



درس یک، فصل اول، ریاضی گسسته، دوازدهم ریاضی

مثال نقض، استدلال استنتاجی، اثبات با حالت ها، اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)، اثبات بازگشتی.

۱. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف. مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی، بر سه بخش پذیر است.

ب. عدد $2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}$ عددی اول است.

۲. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف. مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب. برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x, y داریم $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

ج. حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی، بر ۶ بخش پذیر است. د. عدد $2^n - 1, n \in \mathbb{N}$ عددی اول است.

ه. مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست. و. برای سه مجموعه A, B, C اگر $AB = AC$ آنگاه $B = C$.

ی. اگر k حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.



۳. آیا گزاره "عدد $99n^2 + 1, n \in N$ هرگز مربع کامل نیست" همواره برقرار است؟

۴. ثابت کنید اگر $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

۵. اگر ab نشان دهید $a^2 + b^2$ زوج است.

۶. نشان دهید مجموع عددی گنگ با عددی گویا، همواره گنگ است.

یا: اگر x گنگ و y گویا باشد، ثابت کنید $x + y$ گنگ است.

۷. اگر x گنگ و $y \neq 0$ گویا باشد، ثابت کنید $x \cdot y$ گنگ است.

۸. اگر a, b, c اعداد صحیح باشند و با تغییر ترتیب بصورت x, y, z نوشته شوند، ثابت کنید

$$(a-x)(b-y)(c-z) \text{ عددی زوج است.}$$

۹. به کمک برهان خلف، ثابت کنید.

الف. اگر گنگ باشد، گنگ است.

ب. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته و تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.



۱۰. به کمک اثبات بازگشتی، ثابت کنید.

الف. $x + \frac{1}{x} \geq 2, x \in \mathbb{R}^+$ ب. $x + \frac{1}{x} \leq -2, x \in \mathbb{R}^-$

ج. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, x, y \in \mathbb{R}^+$ د. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{xy}, x, y \in \mathbb{R}$ (میانگین حسابی از میانگین هندسی، بیشتر نیست.)

ه. $a^2 + ab + b^2 \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$ و. $x^2 + y^2 + z^2 \geq x.y + y.z + z.x, x, y, z \in \mathbb{R}$

ی. $x^2 + y^2 + 1 \geq x.y + x + y, x, y \in \mathbb{R}$



۱۱. آیا رابطه $x^2 \geq x^3, x \in R$ همواره صحیح است؟

۱۲. فرض کنید x و y گنگ هستند و $x+y$ گویا است. ثابت کنید $x-y$ و $x+2y$ گنگ هستند.

۱۳. نشان دهید رابطه $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ هرگز نمی تواند درست باشد.

۱۴. درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف. مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

ب. مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

ج. میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی است.



۱۵. عاد کردن

ویژگیهای اولیه

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

$$a|b \Rightarrow a|am+b$$

$$a|b \Rightarrow a^n|b^n$$

$$a|b \Rightarrow m.a|m.b$$

$$a|b \Rightarrow |a||b|$$

$$a|b, m \leq n \Rightarrow a^m|b^n$$

$$a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$$

$$a|b, b|c \Rightarrow a|c$$

$$a|b, c|d \Rightarrow ac|bd$$

$$a|b, c|d \Rightarrow ac|bd$$

$$a|b, c|d \Rightarrow a^m c^n | b^m d^n$$

$$a|b, b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

$$a|b, a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

$$a|b, a|c, m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a|mb \pm nc$$



$$a|b, a|c, m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a|b^m \pm c^n$$

۱۶. اگر $a|7k+6, a|6k+5$ و $a \neq 0$ آنگاه ثابت کنید $a = \pm 1$.

۱۷. اگر $a|7k+6, a|9k+7$ آنگاه مقدار a را بیابید.

۱۸. اگر $a|9k+3, a|5k+2$ آنگاه مقدار a را بیابید.

۱۹. بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک و قضیه.

۲۰. ثابت کنید (برای مقادیر مثبت، قدرمطلق را بردارید).

$$a|b \Rightarrow (a, b) = |a|$$

$$a|b \Rightarrow [a, b] = |a|$$

$$(a, b)[a, b] = |a \cdot b|$$

۲۱. اگر p عدل اول باشد ثابت کنید $(p, a) = 1$ یا $(p, a) = p$.

۲۲. نشان دهید اگر p اول نباشد، ممکن است حکم تمرین قبل درست نباشد.



