بارت اونیل

هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی

ترجمهٔ بیژن شمس، محمدرضا سلطانپور

هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی

بارت اونیل

ترجمهٔ بیژن شمس، محمدرضا سلطانپور

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۴۴۷

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۴۹

Elementary Differential Geometry
Barrett O'Neill
Academic Press, 1966

هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی
تألیف بارت اونیل
ترجمهٔ دکتر محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ دوم ۱۳۸۴
تعداد ۲۰۰۰
حروفچینی: عبدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ: دایره سفید

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

اونیل، بارت — O'Neill, barrett
هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی/ بارت اونیل؛ ترجمهٔ محمدرضا سلطانپور، بیژن شمس.ـــ تهران؛ مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
شش، ۴۶۶ ص.ـــ(مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۴۷. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۴۹).
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Elementary Differential Geometry
ISBN: 964-01-0447-7
کتابنامه: ص.
واژه‌نامه: ص.
چاپ دوم: ۱۳۸۴.
۱. هندسه دیفرانسیل. الف. سلطانپور، محمدرضا، ، مترجم. ب. شمس، بیژن، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
A۶۴۱ ۵۱۶/۳۶
کتابخانهٔ ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

فصل ۳ هندسهٔ اقلیدسی

فصل ۴ حساب دیفرانسیل روی رویه‌ها

فصل ۵ عملگرهای شکلی

فصل ۶ هندسهٔ رویه‌ها در E^3

پیشگفتار مؤلف

این کتاب شرحی است مقدماتی برهندسهٔ خمها و رویه‌ها، و برای دانشجویانی نوشته شده است که درسهای نخستین معمول حساب دیفرانسیل و انتگرال وجبر خطی را گذرانده‌اند، و هدف آن، معرفی برخی از مفاهیم اصلی هندسهٔ دیفرانسیل است.

درس سنتی هندسهٔ دیفرانسیل دورهٔ لیسانس در دهه‌های اخیر چندان تغییری نکرده است. اما بـرعکس درسطح پژوهش، هندسه دارای پیشرفتهای بسیار سریعی بـوده است، و توافق عمومی براین است کـه درس مزبور باید بـه‌صورت مناسب روز درآید. مـن کوشیده‌ام که مطالب کلاسیك را مورد مداقه قرار داده، آنهارا پیراسته و آراسته سازم، و نتایج را به شیوه‌ای کاملاً معقول و با سبك ریاضیات جدیـد به‌نگارش درآورم. امـا درهرصورت فقط هنگامی مفهوم تازه‌ای را به‌کاربرده‌ام، که درساده کردن و روشن ساختن نتایج مفید بوده است.

در فصل ۱ زبان کتاب پی‌ریزی مـی‌شود، زبانی کـه از اجـزای آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال وجبرخطی ترکیب یافته است. درفصل ۲ روش «سه‌وجهیهای متحرك» شرح داده می‌شود، که مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بـرای بررسی خمهای فضایی معرفی شده‌اند. در فصل ۳ تغییر مکانها درفضا مورد پژوهش قـرار گرفته است، و برحسب آن قابلیت انطباق خمها (و رویه‌ها) در فضا، درست به‌همان طرز قابلیت انطباق مثلثها درصفحه، تعریف شده است.

فصل ۴ احتیاج به تـوضیح خاصی دارد. ضعف اصلـی هندسهٔ دیفرانسیل کلاسیك درآن بود که فاقد تعریف مناسب برای رویه بود. در این فصل مشخص می‌کنیم کـه یك رویه چیست، ونشان می‌دهیم که هر رویه دارای یك حساب دیفرانسیل وانتگرال مخصوص به‌خود است، که دقیقاً با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنای مربوط به صفحه قابل مقایسه است. این تحلیل مقدمه‌ای را بـر مفهوم خمینهٔ دیفرانسیلپذیر فراهم می‌سازد، ایـن مفهوم درشاخه‌هایی از ریاضیات و کاربـرد آن، کـه مبتنی برحساب دیفرانسیل و انتگرال‌اند، ضروری و لازم است.

دو فصل بعد بـه هندسهٔ رویه‌ها درفضای ۳ بعدی اختصاص یـافته است. در فصل ۵ جنبه‌های شهودی و محاسباتی مورد تأکید قرار گرفته‌اند، تا برای نظریه‌ای که درفصل ۶ آمده است معنی هندسی فراهم گردد. درفصل آخر گرچه روش مـا تغییر نیافته است، اما دیدگاه به‌کلی عوض شده‌است. به‌بیان اجمالی آنکه هندسهٔ رویه را به‌صورتی که ساکنانش می‌بینند مورد بررسی قرارمی‌دهیم و به‌هیچ‌وجه فرضی در بارهٔ اینکه رویه درفضای سه‌بعدی معمولی واقع باشد نخواهیم داشت.

درهیچ شاخه‌ای از ریاضیات به انـدازهٔ هندسه صریحاً به قـوهٔ تجسم نیاز نیست. با درنظرگرفتن اهمیت این موضوع شکلهای بسیار زیادی آورده‌ایم که برای متن درس بخش مکملی را تشکیل می‌دهند. درپایان هر بند دسته‌ای از تمرینات آمـده است؛ دامنهٔ این مسائل از آزمونهای معمولی درك مطلب تا مسائل غامضتر گسترده است.

در تدریس نوشته‌هـای اولیهٔ این‌کتاب معمولاً من مطالب بنیادی فصل ۱ را سریعاً به‌پایان برده‌ام، و از وقت‌کلاس چیزی را به‌فصل ۳ (و همچنین بند ۸ فصل ۶) اختصاص نداده‌ام. یك دورهٔ هندسهٔ خمها و رویه‌ها درفضا را می‌توان از فصل ۲، فصل ۴ (باحذف بندهای ۶ و ۸)، فصل ۵ ، و فصل ۶ (با حذف بندهای ۶ و ۷) تشکیل داد. ایـن، اساساً همان محتوای درس هندسهٔ دیفـرانسیل دربـرنامهٔ سنتی دورهٔ لیسانس است کـه بـرآن توضیحاتی از مفاهیم رویه و نگاشت رویه‌ها افزوده شده است.

بندهای محذوف درفهرست بالا تنها درفصل ۷ به‌کار مـی‌روند. این فصل پایانی، شرح مفصل هندسهٔ ریمانـی دوبعدی، به‌گـونه‌ای هدف کتاب را تشکیل می‌دهد. به‌جای آنکه به‌گفتار درابعاد بالاتر بپردازم، ترجیح داده‌ام که بعد ۲ را حفظ کنم، به‌طوری‌که این دیدگاه مجرد هندسه مستقیماً از حالت خاص رویـه‌ها درفضای ۳ بعدی ظاهـر گردد. فصل ۷ طولانی است، و در دور اول می‌توان قضیهٔ ۹.۵ و بندهای ۶ و ۷ را حذف‌کرد. درفصول نخستین از کاربرد جدی نظـریهٔ معادلات دیفرانسیل قویاً اجتناب شده است؛ اما آشنایی با مبانی این موضوع، برای فصل ۷ سودبخش است.

ب. اونیل

لوس‌آنجلس، کالیفرنیا

مقدمه

برای مطالعهٔ این کتاب داشتن اطلاعات مناسبی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی و جبر خطی ضروری است. البته آنچه واقعاً مـوردنیاز می باشد آگاهـی به‌طرز استفادهٔ عملی ازاین مبادی است. به‌عنوان مثال، اغلب ازخواننده خواسته می‌شود که قاعدهٔ زنجیری مشتقگیری را به‌کار گیرد، اما به‌اثبات آن حاجت نیست.

درحساب دیفرانسیل و انتگرال عمدتاً از توابع یك یا چند متغیری با مقدار حقیقی و درجبر خطی از توابعی (تبدیلات خطی) از یك فضای برداری به فضای برداری دیگر بحث می‌شود. چون ما به‌توابعی از هر دونوع نیاز خواهیم داشت، دراینجا چند تعریف کلی را که شامل هردونوع است می‌آوریم.

یك مجموعهٔ S، عبارت است از گردایه‌ای از اشیاء کـه آنها را عناصر S می‌نامند. مجموعهٔ A را هنگامی زیرمجموعهٔ S نامند که هر عنصر A عنصری از S نیز باشد.

یك تابع f از مجموعهٔ D به مجموعهٔ R قانونی است کـه به هـرعنصر x از D به‌طور یکتا عنصر $f(x)$ از R را متناظر قرار دهد. عنصر $f(x)$ مقدار f در x نـامیده می‌شود. مجموعهٔ D را حوزهٔ f، و مجموعهٔ R را اغلب دامنهٔ f می‌نامند. هرگاه بخواهیم حوزه و دامنهٔ تابع f را تصریح کنیم، از نماد $f : D \to R$ استفاده مـی‌نماییم. تـوجه شود که تابع را تنها با یك حرف، مانند f ، نشان مـی‌دهیم و $f(x)$ تنها نمایشگر یـك مقدار f است.

برای توابع اصطلاحات گوناگونی به‌کار می‌رود ــ نگاشت، تبدیل، تناظر، عملگر، و غیره. یك تابع را می‌تـوان به‌طرق مختلفی بیان کرد. ساده‌ترین حالت، فرمول صریحی از قبیل

$$f(x) = ۳x^۲ + ۱$$

است، که می‌توان آن‌را به‌صورت $x \to ۳x^۲ + ۱$ نیز نوشت.

اگر f_1 و f_2 هر دو توابعی از D به R باشند، آنگاه تساوی $f_1 = f_2$ به‌معنای آن است که به‌ازای هر x از D داریم $f_1(x) = f_2(x)$. این نکته یک تعریف نیست، بلکه یك نتیجهٔ منطقی از تعریف تابع است.

توابع $f : D \rightarrow R$ و $g : E \rightarrow S$ را درنظر می‌گیریم. به‌طور کلی، نگارهٔ f عبارت است از زیرمجموعه‌ای از R که شامل همهٔ عناصری باشد که به‌صورت $f(x)$ نوشته می‌شوند؛ و آن‌را معمولاً با $f(D)$ نشان می‌دهند. اما تصادفاً اگر این نگارهٔ زیرمجموعه‌ای از E حوزهٔ g باشد، می‌توان این دوتابع را ترکیب کرد، و تابع مرکب $g(f) : D \rightarrow S$ را به‌دست آورد. بنابر تعریف، $g(f)$ عبارت است از تابعی که مقدار آن به‌ازای هرعنصر x از D، عنصر $g(f(x))$ از S است.

اگر $f : D \rightarrow R$ یك تابع، و A زیرمجموعه‌ای از D باشد، آنگاه تخصیص f به A عبارت خواهد بود از تابع $f|A : A \rightarrow R$ که با همان قانون f تعریف می‌شود، اما تنها به عناصر A اعمال می‌گردد. این عمل گرچه یك تغییر جزئی به‌نظر می‌آید، اما امکان دارد که توابع $f|A$ و f دارای خواص کاملاً متفاوتی باشند.

دراینجا به‌ذکر دو ویژگی اساسی، که ممکن است یك تابع دارا باشد، می‌پردازیم. تابع $f : D \rightarrow R$ هنگامی یك به‌یك است که به‌ازای هر دو عنصر x و y از D با $x \neq y$، داشته باشیم $f(x) \neq f(y)$. تابع $f : D \rightarrow R$ هنگامی پوشاست (یا D را بر روی R می‌برد) که به‌ازای هر عنصر y از R حداقل یك عنصر x از D وجود داشته باشد به‌طوری که $y = f(x)$. به‌اختصار، نگارهٔ f همهٔ مجموعهٔ R است. به‌عنوان مثال توابع زیر را که حوزه و دامنهٔ آنها اعداد حقیقی هستند درنظر می‌گیریم:

(۱) تابع $x \rightarrow x^3$ هم یك به یك و هم‌پوشاست.

(۲) تابع نمایی $x \rightarrow e^x$ یك به یك است، اما پوشا نیست.

(۳) تابع $x \rightarrow x^3 + x^2$ پوشاست، اما یك به یك نیست.

(۴) تابع سینوسی $x \rightarrow \sin x$ نه یك به یك است و نه پوشا.

اگر تابع $f : D \rightarrow R$ یك به یك و پوشا باشد، آنگاه به‌ازای هر عنصر y از R یك، وفقط یك، عنصر x وجود دارد به‌طوری که $f(x) = y$. این بستگی بین y و x را به‌صورت $x = f^{-1}(y)$ تعریف می‌کنیم، و بدینسان یك تابع $f^{-1} : R \rightarrow D$ به‌دست می‌آید، که معکوس f نامیده می‌شود. توجه شود که تابع f^{-1} نیز یك به یك وپوشاست، و تابع معکوس آن همان تابع اصلی f است.

دراینجا فهرست کوتاهی از نمادهایی را که درسراسر کتاب به‌کار رفته‌اند به‌ترتیبی که درفصل ۱ به‌آنها برمی‌خوریم می‌آوریم:

$\mathbf{p}$، $\mathbf{q}$	نقاط	(بند ۱)
f، g	توابع با مقدار حقیقی	(بند ۱)
$\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$	بردارهای مماس	(بند ۲)

V، W	میدانهای برداری	(بند ۲)
α، β	خمها	(بند ۴)
ϕ، ψ	فرمهای دیفرانسیلی	(بند ۵)
F، G	نگاشتها	(بند ۷)

درفصل ۱ این مفاهیم را برای فضای اقلیدسی ۳ بعدی تعریف می‌کنیم. (تعمیم آن به فضاهایی با ابعاد دلخـواه واقعاً بدیهی است). درفصل ۴ نشان می‌دهیم کـه چگونـه می‌توان این مفاهیم را برای رویه‌ها تطبیق داد.

چند باری به‌فهرست مختصر مآخذ و منابع که درپایان کتاب آمـده است ارجاع می‌شود، این موارد با شماره‌هایی درکروشه تعیین شده‌اند.

۱

حساب دیفرانسیل درفضای اقلیدسی

این فصل به‌معرفی مباحثی از ریاضی که در سرتاسر این کتاب بـه‌کار می‌رود می‌پردازد، و قسمت اعظم آن از حساب دیفرانسیل و انتگرال تـوابع سه متغیره و خمهای فضایی تشکیل می‌گردد. تعاریف طوری بیان شده‌اند که به‌آسانی در بررسی رویه‌ها نیز بـه‌کار خواهند رفت.

۱. فضای اقلیدسی

فضای سه‌بعدی اغلب بـدون آنکه دقیقاً تعریف شود، در ریاضیات مـورد استفاده قـرار می‌گیرد، و فضای تجربی معمولی نامیده می‌شود. اگر به گـوشهٔ اتاق نگاه کنیم، اساس روش معمول انتخاب محورهای مختصات متعامد و استفاده از سه‌عدد برای مشخص کردن موضع یك نقطه معلوم می‌گردد. هرگاه به‌جای آنکه سه‌عدد مزبور را مشخص‌کنندهٔ موضع یك نقطه درنظـر بگیریم، آن را به‌عنوان خود نقطه تصور کنیم، تعـریف دقیقتری که با مشاهدات سازگار است به‌دست می‌آید.

۱.۱. تعریف. فضای ۳ بعدی اقلیدسی $\mathbf{E}^3$ عبارت است از مجموعـهٔ همهٔ سه‌تـاییهای مرتب اعداد حقیقی. هریك از این سه‌تاییها مانند $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ را یـك نقطه از $\mathbf{E}^3$ می‌نامند.

در جبر خطی، نشان می‌دهند که $\mathbf{E}^3$ به‌طور طبیعی یك فضای برداری روی اعداد حقیقی می باشد. زیرا اگر $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ و $\mathbf{q}=(q_1, q_2, q_3)$ نقاطی از $\mathbf{E}^3$ باشند، مجموع آنها عبارت است از نقطهٔ:

$$\mathbf{p}+\mathbf{q}=(p_1+q_1, p_2+q_2, p_3+q_3)$$

حاصل‌ضرب اسکالر نقطهٔ $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ در عدد a برابر است با نقطهٔ:

$$a\mathbf{p}=(ap_1, ap_2, ap_3)$$

و به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این اعمال دراصول فضای برداری صدق می‌کنند. نقطهٔ $\mathbf{0}=(0, 0, 0)$ را مبدأ $\mathbf{E}^3$ می‌نامند.

حساب دیفرانسیل با جنبهٔ دیگری از $\mathbf{E}^3$ سروکار دارد، که با مفهوم توابع دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ آغاز می‌گردد. دراینجا به‌یادآوری کلیات آن می‌پردازیم.

۱.۲ تعریف. توابع با مقدار حقیقی x ، y و z روی $\mathbf{E}^3$ که به ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ به‌صورت

$$x(\mathbf{p})=p_1, \qquad y(\mathbf{p})=p_2, \qquad z(\mathbf{p})=p_3$$

معین می‌گردند توابع مختصاتی طبیعی $\mathbf{E}^3$ نام دارند. اغلب برای این توابع از نمادگذاری اندیسی استفاده می کنیم و می‌نویسیم:

$$x_1=x, \qquad x_2=y, \qquad x_3=z$$

بدین‌ترتیب مقدار تابع x_i به‌ازای نقطهٔ $\mathbf{p}$ عدد p_i است، و اتحاد

$$\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)=(x_1(\mathbf{p}), \ x_2(\mathbf{p}), \ x_3(\mathbf{p}))$$

به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ برقرار است. درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بین اعداد p_1 ، p_2 و p_3 و توابع x_1 ، x_2 و x_3 تمایز بارزی قائل نیستند. البته روی محور اعداد حقیقی این نکته زیاد مهم نیست، اما درمورد فضاهای با ابعاد بالاتر مانند $\mathbf{E}^3$ عدم توجه به آن شدیداً موجب ابهام می‌گردد. (اساساً همین تمایز موجب می‌شود که یك تابع روی $\mathbf{E}^3$ را با یك حرف f، و مقدار آن درنقطهٔ $\mathbf{p}$ را با $f(\mathbf{p})$ نشان دهیم.)

البته خواننده با مشتقهای جزئی و خواص اساسی آن و به‌ویژه قاعدهٔ زنجیری درمشتق توابع مرکب آشنایی دارد. سروکار ما بیشتر با مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ و $\partial f/\partial z$ و مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم $\partial^2 f/\partial x^2$ ، $\partial^2 f/\partial y^2$ ، ... ، و گاه نیز با مشتقهای مرتبه‌های بالاتر خواهد بود. برای آنکه ابهامی دربارهٔ تعداد مشتقهای لازم درهر بحث پیش نیاید تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

۳.۱ تعریف. تابع با مقدار حقیقی f روی $\mathbf{E}^3$ را دیفرانسیلپذیر (یا بینهایت بار دیفرانسیلپذیر، یا از طبقهٔ C^∞) نامند هرگاه همهٔ مشتقهای جزئی f از همهٔ مرتبه‌ها وجود داشته و پیوسته باشند.

