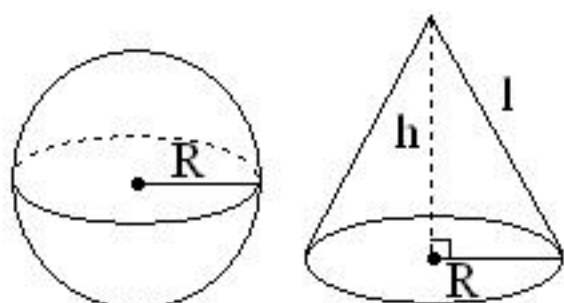


$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{2/2}{8+x-1/8} = \frac{10}{160} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 20/2$$

۲۷- حجم یک کره، $\sqrt{2}$ برابر حجم مخروط قائم است. اگر شعاع فاعده مخروط برابر شعاع کره باشد، فاصله رأس مخروط تا محیط فاعده آن، چند برابر شعاع فاعده است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) $\sqrt{10}$
 (۴) $2\sqrt{13}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{2} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = 2\sqrt{2}R$$

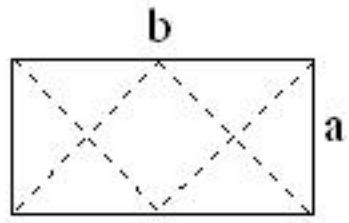
$$l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 8R^2} = 3R \Rightarrow \frac{l}{R} = 3$$

۲۸- در مستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۸ واحد، از تقاطع نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی حاصل می شود، مساحت این

چهارضلعی چند واحد مربع است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴/۵ (۳) ۲۸ (۴) ۳۲/۵

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.



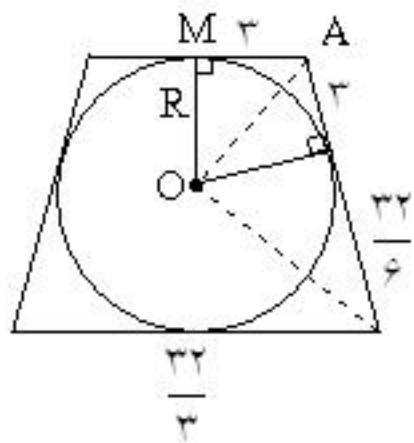
$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{b-a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{49}{2} = 24.5$$

$$\text{قلع مربع} = \frac{|b-a|}{\sqrt{2}} = \frac{15-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

۲۹- دوزنقه متساوی الساقین به طول فاعده های ۶ و $\frac{32}{3}$ واحد بر دایره ای محیط است، کوتاه ترین فاصله رأس دوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{3}$

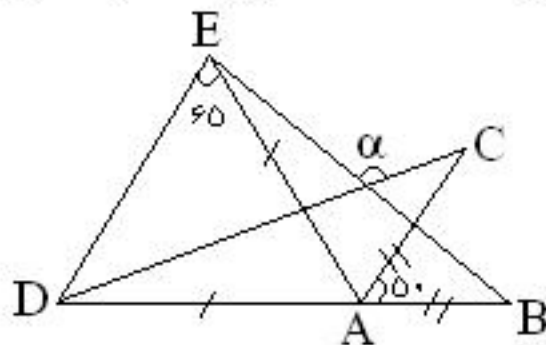
گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. در دوزنقه متساوی الساقین محیط بر دایره به شعاع R داریم.



$$4R^2 = 6 \times \frac{32}{3} \Rightarrow R = 4$$

$$\text{در مثلث } OMA \text{ داریم } OA^2 = R^2 + 3^2 \Rightarrow OA = 5 \text{ پس } AN = OA - R = 1$$

۳۰- در شکل مقابل $AD = AE$ ، $AB = AC$ ، $\widehat{CAB} = 50^\circ$ و $\widehat{AED} = 65^\circ$ زاویه α چند درجه است؟



