

۱- جواب نامعادله زیر کدام است؟ $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$

- (۱) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ (۲) $-1 \leq x \leq 1$ (۳) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-2 \leq x \leq 1$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \rightarrow 1 \leq 3x \leq 3 \rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

۲- از تساوی $1 = \text{Log}_5(3x - 5) + \text{Log}_5(2x - 1)$ ، مقدار $\text{Log}_7(6x + 3)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_5(2x - 1)(2x - 5) = 1 \Rightarrow (2x - 1)(2x - 5) = 5 \Rightarrow 4x^2 - 10x - 2x + 5 = 5 \Rightarrow 4x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin D_f \\ x = \frac{12}{4} \in D_f \end{cases}$$

$$x = \frac{12}{4} \Rightarrow \text{Log}_7(6x + 3) = \text{Log}_7 16 = \text{Log}_7 2^4 = 4$$

۳- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس مجهول، به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ است. اگر $x = 1$ ، مقدار y

کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Ax = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ 2f - 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} -f = 1 \\ y = 2f - 1 \end{cases} \Rightarrow y = -3$$

۴- تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و x و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

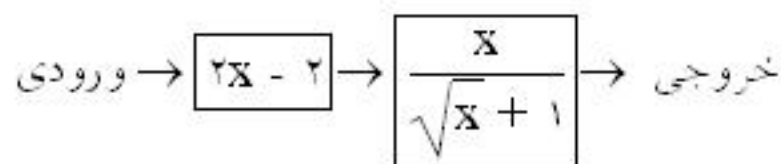
- (۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

$$x^2 = 2x \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{\text{غیرنزولی}} x = -1 \text{ و } q = \frac{-1}{2}$$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^6\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{64}\right) \Rightarrow S_6 = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

۵- اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد مقدار ورودی کدام است؟



- (۱) $\frac{11}{9}$
 (۲) $\frac{7}{2}$
 (۳) ۳
 (۴) ۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(2x-2) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(x-1) = 2(\sqrt{2(x-1)+1}) \xrightarrow{\sqrt{x-1}=t} 2t^2 = 2(t\sqrt{2}+1) \Rightarrow 2t^2 - 2t\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 3$$

تذکر: به کمک گزینه‌ها این تست به راحتی حل می‌شود.

۶- کدام عبارت در مورد توابع پیوسته صحیح است؟

- (۱) اگر تابعی بر یک بازه پیوسته باشد بر آن بازه کراندار است.
 (۲) اگر تابعی بر یک بازه بسته صعودی و کراندار باشد، بر آن بازه پیوسته است.
 (۳) اگر تابعی حد چپ و راست برابر در یک نقطه داشته باشد، در آن نقطه پیوسته است.
 (۴) اگر تابعی از چپ و راست در یک نقطه پیوسته باشد، در آن نقطه پیوسته است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۷- عبارت $x^4 + fax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{8}$
 (۲) $-\frac{17}{16}$
 (۳) $\frac{17}{16}$
 (۴) $\frac{15}{8}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 = 4 \Rightarrow f(x) = (x^2)^2 + fa(x^2) + 2bx + 1 \Rightarrow R = 16 + 16a + 2bx + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = 0 \\ 16a + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{17}{16} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{17}{16}$$

۸- حاصل عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cos 10^\circ$
 (۲) $\sin 70^\circ$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{1}{2} [\cos 60^\circ + \cos 20^\circ] + \frac{1 + \cos 160^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{3}{4}$$

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴
 (۲) -۳
 (۳) -۲
 (۴) -۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

۱۰- مشتق $f(\sqrt[3]{2x+2})$ در نقطه $x=1$ برابر -2 است. شیب خط فانتم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول 2 کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 2 (۴) 4

$$Y = f(\sqrt[3]{2x+2}) \Rightarrow y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{2x+2}^2} f'(\sqrt[3]{2x+2})$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x=1 \Rightarrow y' = \frac{2}{12} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4 \Rightarrow \frac{-1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$$

۱۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۲- خط مماس بر نمودار تابع $y + \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg} \sqrt{3x-5}$ در نقطه‌ای به طول 2 واقع بر آن، محور y ها را با کدام

عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{1 + (3x-5)} \xrightarrow{x=2} y' = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x=2 \Rightarrow y=0 \Rightarrow A \Big|_2 \in f(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

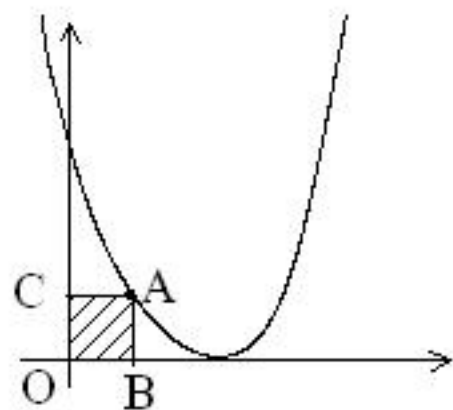
مماس $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 2)$

۱۳- دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله‌ی $y = (x-2)^2$ روی بازه $[0, 2]$ است، بیش‌ترین مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{28}{27}$ (۲) $\frac{10}{9}$ (۳) $\frac{32}{27}$ (۴) $\frac{11}{9}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_{OABC} = x(x-2)^2 \Rightarrow S' = (x-2)^2 + 2x(x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(x-2+2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$



$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\max} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - 2 \right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

۱۴- اگر $a_n = \sqrt{n^2 + 2n}$ و $b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ ، هر یک از دو دنباله $\{a_n - b_n\}$ و $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) همگرا - همگرا (۲) همگرا - واگرا (۳) واگرا - همگرا (۴) واگرا - واگرا

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n - \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - n - \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{n^2 + 2n}}{n^2 + 1} = 1 \Rightarrow \text{هر دو دنباله همگرا هستند.}$$

۱۵- اگر $s_1 = 2$ و $s_n = s_{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، $(n > 1)$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ کدام است؟

- (۱) ۳/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در این دنباله $a_1 = 2$ از جمله‌ی دوم به بعد:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{2}{3} \text{ و } q = \frac{2}{3}$$

دنباله به صورت رو به رو است: ... و $\frac{8}{27}$ و $\frac{4}{9}$ و $\frac{2}{3}$ و ۲ از جمله‌ی دوم به بعد تصاعد هندسی است:

$$S_{\infty} = 2 + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 + 2 = 4$$

۱۶- داده‌های آماری در ۹ طبقه دسته‌بندی شده‌اند، فراوانی تجمعی نسبی در دسته چهارم و پنجم به ترتیب $0/28$ و $0/40$.

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

است. در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به دسته پنجم چند درجه است؟

- (۱) ۴۰/۵ (۲) ۴۱/۴ (۳) ۴۲/۶ (۴) ۴۳/۲

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

فراوانی مطلق فراوانی تجمعی

$$F_0 = F_f + f_0 \rightarrow \frac{f_0}{N} = \frac{F_0}{N} - \frac{F_f}{N}$$

$$\Rightarrow F_{c4} = 0/28 \text{ و } F_{c5} = 0/4 \text{ و } \frac{f_0}{N} = F_{c5} - F_{c4} = 0/12$$

$$a_0 = \frac{f_0}{N} \times 360 = 0/12 \times 360 = \frac{12}{100} \times 360 = 43/2$$

۱۷- اگر ۲۰ داده‌ی آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هر کدام کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید، ۱/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۳۵۰ (۴) ۴۲۰

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ضریب تغییرات جدید CV_2 ضریب تغییرات قبلی CV_1

$$CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad CV_2 = \frac{2\sigma}{2\bar{x} - 7} \quad \text{اگر میانگین داده‌های اصلی } \bar{x} \text{ و انحراف معیار } \sigma \text{ باشد، آن‌گاه:}$$

$$CV_2 = 1/5 CV_1 \Rightarrow \frac{2\sigma}{2\bar{x} - 7} = \frac{1}{5} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = 10/5$$

$$\frac{\sum x_i}{N} = \bar{x} \Rightarrow \sum x_i = N \times \bar{x} = 20 \times 10/5 = 210$$

۱۸- ماکسیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x| \cos x$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\cos 1$ (۴) ۱

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. چون همواره $y \leq 0$ و f زوج است و $f(0) = 0$ پس $\max f(x) = 0$

۱۹- اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده و برای $M > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر x که در $a < x < a + \delta$ صدق کند، آنگاه $f(x) > M$ ، در این صورت.....