توابع دیفرانسیلپذیر f و g با مقدار حقیقی را می‌توان باهم جمع و دریکدیگر ضرب نمود، توابع حاصل نیز دیفرانسیلپذیر و با مقدار حقیقی خواهند بود. برای این‌کار فقط مقادیر آنهارا درهر نقطه باهم جمع ویا درهم ضرب می‌کنیم:

$$(f+g)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})+g(\mathbf{p}), \qquad (fg)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})g(\mathbf{p})$$

به‌علت آنکه عبارت «تابع دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی» به‌طور ناخوشایندی طویل است، بنابراین قرار می‌گذاریم که دراین کتاب جز تصریح خلاف آن کلمهٔ «تابع» به‌معنی «تابع دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی» به‌کار رود. البته گاه نیز از لحاظ تأکید کلمه‌های «دیفرانسیلپذیر» و «با مقدار حقیقی» را می‌آوریم.

دیفرانسیلپذیری همواره یك عمل موضعی است: برای تعیین $\partial f/\partial x$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ کافی است مقادیر f درهمهٔ نقاط $\mathbf{q}$ که به‌قدر کافی به $\mathbf{p}$ نزدیك‌اند معلوم باشد. ازاین لحاظ تعریف ۳.۱ بیش‌از اندازه محدود کننده است؛ لزومی ندارد که حوزهٔ f تمام $\mathbf{E}^3$ باشد بلکه کافیی است یك مجموعهٔ باز از $\mathbf{E}^3$ باشد. مقصود از مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ از $\mathbf{E}^3$ زیرمجموعه‌ای است که اگر نقطهٔ $\mathbf{p}$ به‌آن متعلق باشد، همهٔ نقاط $\mathbf{E}^3$ که به‌قدر کافی به $\mathbf{p}$ نزدیك‌اند نیز به‌آن متعلق باشد. (تعریف دقیقتری درفصل ۲ بیان خواهد شد.) مثلاً مجموعهٔ همهٔ نقاط $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ در $\mathbf{E}^3$ به طوری که $p_1>0$، یك مجموعهٔ باز است، و تابع $yz\log x$ که روی این مجموعه معین است دیفرانسیلپذیر می‌باشد، باآنکه حوزهٔ آن همهٔ $\mathbf{E}^3$ نیست. به‌طورکلی نتایج این فصل با جایگذاری یك مجموعهٔ باز دلخواه $\mathcal{O}$ به‌جای $\mathbf{E}^3$ همچنان برقرارند.

دراینجا فضای اقلیدسی سه‌بعدی را درنظرمی‌گیریم، زیرا درفصول بعد بیشتر باآن سروکار داریم. البته می‌توان به‌آسانی فضای nبعدی اقلیدسی $\mathbf{E}^n$ را که نقاط آن nتاییهای $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_n)$ می‌باشند و دارای n تابع مختصاتی طبیعی x_1، ...، x_n است بررسی کرد. گرچه همهٔ نتایج این فصل رامی‌توان دربارهٔ فضاهای اقلیدسی با ابعاد دلخواه تعمیم داد، اما به‌ندرت ازآن استفاده خواهیم کرد، جز درحالتهای خاص صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$ و خط حقیقی $\mathbf{E}^1=\mathbf{R}$.

تمرینات

۱. توابع $f=x^2y$ و $g=y\sin z$ را روی $\mathbf{E}^3$ درنظرمی‌گیریم. توابع زیر را برحسب x، y، z بیان کنید:

(الف) fg^2 (ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}g+\dfrac{\partial g}{\partial y}f$

(ج) $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial y \partial z}$ (د) $\dfrac{\partial}{\partial y}(\sin f)$

۲. مقدار تابع $f = x^2y - y^2z$ را درهریك از نقاط زیر بیابید:

(الف) $(1, 1, 1)$ (ب) $\left(3, -1, \frac{1}{2}\right)$

(ج) $(a, 1, 1-a)$ (د) (t, t^2, t^3)

۳. $\partial f/\partial x$ را برحسب x، y و z بیان کنید اگر:

(الف) $f = x\sin(xy) + y\cos(xz)$

(ب) $f = \sin g,\ \ g = e^h,\ \ h = x^2 + y^2 + z^2$

۴. اگر g_1، g_2، g_3 و h توابع با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ باشند، دراین‌صورت:

$$f = h(g_1, g_2, g_3)$$

تابعی است که به‌ازای هر $\mathbf{p}$[1]:

$$f(\mathbf{p}) = h(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), g_3(\mathbf{p}))$$

$\partial f/\partial x$ را برحسب x، y و z بیان کنید اگر $h = x^2 - yz$ و

(الف) $f = h(x+y, y^2, x+z)$

(ب) $f = h(e^x, e^{x+y}, e^x)$

(ج) $f = h(x, -x, x)$

۲. بردارهای مماس

می‌توان هر بردار $\mathbf{E}^3$ را به صورت یك قطعه خط جهتدار یا پیکان«دار» درنظـر گرفت. درفیزیك و مکانیك از بردارها بـرای نمایش نیرو، سرعت، گشتاور زاویـه‌ای و مفاهیم بسیار دیگر استفاده می‌کنند. بـرای به‌دست دادن تعریفی کـه هم‌دقیق و هم‌عملی باشد هر بردار $\mathbf{E}^3$ رابا $\mathbf{p}$، نقطهٔ آغازآن،و $\mathbf{v}$ تغییر لازم برای رسیدن به‌پایان‌آن، $\mathbf{p}+\mathbf{v}$، مشخص می‌کنیم. $\mathbf{v}$ دقیقاً یك نقطه از $\mathbf{E}^3$ می‌باشد.

۱.۲. تعریف[2]. $\mathbf{v}_p$ بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ از دونقطهٔ $\mathbf{E}^3$ تشکیل می‌گـردد: یکی $\mathbf{p}$ نقطهٔ اثر آن و دیگری $\mathbf{v}$ قسمت برداری آن.

---

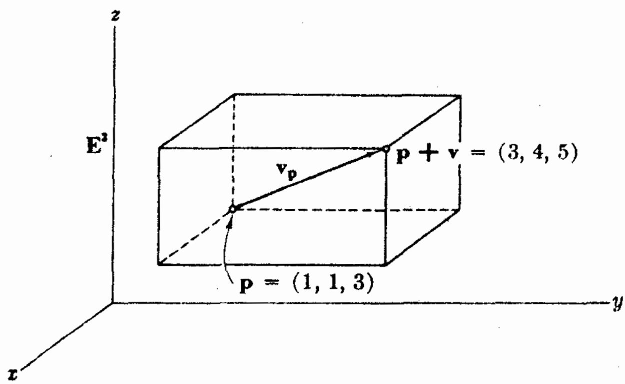
۱. یك نتیجهٔ آن اتحاد $f = f(x, y, z)$ است.

۲. تعبیر هندسی مستقیمتر اصطلاح «مماس» که دراین تعریف به‌کار رفته است درفصل ۴ روشن می‌گردد.

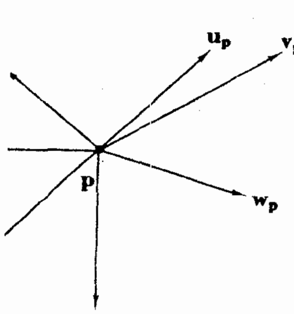
$\mathbf{v}_p$ را همواره به صورت پیکانی از نقطهٔ $\mathbf{p}$ به نقطهٔ $\mathbf{p}+\mathbf{v}$ درنظر می‌گیریم، مثلاً اگر $\mathbf{p}=(1, 1, 3)$ و $\mathbf{v}=(2, 3, 2)$ باشد، دراین صورت $\mathbf{v}_p$ چنان که درشکل ۱.۱ دیده می‌شود از $(1, 1, 3)$ به $(3, 4, 5)$ می‌رود.

تأکید می‌کنیم که شرط لازم وکافی برای آنکه دو بردار مماس باهم برابر باشند، $\mathbf{v}_p=\mathbf{w}_q$، آن است که نقطهٔ اثر آنها یکی باشد، $\mathbf{p}=\mathbf{q}$، و قسمت برداری آنها نیز برابر باشد $\mathbf{v}=\mathbf{w}$. بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ و $\mathbf{v}_q$ راکه قسمت برداری آنها یکی است، ونقاط اثر آنها متمایز است متوازی نامند (شکل ۲.۱). باید توجه داشت که به‌ازای $\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$ بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ و $\mathbf{v}_q$ باهم فرق دارند. درفیزیک، مفهوم گشتاور نیرو این نکته‌را به‌خوبی توضیح می‌دهد: اگر یك نیروی $\mathbf{v}$ را برنقاط مختلف $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ ازجسم صلبی اعمال کنیم تأثیرات دورانی مختلفی خواهد داشت.

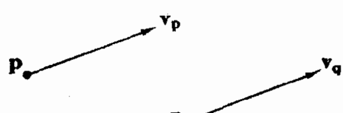
۲.۲. تعریف. نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ را درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ $T_p(\mathbf{E}^3)$ متشکل‌از همهٔ بردارهای مماس‌که نقطهٔ اثرآنها $\mathbf{p}$ است، فضای مماس بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ نام دارد (شکل ۳.۱).



شکل ۱.۱



شکل ۳.۱



شکل ۲.۱

باید توجه داشت که $\mathbf{E}^3$ درهریك‌ازنقاط خود، دارای‌فضای مماس متمایزی‌می‌باشد.

چون همهٔ بردارهـای مماس متعلق بـه یك فضای مماس دارای نقطهٔ اثـر مشترکی می‌بـاشند، می‌توان از جمع برداری و ضرب اسکالری در $\mathbf{E}^3$ استفاده‌کرد و $T_p(\mathbf{E}^3)$ را به‌صورت یك فضای برداری درآورد. توضیح آنکه $\mathbf{v}_p+\mathbf{w}_p$ را بـا $(\mathbf{v}+\mathbf{w})_p$ تعریف می‌کنیم، و به‌ازای عدد c مقدار $c(\mathbf{v}_p)$ را بـا $(c\mathbf{v})_p$ مشخص می‌کنیم. این درست همان «قانون متوازی‌الاضلاع» برای جمع بردارهاست. ضرب درعدد c بردارمماس را متناسب با c تغییر می‌دهد. اگر $c < 0$، جهت بردار عوض می‌شود (شکل ۴.۱).

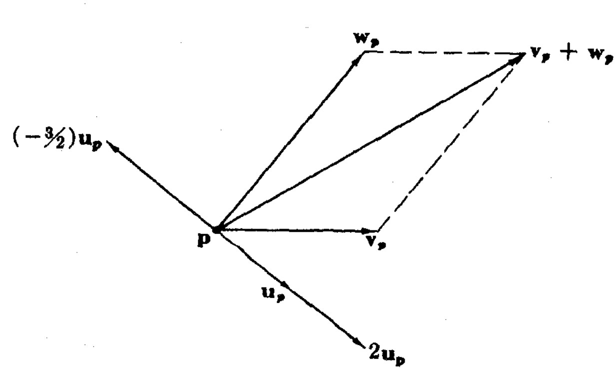
این اعمال هرفضای‌مماس $T_p(\mathbf{E}^3)$ را به‌یك فضای‌برداری‌ایزومرف (یکریخت) با $\mathbf{E}^3$ بدل می‌کنند. زیرا به‌آسانی از تعاریفی که گذشت می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای نقطهٔ ثابت $\mathbf{p}$ تابع $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_p$ یك ایزومرفیسم (یکریختی) بین $\mathbf{E}^3$ و $T_p(\mathbf{E}^3)$ بـرقرار می‌کند ــ یعنی، یك تبدیل خطی یك به‌یك و پوشا.

یکی ازمفاهیم متداول فیزیك ومکانیك مفهوم میدان نیرو است. مثلاً میدان نیروی جاذبهٔ زمین به‌هر نقطه ازفضا نیرویی (برداری) متوجه به‌مرکز زمین وابسته می‌کند.

۳.۲. تعریف. میدان برداری V روی $\mathbf{E}^3$ تابعی است که بـه هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ یك بردار $V(\mathbf{p})$ مماس بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ متناظر قرار می‌دهد.

به‌بیان اجمالی، هرمیدان برداری از یك گردایهٔ بزرگ پیکان تشکیل می‌شود، به‌طوری که درهرنقطه $\mathbf{E}^3$ یك پیکان موجود باشد.

به‌طورطبیعی می‌توان ازمیدانهای برداری یك جبر ساخت. برای این منظور نخست به‌یادآوری جمع توابع بـا مقدار حقیقی f و g می‌پردازیم (توابع f و g را می‌توان با هم جمع کرد، زیرا جمع کردن مقادیر آنها بـه‌ازای هـر نقطه امکان دارد. همین نکته دربارهٔ میدانهای برداری V و W نیز صادق است. بـه‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$، مقادیر $V(\mathbf{p})$ و $W(\mathbf{p})$ به‌یك فضای‌برداری، $T_p(\mathbf{E}^3)$، متعلق‌اند. بنابراین‌می‌توان $V(\mathbf{p})$ و $W(\mathbf{p})$ را باهم



شکل ۴.۱

جمع و ازآنجا جمع بین V و W را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$(V+W)(\mathbf{p})=V(\mathbf{p})+W(\mathbf{p})$$

این طرح که مکرر بـا آن سروکار خواهیم داشت بـه‌اصل نقطه‌ای موسوم است؛ اگر بتوان عملی را روی مقادیر دو تابع درهر نقطه انجام داد: می‌توان آن را دربـارهٔ خود توابع تعمیم داد.

مثلاً با استفاده از اصل نقطه‌ای عمل ضرب در اسکالر (روی فضاهای مماس $\mathbf{E}^3$) را تعمیم می‌دهیم. اگر f تابعی با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ و V یك میدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین صورت fV، بنابر تعریف،عبارت است ازمیدانِ برداری روی $\mathbf{E}^3$ به طوری که به‌ازای هر $\mathbf{p}$:

$$(fV)(\mathbf{p})=f(\mathbf{p})V(\mathbf{p})$$

اکنون روشی عملی برای شناسایی میدانهای برداری به‌دست می‌دهیم، وبدین‌منظور سه میدان برداری خاص را، که به‌عنوان «پایه» برای همهٔ میدانهای برداری به‌کارمی‌روند، معرفی می کنیم.

۴.۲ تعریف. میدانهای برداری U_1، U_2 و U_3 را روی $\mathbf{E}^3$ به‌صورت

$$U_1(\mathbf{p})=(1, 0, 0)_p$$
$$U_2(\mathbf{p})=(0, 1, 0)_p$$
$$U_3(\mathbf{p})=(0, 0, 1)_p$$

به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ درنظر می گیریم (شکل ۵.۱). U_1، U_2 و U_3 را توأماً میدان سه‌وجهی طبیعی روی $\mathbf{E}^3$ می نامیم.

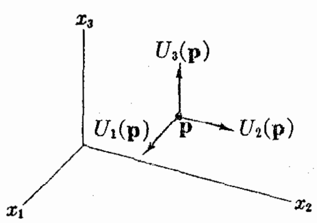
بدین‌ترتیب U_i $(i=1, 2, 3)$ میدان برداری یکه درجهت مثبت x_i می‌باشد.

۵.۲ لم. اگر V یك میدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشد، سه تابع بـا مقادیر حقیقی v_1، v_2 و v_3 به‌طور یکتا روی $\mathbf{E}^3$ وجود دارد به‌طوری که:

$$V=v_1U_1+v_2U_2+v_3U_3$$

توابع v_1، v_2 و v_3 را توابع مختصاتی اقلیدسی V می نامند.

برهان. بنابرتعریف، میدان برداری V به هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ یك بردار مماس $V(\mathbf{p})$ در $\mathbf{p}$ متناظر قرارمی‌دهد. ازاین‌رو قسمت برداری $V(\mathbf{p})$ به $\mathbf{p}$ بستگی دارد، ومی‌توان آن را به‌صورت $(v_1(\mathbf{p}),v_2(\mathbf{p}),v_3(\mathbf{p}))$



شکل ۵.۱

نوشت. (با این عمل v_1، v_2 و v_3 به عنوان توابعی با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ تعریف می گردند). بنابراین بهازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ داریم:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}) &= (v_1(\mathbf{p}), v_2(\mathbf{p}), v_3(\mathbf{p}))_p \\ &= v_1(\mathbf{p})(1, 0, 0)_p + v_2(\mathbf{p})(0, 1, 0)_p + v_3(\mathbf{p})(0, 0, 1)_p \\ &= v_1(\mathbf{p})U_1(\mathbf{p}) + v_2(\mathbf{p})U_2(\mathbf{p}) + v_3(\mathbf{p})U_3(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

وبنا برتعریف (اصل نقطهای)، میدانهای برداری V و $\sum v_iU_i$ درهر نقطه دارای یك مقدار (بردار مماس) می باشند. بنابراین:

$$V = \sum v_iU_i \qquad \blacksquare$$

در جملهٔ اخیر از دو قرارداد متداول استفاده شده است: $\sum v_iU_i$ مجموع بهازای $i = 1, 2, 3$ را نشان میدهد، ونماد هالموس ($\blacksquare$) مبین پایان برهان است.

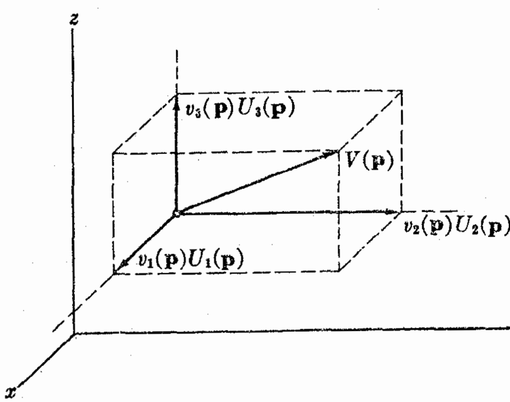
اتحاد بردارمماسی $(a_1, a_2, a_3)_p = \sum a_iU_i(\mathbf{p})$ که دراین برهان ظاهر شد، بسیار زیاد بهکار خواهد رفت.

محاسبات متضمن میدانهای برداری را همواره میتوان برحسب توابع مختصاتی اقلیدسی آنها انجام داد. مثلاً، جمع وضرب دریك تابع برحسب مختصات بهصورت زیر بیان میشود:

$$\sum v_iU_i + \sum w_iU_i = \sum (v_i + w_i)U_i$$

$$f(\sum v_iU_i) = \sum (fv_i)U_i$$

چون موضوع بحث حساب دیفرانسیل است، طبعاً باید اشیاء مختلفی راکه با آنها سروکار



شکل ۶.۱

. داریم، دیفرانسیلپذیر فرض کنیم. میدان برداری V را دیفرانسیلپذیر نامند اگر توابع مختصاتی اقلیدسی آن دیفرانسیلپذیر (به مفهوم تعریف ۳.۱) باشند. از اینجا به بعد، مراد از «میدان برداری» همان «میدان برداری دیفرانسیلپذیر» است.