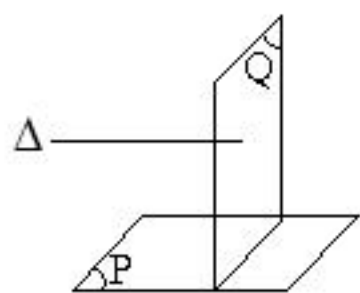
- (۱) ۱۱۵
 (۲) ۱۲۰
 (۳) ۱۲۵
 (۴) ۱۳۰

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. نقطه C دوران یافته نقطه B حول نقطه A است (زاویه دوران 50°)

نقطه D دوران یافته نقطه E حول نقطه A است (زاویه دوران 50°) پس پاره خط CD دوران یافته BE حول نقطه A است. (زاویه دوران 50°) بنابراین زاویه بین BE و CD برابر 50° است. بنابراین $\alpha = 130^\circ$ است.

۳۱- خط Δ با کدام شرایط می تواند موازی صفحه P و عمود بر صفحه Q باشد؟

- (۱) $P \perp Q$ (۲) $P \cap Q = \emptyset$ (۳) $\Delta \perp (P \cap Q)$ (۴) $\Delta \parallel (P \cap Q)$



گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۲- نقاط $(3, 5)$ ، $(1, 7)$ و $(-1, 1)$ سه رأس از مثلث فانم الزاویه اند. مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانس میداء

مختصات و نسبت تجانس $-\frac{1}{4}$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

A(۵, ۳)

B(۷, ۱)

C(۱, -۱)

$$S = \left| \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = 8 \rightarrow S_{A'B'C'} = S_{ABC} \times |k|^2 \Rightarrow S_{A'B'C'} = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

۳۳- مبدا مختصات رأس یک هرم مثلث القاعده است، معادله سه ضلع آن $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \\ 2x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$ و

است، حجم آن چند واحد مکعب است؟ $\begin{cases} 2z+y=2 \\ x=0 \end{cases}$

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

D $\begin{cases} 2x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$ D' $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ D'' $\begin{cases} 2z+y=2 \\ x=0 \end{cases}$

A = D ∩ D' = (۱, ۰, ۰)

B = D ∩ D'' = (۰, ۲, ۰) ⇒ V = $\frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{3}$

C = D' ∩ D'' = (۰, ۰, ۱)

۳۴- اگر $a = (۱, -۲, ۳)$ و $b = (۲, ۰, ۱)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a + ۳b$ و $۲a + ۵b$ ، کدام است؟

- (۱) $۲\sqrt{۳}$ (۲) $۳\sqrt{۲}$ (۳) $۳\sqrt{۵}$ (۴) $۵\sqrt{۳}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$a = (۱, -۲, ۳)$ $S = |(a + ۳b) \times (۲a + ۵b)|$
 $b = (۲, ۰, ۱) \Rightarrow S = |b \times a| = |۲, -۵, -۴| = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$

۳۵- اگر خط به معادله $\frac{x-1}{۲} = \frac{y-b}{a} = \frac{z}{1}$ بر صفحه ای به معادله $۲x + y - ۳z = ۴$ واقع شود، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) (-۱, ۲) (۳) (۱, -۲) (۴) (-۱, -۲)

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$\frac{x-1}{۲} = \frac{y-b}{a} = \frac{z}{1} \Rightarrow$ $\begin{matrix} \text{هادی خط} = u = (۲, a, ۱) \\ \text{نرمال صفحه} = n = (۲, ۱, -۳) \end{matrix} \xrightarrow{u \perp n} ۴ + a - ۳ = 0 \Rightarrow a = -۱$

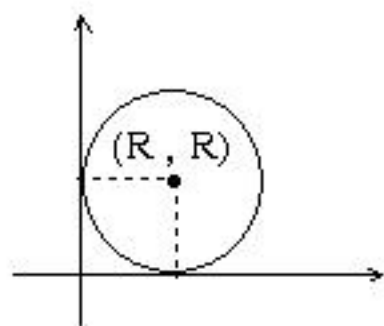
چون خط در صفحه است پس یک نقطه خط باید در صفحه صدق کند.