- (۱) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(a)$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق تعریف حد $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$$x \rightarrow a^+$$

۲۰- معادله‌ی مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x^2 \operatorname{Arctg} x}{3x + 2x^2}$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{\pi}{4}$ (۲) $y = \frac{\pi}{3}$ (۳) $y = \frac{\pi}{2}$ (۴) $y = \pi$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2x} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} \text{ مجانب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{4} \text{ مجانب}$$

۲۱- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و خط به معادله $4y + 5x = a$ فام بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه a کدام است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۶ (۴) ۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} \text{ شیب مماس بر } f = \frac{5}{4} \Rightarrow f^{-1} \text{ شیب مماس بر } f^{-1} = -\frac{4}{5} = \text{شیب خط قائم بر } f^{-1}$$

$$f(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(4) = 6 \Rightarrow A \Big|_6^4 \in f \Rightarrow A \Big|_4^6 \in f^{-1}$$

$$16 + 30 = a \Rightarrow a = 46$$

۲۲- اگر هزینه چاپ تعداد x کتاب حسابان به صورت $C(x) = 800000 + 150x + 75000 \sqrt[3]{x}$ باشد. هزینه چاپ

۱۰۰۱ آمین کتاب برابر کدام است؟

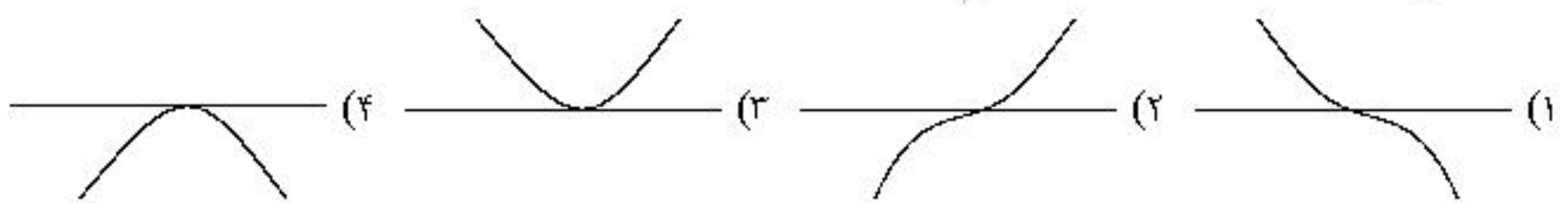
- (۱) ۳۵۰ (۲) ۳۷۵ (۳) ۴۰۰ (۴) ۴۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$C(1001) - C(1000) \approx C'(1000) \rightarrow C'(x) = 150 + 75000 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow x = 1000$$

$$C'(1000) = 150 + 75000 \times \frac{1}{3 \times 1000} = 400$$

۲۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$ در همسایگی $x = 0$ چگونه است؟



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = x - \sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

x	0
f''	$- \quad 0 \quad +$
	$\downarrow \quad \uparrow$

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

چون f'' در همسایگی صفر تغییر علامت می دهد پس $x = 0$ عطف است.

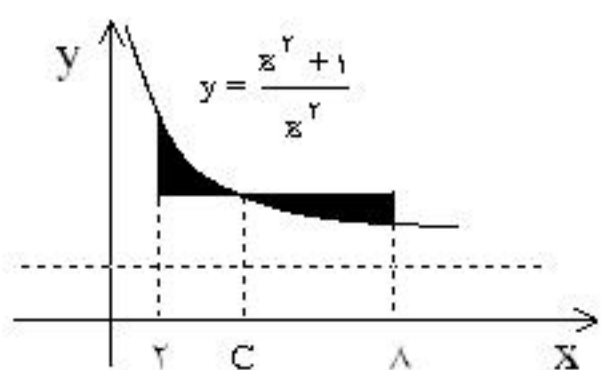
۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^3 \sin \frac{1}{2x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^3 \sin \frac{1}{2x}} = \frac{2}{0} = \infty$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