تمرینات

۱. گیریم $\mathbf{v}=(-۲, ۱, -۱)$ و $\mathbf{w}=(۰, ۱, ۳)$.

(الف) درنقطهٔ دلخواه $\mathbf{p}$، بردار مماس $۳\mathbf{v}_p - ۲\mathbf{w}_p$ را به صورت ترکیب خطی از $U_۱(\mathbf{p})$، $U_۲(\mathbf{p})$ و $U_۳(\mathbf{p})$ بنویسید.

(ب) به‌ازای $\mathbf{p}=(۱, ۱, ۰)$، چهار بردار زیر را دقیقاً نمایش دهید:

$$\mathbf{v}_p,\ \mathbf{w}_p,\ -۲\mathbf{v}_p,\ \mathbf{v}_p+\mathbf{w}_p$$

۲. گیریم $V=xU_۱+yU_۲$ و $W=۲x^۲U_۲-U_۳$. میدان برداری $W-xV$ را محاسبه کنید، ومقدار آن را درنقطهٔ $\mathbf{p}=(-۱, ۰, ۲)$ بیابید.

۳. هریك ازمیدانهای برداری زیر را به‌صورت متعارف $\sum v_iU_i$ بنویسید:

(الف) $۲z^۲U_۱=۷V+xyU_۳$

(ب) به‌ازای هر $\mathbf{p}$ $\qquad V(\mathbf{p})=(p_۱, p_۳-p_۱, ۰)_p$

(ج) $V=۲(xU_۱+yU_۲)-x(U_۱-y^۲U_۳)$

(د) درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$، $V(\mathbf{p})$ برداری از نقطهٔ $(p_۱, p_۲, p_۳)$ به‌نقطهٔ $(۱+p_۱, p_۲p_۳, p_۲)$ است.

(ه) درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$، $V(\mathbf{p})$ برداری از $\mathbf{p}$ به‌مبدأ است.

۴. اگر $V=y^۲U_۱-x^۲U_۳$ و $W=x^۲U_۱-zU_۲$، توابع f و g را طوری بیابید که میدان برداری $fV+gW$ را بتوان فقط برحسب $U_۲$ و $U_۳$ بیان کرد.

۵. گیریم $V_۱=U_۱-xU_۳$، $V_۲=U_۲$ و $V_۳=xU_۱+U_۳$.

(الف) ثابت کنید که بردارهای $V_۱(\mathbf{p})$، $V_۲(\mathbf{p})$ و $V_۳(\mathbf{p})$ در هرنقطه از $\mathbf{E}^۳$ دارای استقلال خطی‌اند.

(ب) میدان برداری $xU_۱+yU_۲+zU_۳$ را به صورت یك ترکیب خطی از $V_۱$، $V_۲$ و $V_۳$ بیان کنید.

۳. مشتقهای امتدادی

به‌هر بردار مماس $\mathbf{v}_p$ بر $\mathbf{E}^۳$، خط راست $t \to \mathbf{p}+t\mathbf{v}$ متناظر قرارمی‌گیرد (به مثال ۲.۴ رجوع شود). اگر f یك تابع دیفرانسیلپذیر روی $\mathbf{E}^۳$ باشد، آنگاه $t \to f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$

یك تابع دیفرانسیلپذیر معمولی روی خط حقیقی می‌باشد. روشن است که مشتق این تابع در $t=0$ میزان تغییر آغازی f را به‌ازای حرکت $\mathbf{p}$ درامتداد $\mathbf{v}$ نشان می‌دهد.

۱.۳. تعریف. اگر f تابع دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ و $\mathbf{v}_p$ یك بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه عدد:

$$\mathbf{v}_p[f]=\frac{d}{dt}(f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}))|_{t=0}$$

را مشتق f نسبت به $\mathbf{v}_p$ می‌نامند.

درحساب دیفرانسیل مقدماتی این تعریف همراه باقید یکه بودن $\mathbf{v}_p$ مطرح می‌گردد. باآنکه ما این قید را درنظر نمی‌گیریم، با وجود این $\mathbf{v}_p[f]$ را مشتق امتدادی می‌نامیم.

بـه عنوان مثال بـه محاسبـهٔ $\mathbf{v}_p[f]$ کـه درآن $f=x^2yz$ ، $\mathbf{p}=(1, 1, 0)$ و $\mathbf{v}=(1, 0, -3)$ ، می‌پردازیم. پس

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(1, 1, 0)+t(1, 0, -3)=(1+t, 1, -3t)$$

خط مار از $\mathbf{p}$ درامتداد $\mathbf{v}$ را نشان می‌دهد. از محاسبهٔ f درطول این خط به‌دست می‌آید:

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=(1+t)^2\cdot 1\cdot(-3t)=-3t-6t^2-3t^3$$

از آنجا:

$$\frac{d}{dt}(f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}))=-3-12t-9t^2$$

بنابراین در $t=0$ داریم $\mathbf{v}_p[f]=-3$. بدین‌ترتیب، تابع f درآغاز با حـرکت $\mathbf{p}$ درامتداد $\mathbf{v}$ نزول می‌کند.

لم زیر محاسبهٔ $\mathbf{v}_p[f]$ را به‌طـورکلی برحسب مشتقهای جزئی f در نقطهٔ $\mathbf{p}$ نشان می‌دهد.

۲.۳. لم. اگر $\mathbf{v}_p=(v_1, v_2, v_3)_p$ یك بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه:

$$\mathbf{v}_p[f]=\sum v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

برهان. گیریم $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ ، دراین‌صورت:

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(p_1+tv_1, p_2+tv_2, p_3+tv_3)$$

با استفاده از مشتق توابع مرکب به محاسبهٔ مشتق تابع:

$$f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=f(p_1+tv_1,\ p_2+tv_2,\ p_3+tv_3)$$

درنقطهٔ $t=0$ می‌پردازیم. چون:

$$\frac{d}{dt}(p_i+tv_i)=v_i$$

خواهیم داشت:

$$\mathbf{v}_p[f]=\frac{d}{dt}(f(\mathbf{p}+t\mathbf{v}))|_{t=0}=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})v_i \qquad \blacksquare$$

با استفاده از این لم $\mathbf{v}_p[f]$ را درمورد مثال بالا مجدداً محاسبه می‌کنیم. چون $f=x^2yz$، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xyz,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2z,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x^2y$$

بنابراین درنقطهٔ $\mathbf{p}=(1,1,0)$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})=1$$

و بنا برهمین لم داریم:

$$\mathbf{v}_p[f]=0+0+(-3)1=-3$$

که همان مقداری است که در بالا به‌دست آمده بود.

خواص اساسی این مفهوم مشتق درقضیهٔ ۳.۳ بیان می‌شود.

۳.۳. قضیه. توابع f و g روی $\mathbf{E}^3$ وبردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ و $\mathbf{w}_p$ واعداد a و b را درنظر می گیریم. دراین‌صورت:

$$(a\mathbf{v}_p+b\mathbf{w}_p)[f]=a\mathbf{v}_p[f]+b\mathbf{w}_p[f] \tag{1}$$

$$\mathbf{v}_p[af+bg]=a\mathbf{v}_p[f]+b\mathbf{v}_p[g] \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_p[fg]=\mathbf{v}_p[f]\cdot g(\mathbf{p})+f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}_p[g] \tag{3}$$

برهان. این هرسه ویژگی را می‌توان به‌آسانی از لم بالا نتیجه گرفت. به‌عنوان مثال به‌اثبات (۳) می‌پردازیم. بنابر همین لم، اگر $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$، آنگاه:

$$\mathbf{v}_p[fg]=\sum v_i\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

اما:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g+f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_p[fg] &= \sum v_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\cdot g(\mathbf{p})+f(\mathbf{p})\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right)\\ &= \left(\sum v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right)g(\mathbf{p})+f(\mathbf{p})\left(\sum v_i\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right)\\ &= \mathbf{v}_p[f]\cdot g(\mathbf{p})+f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}_p[g]\end{aligned}$$ ∎

دو ویژگی اول قضیه را می‌توان به‌اختصار با خطی بودن $\mathbf{v}_p[f]$ برحسب $\mathbf{v}_p$ و f بیان کرد. ویژگی سوم چنان‌که ازبرهان برمی‌آید اساساً همان فرمول لایبنیتز دربارهٔ مشتق حاصل‌ضرب می‌باشد. به‌طورکلی هرمشتق‌گیری باید خواص خطی ولایبنیتزی را دارا باشد.

اکنون با استفاده از اصل نقطه‌ای به‌تعریف عمل یك میدان برداری V روی تابع f می‌پردازیم. نتیجهٔ این عمل، یك تابع با مقدار حقیقی $V[f]$ خواهد بود، که به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ مقدار آن عدد $V(\mathbf{p})[f]$ یعنی‌مشتق f برحسب بردار مماس $V(\mathbf{p})$ در $\mathbf{p}$ است. این عمل درست مشابه تعریف توابع مشتق روی خط حقیقی است، دراین مورد نخست مشتق f دریك نقطه تعریف می‌گردد و سپس تابع مشتق df/dx به‌عنوان تابعی که درهرنقطه مقدار آن با مشتق مزبور در این نقطه برابر است معرفی می‌شود. به‌ویژه اگر U_1، U_2، و U_3 میدان سه‌وجهی معمولی روی $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت بنابر لم ۲.۳ داریم $U_i[f]=\partial f/\partial x_i$. مثلاً به‌ازای $U_1(\mathbf{p})=(1, 0, 0)_p$ داریم:

$$U_1(\mathbf{p})[f]=\frac{d}{dt}(f(p_1+t, p_2, p_3))|_{t=0}$$

که درست همان تعریف $(\partial f/\partial x_1)(\mathbf{p})$ می‌باشد. چون این تساوی به‌ازای همهٔ نقاط $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که $U_1[f]=\partial f/\partial x_1$.

مشتق امتدادی بیشتر دربررسی میدانهای برداری ـ تا دربارهٔ یك بردار مماس تنها ـ به‌کار می‌رود.

۴.۳ فرع. اگر V و W میدانهای برداری روی $\mathbf{E}^3$، و f، g و h توابع با مقادیر حقیقی باشند، آنگاه:

(۱) $(fV+gW)[h]=fV[h]+gW[h]$

(۲) $V[af+bg]=aV[f]+bV[g]$ به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی a و b

$$V[fg]=V[f]\cdot g+fV[g] \tag{۳}$$

برهان. با استفاده از اصل نقطه‌ای این خواص از قضیهٔ ۳.۳ نتیجه مـی‌شوند، و تنها باید نسبت به‌وضع پرانتزها دقت شود. به عنوان مثال به‌اثبات فرمول سوم مـی‌پردازیم. بنا بر تعریف، مقدار $V[fg]$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ برابر با $V(\mathbf{p})[fg]$ است. با توجه به‌قضیهٔ ۳.۳ داریم:

$$\begin{aligned}V(\mathbf{p})[f]\cdot g(\mathbf{p})+f(\mathbf{p})V(\mathbf{p})[g]&=V[f](\mathbf{p})\cdot g(\mathbf{p})+f(\mathbf{p})V[g](\mathbf{p})\\&=(V[f]\cdot g+f\cdot V[g])(\mathbf{p})\end{aligned}$$ ∎

اگر چنین به‌نظر می‌آید که دراینجا در به‌کار بردن پرانتزها زیاده‌روی شده است، یادآوری می‌کنیم که هر برهان دقیق برای فرمول لایبنیتز:

$$\frac{d}{dx}(fg)=\frac{df}{dx}\cdot g+f\cdot\frac{dg}{dx}$$

باید دقیقاً شامل همین تغییر جای پرانتزها باشد.

باید توجه داشت که درخطی بودن $V[f]$ بـرحسب V و f در فرمول اول نتیجهٔ ۴.۳ توابع بـه‌عنوان «اسکالرها» درنظر گـرفته می‌شوند، و درفـرمول دوم فقط اعـداد «اسکالرها» می‌باشند. این‌مطلب ناشی از آن است که fV ضرب معمولی است درصورتی که $V[f]$ مشتقگیری می‌باشد.

محاسبات با استفاده از اتحاد $U_i[f]=\partial f/\partial x_i$ به‌سادگی انجام می‌گیرند، مثلاً اگر $V=xU_1-y^2U_3$ و $f=x^2y+z^3$، آنگاه:

$$\begin{aligned}V[f]&=xU_1[x^2y]+xU_1[z^3]-y^2U_3[x^2y]-y^2U_3[z^3]\\&=x(2xy)+0-0-y^2(3z^2)=2x^2y-3y^2z^2\end{aligned}$$

۵.۳ تبصره. برای سادگی از اینجا به‌بعد برای نمایش بردار مماس $\mathbf{v}_p$ از اندیس آن $\mathbf{p}$ صرفنظر می‌کنیم، و چون نقاط $\mathbf{E}^3$ را با $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ و بـردارهای مماس را با $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ نمایش می‌دهیم ابهامی پیش نمی‌آید. در مواردی (همانند تعریف ۱.۳) کـه توجه به نقطهٔ اثـر ضروری است، مجدداً از علامت $\mathbf{v}_p$ یا جملهٔ «بردار مماس $\mathbf{v}$ بـر $\mathbf{E}^3$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$» استفاده می‌کنیم.

تمرینات

۱. گیریم $\mathbf{v}_p$ بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ باشد به‌طوری که:

$$\mathbf{v}=(2,\ -1,\ 3),\qquad \mathbf{p}=(2,\ 0,\ -1)$$

مستقیماً با استفاده از تعریف، مشتق امتدادی $\mathbf{v}_p[f]$ را درحالتهای زیر بیابید:

(الف) $f=y^2z$ (ب) $f=x^7$ (ج) $f=e^x\cos y$

۲. مشتقهای امتدادی تمرین ۱ را با استفاده از لم ۲.۳ محاسبه کنید.

۳. گیریم $V=y^2U_1-xU_3$ و $f=xy$ و $g=z^3$. توابع زیر را حساب کنید:

(الف) $V[f]$ (ج) $V[fg]$ (ه) $V[f^2+g^2]$

(ب) $V[g]$ (د) $fV[g]-gV[f]$ (و) $V[V[f]]$

۴. اتحاد $V=\sum V[x_i]U_i$ را که درآن x_1 ، x_2 و x_3 توابع مختصاتی طبیعی‌اند ثابت کنید. (راهنمایی: $V=\sum v_iU_i$ را در x_i ارزیابی کنید.)

۵. گر $V[f]=W[f]$ به‌ازای هر تابع f روی $\mathbf{E}^3$ برقرار باشد، ثابت کنید که $V=W$.

۴. خم در $\mathbf{E}^3$

گیریم I فاصلهٔ بازی برخط حقیقی R باشد. مقصود از فاصله دراینجا نه‌تنها فواصل باز معمولی $a<t<b$ و (b, a اعداد حقیقی) است، بلکه شامل انواع $a<t$ (نیمخطی تا $+\infty$)، $t<b$ (نیمخطی تا $-\infty$) ونیز همهٔ خط حقیقی می‌باشد.

یك خم در $\mathbf{E}^3$ رامی‌توان به‌صورت مسیر نقطهٔ متحرك α تجسم کرد. درهر «لحظهٔ» t واقع دریك فاصلهٔ باز، α درنقطهٔ:

$$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t))$$

در $\mathbf{E}^3$ قرار دارد. به‌عبارت دقیقتر، α تابعی است از I به $\mathbf{E}^3$ ، و توابع با مقدار حقیقی α_1 ، α_2 و α_3 توابع مختصاتی اقلیدسی آن می‌باشند. از این‌رو می‌نویسیم $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$، و این بدان‌معنی است که به‌ازای هر t از فاصلهٔ I داریم:

$$\alpha(t)=(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t))$$

تابع α را هنگامی دیفرانسیلپذیر نامندکه توابع مختصاتی آن به‌مفهوم معمولی دیفرانسیلپذیر باشند.

۱.۴. تعریف. هر خم در $\mathbf{E}^3$ عبارت است از یك تابع دیفرانسیلپذیر $\alpha: I\to\mathbf{E}^3$ از فاصلهٔ باز I در $\mathbf{E}^3$.

دراینجا چندخم به‌عنوان مثال می‌آوریم، که درفصل دوم برای بررسی نتایج هندسهٔ خمها به‌کار خواهند رفت.

۲.۴. مثال

(۱) **خط راست.** خط راست ساده‌ترین خم درفضای اقلیدسی است، توابع مختصاتی

آن توابعی خطی‌اند (به‌معنی: $t \to at+b$ ، نه به‌معنی همگن آن $t \to at$). به‌عبارت روشنتر خم:

$$\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{E}^3$$

که درآن:

$$\alpha(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{q}=(p_1+tq_1,\ p_2+tq_2,\ p_3+tq_3) \qquad (\mathbf{q}\neq 0)$$

خط راستی است که از نقطهٔ $\mathbf{p}=\alpha(0)$ در راستای $\mathbf{q}$ می‌گذرد.

(۲) مارپیچ. خم $t \to (a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$ درصفحهٔ xy از $\mathbf{E}^3$ یک دایره به‌شعاع $a>0$ را می‌پیماید. اگر این خم با شیب ثابتی به‌بالا (یا به‌پایین) برود مارپیچ $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{E}^3$ به‌معادلهٔ:

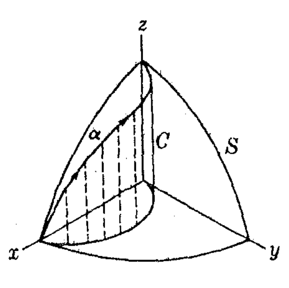
$$\alpha(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

به‌دست می‌آید که درآن $a>0$ ، $b\neq 0$. (ما همواره اصطلاح مارپیچ را به‌معنی مارپیچ مستدیر قائم به‌کار می‌بریم) (شکل ۷.۱).

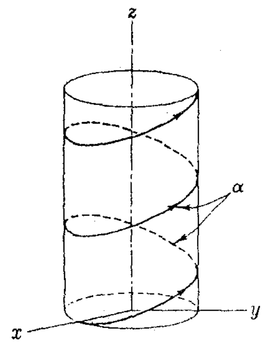
(۳) گیریم:

$$\alpha(t)=(2\cos^2 t,\ \sin 2t,\ 2\sin t) \qquad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

این خم دارای ویژگی جالبی است: گیریم C استوانه‌ای در $\mathbf{E}^3$ باشد که روی دایرهٔ به‌مرکز $(1,0,0)$ و به‌شعاع ۱ ساخته شده است. دراین‌صورت خم α مسیری را می‌پیماید که از تقاطع کرهٔ S به‌مرکز مبدأ و شعاع ۲ با C ایجاد شده است (شکل ۸.۱).