$A(۱, b, ۰) \in P \Rightarrow ۲ + b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow (a, b) = (-۱, ۲)$

۳۶- دو دایره از نقطه (۲, ۱)، گذشته و بر محورهای مختصات مماس اند، شعاع این دایره ها کدام است؟

- (۱) ۱ و ۴ (۲) ۱ و ۵ (۳) ۲ و ۴ (۴) ۲ و ۵

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$(2 - R)^2 + (1 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R = 1, 5$$

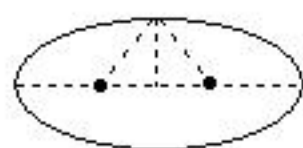
۳۷- بیشترین مساحت از بین مثلثهایی که یک رأس آن روی بیضی به معادله ی $x^2 + y^2 - 4x = 3$ و دو رأس دیگر آن کانونهای این بیضی باشند کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 4x = 3 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$a = 2$
 $b = 1$
 $c = \sqrt{3}$



$$s = \frac{FF' \times b}{2} = bc = \sqrt{3}$$

۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A \cdot A^t$ وارون پذیر است؟

(۱) ۲ (۲) -۶ (۳) هر مقدار a (۴) هیچ مقدار a

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & -2+3a \\ -2+3a & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow |AA^t| \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14(1+a^2) - (3a-2)^2 \neq 0 \Rightarrow 5a^2 + 12a + 10 \neq 0 \quad (\Delta' < 0)$$

یعنی به ازاء هر مقدار a ، $|AA^t| \neq 0$ است.

۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس $\left(\frac{1}{2}A\right)^3$ کدام است؟

(۱) I_2 (۲) $2I_2$ (۳) $-2I_2$ (۴) $-I_2$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}A\right)^3 = \left(R_{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = R_{\pi} = -I$$

سوالات کنکور ۸۷ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال
 هر گونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

۴۰- در دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ay + z = 5 \\ 2x + by + 2z = 9 \\ 3x + 3y - z = 2 \end{cases}$ ، اگر دترمینان ضرایب برابر ۴ باشد، مقدار y کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $\frac{1}{2}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1$$

۴۱- داده های آمار در ۹ طبقه با طول دسته ۴ ، دسته بندی شده اند. اگر ۸ داده بین چارک اول و سوم به آن ها اضافه شود و یک واحد از طول دسته کم کنیم، در دسته بندی جدید تعداد دسته ها کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم چارک اول و سوم بین کوچک ترین و بزرگ ترین داده ها است. پس اضافه کردن بین چارک اول و سوم تغییری در بزرگ ترین داده ها ایجاد نمی کند. بنابراین دامنه تغییرات که $9 \times 4 = 36$ بوده تغییر نمی کند. حال اگر این داده ها را در دسته هایی به طول ۳ تقسیم کنیم تعداد دسته ها $12 = \frac{36}{3}$ است.

۴۲- در داده های آماری با نمودار سافه و برگ، داده های کم تر از چارک اول و بیش تر از چارک سوم را حذف می کنیم. میانگین داده های باقی مانده کدام است؟

ساقه	برگ
۳	۱ ۴ ۵ ۷ ۸ ۸ ۹
۴	۰ ۰ ۴ ۵ ۵ ۶
۵	۲ ۳ ۶ ۶ ۷

- (۱) $42/7$ (۲) $42/9$ (۳) $43/2$ (۴) $43/4$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا داده ها را به ترتیب صعودی نوشته چارک اول و سوم و میانه ها را تعیین می کنیم.

۳۱ ، ۳۴ ، ۳۵ ، ۳۷ ، ۳۸ ، ۳۸ ، ۳۹ ، ۴۰ ، ۴۰ ، ۴۴ ، ۴۵ ، ۴۵ ، ۴۶ ، ۵۲ ، ۵۳ ، ۵۶ ، ۵۶ ، ۵۷
 $Q_1 =$ چارک اول $Q_2 =$ میانه $Q_3 =$ چارک سوم

بنابراین میانگین ده داده بین ۳۸ و ۵۲ را می خواهیم. با فرض میانگین حلسی ۴۰ (چون داده های بین دو چارک به ۴۰ نزدیک هستند)