۲۵- با توجه به شکل مقابل اگر مساحت دو ناحیه ی سایه زده با هم برابر باشند، عدد C کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۴ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) ۵

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{6} \int_2^8 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \frac{1}{C^2} \Rightarrow \frac{1}{6} \int_2^8 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \frac{1}{C^2} \Rightarrow \frac{1}{6} \left(8 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{6} \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{C^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{C^2} \Rightarrow C^2 = 16 \rightarrow C = 4$$

۲۶- تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x & ; \text{گویا } x \\ 2 & ; \text{گنگ } x \end{cases}$ بر بازه ی $[0, 3]$ مفروض است. افرازی از این بازه را در نظر

بگیرید که در آن به سه قسمت مساوی تقسیم کند. $U_3(f)$ در بازه ی $[0, 3]$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$U_n(f) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i) \text{ و } \Delta x = \frac{3-0}{3} = 1 \rightarrow U_3(f) = \text{Max} \sum f(u_i) = 1(2 + 2 + 3) = 7$$

بازه ها: $[0, 1]$ $[1, 2]$ $[2, 3]$

۲۷- مساحت ناحیه ی محدود به منحنی تابع با ضابطه ی $y = (1 + \sin 2x) \cos x$ و محور x ها و دو خط به معادلات

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ و } x = -\frac{\pi}{6} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $1 + \sqrt{3}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

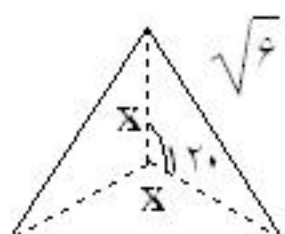
ریشه‌های تابع در بازه $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ قرار ندارند. $\sin 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \sin 2x) \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

تذکر: $\sin 2x \cos x$ تابعی فرد است پس $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos x dx$ برابر صفر است.

۲۸- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{6}$ واحد را به سه مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم اندازه ضلع بزرگتر از یک مثلث هم‌نهشت چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه کسینوس‌ها مطابق شکل داریم:

هر یک از ۳ مثلث هم‌نهشت متساوی‌الساقین است. به طوری که زاویه‌ی رأس آن 120° درجه است.

$$x^2 + x^2 - 2xx \cos 120^\circ = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

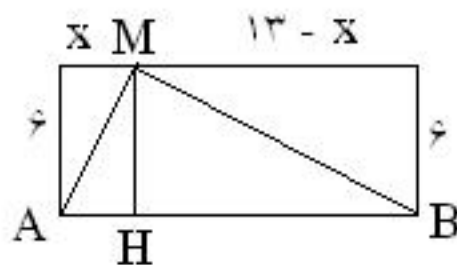
۲۹- در مستطیلی به ابعاد ۱۳ و ۶ واحد، نقطه‌ی M بر روی ضلع بزرگتر فرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عموداند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۳/۵ (۳) ۴ (۴) ۴/۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
روش اول:

$$x(13 - x) = MH^2$$

$$x(13 - x) = 36 \Rightarrow x = 4$$



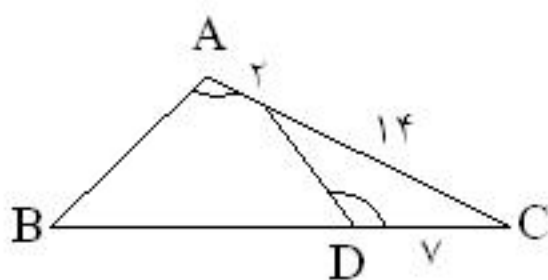
روش دوم:

$$MB^2 + MA^2 = AB^2$$

$$36 + (13 - x)^2 + 36 + x^2 = 169 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 26x + 72 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ و } x = 9$$