شکل ۸.۱



شکل ۷.۱

(۴) خم $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{E}^۳$ به‌طوری که:

$$\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{۲}\, t)$$

همان ویژگی مارپیچ مثال (۲) را دارد یعنی با یك نسبت ثابت بالا می‌رود. اما دربالای هذلولی $xy = ۱$ (درصفحهٔ xy) واقع است.

(۵) خم $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{E}^۳$ که در آن:

$$\alpha(t) = (۳t - t^۳,\ ۳t^۲,\ ۳t + t^۳)$$

اگر توابع مختصاتي خمی نسبتاً ساده باشند می‌توان تجسمی ازشکل آن‌را در $\mathbf{E}^۳$، حداقل به‌طور تقریبی، مثلاً به‌روش نقطه‌یابی، به‌دست آورد. از این خم می‌توان تصویر مناسبی به‌ازای $۰ \leqslant t \leqslant ۱$ با محاسبهٔ $\alpha(t)$ به‌ازای $t = ۰, ۱/۱۰, ۱/۲, ۹/۱۰, ۱$ به‌دست آورد.

اگر خم α در $\mathbf{E}^۳$ را به‌صورت مسیر یك نقطهٔ متحرك تجسم کنیم دراین صورت درهرلحظه یك بردار مماس درنقطهٔ $\alpha(t)$ موجود است که سرعت لحظه‌ای متحرك را درنقطهٔ α و درلحظهٔ t مشخص می‌کند.

۳.۴. تعریف. گیریم $\alpha : I \to \mathbf{E}^۳$ خمی در $\mathbf{E}^۳$ با $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$ باشد. به‌ازای هر عدد t در I بردار سرعت α درلحظهٔ t همان بردار مماس:

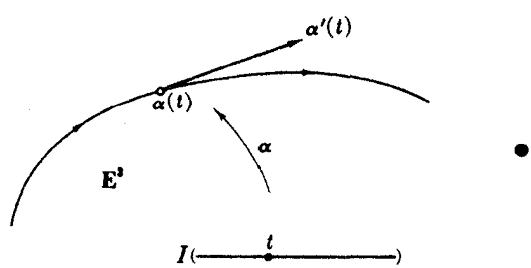
$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_۱}{dt}(t),\ \ \frac{d\alpha_۲}{dt}(t),\ \ \frac{d\alpha_۳}{dt}(t)\right)_{\alpha(t)}$$

درنقطهٔ $\alpha(t)$ می‌باشد (شکل ۹.۱).

تعبیر هندسی این تعریف به‌قرار زیر است. مشتق یك تابع با مقدار حقیقی f روی $\mathbf{R}$ نسبت به t چنین است

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

هرگاه به‌جای تابع f خم $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$ گذاشته شود بازهم این‌فرمول به‌قوت خود



شکل ۹.۱

باقی می‌ماند. زیرا:

$$\frac{1}{\Delta t}(\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t))=$$

$$\left(\frac{\alpha_1(t+\Delta t)-\alpha_1(t)}{\Delta t},\ \frac{\alpha_2(t+\Delta t)-\alpha_2(t)}{\Delta t},\ \frac{\alpha_3(t+\Delta t)-\alpha_3(t)}{\Delta t}\right)$$

که برداری از $\alpha(t)$ به $\alpha(t+\Delta t)$ با ضریب اسکالر $1/\Delta t$ می‌باشد (شکل ۱۰۰۱).

اما هنگامی که Δt بسیار کوچك شود $\alpha(t+\Delta t)$ به $\alpha(t)$ نزدیك می‌شود و در حد همین‌که $\Delta t \to 0$، بردار مماس بر خم α در نقطه $\alpha(t)$ به‌صورت

$$(d\alpha_1/dt(t)\ ,\ d\alpha_2/dt(t)\ ,\ d\alpha_3/dt(t))$$

به‌دست می‌آید، و همان‌طور که درشکل دیده می‌شود نقطهٔ اثر این بردار نقطهٔ $\alpha(t)$ می‌باشد. ازاین‌رو عمل حدی مشتقگیری معمولی به‌تعریف سرعت یك خم منجر می‌شود.

اگر از اتحاد

$$(v_1, v_2, v_3)_p=\sum v_i U_i(\mathbf{p})$$

برای سرعت $\alpha'(t)$ درلحظهٔ t استفاده‌کنیم، فرمول دیگر

$$\alpha'(t)=\sum\frac{d\alpha_i}{dt}(t)U_i(\alpha(t))$$

به‌دست می‌آید.

مثلاً بردار سرعت خط راست $\alpha(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{q}$ برابر است با:

$$\alpha'(t)=(q_1, q_2, q_3)_{\alpha(t)}=\mathbf{q}_{\alpha(t)}$$

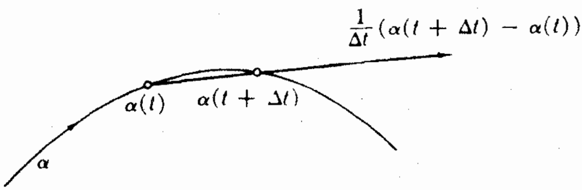
مستقیم بودن خط از توازی بردارهای مماس آن معلوم می‌شود. با تغییر t، تنها نقطهٔ اثر آن تغییر می‌کند.

دربارهٔ مارپیچ:

$$\alpha(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

بردار سرعت عبارت است از:

$$\alpha'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)_{\alpha(t)}$$



شکل ۱۰۰۱

ثابت بودن مختص z بردار $\alpha'(t)$ نمایشگر آن است که مارپیچ به‌میزان ثابتی بالا می‌رود.

از خم مفروض α می‌توان خمهای دیگری، که همان مسیر α را می‌پیمایند و فقط سرعت آنها متفاوت است، به‌دست آورد.

۴.۴. تعریف. گیریم I و J فاصله‌های بازی برخط حقیقی $\mathbf{R}$ باشند و $\alpha: I \rightarrow \mathbf{E}^3$ یك خم و $h: J \rightarrow I$ یك تابع (حقیقی) دیفرانسیلپذیز باشد. دراین صورت تابع مرکب:

$$\beta = \alpha(h): J \rightarrow \mathbf{E}^3$$

خمی است که از تعویض پارامتر α به‌وسیلهٔ h به‌دست آمده است.

درهر لحظهٔ s متعلق به‌فاصلهٔ J خم β در نقطهٔ $\beta(s) = \alpha(h(s))$ است، که همان نقطهٔ خم α در لحظهٔ $h(s)$ متعلق بـه فاصلهٔ I می‌باشد (شکل ۱۱۰۱). عملاً مختصات β به‌سادگی با قراردادن $t = h(s)$ در مختصات $\alpha_1(t)$، $\alpha_2(t)$ و $\alpha_3(t)$ از خم α به‌دست می‌آید. مثلاً گیریم بـه‌ازای $I: 0 < t < 4$، $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$. اگر قرار دهیم $h(s) = s^2$ به‌ازای $J: 0 < s < 2$، دراین صورت:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1 - s^2)$$

بنابراین خم $\beta: J \rightarrow \mathbf{E}^3$ به‌وسیلهٔ تعویض پـارامتر h از خم $\alpha: I \rightarrow \mathbf{E}^3$ به‌دست آمده است.

لم زیر رابطهٔ سرعت وتعویض پارامتر را بیان می‌کند:

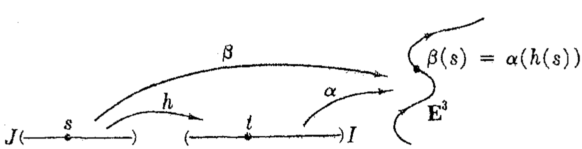
۵.۴. لم. اگر β ازتعویض پارامتر خم α به‌وسیلهٔ h به‌دست آمده باشد، دراین صورت داریم:

$$\beta'(s) = \left(\frac{dh}{ds}\right)(s)\alpha'(h(s))$$

برهان. اگر $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$، آنگاه:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s)))$$

با استفاده ازقانون مشتق توابع مرکب برای‌توابع f و g داریم: $(g(f))' = g'(f) \cdot f'$



شکل ۱۱۰۱

که برای مسألهٔ مورد نظر ما خواهیم داشت:

$$\alpha_i(h)'(s)=\alpha_i'(h(s))\cdot h'(s)$$

و بنا بر تعریف سرعت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\beta'(s)&=\alpha(h)'(s)\\&=(\alpha_1'(h(s))\cdot h'(s),\ \alpha_2'(h(s))\cdot h'(s),\ \alpha_3'(h(s))\cdot h'(s))\\&=h'(s)\alpha'(h(s))\end{aligned}$$

∎

بنابراین لم، برای تعیین سرعت خمی که از تعویض پارامتر خم α به‌وسیلهٔ h به‌دست آمده است باید نخست در α' بـه وسیلهٔ h تعویض پارامتر نمود وسپس آن را درمشتق h ضرب کرد.

ازآنجاکه سرعت، یك بردار مماس است می‌توان مشتق توابع را برحسب سرعت محاسبه کرد.

۶.۴ لم. گیریم α خمی در $\mathbf{E}^3$ و f تابع دیفرانسیلپذیری روی $\mathbf{E}^3$ باشد. دراین‌صورت:

$$\alpha'(t)[f]=\frac{d(f(\alpha))}{dt}(t)$$

برهان. چون:

$$\alpha'(t)=\left(\frac{d\alpha_1}{dt},\ \frac{d\alpha_2}{dt},\ \frac{d\alpha_3}{dt}\right)_\alpha$$

با استفاده ازلم ۲.۳ داریم:

$$\alpha'(t)[f]=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\,\frac{d\alpha_i}{dt}(t)$$

ازطرف دیگر تابع مرکب $f(\alpha)$ را می‌توان به‌صورت $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ نوشت، و با توجه به‌قانون مشتق توابع مرکب لم اثبات می‌شود. ∎

بنابرتعریف، $\alpha'(t)[f]$ میزان تغییر f درطول خطی است‌که از $\alpha(t)$ با راستای $\alpha'(t)$ می گذرد (شکل ۱۲.۱). (اگر $\alpha'(t)\neq 0$، این خط بـر خم α در $\alpha(t)$ مماس است، به‌تمرین ۹ رجوع شود.) این لم نشان می‌دهدکه این میزان تغییر با میزان تغییر f در امتداد خم α یکی است.

چون خم $\alpha: I\to\mathbf{E}^3$ یك تابع است، می‌توان یك به‌یك بودن α را بررسی کرد، یعنی $\alpha(t)=\alpha(t_1)$، فقط اگـر $t=t_1$. ویـژگی دیگـر خمها متناوب بودن است: خم

$\alpha: \mathbf{R} \to \mathbf{E}^3$ را متناوب گویند اگر عدد $p > 0$ را بتوان طوری تعیین کرد که به ازای همهٔ مقادیر t داشته باشیم $\alpha(t+p)=\alpha(t)$ و کوچکترین مقدار p را دورهٔ تناوب α می‌نامند.

از دیدگاه آنالیز مهمترین شرط برای خم α آن است که منظم باشد، یعنی همهٔ بردارهای سرعت آن مخالف صفر باشند. چنین خمی دارای نقاط زاویه‌ای و بازگشت نیست.

نکات زیر دربارهٔ خمها (که بدون اثبات ذکر می‌شوند) در این نظریه دارای نقش اساسی نیستند، اما در فصل چهارم به‌کار خواهند رفت. درصفحهٔ $\mathbf{E}^2$ برای نمایش «خمها» روش دیگری نیز متداول است. اگر f تابعی مشتقپذیر با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^2$ باشد، دراین صورت:

$$C: f = a$$

یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^2$ راکه در رابطهٔ $f(\mathbf{p})=a$ صدق می‌کند در نظر می‌گیریم. اگر مشتقهای جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ به‌ازای هیچ‌یك ازنقاط C توأماً صفر نباشند، دراین صورت C ازیك یا چند مؤلفهٔ جدا تشکیل می‌گردد که آنها را خم می‌نامند. مثلاً $C: x^2+y^2=r^2$ دایره‌ای به‌مرکز مبدأ $\mathbf{E}^2$ و شعاع r می‌باشد، و هذلولی $C: x^2-y^2=r^2$ به‌دو خم (شاخه) C_1 و C_2 تجزیه می‌شود، چنان‌که درشکل ۱۳.۱ نشان داده شده است.

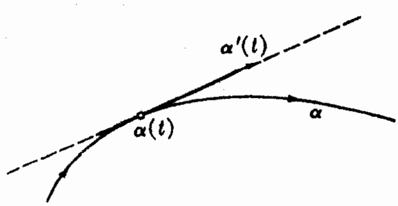
هر خم C مسیر بسیاری ازخمهای منظم α می‌باشد، که آنها را نمایشهای پارامتری C می‌نامند؛ اگر C خم بسته‌ای باشد، در این صورت دارای نمایش پارامتری متناوب $\alpha: \mathbf{R} \to C$ است. مثلاً خم:

$$\alpha(t)=(r\cos t,\ r\sin t)$$

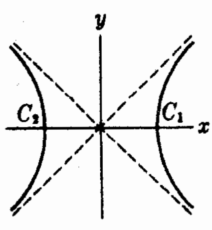
نمایش پارامتری متناوب دایرهٔ بالا می‌باشد. اگرخم C بسته نباشد (که گاهی آن‌را کمان نیز می‌نامند) دراین صورت هرنمایش پارامتری $\beta: I \to C$ یك بیژکسیون است، مثلاً:

$$\beta(t)=(r\cosh t,\ r\sinh t)$$

نمایش پارامتری شاخهٔ $x > 0$ هذلولی بالا می‌باشد.



شکل ۱۲.۱



شکل ۱۳.۱

تمرینات

۱. بردار سرعت خم (۳) مثال ۲.۴ را به‌ازای مقدار دلخواه t و $t=\pi/4$ بیابید.

۲. خم (۵) درمثال ۲.۴ را با روشی که درهمان جا ذکر شد رسم کنید. در روی شکل بردارهای سرعت درنقاط $t=0,\ 1/2,\ 1$ را نشان دهید.

۳. مطلوب است تعیین توابع مختصاتی خم $\beta=\alpha(h)$ که درآن $h(s)=\arc\sin s$ به‌ازای $J: 0<s<1$ و α خم (۳) مثال ۲.۴ است.

۴. خم α را طوری تعیین کنید که $\alpha(0)=(1,\ 0,\ -5)$ و $\alpha'(t)=(t^2,\ t,\ e^t)$.

۵. معادلهٔ خط راستی راکه ازنقاط $(1,\ -3,\ -1)$ و $(6,\ 2,\ 1)$ می‌گذرد بیابید. آیا این خط، با خطی که از نقاط $(-1,\ 1,\ 0)$ و $(-5,\ -1,\ -1)$ می‌گذرد متقاطع است؟

۶. با استفاده از لم ۶.۴ نشان دهید که می‌توان درتعریف مشتق امتدادی (تعریف ۱.۳) بـه جای خط راست $t\rightarrow \mathbf{p}+t\mathbf{v}$ هر خم دیگر α را با $\alpha(0)=\mathbf{p}$ و سرعت اولیهٔ $\alpha'(0)=\mathbf{v}_p$ درنظر گرفت.

۷. (ادامه) نشان دهید که $\mathbf{v}_p$ سرعت اولیهٔ خمهای $(t,\ 1+t^2,\ t)$، $(\sin t,\ \cos t,\ t)$ و $(\sinh t,\ \cosh t,\ t)$ با هم برابرند، و اگر $f=x^2-y^2+z^2$، $\mathbf{v}_p[f]$ را با محاسبهٔ f روی هریك ازخمها بیابید.

۸. در خم (۴) مثال ۲.۴ تعویض پارامتر $h(s)=\log s$ به‌ازای $J: s>0$ را انجام دهید، وتساوی لم ۵.۴ را با محاسبهٔ هرطرف جداگانه تحقیق کنید.

۹. به‌ازای مقدار ثابت t، خط مماس بر خم منظم α در $\alpha(t)$ عبارت‌است ازخط راست $u\rightarrow \alpha(t)+u\alpha'(t)$ که ازآن نقطهٔ آغازی $\alpha'(t)$ حذف شده است. مطلوب است تعیین‌خط مماس برمارپیچ $\alpha(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ t)$ درنقاط $\alpha(0)$ و $\alpha(\pi/4)$.

۱۰. هریك از خمهای زیر در $\mathbf{E}^2$ را رسم کنید ومعادلات پارامتری آنها را بیابید:

(الف) $C: 4x^2+y^2=1$ (ج) $C: y=e^x$

(ب) $C: 3x+4y=1$ (د) $C: x^{2/3}+y^{2/3}=1,\ x>0,\ y>0$

۵. ۱-فرمیها

هرگاه f تابعی بـا مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ باشد، $f: \mathbf{E}^3\rightarrow \mathbf{R}$، در آنالیز مقدماتی دیفرانسیل f با:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

تعریف می‌گردد. البته همواره معنی دقیق این عبارت را روشن نمی‌کنند. دراین بند با استفاده ازمفهوم ۱-فرمیها بیان دقیق‌آن راکه دربررسیهای بعدی دارای نقش اساسی‌است به‌دست می‌دهیم.

۱۰۵. تعریف. ۱-فرمی ϕ روی $\mathbf{E}^3$ عبارت است از تابعی با مقدار حقیقی روی مجموعهٔ بردارهای مماس بر $\mathbf{E}^3$ به‌طوری‌که ϕ درهر نقطه خطی باشد، یعنی تساوی:

$$\phi(a\mathbf{v}+b\mathbf{w})=a\phi(\mathbf{v})+b\phi(\mathbf{w})$$

به‌ازای هرعدد a و b وبردارهای مماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دریك نقطهٔ $\mathbf{E}^3$ برقرار باشد.

باید توجه داشت‌که به‌ازای‌هربردار $\mathbf{v}$ مماس بر $\mathbf{E}^3$، یك ۱-فرمی ϕ یك عدد حقیقی $\phi(\mathbf{v})$ را معین می‌کند و به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ تابع حاصل $\phi_p: T_p(\mathbf{E}^3)\rightarrow\mathbf{R}$ تابعی است خطی [بدین‌ترتیب در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$، ϕ_p عنصری از فضای دوگان $T_p(\mathbf{E}^3)$ می‌باشد. با این تعبیر مفهوم ۱-فرمی، دوگان مفهوم میدان برداری است].

مجموع ۱-فرمیهای ϕ و ψ مطابق معمول به‌طور نقطه‌ای تعریف می‌شود:

$$(\phi+\psi)(\mathbf{v})=\phi(\mathbf{v})+\psi(\mathbf{v})$$

به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}$.

