

۱- حاصل  $\text{Log}_5 (\sqrt{125})^3$  کدام است؟

- ۴ (۱) ۴/۵ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 $\text{Log}_5 (\sqrt{5^3})^3 = \text{Log}_5 5^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲- در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$  معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  است،  $x+y$  کدام

است؟

- ۴ (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می دانیم:  $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y = 2 \Rightarrow x + y = 4$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳- به ازای کدام مقدار  $m$  نمودار تابع با ضابطه  $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$  بالای محور  $x$ ها و مماس بر آن است؟

- ۳ (۱)  $-\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۳ (۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} m-2 > 0 \\ 9 - 4(m-2)(m+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4m^2 + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴- حاصل  $(1+x+x^2+\dots+x^9)(1-x+x^2-\dots+x^9)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟

- ۵۱۷ (۱) ۵۱۱ (۲) ۵۱۲ (۳) ۵۱۶ (۴)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = (1+x+\dots+x^9)(1-x+x^2-\dots+x^9) = \frac{x^9-1}{x-1} \cdot \frac{x^9+1}{x+1} = \frac{x^{18}-1}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$A = \frac{(x^2)^9 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 511$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۵- در معادله  $3x^2 - 15x + m = 0$  اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد  $m$  کدام است؟

- $\frac{59}{5}$  (۱)  $\frac{63}{5}$  (۲)  $\frac{59}{4}$  (۳)  $\frac{63}{4}$  (۴)

سوالات کنکور ۸۲ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز  
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال  
 هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x' = x'' + 2 \\ x' + x'' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x'' = 2 \\ x' + x'' = 5 \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{7}{2}$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{49}{4}\right) - 15\left(\frac{7}{2}\right) + m = 0 \Rightarrow 147 - 210 + 4m = 0 \Rightarrow -63 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۶- با توجه به ماشین  $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow x$  اگر  $f(x) = 2x - 1$  آنگاه  $g(0)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به ماشین داده شده  $g(x)$  همان  $f^{-1}(x)$  است لذا:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۷- تابع فرد  $f$  معکوس پذیر است، نمودار تابع  $f^{-1}$  نسبت به کدام مورد متقارن است؟

- (۱) مبدأ مختصات (۲) محور  $y$ ها (۳) محور  $x$ ها (۴) نیمساز ناحیه اول و سوم

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون نمودار  $f^{-1}$  نیز فرد است لذا مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۸- حاصل  $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۹- خط  $y = \frac{3}{2}$  به معادله  $y = \frac{3}{2}$  موازی افقی نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{Ax^3 + 1}{(A-1)x^3 + 16}$  است معادله جانب فام نمودار تابع  $f$  کدام است؟

- (۱)  $x = -4$  (۲)  $x = -2$  (۳)  $x = 2$  (۴)  $x = 4$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{A}{A-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow A = 3$$

$x \rightarrow \pm\infty$

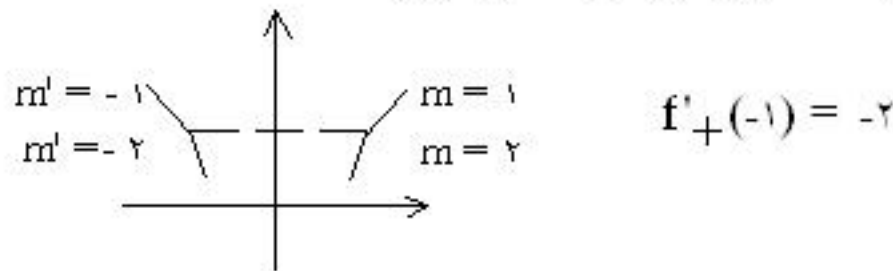
مجاذب فام:  $2x^3 + 16 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۰- اگر  $f$  یک تابع زوج  $f_+(1) = 1$  و  $f_-(1) = 2$  آنگاه  $f_+(-1)$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع زوج است پس  $f'$  فرد است و با توجه به شکل داریم:



سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۱- اگر  $f(x) = \sin x$  مقدار مشتق تابع  $\frac{f \circ f}{f}$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $\sin 1$  (۳)  $\cos 1$  (۴) ۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $f \circ f(x) = \sin(\sin x)$ ,  $f'(x) = \cos x \Rightarrow y = \frac{\sin(\sin x)}{\cos x} \Rightarrow$