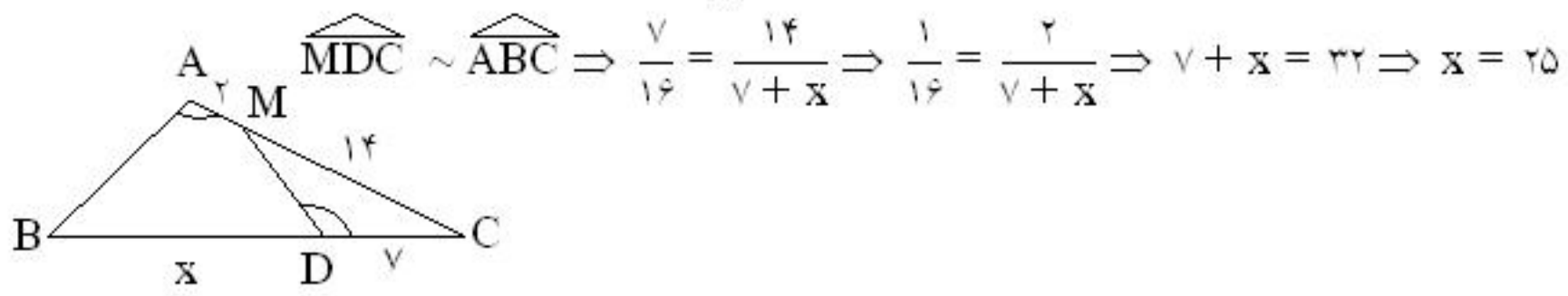
با توجه به شکل:



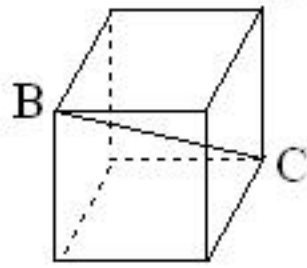
۳۰- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

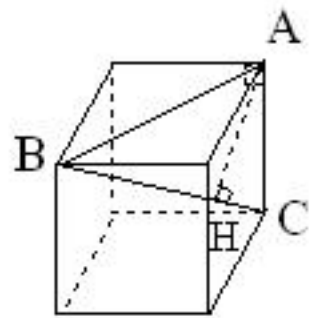


۳۱- در مکعب شکل مقابل فاصله‌ی راس A از فطر BC چند برابر یال مکعب است؟



- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



با توجه به رابطه فیثاغورث در مثلث $(\hat{A} = 90^\circ) ABC$

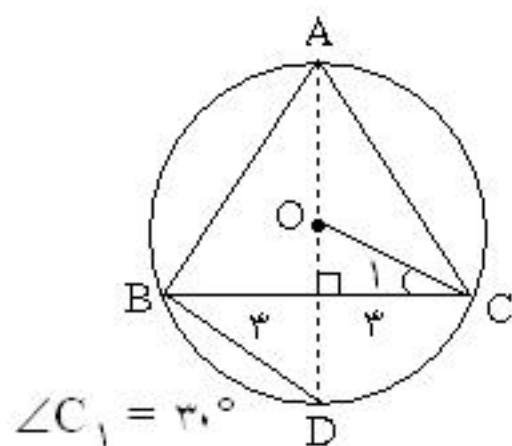
$$AC = a \text{ و } BC = a\sqrt{3} \text{ و } AB = a\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

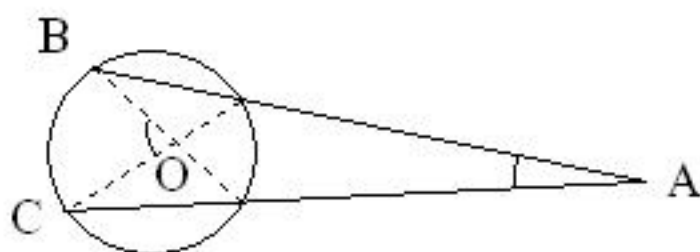
۳۲- دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A، سه راس مثلثند. اگر $BC = 6$ ، $\hat{A} = 60^\circ$ و نیمساز زاویه‌ی A همواره از نقطه‌ی ثابتی مانند D، بگذرد، فاصله‌ی D از نقطه‌ی B چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{6}$
 (۲) ۳
 (۳) $2\sqrt{3}$
 (۴) ۴