همچنین اگر f تابعی حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ و ϕ یك ۱-فرمی باشد، دراین صورت $f\phi$ عبارت است از ۱-فرمی زیر:

$$(f\phi)(\mathbf{v}_p)=f(\mathbf{p})\phi(\mathbf{v}_p)$$

به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$.

همچنین می‌توان یك ۱-فرمی ϕ را روی یك میدان برداری V تأثیر داد ویك تابع $\phi(V)$ با مقدار حقیقی به‌دست آورد: درهرنقطهٔ $\mathbf{p}$ مقدار $\phi(V)$ برابر عدد $\phi(V(\mathbf{p}))$ است. بدینسان یك ۱-فرمی را می‌توان به‌صورت‌ماشینی درنظر گرفت‌که میدانهای‌برداری را به‌توابع با مقدار حقیقی بدل می‌کند. اگر هنگامی‌که V دیفرانسیلپذیر است، $\phi(V)$ نیز دیفرانسیلپذیرباشد، ϕ را دیفرانسیلپذیر گوییم. دراینجا مانندمیدانهای برداری همواره با ۱-فرمیهای دیفرانسیلپذیر سروکار داریم.

به‌سادگی می‌توان تحقیق‌کردکه $\phi(V)$، هم برحسب ϕ وهم برحسب V خطی‌است، یعنی:

$$\phi(fV+gW)=f\phi(V)+g\phi(W)$$

و

$$(f\phi+g\psi)(V)=f\phi(V)+g\psi(V)$$

که درآن f و g دوتابع‌اند.

با استفاده از مفهوم مشتق امتدادی مهمترین روش تبدیل توابع را به ۱-فرمیها بیان می‌کنیم.

۲.۵. تعریف. اگر f تابع دیفرانسیلپذیری با مقدارحقیقی روی $\mathbf{E}^3$ باشد df، دیفرانسیل f، یك ۱-فرمی است به‌طوری‌که به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ در $df(\mathbf{v}_p)=\mathbf{v}_p[f]$ صدق کند.

ازاین تعریف دیده می‌شود که df دقیقاً یك ۱-فرمی است، زیرا اولاً یك تابع با مقدار حقیقی روی بردارهای مماس است،و ثانیاً بنا برقسمت اول قضیهٔ ۳.۳ در هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ خطی است. روشن‌است‌که df می‌تواند میزان تغییر f را درهمهٔ راستاهای $\mathbf{E}^3$ به‌دست دهد، و نقش اساسی حساب دیفرانسیل روی $\mathbf{E}^3$ برهمین نکته استوار است.

اکنون نشان می‌دهیم که‌تعاریف نسبتاً مجرد فوق وقتی برحسب مختصات بیان شوند، نتایج کاملاً آشنایی را به‌دست می‌دهند.

۳.۵. مثال. ۱-فرمیها روی $\mathbf{E}^3$. (۱) دیفرانسیلهای توابع مختصاتی طبیعی dx_1، dx_2 و dx_3. با استفاده از لم ۲.۳ می‌یابیم:

$$dx_i(\mathbf{v}_p)=\mathbf{v}_p[x_i]=\sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})=\sum_j v_j \delta_{ij}=v_i$$

که درآن δ_{ij} دلتای کرونکر است (به‌ازای $i\neq j$ برابر ۰ است و به‌ازای $i=j$ برابر ۱). بدینسان مقدار dx_i به ازای هربردار مماس دلخواه $\mathbf{v}_p$ برابر v_i، iامین مختص بردار مزبور است، و اصلاً بستگی به‌نقطهٔ اثر $\mathbf{p}$ ندارد.

(۲) ۱-فرمی $\psi=f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+f_3\,dx_3$. چون dx_i ها ۱-فرمی‌اند، ψ نیز به‌ازای توابع دلخواه f_1، f_2، و f_3 نیز یك ۱-فرمی است. مقدار ψ به ازای هر بردارمماس دلخواه $\mathbf{v}_p$ عبارت است از:

$$\psi(\mathbf{v}_p)=(\sum f_i\,dx_i)(\mathbf{v}_p)=\sum f_i(\mathbf{p})\,dx_i(\mathbf{v})=\sum f_i(\mathbf{p})v_i$$

مثال اول نشان می‌دهد که ۱-فرمیهای dx_1، dx_2، و dx_3 با بردارهای مماس‌توابع مختصاتی x_1، x_2 و x_3 متناظرند. همچنین می‌توان dx_1، dx_2 و dx_3 را دوگانهای میدانهای برداری یکهٔ طبیعی U_1، U_2 و U_3 دانست. زیرا از (۱) نتیجه می‌شود که تابع $dx_i(U_j)$ دارای مقدار ثابت δ_{ij} است.

اکنون نشان می‌دهیم که هر ۱-فرمی را می‌توان به‌صورت (۲) بالا نوشت.

۴.۵. لم. اگر ϕ یك ۱-فرمی روی $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین صورت $\phi=\sum f_i\,dx_i$، که درآن $f_i=\phi(U_i)$. توابع f_1، f_2 و f_3 را توابع مختصاتی اقلیدسی ϕ می‌نامند.

برهان. بنابرتعریف، یك ۱-فرمی تابعی‌است روی بردارهای‌مماس، بنابراین ϕ و $\sum f_i\,dx_i$

هنگامی برابرند کــه مقدار آنها به ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}_p = \sum v_i U_i(\mathbf{p})$ یکی باشد. دیدیم که (مثال (۲)، ۳.۵):

$$(\sum f_i\, dx_i)(\mathbf{v}_p) = \sum f_i(\mathbf{p}) v_i$$

ازطرف دیگر:

$$\phi(\mathbf{v}_p) = \phi(\sum v_i U_i(\mathbf{p})) = \sum v_i\, \phi(U_i(\mathbf{p})) = \sum v_i f_i(\mathbf{p})$$

و چون $f_i = \phi(U_i)$، بدینسان ϕ و $\sum f_i\, dx_i$ یك مقدار روی هر بردار مماس دارند و بنابراین باهم برابرند. ∎

این لم نشان می‌دهد کــه هر ۱-فرمی روی $\mathbf{E}^3$ به‌صورت $f\,dx + g\,dy + h\,dz$ می‌باشد، و این عبارتهــا دقیقاً به صورت توابعی روی بردارهــای مماس هستند. اکنون نشان می‌دهیم کــه تعریف دیفرانسیل توابع (تعریف ۲.۵) با تعریفی که در اینجا بیان شد مطابقت دارد.

۵.۵ فرع. اگر f تابع دیفرانسیلپذیر روی $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

برهان. مقــدار $\sum(\partial f/\partial x_i)\, dx_i$ بــه ازای هر بــردار ممــاس $\mathbf{v}_p$ عبارت است از $\sum(\partial f/\partial x_i)(\mathbf{p}) v_i$. بنابر لــم ۲.۳، $\mathbf{v}_p[f]$ همان $df(\mathbf{v}_p)$ است. بنابراین ۱-فرمیهای df و $\sum(\partial f/\partial x_i)\, dx_i$ برابرند. ∎

با استفاده ازاین فرع یا ازتعریف d خواهیم داشت:

$$d(f+g) = df + dg$$

بالاخره با بررسی‌تأثیر d روی‌حاصل‌ضرب‌توابع وتوابع مرکب این بحث‌را پایان‌می‌دهیم.

۶.۵ لم. اگر fg حاصل ضرب دوتابع دیفرانسیلپذیر f و g روی $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه:

$$d(fg) = g\,df + f\,dg$$

برهان. با توجه به‌فرع ۵.۵، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d(fg) &= \sum \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} dx_i = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_i \\ &= g\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) + f\left(\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= g\,df + f\,dg \end{aligned}$$

∎

۷.۵. لم. اگر $f:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{R}$ و $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دوتابع دیفرانسیلپذیر باشند، تابع مرکب $h(f):\mathbf{E}^3\to\mathbf{R}$ نیز دیفرانسیلپذیر است و دراین صورت داریم:

$$d(h(f))=h'(f)\,df$$

برهان. (علامت پریم در اینجا معرف مشتق است، لـذا $h'(f)$ باز تابعی است مرکب از $\mathbf{R}^3$ به $\mathbf{R}$). با استفاده ازقانون مشتق توابع مرکب مانند $h(f)$، داریم:

$$\frac{\partial\,(h(f))}{\partial x_i}=h'(f)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

از آنجا:

$$d(h(f))=\sum\frac{\partial\,(h(f))}{\partial x_i}dx_i=\sum h'(f)\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=h'(f)df \qquad \blacksquare$$

در محاسبهٔ df بـرای یك تابع مفروض f تقریباً همیشه استفاده از این خـواص ساده‌تر از قراردادن آن در فرمول فرع ۵.۵ است. بنابراین مشتقهای جزئی f و به‌طور کلی همهٔ مشتقهای امتدادی آن مستقیماً از df به‌دست می‌آیند. مثلاً گیریم:

$$f=(x^2-1)y+(y^2+2)z$$

بنابر لمهای ۶.۵ و ۷.۵ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} df&=(2x\,dx)y+(x^2-1)dy+(2y\,dy)z+(y^2+2)dz\\ &=\underbrace{2xy}_{\partial f/\partial x}dx+\underbrace{(x^2+2yz-1)}_{\partial f/\partial y}dy+\underbrace{(y^2+2)}_{\partial f/\partial z}dz \end{aligned}$$

و بـا استفاده از دستور بالا مقدار این عبارت را به ازای بردار مماس $\mathbf{v}$ به دست می‌آوریم. نتیجه چنین است:

$$\mathbf{v}_p[f]=df(\mathbf{v}_p)=2p_1p_2v_1+(p_1^2+2p_2p_3-1)v_2+(p_2^2+1)v_3$$

تمرینات

۱. گیریم $\mathbf{v}=(1,2,-3)$ و $\mathbf{p}=(0,-2,1)$. ۱-فرمیهای زیر را روی بردار مماس $\mathbf{v}_p$ محاسبه کنید.

(الف) $y^2\,dx$ (ب) $z\,dy-y\,dz$ (ج) $(z^2-1)dx-dy+x^2dz$

۲. اگر $\phi=\sum f_i\,dx_i$ و $V=\sum v_iU_i$، نشان دهید که مقدار ۱-فرمی ϕ روی میدان V با تابع $\phi(V)=\sum f_iv_i$ برابر است.

۳. مقدار ۱-فرمی $\phi = x^{2}\,dx - y^{2}\,dz$ را روی میدانهای برداری زیر به‌دست آورید:

$$V = xU_1 + yU_2 + zU_3$$

$$W = xy(U_1 - U_3) + yz(U_1 - U_2)$$

و

$$\left(\frac{1}{x}\right)V + \left(\frac{1}{y}\right)W$$

۴. دیفرانسیلهای زیر را برحسب df بیان کنید:

(الف) $d(f^{5})$ (ب) $d(\sqrt{f})$ که درآن $f > 0$

(ج) $d(\log(1+f^{2}))$

۵. دیفرانسیل توابع زیر را به‌صورت معمول $\sum f_i\,dx_i$ بیان کنید:

(الف) $(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{1/2}$ (ب) $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

۶. درهریك ازحالتهای زیر دیفرانسیل f و مشتق امتدادی $\mathbf{v}_p[f]$ را به‌ازای $\mathbf{v}_p$، که در تمرین ۱ معین شد، بیابید:

(الف) $f = xy^{2} - yz^{2}$ (ب) $f = xe^{yz}$

(ج) $f = \sin(xy)\cos(xz)$

۷. کدام یك ازعبارتهای زیر ۱-فرمی‌اند؟ درهرحالت ϕ تابعی از بردارهای مماس است که مقدار آن به‌ازای $(v_1, v_2, v_3)_p$ برابر است با:

(الف) $v_1 - v_3$ (ج) $v_1 p_3 + v_2 p_1$ (ه) 0

(ب) $p_1 - p_3$ (د) $v_p[x^{2}+y^{2}]$ (و) $(p_1)^{2}$

درحالتی‌که ϕ یك ۱-فرمی باشد آن را به‌صورت $\sum f_i\,dx_i$ بنویسید.

۸. لم ۶.۵ را مستقیماً با استفاده ازتعریف d و بدون استفاده از فرع ۵.۵ اثبات کنید.

۹. ۱-فرمی ϕ هنگامی در نقطهٔ $\mathbf{p}$ صفر است که به‌ازای همهٔ بردارهای مماس در $\mathbf{p}$ داشته باشیم $\phi(\mathbf{v}_p) = 0$. نقطه‌ای که به ازای آن df صفر باشد نقطهٔ بحرانی تابع f نام دارد. نشان دهید که شرط لازم وکافی برای آنکه $\mathbf{p}$ نقطهٔ بحرانی باشد آن است که:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) = 0$$

نقاط بحرانی تابع $f=(1-x^2)y+(1-y^2)z$ را بیابید.

(راهنمایی: مشتقهای جزئی f را از راه محاسبهٔ df به‌دست آورید.)

۱۰. (ادامه) نشان دهید که ماکسیمم و مینیممهای موضعی، نقاط بحرانی f می‌باشند. (نقطهٔ $\mathbf{p}$ ماکسیمم موضعی f است هرگاه به‌ازای هر $\mathbf{q}$ درمجاورت $\mathbf{p}$ داشته باشیم $(f(\mathbf{q})\leqslant f(\mathbf{p})$.

۱۱. اغلب df را به‌عنوان تقریب خطی Δf درنظر می‌گیرند.

(الف) توضیح دهید که چگونه $(df)(\mathbf{v}_p)$ تقریب خطی $f(\mathbf{p}+\mathbf{v})-f(\mathbf{p})$ می‌باشد.

(ب) مقادیر تقریبی و تحقیقی $f(0{,}9,\ 1{,}6,\ 1{,}2)-f(1,\ 1{,}5,\ 1)$ را به‌ازای $f=x^2y/z$ بیابید.

۶. فرمهای دیفرانسیلی

۱-فرمیها روی $\mathbf{E}^3$ بخشی از دستگاه بزرگتری موسوم به فرمهای دیفرانسیلی روی $\mathbf{E}^3$ می‌باشند. در اینجا فرمهای دیفرانسیلی را به اختصار بررسی می‌کنیم، زیرا از آنها فقط در بند ۸ فصل دوم استفاده خواهیم کرد. می‌توان فرمهای دیفرانسیلی روی $\mathbf{E}^3$ را به صورت عبارتهای حاصل ازجمع و ضرب توابع با مقادیر حقیقی و دیفرانسیلهای dx_1، dx_2 و dx_3 از توابع مختصاتی طبیعی $\mathbf{E}^3$ درنظر گرفت. این دو عمل دارای خواص معمولی شرکتپذیری و توزیعپذیری می‌باشند، اما عمل ضرب تعویضپذیر نیست، و به جای آن قاعدهٔ تناوبی زیر برقرار است:

$$dx_i\,dx_j=-dx_j\,dx_i \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant 3).$$

درآنالیز مقدماتی نیز تلویحاً به‌این قاعده برمی‌خوریم (به‌تمرین ۹ رجوع شود).

یکی ازنتایج قاعدهٔ تناوبی آن است که «حاصل‌ضربهای با عوامل‌مکرر صفرند»؛ یعنی $dx_i\,dx_i=0$، زیرا به‌ازای $i=j$ ازقاعدهٔ تناوبی نتیجه می‌شود:

$$dx_i\,dx_i=-dx_i\,dx_i$$

اگرهریك ازعوامل‌حاصل‌جمع فرمهای دیفرانسیلی شامل p عامل dx_i $(p=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ باشد آن‌را یك p-فرم می‌نامند، و p درجهٔ آن است. بدین‌ترتیب چون عبارتها را برحسب dx، dy و dz درنظر بگیریم داریم:

یك ۰-فرمی درست یك تابع دیفرانسیلپذیر f می‌باشد.

یك ۱-فرمی عبارتی به‌صورت $f\,dx+g\,dy+h\,dz$ است.

یك ۲-فرمی عبارتی به‌صورت $f\,dx\,dy+g\,dx\,dz+h\,dy\,dz$ می‌باشد.
یك ۳-فرمی عبارتی به‌صورت $f\,dx\,dy\,dz$ است.

همان‌طور که جمع ۱-فرمیها را با جمع توابع ضریب متناظر بیان کردیم:

$$\sum f_i\,dx_i+\sum g_i\,dx_i=\sum (f_i+g_i)\,dx_i$$

برای ۲-فرمی و ۳-فرمیها نیز به‌همان ترتیب جمع تعریف می‌گردد.

در فضای اقلیدسی سه بعدی همهٔ p-فرمیها به ازای $p>۳$ صفرند. زیرا برای حاصل‌ضرب بیش از سه dx_i بایـد یکی از dx_i ها تکرار شود و بنابراین در هریك از آنها عوامل مکرر موجود است، مثلاً داریم:

$$dx\,dy\,dx\,dz=-dx\,dx\,dy\,dz=\circ$$

زیرا $dx\,dx=\circ$. در باقیماندهٔ این بند برای ضرب فرمها علامت گوه، $\wedge$، را به کار می‌بریم. (اما هنگامی که حاصل‌ضرب فقط شامل dx، dy و dz باشد برای‌سادگی علامت $\wedge$ را حذف می‌کنیم.)

۱.۶. مثال. محاسبهٔ حاصل‌ضرب فرمها. (۱) گیریم:

$$\phi=x\,dx-y\,dy \quad \text{و} \quad \psi=z\,dx+x\,dz$$

داریم:

$$\begin{aligned}\phi\wedge\psi&=(x\,dx-y\,dy)\wedge(z\,dx+x\,dz)\\&=xz\,dx\,dx+x^{۲}\,dx\,dz-yz\,dy\,dx-yx\,dy\,dz\end{aligned}$$

اما

$$dx\,dx=\circ \quad \text{و} \quad dy\,dx=-dx\,dy$$

پس:

$$\phi\wedge\psi=yz\,dx\,dy+x^{۲}\,dx\,dz-xy\,dy\,dz$$

به‌طور کلی حاصل‌ضرب دو ۱-فرمی یك ۲-فرمی است.

(۲) ϕ و ψ، ۱-فرمیهای بالا را درنظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\theta=z\,dy$$

پس:

$$\theta\wedge\phi\wedge\psi=yz^{۲}\,dy\,dx\,dy+x^{۲}z\,dy\,dx\,dz-xyz\,dy\,dy\,dz$$

و چون $dy\,dx\,dy$ و $dy\,dy\,dz$ حاوی عوامل مکررند برابر صفر می‌باشند. بدینسان:

$$\theta\wedge\phi\wedge\psi=-x^{2}z\,dx\,dy\,dz$$

(۳) ۲-فرمی $\eta=y\,dx\,dz+x\,dy\,dz$ و ۱-فرمی ϕ بالا را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\phi\wedge\eta=x^{2}\,dx\,dy\,dz-y^{2}\,dy\,dx\,dz=(x^{2}+y^{2})\,dx\,dy\,dz$$

روشن است که حاصل‌ضرب یك p-فرمی دریك q-فرمی یك $(p+q)$-فرمی خواهد بود. درنتیجه هنگامی که $p+q>3$ برقرار باشد، حاصل صفر می‌شود.