قضیه تقسیم

۲۳. اگر باقیمانده تقسیم a و b بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $3a+2b$ بر ۱۷ کدام است؟

۲۴. اگر باقیمانده تقسیم a و b بر ۶ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقیمانده تقسیم $2a-5b$ بر ۶ کدام است؟

۲۵. اگر باقیمانده تقسیم a و b بر ۱۳ به ترتیب ۲ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم a^2+3b بر ۱۳ کدام است؟

۲۶. اگر باقیمانده تقسیم a و b بر ۷ به ترتیب ۵ و ۲ باشد، باقیمانده تقسیم $3a+b^2$ بر ۷ کدام است؟

۲۷. اگر باقیمانده تقسیم a و b بر ۷ به ترتیب ۵ و ۲ باشد، باقیمانده تقسیم a^2-b^2+27 بر ۷ کدام است؟



۲۸. اگر $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه $a = 2k$ یا $a = 2k + 1$.

۲۹. اگر $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه $a = 3k$ یا $a = 3k + 1$ یا $a = 3k + 2$.

۳۰. اگر $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه $a = 4k$ یا $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 2$ یا $a = 4k + 3$.

۳۱. اگر $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه $a = mk$ یا $a = mk + 1$ یا ... یا $a = mk + (m - 1)$.

۳۲. ثابت کنید مربع هر عدد فرد، عددی بصورت $8k + 1$ است.

۳۳. ثابت کنید باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است.

۳۴. اگر $a > 1$ و $a | 9k + 4, a | 5k + 3$ آنگاه ثابت کنید a اول است.

۳۵. اگر $a | 9k + 7, a | 5k + 1$ آنگاه چند مقدار اول برای a وجود دارد؟



۳۶. درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید

الف. اگر $c|d, a|b$ آنگاه $a+c|b+d$.

ب. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول هستند.

۳۷. ثابت کنید هر دو عدد صحیح فرد متوالی، نسبت به هم اول هستند.

۳۸. نشان دهید هر دو عدد اول متمایز، نسبت به هم اول هستند.



۳۹. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۵۶ کدام است؟

۴۰. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۵ و ۶ به ترتیب ۲ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۳۰ کدام است؟

۴۱. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۱۱ و ۱۲ به ترتیب ۳ و ۹ باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۱۳۲ کدام است؟

۴۲. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۷ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۷۷ کدام است؟

۴۳. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۶ و ۹ به ترتیب ۲ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۵۴ کدام است؟

۴۴. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۳ و ۹ باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۶۶ کدام است؟



۴۵. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم $a^2 + 3$ بر ۵۶ کدام است؟

۴۶. اگر a باقیمانده تقسیم عدد بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم $5a + 137$ بر ۵۶ کدام است؟

۴۷. اگر $a|b+2$ و a فرد باشد، باقیمانده تقسیم $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ را بیابید.

۴۸. نشان دهید $n^3 - n$ بر ۳ بخش پذیر است.

۴۹. نشان دهید $3|n^3 - n$.

۵۰. اگر مقسوم و مقسوم علیه بر عددی بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده نیز بر آن عدد بخش پذیر است.

۵۱. ثابت کنید تفاضل مکعب های عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۵۲. نشان دهید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی بر ۶ بخش پذیر است.



۵۳. مطلوب است

الف. $([m^2, m], m^5) =$ ب. $([m^3, m^5], m^4) =$

ج. $(2m, 6m^2) =$ د. $(3m+1, 3m+2) =$

ن. $([m^2, m^5], m^3) =$ ه. $[m^7, (m^2, m^5)] =$

و. $[120, (72, 48)] =$ ی. $([60, 90], 120) =$



۵۴. هم‌نهشتی

$$a \equiv b \Leftrightarrow m \mid a - b$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b = mk$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + r, b = mk' + r$$

۵۵. کلاس های هم‌نهشتی

$$A_r = \{x : x \in \mathbb{Z}, x = mk + r\}$$

$$A_r = \{x : x \in \mathbb{Z}, x \equiv r\}$$

۵۶. ویژگی ها

$$a \equiv b \Leftrightarrow a + c \equiv b + c$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - c \equiv b - c$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a^n \equiv b^n$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a \equiv b + m \cdot c$$

$$a \equiv b, c \equiv d \Leftrightarrow a + c \equiv b + d$$

$$a \equiv b, c \equiv d \Leftrightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d$$

$$a \equiv b, c \equiv d \Leftrightarrow a^k \cdot c^n \equiv b^k \cdot d^n$$

$$a = mk + r \Rightarrow a \equiv r$$



جزوه آموزشی فصل اول ریاضی گسسته، دوازدهم ریاضی
دکتر مزبان حبیبی

۵۷. باقیمانده تقسیم $27^7 + 19$ بر ۱۳ را بیابید.