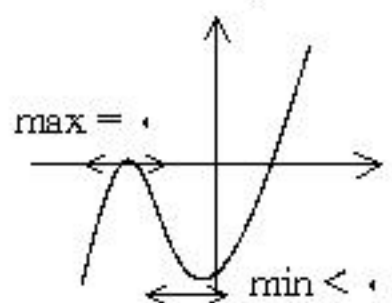
$$y' = \frac{\cos x \cos(\sin x) \sin' x - \sin(\sin x) \cos' x}{\cos^2 x} \Rightarrow y' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است مقادیر اکسترمم نسبی تابع مشتق  $f'$  از راست به چپ چگونه است؟



- (۱) می نیمم مثبت - ماکزیمم مثبت  
 (۲) می نیمم منفی - ماکزیمم منفی  
 (۳) می نیمم صفر - ماکزیمم مثبت  
 (۴) می نیمم منفی - ماکزیمم صفر



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است نمودار  $f'$  را رسم کنیم.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۳- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k'\pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۴- اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول از دنباله اعداد  $\frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$  باشد دنباله  $\{S_n\}$  به کدام عدد همگرا است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۵- اگر برای هر دنباله  $\{a_n\}$  که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  داشته باشیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$  آنگاه:

- (۱)  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon$
- (۲)  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow |f(a_n) - L| < \varepsilon$
- (۳)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- (۴)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق عکس قضیه‌ی حد دنباله‌دار از فرض مساله نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

یعنی:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۶- اگر  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$  تابع  $g \circ f$  در نقطه  $x = 1$  از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
- (۲) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
- (۳) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
- (۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.  $g \circ f: (D_f: x \leq 1, D_g: [1, \infty) \cup \{0\})$  در یک تعریف شده اما در همسایگی یک تعریف نشده است. به علت اینکه  $D_{g \circ f} = (-\infty, 0] \cup \{1\}$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۷- در نقطه‌ای یک تابع پیوسته و تابع دیگری ناپیوسته است با کدام عمل بین توابع ممکن است تابع حاصل در آن نقطه پیوسته باشد؟

- (۱) هر دو حالت تقسیم یکی بر دیگری
- (۲) تفاضل
- (۳) جمع
- (۴) ضرب

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلاً  $f(x) = x$  و  $g(x) = [x]$  در  $x = 0$  پیوسته،  $g$  در  $x = 0$  ناپیوسته است. ولی  $f \cdot g$  در  $x = 0$  پیوسته می‌شود.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۸- تابع  $f$  با ضابطه مقابل در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

- (۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
- (۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
- (۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر
- (۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع  $f$  در نقطه  $x_0 = 1$  ناپیوسته است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۱۹- اگر  $y^3 + y = x$  مقدار  $y''$  در نقطه  $x = 2$  چقدر است؟

- (۱)  $-\frac{3}{16}$  (۲)  $-\frac{3}{32}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

$x = 2 \Rightarrow y = 1$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y^3 + y = x \Rightarrow 3y^2 y' + y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3y^2 + 1} \Rightarrow y'(2) = \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{1}{3y^2 + 1} \Rightarrow y'' = \frac{-6yy'}{(3y^2 + 1)^2} \Rightarrow y''(2) = \frac{-6(y(2)) \cdot y'(2)}{(3(1) + 1)^2} = \frac{(-6)(1)\left(\frac{1}{4}\right)}{(3+1)^2} = \frac{-6}{16 \times 4} = \frac{-3}{32}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

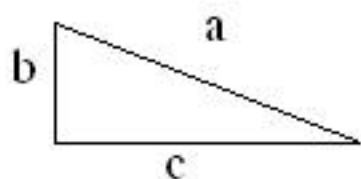
۲۰- بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۴ (۴)  $3\sqrt{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم  $a$  وتر مثلث باشد.

$$a + b = 6, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (a + b)(a - b) = c^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{c^2}{6} \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -\frac{c^2}{6} \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow 2b = 6 - \frac{c^2}{6} \Rightarrow b = 3 - \frac{c^2}{12} \Rightarrow S = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{c^2}{12} \right) c$$



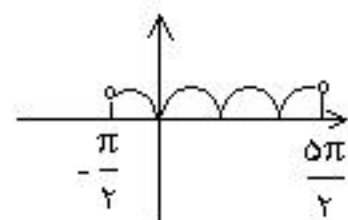
$$\Rightarrow S = \frac{3}{2}c - \frac{c^3}{24} \Rightarrow S'_c = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{c^2}{8} = 0 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \text{ و } b = 2 \Rightarrow S = 2\sqrt{3}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۱- تعداد نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = |\sin x|$  بر بازه  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل تابع داده شده دارای ۵ نقطه بحرانی است.