۴.۶ لم. اگر ϕ و ψ، ۱-فرمی باشند، دراین صورت:

$$\phi\wedge\psi=-\psi\wedge\phi$$

برهان. می‌نویسیم:

$$\phi=\sum f_i\,dx_i \quad و \quad \psi=\sum g_i\,dx_i$$

بنابر قاعدهٔ تناوبی:

$$\phi\wedge\psi=\sum f_i g_j\,dx_i\,dx_j=-\sum g_j f_i\,dx_j\,dx_i=-\psi\wedge\phi \qquad \blacksquare$$

عملگر d که در ۲.۵ تعریف شد، ۰-فرمی f را به ۱-فرمی df تبدیل می‌کند. می‌توان آن را به آسانی تعمیم داد، و عملگری (که آن را نیز با d نشان می‌دهیم) تعریف کرد که هر p-فرمی η را به $(p+1)$-فرمی $d\eta$ بدل کند. برای این کار کافی است d (تعریف ۲.۵) را روی توابع ضریب η اثر داد. مثلاً، دراین مورد $p=1$.

۳.۶ تعریف. اگر $\phi=\sum f_i\,dx_i$ یك ۱-فرمی روی $\mathbf{E}^3$ باشد، مشتق خارجی ϕ عبارت است از ۲-فرمی $d\phi=\sum df_i\wedge dx_i$.

از تعمیم تعریف بالا و استفاده از فرع ۵.۵ فرمول جالب زیر برای مشتق خارجی

$$\phi=f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+f_3\,dx_3$$

به‌دست می‌آید:

$$d\phi=\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_1\,dx_2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_3+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)dx_2\,dx_3$$

لزومی ندارد که این فرمول به‌خاطر سپرده شود؛ بهتر است همواره تعریف مورد استفاده قرار گیرد. مثلاً، گیریم:

$$\phi = xy\,dx + x^{۲}\,dz$$

از آنجا:

$$d\phi = d(xy) \wedge dx + d(x^{۲})\,dz$$
$$= (y\,dx + x\,dy) \wedge dx + ۲x\,dx\,dz$$
$$= -x\,dx\,dy + ۲x\,dx\,dz$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق‌کرد که مشتق خارجی دارای همان خصوصیت خطی بودن مذکور در ۲.۵ است، یعنی:

$$d(a\phi + b\psi) = a\,d\phi + b\,d\psi$$

که درآن ϕ و ψ دوفرم دلخواه و a و b مقادیر ثابت می‌باشند.

مشتق خارجی و ضرب $\wedge$ باهم عمل می‌کنند.

۶.۴ قضیه. توابع f و g و ۱-فرمیهای ϕ و ψ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$d(fg) = df\,g + f\,dg \quad (۱)$$
$$d(f\phi) = df \wedge \phi + f\,d\phi \quad (۲)$$
$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi^{(۱)} \quad (۳)$$

برهان. فرمول اول همان لم ۶.۵ است، و ما آن را دراینجا فقط برای نشان دادن شباهت این سه فرمول آورده‌ایم. برهان فرمول دوم به‌عنوان حالت خاص فرمول سوم به دست می‌آید، ازاین‌رو به‌اثبات فرمول آخر می‌پردازیم.

حالت ۱. $\phi = f\,dx$ و $\psi = g\,dx$. چون:

$$\phi \wedge \psi = fg\,dx\,dx = ۰$$

باید نشان دهیم‌که طرف دوم معادله نیز صفر است. اما:

$$d\phi = df \wedge dx = \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,dx + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dx$$

و در نتیجه هر جملهٔ $d\phi \wedge \psi$ دارای عامل مکرر dx می‌باشد، بنابراین $d\phi \wedge \psi = ۰$ و $\phi \wedge d\psi = ۰$.

---

۱. مطابق معمول، عمل ضرب براعمال جمع و تفریق تقدم دارد، لـذا این عبارت باید چنین خوانده شود: $(d\phi \wedge \psi) - (\phi \wedge d\psi)$.

حالت ۲. گیریم $\phi = f\,dx$ و $\psi = g\,dy$. ازمحاسبهٔ $d\phi$ مطابق فرمول بالا به‌دست می‌آید:

$$d\phi\wedge\psi = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,dx + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dx\right)\wedge g\,dy$$
$$= 0 + \frac{\partial f}{\partial z}\,g\,dz\,dx\,dy = g\,\frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

به‌طریق مشابه:

$$\phi\wedge d\psi = f\,dx\wedge\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}\,dz\,dy\right)$$
$$= f\,\frac{\partial g}{\partial z}\,dx\,dz\,dy = -f\,\frac{\partial g}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

بدین ترتیب:

$$d\phi\wedge\psi - \phi\wedge d\psi = \left(g\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}\,f\right)dx\,dy\,dz$$

اما ازطرف دیگر:

$$\phi\wedge\psi = fg\,dx\,dy$$

و از آنجا:

$$d(\phi\wedge\psi) = d(fg)\,dx\,dy = \frac{\partial(fg)}{\partial z}\,dz\,dx\,dy$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,g + f\,\frac{\partial g}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

و فرمول دراین حالت اثبات شد.

حالت ۳. حالت کلی. از حالتهای ۱ و ۲ دریافتیم که هروقت ϕ و ψ «ساده»، یعنی به‌فرم $f\,du$، ـ u همان x یا y یا z است ـ باشند، فرمول‌درست است. چون هر ۱ ـ فرمی مجموعی از ۱ ـ فرمیهای ساده است، پس حالت کلی با استفاده از خاصیت خطی بودن d و توزیعپذیری آن نسبت به $\wedge$ نتیجه می‌شود. ▮

برای به‌خاطر سپردن علامت منها که درفرمول (۳) قضیهٔ ۲.۶ وجود دارد، می‌توان d را بصورت یك ۱ـ فرمی درنظر گرفت، و برای آنکه بتواند به ψ برسد، باید جای آن با ϕ عوض شود، و بدین‌ترتیب علامت، از لم ۲.۶ به‌دست می‌آید.

با استفاده از فرمهای دیفرانسیلی، و ضرب $\wedge$ و مشتق خارجی می‌توان روابط نسبتاً پیچیده‌ای را به‌صورت ساده‌تر بیان کرد. مثلاً، فرمول

$$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$$

همان‌طورکه دراثبات آن دیده شد متضمن روابط پیچیده‌ای بین مشتقهای جزئی است. قبل‌از پیدایش فرمها لازم بودکه این روابط را بادشواری درمسائل جداگانه بررسی کنند، درصورتی که اکنون کافی است فرمول کلی را به‌کار برند.

از فرمهای دیفرانسیلی برای بیان معادلات اساسی هندسه استفاده خواهیم کرد.

تمرینات

۱. اگر:

$$\phi = yz\,dx + dz,\ \psi = \sin z\,dx + \cos z\,dy,\ \xi = dy + z\,dz$$

باشد، عبارتهای زیر را (برحسب $dx\,dy$ و ...) محاسبه کنید:

(الف) $\phi \wedge \psi,\ \psi \wedge \xi,\ \xi \wedge \phi$ (ب) $d\phi,\ d\psi,\ d\xi$

۲. گیریم $\phi = dx/y$ و $\psi = z\,dy$. فرمول (۳)، لایبنیتز (قضیهٔ ۴.۶) را دراین حالت با محاسبهٔ جداگانهٔ هریك از جمله‌ها تحقیق کنید.

۳. نشان دهید که به‌ازای هر تابع f داریم $d(df) = 0$ و از آنجا نتیجه بگیرید $d(f\,dg) = df \wedge dg$.

۴. فرمهای زیر را ساده کنید:

(الف) $d(f\,dg + g\,df)$ (ج) $d(f\,dg \wedge g\,df)$

(ب) $d\{(f-g)(df+dg)\}$ (د) $d(gf\,df) + d(f\,dg)$

۵. به‌ازای هرسه ۱ - فرمی $\phi_i = \sum_j f_{ij}\,dx_j$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ ثابت کنید:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\,dx_3$$

۶. اگر r، θ و z توابع مختصاتی استوانه‌ای روی $\mathbf{E}^3$ باشند، دراین‌صورت $z = z$، $y = r\sin\theta$، $x = r\cos\theta$، عنصر حجم $dx\,dy\,dz$ را در دستگاه استوانه‌ای محاسبه کنید (یعنی $dx\,dy\,dz$ را برحسب توابع r، ϕ و z و دیفرانسیلهایشان بیان کنید.)

۷. به‌ازای هر ۲ - فرمی $\eta = f\,dx\,dy + g\,dx\,dz + h\,dy\,dz$، مشتق خارجی آن

$d\eta$ ، بنابر تعریف، یک ۳ ـ فرمی است که از گذاردن دیفرانسیلهای f ، g و h به‌جای خود آنها، به‌دست می‌آید. ثابت کنیدکه به‌ازای هر ۱ ـ فرمی ϕ داریم، $d(d\phi)=0$. تمرینات ۳ و ۷ نشان می‌دهند کــه $d^2=0$ ، یعنی بــه‌ازای هر فرم ξ ، $d(d\xi)=0$. (اگر ξ یک ۲ ـ فرمی باشد، آنگاه $d(d\xi)=0$ ، زیرا درجهٔ آن از ۳ بیشتر است.)

۸. در آنالیز برداری کلاسیک برای اجتناب از فرمهای دیفرانسیلی روی $\mathbf{E}^3$ ، ۱ ـ فــرمی و ۲ ـ فرمیها را با تناظر زیر به میدانهای برداری تبدیل می‌کنند:

$$\sum f_i\,dx_i \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \sum f_i U_i \overset{(2)}{\longleftrightarrow} f_3\,dx_1\,dx_2 - f_2\,dx_1\,dx_3 + f_1\,dx_2\,dx_3$$

و از سه عمل اصلی زیر روی مشتقهای جزئی استفاده می‌کنند:

گرادیان تابع f:

$$\operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} U_i$$

کرل (تاو). میدان برداری $V=\sum f_i U_i$ چنین است:

$$\operatorname{curl} V = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)U_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)U_2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)U_3$$

دیورژانس میدان برداری $V=\sum f_i U_i$ به‌صورت زیر است:

$$\operatorname{div} V = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

ثابت کنیدکه این سه عمل را می‌توان به‌صورت زیر با مشتق خارجی بیان کرد:

(الف) $df \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \operatorname{grad} f$

(ب) اگر $V \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \phi$ باشد، آنگاه $d\phi \overset{(2)}{\longleftrightarrow} \operatorname{curl} V$

(ج) اگر $V \overset{(2)}{\longleftrightarrow} \eta$ باشد، آنگاه $d\eta = (\operatorname{div} V)\,dx\,dy\,dz$

۹. گیریم f و g توابع با مقادیر حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ باشند. ثابت کنیدکه:

$$df \wedge dg = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy$$

این فرمول درآنالیز مقدماتی پیدا مــی‌شود؛ نشان دهیدکــه این فرمول قاعدهٔ تناوبی را ایجاب می‌کند.

۷. نگاشتها

دراین بند به‌بررسی توابعی از $\mathbf{E}^n$ به $\mathbf{E}^m$ می‌پردازیم. اگر $n=۳$ و $m=۱$، این توابع همان توابع با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^۳$ می‌باشند. اگر $n=۱$ و $m=۳$؛ هریك از این توابع یك خم در $\mathbf{E}^۳$ را نشان می‌دهد. با آنکه نتایج الزاماً برای مقادیر دلخواه m و n بیان می‌شوند، ما اساساً به سه حالت زیر توجه داریم:

$$\mathbf{E}^۲ \to \mathbf{E}^۲, \qquad \mathbf{E}^۲ \to \mathbf{E}^۳, \qquad \mathbf{E}^۳ \to \mathbf{E}^۳$$

نکتهٔ اصلی دربارهٔ هرتابع $F:\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ آن است که می‌توان آن‌را کاملاً به‌وسیلهٔ m تابع با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^n$ مشخص کرد. (این را قبلاً در بند ۴، برای $n=۱$ و $m=۳$ دیده‌ایم.)

۱.۷ تعریف. تابع $F:\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$، و توابع $f_۱$ ، $f_۲$ ، ... ، f_m با مقادیر حقیقی روی $\mathbf{E}^n$ راکه برای‌آنها به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^n$ تساوی:

$$F(\mathbf{p})=(f_۱(\mathbf{p}),\ f_۲(\mathbf{p}),\ \cdots,\ f_m(\mathbf{p}))$$

برقرار است، در نظر می‌گیریم. این توابع را توابع مختصاتی اقلیدسی F می‌نامند، و می‌نویسند $F=(f_۱,\ f_۲,\ \cdots,\ f_m)$.

تابع F را هنگامی دیفرانسیلپذیر گویند که توابع مختصاتی آن به‌مفهوم عادی دیفرانسیلپذیر باشند. تابع دیفرانسیلپذیر $F:\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ را یك نگاشت از $\mathbf{E}^n$ در $\mathbf{E}^m$ می‌نامند.

توجه شود که توابع مختصاتی F توابعی مرکب‌اند $f_i=x_i(F)$ ، که در آن $x_۱$ ، ... ، x_m توابع مختصاتی $\mathbf{E}^m$ می‌باشند.

نگاشتها را می‌توان به‌طرق گوناگونی مشخص کرد. مثلاً گیریم $F:\mathbf{E}^۳ \to \mathbf{E}^۳$ نگاشت $F=(x^۲,\ yz,\ xy)$ باشد. بدین‌ترتیب به‌ازای هر $\mathbf{p}$ داریم:

$$F(\mathbf{p})=(x(\mathbf{p})^۲,\ y(\mathbf{p})z(\mathbf{p}),\ x(\mathbf{p})y(\mathbf{p}))$$

اما $\mathbf{p}=(p_۱,\ p_۲,\ p_۳)$ ، و بنابر تعریف توابع مختصاتی داریم:

$$x(\mathbf{p})=p_۱,\ \ y(\mathbf{p})=p_۲,\ \ z(\mathbf{p})=p_۳$$

وبدین‌ترتیب فرمول نقطه‌ای زیر، به‌ازای هرمقدار $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$، برای F به‌دست‌می‌آید:

$$F(p_۱,\ p_۲,\ p_۳)=(p_۱^۲,\ p_۲p_۳,\ p_۱p_۲)$$

درحالت خاص:

$$F(۱,\ -۲,\ ۰)=(۱,\ ۰,\ -۲), \qquad F(-۳,\ ۱,\ ۳)=(۹,\ ۳,\ -۳)$$

و غیره.

با آنکه، می‌توان نظریهٔ خمها را از نظریهٔ عمومی نگاشتها نتیجه‌گرفت، اما نگاشتها حتی درحالت $\mathbf{E}^۲ \to \mathbf{E}^۲$ ممکن است بسیار پیچیده باشند، درصورتی‌که خمها بسیار ساده‌اند. این است‌که ما برعکس برای درك نگاشتها از خمها استفاده می‌کنیم.

۲.۷. تعریف. اگر $\alpha : I \to \mathbf{E}^n$ یك خم در $\mathbf{E}^n$ و $F : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ یك نگاشت باشد، آنگاه تابع مرکب $\beta = F(\alpha) : I \to \mathbf{E}^m$ یك خم در $\mathbf{E}^m$ است که نگارهٔ α به وسیلهٔ F نامیده می‌شود (شکل ۱۴.۱).

۳.۷. مثال. نگاشتها. (۱) نگاشت $F : \mathbf{E}^۳ \to \mathbf{E}^۳$ به‌صورت:

$$F = (x - y,\ x + y,\ ۲z)$$

را درنظر می‌گیریم. این نگاشت به‌صورت نقطه‌ای به‌ازای هر $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$ چنین است:

$$F(p_۱,\ p_۲,\ p_۳) = (p_۱ - p_۲,\ p_۱ + p_۲,\ ۲p_۳)$$

فقط هنگامی که نگاشت کاملاً ساده است می‌توان با محاسبهٔ مقادیر آن به ازای چند نقطهٔ معدود و معین وضع تغییرات آن را مشخص کرد. نگاشت بالا نیز کاملاً ساده است، وچنان‌که دیده می‌شود یك تبدیل خطی از $\mathbf{E}^۳$ به $\mathbf{E}^۳$ می‌باشد. بنابر قضیه‌ای از جبرخطی، F به‌وسیلهٔ مقادیر متناظر با سه نقطه (نقاطی با استقلال خطی)، مثلاً سه نقطهٔ یکه کاملاً معین می‌گردد:

$$\mathbf{u}_۱ = (۱,\ ۰,\ ۰), \qquad \mathbf{u}_۲ = (۰,\ ۱,\ ۰), \qquad \mathbf{u}_۳ = (۰,\ ۰,\ ۱)$$

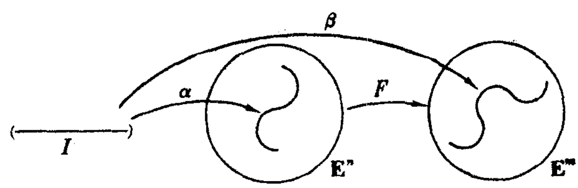
(۲) نگاشت $F : \mathbf{E}^۲ \to \mathbf{E}^۲$ را به‌طوری‌که $F(u, v) = (u^۲ - v^۲,\ ۲uv)$، درنظر می‌گیریم ($u$ و v توابع مختصاتی $\mathbf{E}^۲$اند). برای بررسی این نگاشت اثر آن‌را برخم:

$$\alpha(t) = (r\cos t,\ r\sin t), \qquad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$$

مطالعه می‌کنیم. این خم درجهت مثلثاتی یك دور دایره‌ای به‌شعاع r (به‌مرکز مبدأ) را می‌پیماید، نگارهٔ این خم عبارت است از:

$$\beta(t) = F(\alpha(t)) = F(r\cos t,\ r\sin t) = (r^۲\cos^۲ t - r^۲\sin^۲ t,\ ۲r^۲\cos t\sin t)$$

$۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$. ازآنجا برای $\beta = F(\alpha)$ فرمول زیر به‌دست می‌آید:



شکل ۱۴.۱

$$\beta(t)=(r^{2}\cos 2t,\ r^{2}\sin 2t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

اینخم دایره‌ای به‌شعاع r^{2} (به‌مرکزمبدأ) را دوبار درجهت مثلثاتی می پیماید (شکل ۱۵.۱).