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. راس A روی کمان درخور 60° وابسته به ضلع BC است. نیمساز زاویه‌ی A همواره از وسط کمان BC می‌گذرد. پس نقطه‌ی ثابت مورد نظر (D) وسط BC است، در حالت خاص از اگر A فطری رسم کنیم که از وسط BC بگذرد، داریم:
 در مثلث OEC:

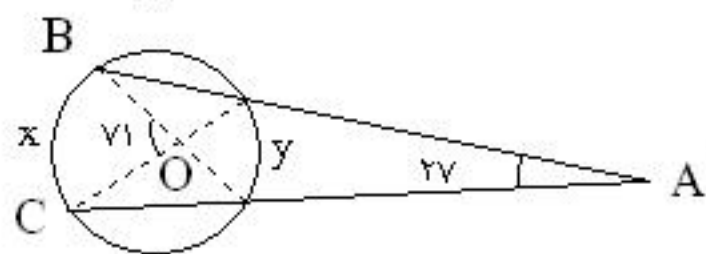
$$OD = R, OE = \frac{R}{2} \Rightarrow BD = OC = R \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 2\sqrt{3}$$



۳۳- در شکل مقابل $\hat{A} = 27^\circ$ و $\hat{O} = 71^\circ$ کمان BC چند درجه است؟

- (۱) ۹۸
 (۲) ۱۰۰
 (۳) ۱۰۲
 (۴) ۱۰۴

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 71 \\ \frac{x-y}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 91^\circ$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۴- فقط یک جفت صفحه‌ی موازی با هم می‌توان یافت به طوری که هریک از این دو صفحه شامل یکی از خطوط مفروض d یا d' باشد، این دو خط کدام وضع را دارند؟

- (۱) واقع در یک صفحه (۲) موازی (۳) متقاطع (۴) متناظر

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو خط متناظر هستند.

۳۵- کدام تبدیل زیر ایزومتری است؟

(۱) $D(x, y) = (2x, 2y)$ (۲) $D(x, y) = (x+y, x-y)$

(۳) $D(x, y) = (-y+2, x-1)$ (۴) $D(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $T(x, y) = (-y+2, x-1)$

یک دوران (90°) و انتقال در امتداد بردار $(-1, 2)$ است چون هر دو تبدیل ایزومتری است لذا ترکیب آنها ایزومتری است.

۳۶- در کدام حالت حاصل ضرب عددی بردار غیر صفر a در مجموع دو بردار غیر صفر X و Y صفر نمی‌باشد؟

- (۱) بردار X فرینه بردار Y (۲) بردار a فقط بر یکی از دو بردار X یا Y عمود
 (۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم (۴) بردار a بر صفحه دو بردار X و Y عمود

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y = 0 + a \cdot y \neq 0$ $\left. \begin{matrix} a \perp x \\ a \not\perp y \end{matrix} \right\}$

۳۷- خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(1, 2, -1)$ و $B(-1, 1, 2)$ از کدام نقطه به مختصات زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-3, 0, 5)$ (۲) $(-2, 0, 5)$ (۳) $(-3, 0, 4)$ (۴) $(-2, 0, 4)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله خط گذرنده بر دو نقطه داده شده به صورت $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ است که این خط از نقطه $(5, 0, -3)$ می‌گذرد.

۳۸- معادله صفحه‌ی گذرا از نقطه $(2, -1, 1)$ و عمود بر خط به معادلات $x = y = z - 1$ از کدام نقطه به مختصات زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-3, 4, 1)$ (۲) $(-2, 4, 1)$ (۳) $(2, 4, 1)$ (۴) $(3, 4, 1)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نرمال صفحه همان هادی خط است و از $A(1, -1, 2)$ می‌گذرد پس معادله صفحه به صورت $x + y + z = 2$ است که از نقطه $(1, 4, -3)$ می‌گذرد.