سراسری - ریاضی - ۸۲

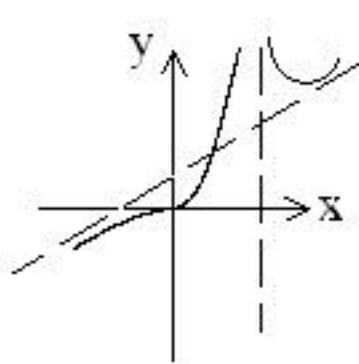
۲۲- نمودار تابع با ضابطه  $y = \frac{x+1}{x^3+x}$  در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \end{cases}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲



۲۳- شکل مقابل تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^3 + ax}{x^2 + bx + 1}$  است دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) (۱ و -۲) (۲) (۲ و -۱) (۳) (۲ و ۱) (۴) (۱ و ۲)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع در  $x=1$  عطف افقی دارد لذا منفرجه باید ریشه مضاعف مثبت داشته باشد

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - a}{(x-1)^2}, \quad f'(1) = 0 \rightarrow a = 0, \quad b = -2 \text{ در نتیجه}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\cos x + 3\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{+\sin x}{-\sin x - 9\sin 3x} = \frac{+1}{-1+9} = \frac{+1}{8}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۵- مجموع پانین ریمان تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^3$  بر بازه  $[0, 1]$  وقتی افراز از چهار نقطه  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  تشکیل شده باشد کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{2}{9}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

$$\Delta x = \frac{1}{3} \Rightarrow L_n f = \frac{1}{3} \left( f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right) = \frac{1}{3} \left( 0 + \frac{1}{27} + \frac{8}{27} \right) = \frac{1}{9}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۶- اگر  $f(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{t^2 - 1}$  ,  $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  مشتق تابع حاصلضرب  $g \cdot f$  در نقطه  $x = 2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(g \cdot f)' = g'f + f'g \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \\ f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(2) = \frac{2}{3} \\ f'(2) = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} f(2) = 0 \\ g(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g \cdot f)'(2) = \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 3 = 0 + 1 = 1$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۷- حاصل  $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \text{Arctg } x \, dx$  چند برابر  $\pi^2$  است؟

- (۱)  $\frac{1}{32}$  (۲)  $\frac{1}{24}$  (۳)  $\frac{1}{20}$  (۴)  $\frac{1}{16}$

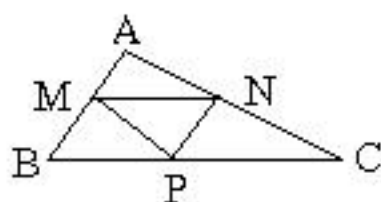
$$\begin{cases} \text{Arc tan } x = u \\ \frac{dx}{1+x^2} = du \end{cases} \Rightarrow \int u \, du = \frac{1}{2} (\text{Arc tan } x)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۸- یک مثلث را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مثلث‌های کوچک هم‌نهشت هستند پس:

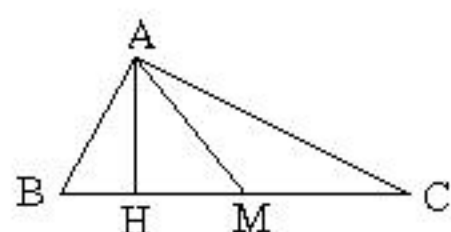
$$\frac{S}{S'} = 4 \Rightarrow \frac{a}{a'} = 2 \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{a}{a'} = 2$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۲۹- در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  را رسم می‌کنیم اگر  $HB$  و  $HC$  به ترتیب ۴ و ۹ واحد باشند مساحت مثلث  $AMH$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{5}$  (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)  $\frac{7}{5}$