بدین‌ترتیب براثر F، صفحهٔ $\mathbf{E}^{2}$ به‌طورهموار دوبار به‌دورخود می‌پیچد، ومبدأ ثابت می‌ماند، زیرا $F(0,0)=(0,0)$. دراین عمل، هر دایره به‌شعاع r دوبار به‌دور دایرهٔ به‌شعاع r^{2} می‌پیچد.

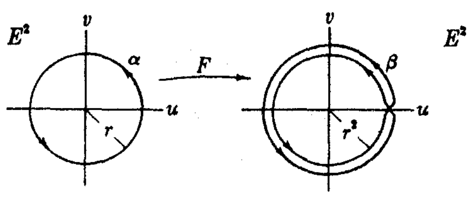
دراین فصل هرجا مفهوم تازه‌ای را معرفی کرده‌ایم، برای آن مشتق مناسبی نیز به‌دست داده‌ایم. مثلاً «مشتق» خم α با سرعت α' تعریف شد. با استفاده از مفهوم سرعت یك خم دراینجا به تعریف مشتق F_{*} از نگاشت $F:\mathbf{E}^{n}\rightarrow\mathbf{E}^{m}$ می پردازیم. F_{*} چنان‌که خواهیم دید، تابعی است که به هر بردار مماس $\mathbf{v}$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ بر $\mathbf{E}^{n}$، بردار مماس $F_{*}(\mathbf{v})$ درنقطهٔ $F(\mathbf{p})$ بر $\mathbf{E}^{m}$ را متناظر قرار می‌دهد. $F_{*}(\mathbf{v})$ به‌روش زیر معین می گردد: بردار مماس $\mathbf{v}$ سرعت اولیهٔ خم $\alpha(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$ است، که بنا بر تبصرهٔ ۵.۳ برای اختصار $\mathbf{v}_{p}$ را با $\mathbf{v}$ نشان داده‌ایم. نگارهٔ α به‌وسیلهٔ نگاشت F، خم β است که به‌صورت زیر است:

$$\beta(t)=F(\alpha(t))=F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$$

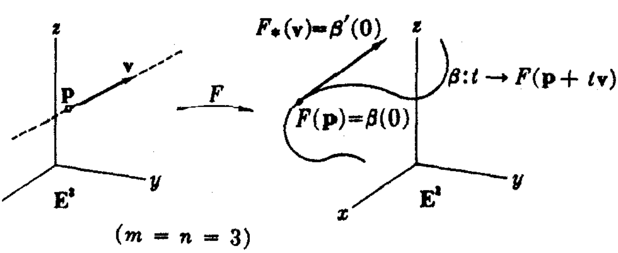
$F_{*}(\mathbf{v})$ را با بردار سرعت اولیهٔ $\beta'(0)$ از خم β تعریف می کنیم (شکل ۱۶.۱).

از اینجا تعریف زیر حاصل می‌شود:

۴.۷. تعریف. نگاشت $F:\mathbf{E}^{n}\rightarrow\mathbf{E}^{m}$ و بردار $\mathbf{v}$ مماس بر $\mathbf{E}^{n}$ در $\mathbf{p}$ را درنظرمی گیریم، سرعت آغازی خم $t\rightarrow F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ در $\mathbf{E}^{m}$ را با $F_{*}(\mathbf{v})$ نشان می‌دهیم. F_{*} تابع



شکل ۱۵.۱



شکل ۱۶.۱

به‌دست‌آمده را نگاشت مشتق F می‌نامند (این نگاشت از بردارهای مماس $\mathbf{E}^n$ به‌بردارهای مماس $\mathbf{E}^m$ است).

باید توجه داشت کــه $F(\mathbf{p})$ موضع آغازی خم $t \to F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ به‌ازای $t=\circ$ است. بنابراین (تعریف ۳.۴) نقطهٔ اثر سرعت آغازی آن $F(\mathbf{p})$ است، درنتیجه F_* بردار مماس بر $\mathbf{E}^n$ در $\mathbf{p}$ را به‌بردار مماس بر $\mathbf{E}^m$ در $F(\mathbf{p})$ بدل می‌کند.

به‌عنوان مثال به‌محاسبهٔ نگاشت مشتق:

$$F(u,v)=(u^{۲}-v^{۲},\ ۲uv)$$

می‌پردازیم (مثال ۲، ۳.۷). به‌ازای بردار مماس $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ داریم:

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(p_{۱}+tv_{۱},\ p_{۲}+tv_{۲})$$

بنابراین:

$$F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=((p_{۱}+tv_{۱})^{۲}-(p_{۲}+tv_{۲})^{۲},\ ۲(p_{۱}+tv_{۱})(p_{۲}+tv_{۲}))$$

این فرمول خمی در $\mathbf{E}^{۲}$ را نشان می‌دهد که بنابرتعریف، سرعت آغازی آن $F_*(\mathbf{v})$ است. چون برحسب t ازمختصات بالا مشتق بگیریم (تعریف ۳.۴)، در $F(\mathbf{p})$ داریم:

$$F_*(\mathbf{v})=F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})'(\circ)=۲(p_{۱}v_{۱}-p_{۲}v_{۲},\ v_{۱}p_{۲}+p_{۱}v_{۲})$$

۵.۷. قضیه. اگر $F=(f_{۱}, f_{۲}, \ldots, f_m)$ نگاشتی از $\mathbf{E}^n$ به $\mathbf{E}^m$ و $\mathbf{v}$ بردار مماس بر $\mathbf{E}^n$ در $\mathbf{p}$ باشد، دراین صورت در $F(\mathbf{p})$ خواهیم داشت:

$$F_*(\mathbf{v})=(\mathbf{v}[f_{۱}], \ldots, \mathbf{v}[f_m])$$

بنابراین $F_*(\mathbf{v})$ به‌وسیلهٔ $\mathbf{v}[f_i]$ مشتقهای توابع مختصاتی F نسبت به $\mathbf{v}$ معین می‌گردد.

برهان. برای سادگی $m=۳$ اختیار می‌کنیم. بردار $\mathbf{v}$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$، با توجه به تعریف F_* درتعریف (۴.۷)، و خم β به‌صورت زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\beta(t)=F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=(f_{۱}(\mathbf{p}+t\mathbf{v}),\ f_{۲}(\mathbf{p}+t\mathbf{v}),\ f_{۳}(\mathbf{p}+t\mathbf{v}))$$

بنابرتعریف، $\beta'(\circ)=F_*(\mathbf{v})$. به‌موجب تعریف (۳.۴) برای محاسبهٔ بردارسرعت $\beta'(\circ)$ باید مشتق توابع مختصاتی $f_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ خم β را در $t=\circ$ گرفت. اما $(d/dt)(f_i(\mathbf{p}+t\mathbf{v}))|_{t=\circ}$ دقیقاً همان $\mathbf{v}[f_i]$ است که در آن مطابق معمول نقطهٔ اثر $\mathbf{p}$ ازنمادگذاری حذف شده است. بنابراین

$$F_*(\mathbf{v})=(\mathbf{v}[f_{۱}],\ \mathbf{v}[f_{۲}],\ \mathbf{v}[f_{۳}])_{\beta(\circ)}$$

اما بنابر تعریف β:

$$\beta(0) = F(\mathbf{p})$$ ∎

یك نقطه مانند $\mathbf{p}$ در $\mathbf{E}^n$ را ثابت می‌گیریم. چنان‌که در بالا گفته شد، هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{E}^n$ در $\mathbf{p}$، به‌وسیلهٔ F_* به یك بردار مماس $F_*(v)$ بر $\mathbf{E}^m$ در $F(\mathbf{p})$ تبدیل می‌شود. وبدین‌ترتیب به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ در $\mathbf{E}^n$ نگاشت مشتق F_* معرف تابعی است:

$$F_{*p} : T_p(\mathbf{E}^n) \to T_{F(p)}(\mathbf{E}^m)$$

که آن را نگاشت مشتق F در $\mathbf{p}$ می‌نامند. به همان طریق‌که در آنالیز مقدماتی هرتابع دیفرانسیلپذیر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دارای تابع مشتق $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ است که در هرنقطهٔ t از $\mathbf{R}$ مشتق f در t یعنی $f'(t)$ را به‌دست می‌دهد.

ارتباط آنالیز و جبر خطی بیش ازآن است که درآنالیز مقدماتی بتوان حدس زد. اهمیت این ارتباط درفرع زیر روشن می‌شود.

۶.۷ فرع. اگر F نگاشتی از $\mathbf{E}^n$ بـه $\mathbf{E}^m$ بـاشد، دراین صورت درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^n$، نگاشت مشتق:

$$F_{*p} : T_p(\mathbf{E}^n) \to T_{F(p)}(\mathbf{E}^m)$$

یك تبدیل خطی است.

برهان. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دوبردارمماس در $\mathbf{p}$ و a و b دوعدد حقیقی باشند، باید نشان دهیم که:

$$F_*(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aF_*(\mathbf{v}) + bF_*(\mathbf{w})$$

این مطلب با توجه به‌حکم اول قضیهٔ ۳.۲ وقضیهٔ بالا به‌آسانی اثبات می‌شود. ∎

خطی بودن F_{*p} تعمیم همان نکته است‌که $f'(t)$ یعنی مشتق تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ شیب خط مماس برنمودار تابع f در t را نشان می‌دهد. دراینجا به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$، F_{*p} تبدیلی خطی است که بهترین تقریب تغییرات F درمجاورت $\mathbf{p}$ می‌باشد. این‌مطلب درآنالیز پیشرفته بسط کامل یافته و دراثبات قضیهٔ ۱۰.۷ به‌کار می‌رود.

چون $F_{*p} : T_p(\mathbf{E}^n) \to T_{F(p)}(\mathbf{E}^m)$ یك تبدیل خطی‌است، منطقی است که ماتریس آن را نسبت به‌پایه‌های طبیعی $T_p(\mathbf{E}^n)$ و $T_{F(p)}(\mathbf{E}^m)$ که به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$U_1(\mathbf{p}), \dots, U_n(\mathbf{p}) \qquad (\text{برای } T_p(\mathbf{E}^n))$$

و

$$U_1(F(\mathbf{p})), \dots, U_m(F(\mathbf{p})) \qquad (\text{برای } T_{F(p)}(\mathbf{E}^m))$$

محاسبه‌کنیم. این ماتریس را ماتریس ژاکوبی F در $\mathbf{p}$ می‌نامند.

۷.۷ فرع. اگر $F = (f_1, \dots, f_m)$ نگاشتی از $\mathbf{E}^n$ به $\mathbf{E}^m$ باشد، آنگاه:

$$F_*(U_j(\mathbf{p}))=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})U_i(F(\mathbf{p}))\qquad (1\leqslant j\leqslant n)$$

بنابراین ماتریس ژاکوبی F در $\mathbf{p}$ عبارت است از:

$$\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\mathbf{p})\right)_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n}$$

برهان. درفرع ۶.۷ قرار می‌دهیم $\mathbf{v}=U_j(\mathbf{p})$. چون حاصل تأثیر بردار یکهٔ $U_j(\mathbf{p})$ بر f_i درست برابر است با $(\partial f_i/\partial x_j)(\mathbf{p})$، ازآنجا:

$$F_*(U_j(\mathbf{p}))=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{p}),\ \ldots,\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{p})\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})U_i(F(\mathbf{p}))\qquad\blacksquare$$

که آن را به‌اختصار چنین می‌نویسند:

$$F_*(U_j)=\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bar{U}_i$$

که درآن U_j و $\partial f_i/\partial x_j$ در $\mathbf{p}$ محاسبه می‌شوند، و $\bar{U}_j$ در $F(\mathbf{p})$. ازاینجا معلوم‌می‌شود که نگاشت مشتق F کاملاً به‌وسیلهٔ مشتقهای جزئی‌توابع مختصاتی‌آن معین می‌گردد. مثلاً نگاشت مثال ۲، ۳.۷ را درنظرمی‌گیریم. توابع مختصاتی‌آن عبارت‌اند از $f=u^2-v^2$ و $g=2uv$. بنابراین:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u & -2v\\ 2v & 2u\end{pmatrix}$$

بدین‌ترتیب ماتریس ژاکوبی آن درنقطهٔ $\mathbf{p}=(p_1,\ p_2)$ چنین است:

$$\begin{pmatrix}2p_1 & -2p_2\\ 2p_2 & 2p_1\end{pmatrix}$$

۸.۷ قضیه. خم α در $\mathbf{E}^n$ و نگاشت $F:\mathbf{E}^n\rightarrow\mathbf{E}^m$ و $\beta=F(\alpha)$ نگارهٔ خم α در $\mathbf{E}^m$ را درنظر می‌گیریم، دراین صورت $\beta'=F_*(\alpha')$.

این قضیه مبین آن است که F_* سرعتهای خمها را حفظ می‌کند، چون به‌ازای هر t، $\beta'(t)$ یعنی سرعت خم نگاره با نگارهٔ سرعت $\alpha'(t)$ به‌وسیلهٔ F_* برابر است.

برهان. برای سادگی تجسم قرار می‌دهیم $m=3$. اگر $F=(f_1,\ f_2,\ f_3)$، آنگاه:

$$\beta = F(\alpha) = (f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ f_3(\alpha))$$

وبنابراین توابع مختصاتی βعبارت اند از $\beta_i = f_i(\alpha)$. بنا بر قضیهٔ ۵.۷ داریم:

$$F_*(\alpha'(t)) = (\alpha'(t)[f_1],\quad \alpha'(t)[f_2],\quad \alpha'(t)[f_3])$$

اما با استفاده از لم ۶.۴ به‌دست می‌آید:

$$\alpha'(t)[f_i] = \frac{d(f_i(\alpha))}{dt}(t) = \frac{d\beta_i}{dt}(t)$$

ازآنجا:

$$F_*(\alpha'(t)) = \left(\frac{d\beta_1}{dt}(t),\ \frac{d\beta_2}{dt}(t),\ \frac{d\beta_3}{dt}(t)\right)$$

علاوه براین نقطهٔ اثر بردار مماس، نقطهٔ $F(\alpha(t)) = \beta(t)$ می‌باشد. بنابراین $F_*(\alpha'(t))$ دقیقاً همان $\beta'(t)$ است. ∎

به‌همان طریق که از مشتق یك تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ می‌توان اطلاعاتی دربارهٔ f به‌دست آورد، از F_* نگاشت مشتق نیز می‌توان برای بررسی نگاشت F استفاده کرد. بررسی دقیق این مطلب در آنالیز انجام می گیرد، ما دراینجا به‌یکی دوتعریف اساسی که درفصول بعد به‌کار می‌آیند اکتفا می کنیم.

۹.۷. تعریف. نگاشت $F : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ را منظم نامند،اگر درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^n$ نگاشت مشتق F_{*p} یك به‌یك باشد.

چون هر F_{*p} یك تبدیل خطی است، با استفاده از نتایج جبر خطی می‌توان نشان دادکه سه شرط زیر هم‌ارزند:

(۱) F_{*p} یك به‌یك است.

(۲) اگر $F_*(\mathbf{v}_p) = 0$، آنگاه $\mathbf{v}_p = 0$.

(۳) مرتبهٔ ماتریس ژاکوبی F در $\mathbf{p}$ برابر n (بعد حوزهٔ $\mathbf{E}^n$ از F) است.

مثلاً دومین نگاشت مثال ۳.۷ منظم نیست. اما شرط یك به‌یك بودن فقط در یك نقطه، مبدأ، برقرارنمی گردد. زیرا محاسبه‌ای که درست بلافاصله قبل ازقضیهٔ ۸.۷ صورت گرفته نشان می‌دهدکه این ماتریس ژاکوبی در $\mathbf{p} \neq 0$ ازمرتبهٔ ۲ و در $\mathbf{p} = 0$ از مرتبهٔ صفر است.

نگاشتی که دارای نگاشت عکس باشد، دیفئومرفیسم نام دارد. لزوماً هر دیفئومرفیسم یك به‌یك وپوشاست، اما هرنگاشتی که یك به‌یك و پوشا باشد معلوم نیست که بتواند دیفئومرفیسم باشد (تمرین ۱۱). نتایج این بند دربارهٔ نگاشتهایی که فقط روی مجموعه‌های باز $\mathbf{E}^n$ تعریف شده‌اند نیز صادق‌اند. به‌خصوص اغلب بحث دربارهٔ دیفئومرفیسمهای یك

مجموعهٔ باز از $\mathbf{E}^n$ به‌مجموعهٔ باز دیگری مطرح می‌گردد.

دراینجا بدون اثبات، یکی ازنتایج اساسی آنالیز را بیان می‌کنیم.

۱۰.۷ قضیه. گیریم $F:\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ نگاشتی باشدکه $F_{*\mathbf{p}}$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$، یك به‌یك بباشد. دراین صورت یك مجموعهٔ باز $\mathscr{U}$ حاوی $\mathbf{p}$ وجود دارد به‌طوری‌که تخصیص F به $\mathscr{U}$ یك دیفئومرفیسم $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ بریك مجموعهٔ باز $\mathscr{V}$ باشد.

این‌قضیه را قضیهٔ تابع معکوس می‌نامند. زیرا مبین آن‌است که نگاشت تخصیص‌یافته $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ دارای نگاشت عکس $\mathscr{V} \to \mathscr{U}$ می‌باشد. اثبات این قضیه براساس این نکتهٔ است‌که در نقاط $\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}$ در مجاورت $\mathbf{p}$، $F(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p})$ تقریباً برابر است با $F(\mathbf{p})+F_*(\Delta\mathbf{p})$. چون فضاهای مماس در $\mathbf{p}$ و $F(\mathbf{p})$ دارای ابعاد متساوی می‌باشند، نگاشت خطی $F_{*\mathbf{p}}$ دارای عکس است، و F نیز درنزدیکی $\mathbf{p}$ دارای عکس خواهد بود.

تمرینات

۱. اگر F نگاشت $F=(u^2-v^2,\ 2uv)$ مثال ۳.۷ باشد، مطلوب‌است تعیین همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ به‌طوری‌که:

(الف) $F(\mathbf{p})=(0,\ 0)$ (ب) $F(\mathbf{p})=(8,\ -6)$ (ج) $F(\mathbf{p})=\mathbf{p}$

۲. نگاشت F درتمرین ۱، خط افقی $v=1$ را به‌سهمی $u \to F(u,1)=(u^2-1,\ 2u)$ بدل می‌کند. خطوط $u=1$ و $v=1$ ونگارهٔ آنها به‌وسیلهٔ F را بیابید.