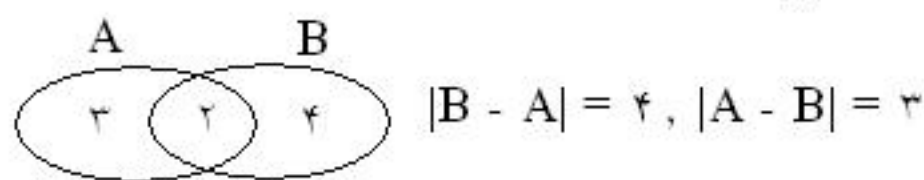
$$\bar{x} = 40 + \frac{(-2) + (-2) + (-1) + 0 + 0 + 4 + 5 + 5 + 6 + 12}{10}$$

$$\bar{x} = 42/7$$

۴۳- اگر مجموعه ی A دارای ۵ عضو و مجموعه ی B دارای ۶ عضو و مجموعه ی $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشند، مجموعه ی $(A \cap B)' \times (A \cup B)'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار ون و داده های مسئله داریم:



$|(A \cap B)' \times (A \cup B)'| = |(A \cap B)' \times (B \cap A)'| = |A - B| \times |B - A| = 3 \times 4 = 12$
 ۴۴- مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به سه مجموعه‌ی A ، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A = \{n : n = \sqrt{k} + 2, k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{n : n = \sqrt{k} - 3, k \in \mathbb{N}\}$ کدام دو عدد، به یک کلاس هم ارزی حاصل از این افراز، تعلق دارند؟
 (۱) ۲۱ و ۱۳ (۲) ۲۳ و ۱۳ (۳) ۲۱ و ۲۲ (۴) ۲۳ و ۲۲
 گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زیرا:

$A \overset{\vee}{\text{عناصر}} \equiv 2 \Rightarrow C \overset{\vee}{\text{عناصر}} \equiv 0, 1, 3, 5, 6$
 $B \overset{\vee}{\text{عناصر}} \equiv -3 \equiv 4$
 $\begin{cases} 21 \overset{\vee}{\equiv} 0 \\ 13 \overset{\vee}{\equiv} 6 \end{cases} \Rightarrow$ یعنی هر دو به دسته‌ی C تعلق دارند.

۴۵- کدام رابطه، یک رابطه هم‌ارزی نیست؟
 (۱) متشابه بودن دو مثلث در مجموعه‌ی مثلث‌ها
 (۲) عمود بودن دو خط در مجموعه‌ی خطوط در فضا
 (۳) موازی بودن دو خط در مجموعه‌ی خطوط در فضا
 (۴) معادل بودن مساحت دو مثلث در مجموعه‌ی مثلث‌ها
 گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. عمود بودن ۲ خط در فضا بازتاب و تراپا نیست.

۴۶- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب، احتمال وقوع عدد بزرگ‌تر از ۳ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

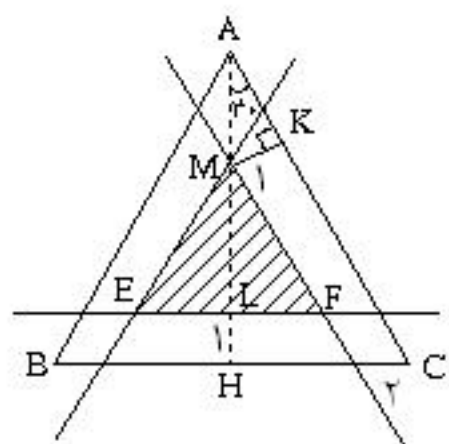
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.
 $P(2) = P(4) = P(6) = 3P(1) = 3P(3) = 3P(5)$
 $P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P	a	۳a	a	۳a	a	۳a

یا $P(\text{هر عدد زوج}) = \frac{3}{12}$ و $P(\text{هر عدد فرد}) = \frac{1}{12}$

$\sum P = 1 \Rightarrow 12a = 1 \Rightarrow a \Rightarrow \frac{1}{12} \Rightarrow p(x \geq 4) = 7a = \frac{7}{12}$
 ۴۷- صفحه هدف مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع ۱۵ واحد است، تیر رها شده، به این صفحه هدف برخورد کرده است، با کدام احتمال فاصله محل اصابت تیر از نزدیک‌ترین ضلع این مثلث بیش‌تر از ۱ واحد است؟
 (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{1}{12}$