۵۸. باقیمانده تقسیم $7^{19} + 1$ بر ۷ را بیابید.

۵۹. باقیمانده تقسیم $7^{19} + 1$ بر ۱۳ را بیابید.

۶۰. باقیمانده تقسیم $7^{1399} + 1398$ بر ۷ را بیابید.

۶۱. باقیمانده تقسیم 27^{1397} بر ۵ را بیابید.

۶۲. باقیمانده تقسیم $1000^{13} \times 12 + 10$ بر ۷ را بیابید.



جزوه آموزشی فصل اول ریاضی گسسته، دوازدهم ریاضی
دکتر مزبان حبیبی

۶۳. باقیمانده تقسیم $19 + 1399^{2019}$ بر ۱۳ را بیابید.

۶۴. رقم یکان عدد $19 + 1399^{2019}$ را بیابید.

۶۵. رقم یکان عدد $1399^{2019} + 2019^{1399}$ را بیابید.

۶۶. رقم یکان عدد $0! + 1! + 2! + \dots + 1399!$ را بیابید.

۶۷. رقم یکان عدد $0! + 1! + 2! + \dots + 2019!$ را بیابید.

۶۸. باقیمانده تقسیم $0! + 1! + 2! + \dots + 1399!$ بر ۱۳ را بیابید.



۶۹. باقیمانده تقسیم $0!+1!+2!+\dots+2019!$ بر ۱۳ را بیابید.

۷۰. باقیمانده تقسیم $0!+1!+2!+\dots+1399!$ بر ۷ را بیابید.

۷۱. نشان دهید

$$ac \equiv bc, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$ac \equiv bc, (m, c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

۷۲. معادله های هم نهستی $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ برای x در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است اگر و تنها اگر

$$(a, m) | b$$

۷۳. معادله های هم نهستی زیر را حل کنید

$$3x \equiv 13 \pmod{5}$$

$$5x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$



$$51x \equiv 11 \pmod{6}$$

$$8x \equiv 20 \pmod{12}$$

$$42x \equiv 79 \pmod{11}$$

$$3x \equiv 13 \pmod{2}$$

$$3x + 5 \equiv x - 13 \pmod{7}$$

$$5x + 2 \equiv 2x - 1 \pmod{24}$$



جزوه آموزشی فصل اول ریاضی گسسته، دوازدهم ریاضی
دکتر مزبان حبیبی

تقویم نگاری

۷۴. اگر ۹ تیر، یکشنبه باشد، آنگاه ۱۲ دی ماه، چند شنبه است؟

۷۵. اگر ۲۷ خرداد، سه شنبه باشد، آنگاه ۷ اسفند ماه، چند شنبه است؟

۷۶. اگر اول مهر، پنج شنبه باشد، آنگاه ۲۲ بهمن ماه، چند شنبه است؟

۷۷. اگر ۸ آذر، دوشنبه باشد، آنگاه ۳ خرداد ماه، چند شنبه بوده است؟

۷۸. اگر ۸ اسفند، چهار شنبه باشد، آنگاه ۸ شهریور ماه، چند شنبه بوده است؟

۷۹. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، آنگاه ۳۱ مرداد ماه، چند شنبه بوده است؟

۸۰. سوم خرداد ۱۳۷۶ چند شنبه بوده است؟

۸۱. دوازده بهمن ۱۳۵۷ چند شنبه بوده است؟



۸۲. همه اعداد صحیح را تعیین کنید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشد.

۸۳. همه اعداد صحیح را تعیین کنید که پنج برابر آنها بعلاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۸۴. اگر معادله هم نهشتی $18x \equiv m^{12}$ در Z دارای جواب باشد، m کدام است؟

۸۵. اگر معادله هم نهشتی $9x \equiv 2m+1$ در Z دارای جواب باشد، m کدام است؟

۸۶. اگر معادله هم نهشتی $24x \equiv m+1$ در Z دارای جواب باشد، m کدام است؟



۸۷. معادله سیاله

۸۸. معادله سیاله $ax+by=c$ در Z دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)|b$.