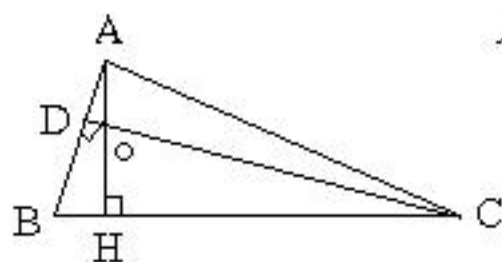
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} MH &= MB - BH = \frac{9}{5} - 4 = \frac{2}{5} \\ AH^2 &= BH \cdot HC \Rightarrow AH = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMH} = \frac{6 \times \frac{2}{5}}{2} = \frac{7}{5}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۰- در شکل مقابل  $AH$  و  $CD$  دو ارتفاع مثلث  $ABC$  هستند اگر



$$12 = \frac{1}{3} OH = AD = 5DO$$

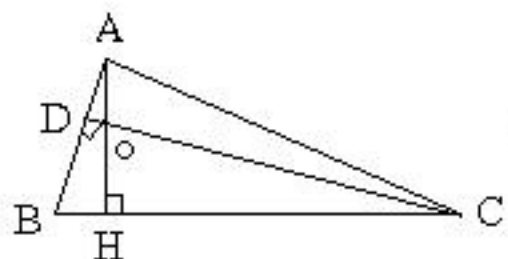
(۲) ۱۷۰

(۱) ۱۶۵

(۴) ۱۸۰

(۳) ۱۷۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$AD = 12, OH = 36, OD = \frac{12}{5} \Rightarrow \widehat{OAD} \sim \widehat{OHC} \Rightarrow \frac{AD}{HC} = \frac{OD}{OH} \Rightarrow$$

$$\frac{12}{HC} = \frac{\frac{12}{5}}{36} = \frac{1}{15} \Rightarrow HC = 180$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۱- سه رأس  $A$  و  $B$  و  $C$  از مکعبی را چنان انتخاب می‌کنیم که هر دو رأس آن از یک پال نباشد مساحت مثلث  $ABC$  چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

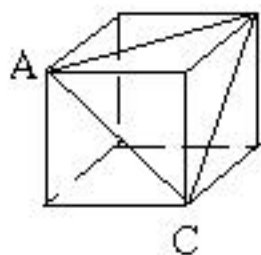
(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است و هر ضلع آن  $a\sqrt{2}$  می‌باشد.  $B$



$$S_{ABC} = (a\sqrt{2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \Rightarrow \frac{A_{ABC}}{S_{\text{یک وجه}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۲- سه پاره‌خط به طول‌های  $6x$ ,  $x+7$ ,  $4x-4$  اضلاع مثلثی هستند. مقادیر  $x$  به کدام صورت است؟

(۴)  $\frac{11}{9} < x < 4$

(۳)  $2 < x < 3$

(۲)  $\frac{5}{3} < x < 3$

(۱)  $\frac{11}{9} < x < 3$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $x+7 < 6x+(4x-4) \Rightarrow x > \frac{11}{9} \Rightarrow x+7 > 6x-(4x-4) \Rightarrow x < 3$

$$5x+3 > 6x \Rightarrow x < 3, 10x-4 > x+7 \Rightarrow x > \frac{11}{9}, 7x+7 > 4x-4 \Rightarrow x > \frac{-11}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{9} < x < 3$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۳- نقطه  $C$  بر روی وتر  $AB$  به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان فرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه  $C$  کدام است؟

(۴)  $4\sqrt{5}$

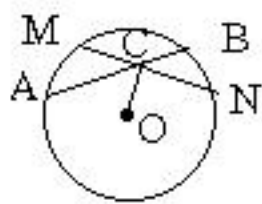
(۳)  $6\sqrt{2}$

(۲)  $5\sqrt{3}$

(۱) ۸



هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱



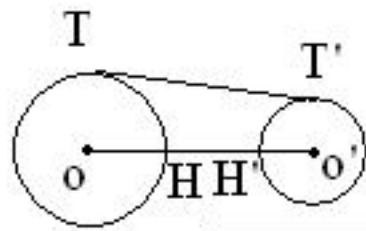
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کوتاه ترین وتر بر قطر گذرنده بر نقطه C عمود است (MN) و در نقطه C نصف می شود.  
 $CA \times CB = CM \times CN = CM^2$   
 $۶ \times ۳ = CM^2 \Rightarrow CM = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow MN = ۶\sqrt{۲}$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۴- طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۱۱ و ۳ سانتی متر برابر  $۳\sqrt{۳۳}$  سانتی متر است کمترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی متر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل کمترین فاصله بین دو دایره پاره خط HH' می باشد.