هر گونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثل AMK داریم $MK = 1$

و $\angle MAK = 30^\circ$ پس $AM = 2$ (ضلع روبه رو به زاویه 30°)

نصف وتر است) بنابراین $ML = 15 - 2 - 1 = 12$

$$\frac{S_{MEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{LM}{AH}\right)^2 = \left(\frac{12}{15}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0.64$$

۴۸- با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می باشد؟ (رقم ۰ در پلاک اتومبیل به کار نمی رود.)

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ پلاک مضرب ۳ یا بیشتر از ۴ نیست.

۴۹- در یک گراف کامل از مرتبه ۵، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد دورهای به طول m در گراف K_p برابر است با:

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

$$\binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 15$$

۵۰- در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت مجذور باقیمانده است، چند عدد b می توان یافت؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $165 = br^2 + r, 0 \leq r < b$

$$\begin{cases} r(br+1) = 165 = 5 \times 3 \times 11 \\ r < b \end{cases}$$

$$r=1 \Rightarrow b=164$$

$$r=3 \Rightarrow b=18$$

فقط دو مورد قابل قبول است. $r=5 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$

$$r=11 \Rightarrow b < r$$

۵۱- نمایش عددی در مبنای ۳ به صورت $(20 \ 11 \ 21)_3$ است در نمایش این عدد در مبنای ۴، چند مرتبه رقم صفر تکرار شده است؟

- (۱) فاقد صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $(20 \ 11 \ 21)_3 = 2 \times 3^5 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 529$

پس در مبنای ۴ دو رقم صفر است. $(529)_{10} = \boxed{20101}_4$

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

۵۲- از رابطه همنشینی (بیمانه ۱۸) $9a \equiv 6b$ ، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- (۱) (بیمانه ۲) $a \equiv 0$ (۲) (بیمانه ۳) $b \equiv 0$ (۳) (بیمانه ۶) $a \equiv 2$ (۴) (بیمانه ۶) $3a \equiv 2b$

$$9a \equiv 6b \xrightarrow{\div 3} 3a \equiv 2b$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} (3, 6) | 2b \\ 3 | 2b \end{cases} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} b \equiv 0$$

$$(2, 6) | 3a \Rightarrow 2 | 3a \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} a \equiv 0$$

پس گزینه ی ۳ نادرست است.

۵۳- اگر M ماتریس متناظر از یک رابطه روی مجموعه ۴ عضوی باشد. این رابطه کدام یک از خواص را دارد؟

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (۱) بازتابی - تراپایی (۲) بازتابی - متقارن (۳) تراپایی - پادمتقارن (۴) متقارن - تراپایی

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. چون همه ی درایه های قطر اصلی ۱ می باشد، رابطه بازتابی است از طرفی چون بسته های

داریم پس تقارنی و پادتقارنی نداریم.

۵۴- به چند طریق می توان ۱۲ سکه را بین سه نفر تقسیم کرد، به طوری که لااقل به هر کدام یک سکه برسد؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۴۸ (۳) ۴۵ (۴) ۳۶

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲ سکه یکسان است.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ x_i &\geq 1 \end{aligned} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 9 \Rightarrow |S| = \binom{11}{2} = 55$$

توجه: تعداد جوابهای حسابی معادله ی سیاله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ برابر است با: $\binom{m+n-1}{n-1}$.

۵۵- هریک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را در یکی از ۶ خانه هم ردیف به تصادف فرار می دهیم، با کدام احتمال این ارقام در خانه های متوالی و دو رقم زوج کنار هم فرار می گیرند؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{15}$ (۴) $\frac{2}{15}$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. ۲ و ۴ را با هم گرفته برای این که در ۵ خانه متوالی باشند ۲ حالت دارد پس:

$$P = \frac{2 \times 4! \times 2}{6!} = \frac{2}{15}$$