۳۹- به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخلی‌اند؟

- (۱) -5 (۲) -4 (۳) -3 (۴) -2

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

سوالات کنکور ۸۶ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۴ سوال
 هر گونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

$$C: x^2 + (y - 2)^2 = -b + 4$$

$$C': (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad \circ \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right| \text{ و } \circ' \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right| \Rightarrow \circ \circ' = \sqrt{2} = |R - R'| = |\sqrt{-b + 4} - \sqrt{2}| \Rightarrow b = -4$$

۴۰- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمقارن نوشته ایم. درمیان

ماتریس متقارن کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

می دانیم $A + A^t$ متقارن و $A - A^t$ پادمقارن است پس داریم:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{مقارن } B} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{پادمقارن } C}$$

$$\Rightarrow |B| = \left| \frac{A + A^t}{2} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1(2) = -2$$

۴۱- اگر A یک ماتریس پادمقارن و ماتریس $I - A$ وارون پذیر باشد آنگاه $(I + A)^{-1} (I - A)$ برابر کدام است؟
 (I ماتریس همانی است.)

- (۱) A (۲) A^{-1} (۳) $(I - A)^{-1}$ (۴) I

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

پادمقارن $A: A^t = -A$

$$\Rightarrow W = (I + A^t)^{-1} (I - A) \rightarrow W = (I - A)^{-1} (I - A) = I$$

۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، عنصر سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) صفر (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{2}{3}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ji}$$

سوالات کنکور ۸۶ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۴ سوال
 هر گونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot a_{ji} \leftarrow \text{همسازه درایه } a_{ji} \Rightarrow a_{33}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot a_{33} = \frac{1}{9} \times -6 = -\frac{2}{3}$$

درایه سطر ۱ام ستون ۱ام A^{-1} درمیان A

۴۳- دترمینان ضرایب دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + by + 3z = 2 \\ cx + 2y - z = -1 \end{cases}$$

برابر ۴ است. اگر $x = \frac{1}{2}$ آنگاه b کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 3 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1 + b + 2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به روش کرامر: $b = 1$

۴۴- اثبات کدام فضیه زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟
 (۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

- (۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.
 (۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.
 (۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید مورد گزینه ۲: اصل افیلدس است (فضیه نیست)
 ۴۵- مجموعه A ، ۵ عضو بیشتر از مجموعه A' دارد، خارج قسمت یا تفاضل تعداد زیرمجموعه‌های این دو مجموعه کدام است؟

- (۱) خارج قسمت ۲۵ (۲) خارج قسمت ۳۲ (۳) تفاضل ۲۵ (۴) تفاضل ۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تعداد عضو A' برابر n باشد،

تعداد عضو A برابر $n + 5$ است، از طرفی یک مجموعه k عضوی، 2^k زیرمجموعه دارد پس داریم:

$$\begin{aligned} \text{تعداد زیرمجموعه } A &= 2^{n+5} \\ \text{تعداد زیرمجموعه } A' &= 2^n \end{aligned} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{2^{n+5}}{2^n} = 32$$

۴۶- اگر $A \cup (B - A) = B$ آنگاه:

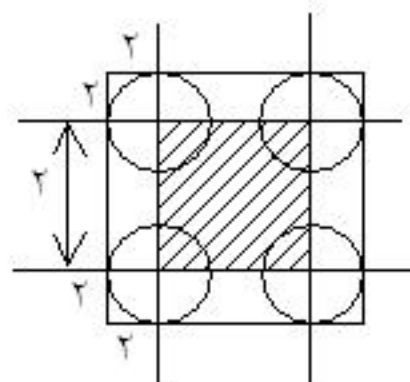
- (۱) $A \subseteq B$ (۲) $B \subseteq A$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) $B = \emptyset$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $A \cup (B - A) = B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

۴۷- در پرتاب یک سکه به شعاع ۲ سانتی‌متر بر روی یک مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر، مرکز سکه همواره درون مربع فرار می‌گیرد. احتمال آنکه این سکه به تمامی درون مربع فرار گیرد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید مرکز سکه‌ها در ناحیه هاشورخورده فرار گیرد تا تمام سکه درون مربع باشد.



$$P = \frac{\text{مساحت مربع به ضلع } 2}{\text{مساحت مربع به ضلع } 6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

۴۸- دو عدد به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شوند با کدام احتمال نسبت این دو عدد، کم‌تر از $\frac{1}{3}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