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow ۳\sqrt{۳۳} = \sqrt{d^2 - ۶۴} \Rightarrow$$

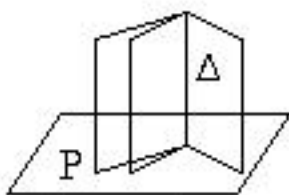
$$۹ \times ۳۳ = d^2 - ۶۴ \Rightarrow d^2 = ۲۹۷ + ۶۴ = ۳۶۱ \Rightarrow$$

$$d = ۱۹ \Rightarrow HH' = d - (R + R') = ۱۹ - ۱۴ = ۵$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۵- خط  $\Delta$  بر صفحه P عمود است چند صفحه موجود است که از خط  $\Delta$  بگذرد و بر صفحه P عمود باشد؟  
(۱) هیچ (۲) فقط دو صفحه (۳) فقط یک صفحه (۴) بی شمار

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون  $\Delta$  بر P عمود است هر صفحه شامل  $\Delta$  بر P عمود خواهد بود.



سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۶- تصویر فام بردار (۶ و ۳ و ۱) روی امتداد بردار (۲ و -۱ و -۲) کدام بردار است؟

- (۱) (۲ و -۱ و -۲) (۲) (۲ و ۱ و -۲) (۳) (۴ و -۲ و -۴) (۴) (۱ و ۳ و ۲)

$$\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{۱ + ۳ - ۱۲}{۴ + ۱ + ۴} \times (۲, -۱, -۲) = (-۲, ۱, ۲)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۷- دو خط به معادلات  $\frac{x-1}{۲} = \frac{y-۴}{۳} = \frac{z}{-1}$  و  $(x = t, y = t + ۲, z = -۲t - ۱)$  نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

- (۱) متناظر (۲) متقاطع (۳) موازی (۴) عمود

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $\vec{V}_1: (۲, ۳, -۱)$  و  $\vec{V}_2: (۱, ۱, -۲)$  چون دو خط موازی یا عمود نیستند پس مختصات پارامتری یکی را در معادله متقارن دیگری فرار می دهیم اگر مقادیر t بدست آمده یکی نباشد دو خط متناظر هستند.

$$\frac{t-1}{2} = \frac{t+2-4}{3} = \frac{-2t-1}{-1} \Rightarrow 3t-3 = 2t-4 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow -t+1 = -4t+2 \Rightarrow 3t = -3 \Rightarrow t = -1$$

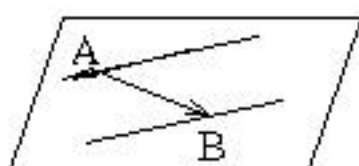
سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۸- صفحه شامل دو خط موازی  $(x = 2t + 1, y = t - 1, z = t)$ ،  $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$  محور  $\Delta$ ها را با کدام طول

قطع می کند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow 1(x) - 5(y) + 3(z - 2) = 0 \Rightarrow x - 5y + 3z - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

روی محور  $\Delta$ ها مقادیر  $y$  و  $z$  صفر است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۳۹- دو نقطه  $M$  و  $N$  هر کدام بر روی یکی از دو شاخه هذلولی به معادله  $4y^2 - 9x^2 + 18x + 16 = 0$  حرکت می کنند کمترین فاصله  $MN$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{10}{3}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$4y^2 - 9(x^2 - 2x) + 16 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 9(x-1)^2 + 9 + 16 = 0 \Rightarrow 9(x-1)^2 - 4y^2 = 25$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow AA' = \frac{10}{3} \quad a = \frac{5}{3}$$

در هذلولی  $AA'$  کوتاهترین فاصله بین دو شاخه است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۰- اگر  $a + b + c = -5$  حاصل دترمینان  $\begin{vmatrix} a & b & c+2 \\ a & b+2 & c \\ a+2 & b & c \end{vmatrix}$  کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۴ (۳) ۴ (۴) ۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر سطر اول را از سطرهای دوم و سوم کم کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = a(4) + 2(-2b - 2c - 4) \Rightarrow -4(a + b + c) - 8 = 20 - 8 = 12$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۱- اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} -6 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲، -۱ (۲) ۲، ۱، -۲ (۳) ۲، ۱، -۳ (۴) ۲، -۲، ۳

سوالات کنکور ۸۲ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز  
تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال  
هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون ماتریس وارون پذیر نیست پس دترمینان ماتریس صفر است.