۸۹. نشان دهید

$$ax+by=c \Rightarrow ax \equiv c \pmod{b}$$

$$ax+by=c \Rightarrow by \equiv c \pmod{a}$$

۹۰. معادله های سیاله زسر را حل کنید

$$3x+2y=11$$

$$30x+18y=12$$

$$3x-2y=11$$

$$2x+5y=29$$

$$5x-3y=17$$



$$7x + 5y = 1$$

$$7x + 5y = 120$$

۹۱. نکته

$$ax + by = c, (a, b) = 1, ax_0 + by_0 = c \Rightarrow \begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = -ak + y_0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$ax + by = c, (a, b) = 1, ax_0 + by_0 = c \Rightarrow \begin{cases} x = -bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

۹۲. به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را با اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی پرداخت کرد؟

۹۳. به چند طریق می توان ۳۲۰۰۰ تومان را با اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی پرداخت کرد؟

۹۴. به چند طریق می توان ۱۸۰۰ تومان را با تمبرهای ۲۰۰ و ۳۰۰ تومانی پرداخت کرد؟

۹۵. به چند طریق می توان ۳۵۰۰ تومان را با تمبرهای ۲۱۰ و ۱۴۰ تومانی پرداخت کرد؟



۹۶. چند نقطه روی خط $3x + 2y = 23$ وجود دارد که مختصات طبیعی دارند؟

۹۷. چند نقطه روی خط $5x + 3y = 23$ در ناحیه اول دارند؟

۹۸. پنج نفر به چند طریق می توانند دو نوع غذا سفارش دهند؟ (هر نفر یک نوع)

۹۹. تیراندازی حداکثر ۱۵ تیر را به اهداف ۳ و ۵ امتیازی شلیک می کند، به چند طریق می تواند ۴۲ امتیاز کسب کند؟

۱۰۰. تیراندازی حداکثر ۱۵ تیر را به اهداف ۳ و ۵ امتیازی شلیک می کند، به چند طریق می تواند ۶۱ امتیاز کسب کند؟

۱۰۱. با سکه های ۲۰ و ۵۰ ریالی به چند طریق می توان ۱۳۰۰ ریال را پرداخت کرد؟



۱.۰۲. اگر $a \equiv b^m$ و $n|m$ ، ثابت کنید $a \equiv b^n$.

۱.۰۳. اگر $a \equiv b^m, b \equiv c^n$ و $(m, n) = d$ ، ثابت کنید $a \equiv b^d$.

۱.۰۴. ثابت کنید $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$.

۱.۰۵. باقیمانده تقسیم $45^{29} - 25^{29} - 20^{29}$ را بر ۵۰۰ بیابید.

۱.۰۶. باقیمانده تقسیم $23^{31} - 12^{31} - 11^{31} + 1399$ را بر ۱۳۲ بیابید.

۱.۰۷. باقیمانده تقسیم $15^{17} - 8^{17} - 7^{17}$ را بر ۵۶ بیابید.

۱.۰۸. باقیمانده تقسیم $(2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

۱.۰۹. باقیمانده تقسیم $(2^{101} + 5) \times 7$ را بر ۱۳ بیابید.



جزوه آموزشی فصل اول ریاضی گسسته، دوازدهم ریاضی
دکتر مزبان حبیبی

۱۱۰. رقم یکان 2^{1397} کدام است؟

۱۱۱. رقم یکان 1397^{2006} کدام است؟

۱۱۲. رقم یکان $1!+2!+3!+\dots+500!$ کدام است؟

۱۱۳. با سوالات ۷ و ۹ امتیازی به چند طریق می توان ۷۳ امتیاز کسب کرد؟

۱۱۴. با سوالات ۵ و ۳ امتیازی به چند طریق می توان ۱۱۵ امتیاز کسب کرد؟

۱۱۵. با سوالات ۳ و ۷ امتیازی به چند طریق می توان ۴۱ امتیاز کسب کرد؟



جزوه آموزشی فصل اول ریاضی گسسته، دوازدهم ریاضی
دکتر مزبان حبیبی

۱۱۶. به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۱۷. به چند طریق می توان یک کیسه ۶۱ کیلویی را با وزنه های ۵ و ۷ کیلویی وزن کرد؟

۱۱۸. از بین دو نوع گل، به چند طریق می توان یک دسته گل با ۹ شاخه انتخاب کرد؟

سروزباشید
پت . . .

مزبان حبیبی