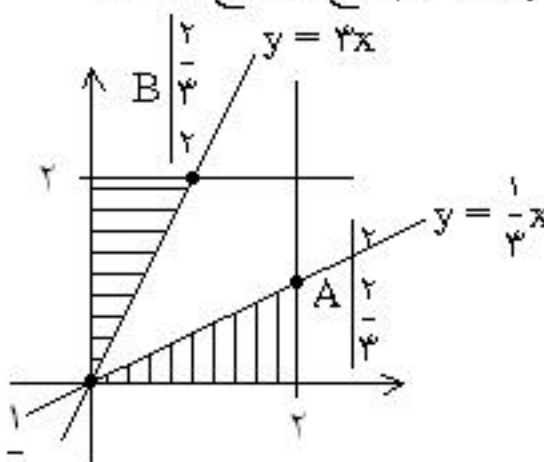
$$xy \in (0, 2)$$

$$\frac{x}{y} < \frac{1}{3} \quad یا \quad \frac{y}{x} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x$$

$$a_S = 2 \times 2 = 4$$

$$a_A = S_{\text{مستطیل}} = 2S_{\text{مثلث}} = 2 \times \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{1}{3}$$



۴۹- در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس‌های زوج، عددی و تعداد رأس‌های فرد، عددی است.

- (۱) فرد - فرد (۲) فرد - زوج (۳) زوج - فرد (۴) زوج - زوج

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در این جا: تعداد رئوس درجه فرد زوج است و تعداد کل رئوس زوج است پس گزینه ۴ صادق است.

۵۰- اگر A ماتریس مجاورت یک درخت و حاصلضرب درایه‌های قطری ماتریس A^2 برابر ۲۴ و ماکسیمم درجه آن ۴ باشد، تعداد یال‌های این درخت کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

درجه رئوس گراف درخت ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ است پس:

$$\sum \deg v_i = 2q \Rightarrow 4 + 3 + 2 + (p - 3) \times 1 = 2(p - 1) \Rightarrow \begin{cases} p = 8 \\ q = 7 \end{cases}$$

۵۱- باقیمانده‌ی تقسیم 23^{23} بر عدد ۲۳ کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۱۵ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $11 \times 3 = 33$ و ۳ و ۱۱ هر دو اولند.

$$\begin{cases} -6 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (-6)^{23} \equiv 1 \pmod{11} \\ (-6)^{11} \equiv 1 \pmod{11} \xrightarrow{\times (-6)^3} (-6)^{23} \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

سوالات کنکور ۸۶ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۴ سوال
 هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

$$(-6)^{11} \equiv (-6)^3 = 36 \times (-6) \equiv 3 \times -6 = -18 \equiv 4 \pmod{11}$$

پس اولاً باقیمانده باید مثبت باشد و ثانیاً در پیمانه ۳ صفر و در پیمانه ۱۱ برابر ۴ باشد.

۵۲- ماتریس متناظر به یک رابطه به صورت شکل مقابل است این رابطه کدام خاصیت را دارد؟

$$\begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- (۱) پادمتقارن
 (۲) تراپایی
 (۳) بازتابی
 (۴) غیرمتقارن

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. در فطر اصلی ماتریس همهی اعداد ۱ نیستند، پس بازتابی ندارد، ماتریس متقارن نیست

پس تقارن ندارد. از طرفی بسته داریم، پس پادمتقارن هم نیست از طرفی تراپایی ندارد. زیرا

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \not\sim M$$

۵۳- شش گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف فرار دارند، به تصادف دو گوی از آنها برمی داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم تر از ۶ است؟

- (۱) $\frac{4}{15}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{5}{12}$

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15 \rightarrow A = \{\{1 \text{ و } 2\} \{1 \text{ و } 3\} \{1 \text{ و } 4\} \{2 \text{ و } 3\}\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{15}$$

۵۴- یک تاس همگن را انداخته ایم برآمد حاصل، مضرب ۳ نیست. احتمال آنکه شماره ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
 (۲) $\frac{1}{5}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.
 $S = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } 5\} \rightarrow A = \{2\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$