$$-6(-1) + a(-a-1) = 0 \Rightarrow -a^2 - a + 6 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -3 \text{ یا } a = 2$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۲- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های وارون پذیر باشند کدام گزینه در مورد آنها نادرست است؟

$$(1) A^t B^t = (BA)^t \quad (2) |A^t|^{-1} = |A|^{-1} \quad (3) (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad (4) (AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. داریم:

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۳- سه صفحه با معادله‌های ماتریسی 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$
 داده شده‌اند فصل مشترک‌های دو به دو

این سه صفحه چگونه‌اند؟

(۱) فقط گذرا بر یک نقطه (۲) منطبق برهم (۳) هر سه موازی هم (۴) فاقد نقطه مشترک

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد دستگاه فقط یک جواب منحصر بفرد خواهد داشت:  
 $2(-4) - 1(10) + 1(3) = -15 \neq 0$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۴- کمترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر از آنها در یک ماه از سال و در یک روز از هفته متولد شده‌اند کدام است؟

(۱) ۷۵ (۲) ۷۸ (۳) ۸۵ (۴) ۸۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا اگر لانه (۱) شامل افرادی باشد که در شنبه فروردین ماه و لانه (۲) شامل افرادی باشد که در یکشنبه فروردین ماه و ... لانه (۸۴) شامل افرادی باشد که در جمعه اسفندماه متولد شده‌اند در صورتی که

۸۵ نفر را به خواهیم در این لانه‌ها پخش کنیم طبق اصل لانه کیوتری حداقل (۲) نفر یافت می‌شوند که در یک لانه فرار گیرند یعنی حداقل ۲ نفر ماه و روز تولدشان یکسان است.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۵- مجموعه  $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$  دارای چند زیر مجموعه شامل عضو  $a$  می‌باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

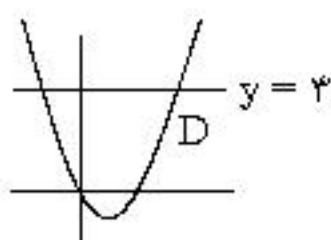
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا  $a$  حتماً باید عضو زیر مجموعه باشد اما (۳) عضو دیگر هر کدام می‌توانند عضو زیر

مجموعه باشند و می‌توانند عضو زیر مجموعه نباشند پس:  $2^3 = 8 =$  تعداد زیر مجموعه های مطلوب

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۶- در رابطه  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 2x, y \leq 3\}$  بیشترین مقدار  $x + y$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)  $\sqrt{5}$



$$y = x^2 - 2x \quad y = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زیرا:

$$x^2 - 2x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{I} \\ x = -1 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I} \Rightarrow D \Big|_3^3 \Rightarrow \max(x + y) = 3 + 3 = 6$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۷- باقیمانده عدد  $3^{48}$  بر ۱۱ کدام است؟

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۷/۵ (۴)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا طبق قضیه فرما داریم  $3^{11} \equiv 1 \pmod{11}$  بنابراین:

$$3^{48} \equiv (3^{11})^4 \times 3^8 \equiv (1)^4 \times (9)^4 \equiv (-2)^4 \equiv 5 \pmod{11}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۸- در پرتاب چهار سکه با هم احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید کدام است؟

۵/۱۶ (۱) ۷/۱۶ (۲) ۲/۳ (۳) ۱/۲ (۴)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه: احتمال موفقیت  $k$  بار در  $n$  بار انجام عمل برابر است با:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

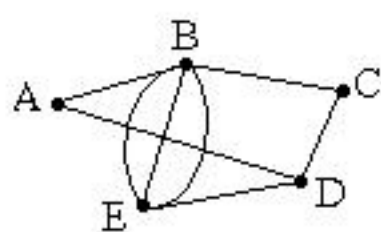
$p =$  موفقیت در هر بار

$$\underbrace{\binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1}_{\text{۳ بار رو}} + \underbrace{\binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1}_{\text{۳ بار پشت}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۴۹- شکل مقابل ۵ منطقه A و B و C و D و E را با ۸ پل به هم راه داده است اگر مجاز

باشیم از هر پل دقیقاً یکبار عبور کنیم با شروع از منطقه B منطقه پایان کدام است؟



(۱) نشدنی  
D (۳)  
B (۲)  
E (۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا اگر فقط دو راس فرد در یک گراف همبند وجود داشته باشد و بخواهیم تمام یالها را

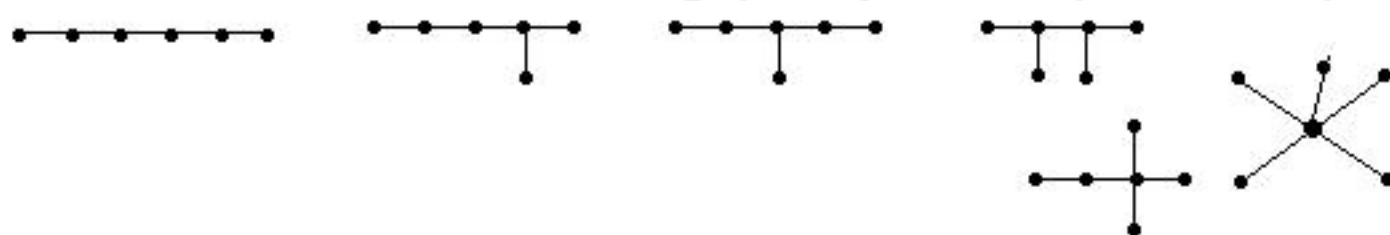
طی کنیم به طوریکه هر یال یک مرتبه طی شود در صورتیکه از یک راس فرد شروع به حرکت کنیم راس پایانی راس فرد دیگر می باشد.

سراسری - ریاضی - ۸۲

۵۰- تعداد درخت‌های از مرتبه ۶ چند تا است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا درخت‌های از مرتبه (۶) به صورت زیر می باشند.



سراسری - ریاضی - ۸۲

۵۱- اگر  $(abc)_7 = (cba)_8$  رقم  $a$  کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{توجه: } (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b = a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \dots + a_1 \cdot b^1 + a_0$$

$$49a + 7b + c = 64c + 8b + a \Rightarrow 48a - 63c = b \Rightarrow b = 3(16a - 21c)$$

طرف اول مضرب ۳ است باید طرف دوم مضرب ۳ باشد.  $b = 3 \Rightarrow 16a - 21c = 1 \Rightarrow a = \frac{21c + 1}{16}$

به ازای  $b = 1$  و  $b = 6$  جواب موجود نیست.  $a = c + \frac{5c + 1}{16} \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a = 3 + 1 = 4$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۵۲- اگر (به پیمانه  $m$ )  $a^3 - a^2 - a + 1 \equiv a^2 - 1$ ،  $(a^2 - 1, m) = 1$ ، آنگاه:

- (۱)  $m | a - 2$  (۲)  $m | a - 1$  (۳)  $m | a + 1$  (۴)  $m | a + 2$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a(a^2 - 1) - (a^2 - 1) \equiv a^2 - 1 \xrightarrow{(a^2 - 1, m) = 1} a - 1 \equiv 1 \Rightarrow m | a - 2$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۵۳- چند عدد سه رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم پذیر باشد و نه بر ۶؟

- (۱) ۵۴۰ (۲) ۵۷۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۶۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

S: مجموعه اعداد سه رقمی B: مجموعه اعداد سه رقمی مضرب (۶) A: مجموعه اعداد سه رقمی مضرب (۵)

$$|S| = 9 \times 10 \times 10 = 900 \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 900 - \left( \left[ \frac{900}{5} \right] + \left[ \frac{900}{6} \right] - \left[ \frac{900}{30} \right] \right) =$$

$$900 - (180 + 150 - 30) = 900 - 300 = 600$$

سراسری - ریاضی - ۸۲

۵۴- از ۵۱ دانش آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده اند چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده اند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $|\overline{A \cup B}| = 51 - (35 + 31 - 23) = 51 - 43 = 8$

سراسری - ریاضی - ۸۲

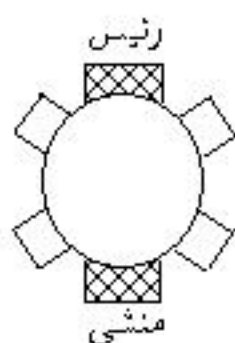
۵۵- رئیس و منشی و ۴ کارمند دور یک میزگرد می نشینند با کدام احتمال منشی مقابل رئیس فرار می گیرد؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جای رئیس و منشی را ثابت می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= (n - 1)! = 5! = 120 \\ n(A) &= 4! = 24 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

جایگشت ۴ نفر



سراسری - ریاضی - ۸۲