۳. $F(S)$ نگارهٔ مجموعهٔ S به‌وسیلهٔ نگاشت F عبارت است ازهمهٔ نقاط $F(\mathbf{p})$ به طوری که $\mathbf{p}$ در S باشد. نگارهٔ هریك از مجموعه‌های زیر را به‌وسیلهٔ نگاشت F از تمرین ۱ بیابید:

(الف) نوار افقی S : $1 \leqslant v \leqslant 2$

(ب) نیمقرص S : $u^2+v^2 \leqslant 1,\ v \geqslant 0$

(ج) زاویهٔ S : $-u \leqslant v \leqslant u,\ u \geqslant 0$

درهر مورد، مجموعهٔ S ونگاره‌اش، $F(S)$، را برروی یك نقشه نشان دهید.

(راهنمایی: نخست نگارهٔ خمهای مرزی S را بیابید.)

۴. (الف) مستقیماً با استفاده ازتعریف نگاشت مشتق، نشان دهیدکه نگاشت مشتق مثال ۱: ۳.۷ عبارت است از:

$$F_*(\mathbf{v}_p)=(v_1-v_2,\ v_1+v_2,\ 2v_3)_{F(p)}$$

(راهنمایی: مستقیماً ازتعریف نگاشت مشتق امتدادی شروع کنید.)

(ب) به‌طورکلی اگر $F:\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ یك تبدیل خطی باشد، ثابت‌کنیدکه:

$$F_*(\mathbf{v}_p) = F(\mathbf{v})_{F(p)}$$

۵. اگر $F = (f_1, \ldots, f_m)$ نگاشتی از $\mathbf{E}^n$ به $\mathbf{E}^m$ باشد، می‌نویسیم:

$$F_* = (df_1, \ldots, df_m)$$

زیرا بنا برقضیهٔ ۵.۷ داریم:

$$F_*(\mathbf{v}_p) = (df_1(\mathbf{v}_p), \ldots, df_m(\mathbf{v}_p))_{F(p)}$$

F_* را برای نگاشت $F = (x\cos y, x\sin y, z)$ از $\mathbf{E}^3$ به $\mathbf{E}^3$ بیابید، و در هر یك ازحالتهای زیر $F_*(\mathbf{v}_p)$ را محاسبه کنید:

(الف) $\mathbf{v} = (2, -1, 3), \mathbf{p} = (0, 0, 0)$

(ب) $\mathbf{v} = (2, -1, 3), \mathbf{p} = (2, \pi/2, \pi)$

۶. آیا نگاشت تمرین بالا منظم است؟

۷. نگاشتهای $F = (f_1, f_2)$ و $G = (g_1, g_2)$ از $\mathbf{E}^2$ بـه $\mathbf{E}^2$ را درنظر می‌گیریم. تـوابع مختصاتی اقلیدسی تـابع مرکب $GF : \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ را محاسبه‌کنید، و نشان دهیدکه GF یك نگاشت است.

۸. نشان دهیدکه درتعریف $F_*(\mathbf{v}_p)$ در (۴.۷) می‌توان به‌جای خط راست هر خم α با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_p$ را قرار داد.

۹. ثابت‌کنیدکه نگاشت $F : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^m$ مشتقهای امتدادی را حفظ می‌کند بدین معنی: اگر $\mathbf{v}_p$ بردارمماس بر $\mathbf{E}^n$ و g تابع دیفرانسیلپذیری روی $\mathbf{E}^m$ باشد، دراین‌صورت:

$$F_*(\mathbf{v}_p)[g] = \mathbf{v}_p[g(F)]$$

۱۰. نگاشت $F = (f_1, f_2)$ از $\mathbf{E}^2$ به $\mathbf{E}^2$ را درنظر می‌گیریم. اگر به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{q}$ از $\mathbf{E}^2$ معادلات:

$$\begin{cases} q_1 = f_1(p_1, p_2) \\ q_2 = f_2(p_1, p_2) \end{cases}$$

دارای جواب یکتای:

$$\begin{cases} p_1 = g_1(q_1, q_2) \\ p_2 = g_2(q_1, q_2) \end{cases}$$

باشد، ثابت‌کنیدکه F یك به‌یك وپوشاست، و $F^{-1} = (g_1, g_2)$.

۱۱. (ادامه) درهریك ازحالتهای زیر نشان دهیدکه F یك به‌یك و پوشاست، F^{-1}، تابع

معکوس، را محاسبه و تعیین کنید که F یك دیفئومرفیسم است یا نیست (یعنی، F^{-1} دیفرانسیلپذیر است یا نیست).

(الف) $F=(ve^u, u)$

(ب) $F=(u^3, v-u)$

(ج) $F=(1+2u-2v, 4-2u+v)$

۱۲. نگاشتهای $F:\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^m$ و $G:\mathbf{E}^m \to \mathbf{E}^p$ را درنظر می‌گیریم:

(الف) نتایج تمرین ۷ را دراین حالت تعمیم دهید.

(ب) اگر α خمی در $\mathbf{E}^n$ باشد، نشان دهید که:

$$(GF)_*(\alpha')=G_*(F_*(\alpha'))$$

[راهنمایی: $(GF)(\alpha)=G(F(\alpha))$].

(ج) نتیجه بگیرید که $(GF)_*=G_*F_*$: نگاشت مشتق یك نگاشت مرکب برابر است با ترکیب نگاشتهای مشتق.

۱۳. اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ یك تابع حقیقی دیفرانسیلپذیر روی خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد، ثابت کنید که $f_*(\mathbf{v}_p)$ بردار مماس $f'(\mathbf{p})\mathbf{v}$ درنقطهٔ $f(\mathbf{p})$ است.

۸. خلاصه

با مفهوم آشنای توابع حقیقی بحث را آغازکردیم و با استفاده ازجبر خطی درهر مرحله یك دسته از اشیاء ریاضی را ساختیم. مفهوم بنیادی بردار مماس بــه میدانهــای برداری انجامید و دوگان آن ۱ـفرمیها به نوبهٔ خود رهنمون فرمهای دیفرانسیلی گردید. مفاهیم خم وتوابع دیفرانسیلپذیر به‌نگاشتهای $F:\mathbf{E}^n\to\mathbf{E}^m$ تعمیم یافت.

سپس بااستفاده ازمفهوم معمولی مشتق توابع‌حقیقی، به‌تعریف اعمال دیفرانسیلگیری از این اشیاء پرداختیم: مشتق امتدادی یــك تابع، مشتق خارجی فــرمها، سرعت خمهــا، نگاشت مشتق یــك نگاشت. این اعمال بــه صورت مشتقهای معمولی (یــا جزئی) توابع مختصاتی با مقدار حقیقی ساده شدند، امــا باید توجه داشت‌کــه دربیشتر حالتها تعاریف این اعمال مستقل ازمختصات بودند (این مطلب را می‌توان درتمام موارد عملی ساخت). به‌طورکلی اعمال دیفرانسیلگیری به نحوی دارای خصوصیات خطی و لایبنیتزی مشتقهای معمولی می‌باشند.

محتمل است خواننده قبلاً با بعضی ازاین مفاهیم حداقل درحالتهای خاص، آشنا شده باشد. اما دراینجا ما تعاریفی دقیق وفهرستی ازخواص بنیادی دراختیار داریم‌که با استفاده ازآنها می‌توانیم کاوش خود را درهندسهٔ دیفرانسیل آغازکنیم.

۲

میدانهای سه‌وجهی

به‌بیان اجمالی می‌توان گفت که هندسه با اندازه‌گیری مسافتها و زوایا آغاز می‌گردد. چنانچه خواهیم دید هندسهٔ فضای اقلیدسی را می‌توان از حاصل‌ضرب نقطه‌ای، یعنی حاصل‌ضرب داخلی طبیعی فضای اقلیدسی نتیجه گرفت.

قسمت اعظم این فصل به‌بررسی هندسهٔ خمها در E^3 اختصاص دارد. تأکید براین مبحث نه‌تنها به‌خاطر اهمیت ذاتی آن است بلکه ازآن‌جهت نیز که روش اساسی بررسی خمها درسراسر هندسهٔ دیفرانسیل مفید واقع می‌گردد حائز اهمیت است. در E^3 برای بررسی یك خم به هرنقطهٔ آن یك سه‌وجهی متشکل از سه‌بردار یکهٔ متعامد وابسته می‌کنند. میزان تغییر این بردارها درطول خم به‌وسیلهٔ فرمولهای مشهور فرنه (قضیهٔ ۲.۳)، برحسب خود بردارها بیان می‌شود و در واقع نظریهٔ خمها در E^3 نتیجهٔ ساده این فرمولهای بنیادی است.

بعداً از این «روش سه‌وجهیهای متحرك» برای مطالعهٔ رویه‌ها در E^3 استفاده می‌کنیم. فکرکلی آن است که رویه را نوعی خم دوبعدی تصور کرده و روش فرنه را تاآنجاکه ممکن است تعقیب‌کنیم. برای اجرای این طرح به‌تعمیمی از فرمولهای فرنه نیازمندیم (قضیهٔ ۲.۷) که به‌وسیلهٔ الی‌کارتان انجام گرفته است. کارتان درآغاز این قرن نخستین کسی بود که اهمیت این روش را نه‌تنها درهندسهٔ دیفرانسیل بلکه دربسیاری زمینه‌های دیگر نیز کشف کرد.

۱. حاصل‌ضرب نقطه‌ای

بحث را با یادآوری خواص حاصل‌ضرب داخلی طبیعی درفضای برداری $\mathbf{E}^3$ آغاز می‌کنیم.

۱.۱. تعریف. حاصل‌ضرب نقطه‌ای نقاط $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ و $\mathbf{q}=(q_1, q_2, q_3)$ در $\mathbf{E}^3$ عبارت است از عدد

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای یك حاصل‌ضرب داخلی است، یعنی دارای سه خصوصیت زیر می‌باشد.

(۱) دوخطی است:

$$(a\mathbf{p}+b\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}=a\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+b\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}\cdot(a\mathbf{p}+b\mathbf{q})=a\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}+b\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}$$

(۲) متقارن است: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}$

(۳) مثبت معین است: $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}\geqslant 0$ و $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=0$ اگر، وفقط اگر، $\mathbf{p}=0$ (دراینجا $\mathbf{p}$، $\mathbf{q}$ و $\mathbf{r}$ سه نقطهٔ دلخواه از $\mathbf{E}^3$ و a و b اعدادند).

نرم نقطهٔ $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ عبارت است ازعدد

$$\|\mathbf{p}\|=(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})^{1/2}=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}$$

بنابراین نرم تابعی است با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ و دارای خواص اساسی زیر:

$$\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|\leqslant\|\mathbf{p}\|+\|\mathbf{q}\|$$

و

$$\|a\mathbf{p}\|=|a|\|\mathbf{p}\|$$

که درفرمول اخیر، $|a|$ قدرمطلق عدد a است.

بااستفاده از نرم می‌توان مسافت معمولی‌در $\mathbf{E}^3$ را به‌صورتی‌ساده وکوتاه بیان‌کرد.

۲.۱. تعریف. اگر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ نقاطی از $\mathbf{E}^3$ باشند، مسافت اقلیدسی از $\mathbf{p}$ تا $\mathbf{q}$ عبارت است از عدد

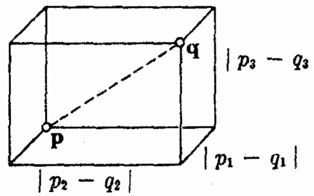
$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q})=\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$$

زیرا چون

$$\mathbf{p}-\mathbf{q}=(p_1-q_1, p_2-q_2, p_3-q_3)$$

از بسط عبارت نرم فرمول معروف زیر به‌دست می‌آید (شکل ۱.۲)

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q})=((p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2)^{1/2}$$



شکل ۱.۲

از مسافت اقلیدسی می‌توان برای تعریف دقیقتر مجموعه‌های باز (فصل ۱، بند ۱) استفاده کرد. اولاً اگر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ و عدد $\epsilon > 0$ را در نظر بگیریم ϵ-همسایگی نقطهٔ $\mathbf{p}$ در $\mathbf{E}^3$ که با $\mathcal{N}_\epsilon$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط $\mathbf{q}$ از $\mathbf{E}^3$ به‌طوری که $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \epsilon$. ثانیاً زیرمجموعهٔ $\mathcal{O}$ از $\mathbf{E}^3$ باز خواهد بود اگر هرنقطهٔ آن دارای یك ϵ-همسایگی باشد که تماماً در $\mathcal{O}$ واقع باشد. به‌عبارت دیگر همهٔ نقاطی‌که به‌اندازهٔ کافی به‌یك نقطه ازمجموعهٔ باز نزدیك‌اند به‌آن مجموعه تعلق دارند. این تعریف را به‌آسانی می‌توان در $\mathbf{E}^n$ نیز تعمیم داد.

درفصل اول دیدیم که به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ می‌توان یك ایزومرفیسم متعارف $\mathbf{v} \to \mathbf{v}_p$ از $\mathbf{E}^3$ به $T_p(\mathbf{E}^3)$ فضای مماس در $\mathbf{p}$ برقرارکرد. این ایزومرفیسمها درهندسهٔ اقلیدسی دارای اهمیت بنیادی می‌باشند و با استفاده ازآنها حاصل‌ضرب نقطه‌ای در $\mathbf{E}^3$ را می‌توان به‌هریك ازفضاهای مماس منتقل کرد.

۳.۱ تعریف. حاصل‌ضرب نقطه‌ای* بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ و $\mathbf{w}_p$ دریك نقطهٔ $\mathbf{E}^3$ برابر است با عدد $\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{w}_p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

به‌عنوان مثال

$$(1, 0, -1)_p \cdot (3, -3, 7)_p = 1(3) + 0(-3) + (-1)7 = -4$$

بدیهی است که با این تعریف درهر فضای مماس $T_p(\mathbf{E}^3)$ یك حاصل‌ضرب نقطه‌ای معین می‌گردد که دارای همان خواص حاصل‌ضرب نقطه‌ای اصلی $\mathbf{E}^3$ می‌باشد، و به‌خصوص هر بردار مماس $\mathbf{v}_p$ دارای نرم (یا طول) $\|\mathbf{v}_p\| = \|\mathbf{v}\|$ است.

با استفاده ازنامساوی شوارتس:

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leqslant \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

که قضیه‌ای اساسی درجبر خطی است، می‌توان کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را با معادلهٔ زیر تعریف کرد (شکل ۲.۲):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \vartheta$$

ازاین‌رو حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار برابر است با حاصل‌ضرب طولهای آنها درکسینوس زاویهٔ بین آنها. (زاویهٔ ϑ به‌گونهٔ منحصری معین نمی‌شود مگراینکه مثلاً قیود دیگری مانند $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ نیز گذاشته شود.)

به‌خصوص اگر $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$، آنگاه $\vartheta = \pi/2$ خواهد بود، یعنی دوبردار را هنگامی

---

* که دربرخی ازموارد «ضرب نقطه‌ای» را به‌جای «حاصل‌ضرب نقطه‌ای» گفته‌ایم.ــم.

متعامد گوییم که حاصل‌ضرب نقطه‌ای آنها برابر صفر باشد. بردار به‌طول ۱ را بردار یکه می‌نامند.

۴.۱ تعریف. مجموعه‌ای از سه بردار یکهٔ دو به‌دو متعامد $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ مماس بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ را یك سه‌وجهی درنقطهٔ $\mathbf{p}$ می‌نامند.

بدین‌ترتیب $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ فقط هنگامی یك سه‌وجهی است که:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

از تقارن حاصل‌ضرب نقطه‌ای نتیجه می‌شود که دومین دستهٔ معادلات به‌صورت زیر نیز نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

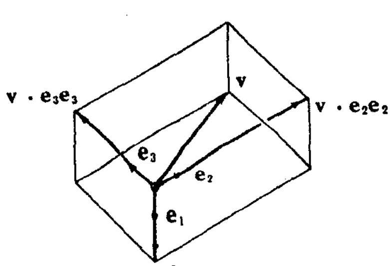
با استفاده از طرز نمایش اندیسی، این ۹ معادله را می‌توان به‌اختصار به‌صورت $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$، به‌ازای $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ نوشت، که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است (به‌ازای $i \neq j$ مقدار آن صفر و به‌ازای $i = j$ برابر ۱ است). مثلاً درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$، بردارهای $U_1(\mathbf{p})$، $U_2(\mathbf{p})$ و $U_3(\mathbf{p})$ که درتعریف ۴.۲ فصل اول بیان شد یك سه وجهی درنقطه $\mathbf{p}$ تشکیل می‌دهند.

۵.۱ قضیه. اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ یك سه‌وجهی درنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$، و $\mathbf{v}$ یك بردار مماس دلخواه بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه (شکل ۳.۲)

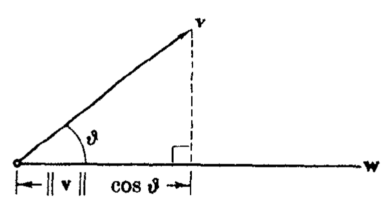
$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$$

برهان. نخست نشان می‌دهیم که بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ دارای استقلال خطی‌اند. گیریم:

$$\sum a_i \mathbf{e}_i = 0$$



شکل ۳.۲



شکل ۲.۲

دراین صورت:

$$0=(\sum a_i\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j=\sum a_i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\sum a_i\delta_{ij}=a_j$$

که درآن عمل مجموع‌یابی به‌ازای $i=1, 2, 3$ انجام می‌گیرد. بنابراین:

$$a_1=a_2=a_3=0$$

و این همان نتیجهٔ مطلوب است. چون فضای مماسی $T_p(\mathbf{E}^3)$ با $\mathbf{E}^3$ ایزومرف است، بنابراین ۳ بعدی است، و سه بردار مستقل $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ یك پایهٔ آن می‌باشند، و متناظر به‌هر بردار $\mathbf{v}$ سه عدد (یکتا) c_1، c_2، c_3 وجود دارند به‌طوری‌که:

$$\mathbf{v}=\sum c_i\mathbf{e}_i$$

اما

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_j=(\sum c_i\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j=\sum c_i\delta_{ij}=c_j$$

و از آنجا

$$\mathbf{v}=\sum(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \quad \blacksquare$$

این نتیجه (که درهر فضای برداری با حاصل‌ضرب داخلی صادق است) یکی از وسایل تسهیل‌کار در ریاضی است. زیرا برای تعیین مختصات یك بردار دریك پایهٔ دلخواه درحالت کلی باید یك دستگاه معادلات خطی ناهمگن را حل کرد، کاری‌که حتی در $\mathbf{E}^3$ نیز آسان نیست. اما این قضیه طرز تعیین مختصات بردار $\mathbf{v}$ را نسبت به‌یك سه‌وجهی (یعنی یك پایهٔ متعامد یکانی) فقط با محاسبهٔ سه حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1$، $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2$، $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3$ نشان می‌دهد. این‌روش را بسط متعامد یکانی $\mathbf{v}$ برحسب سه‌وجهی $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ می‌نامیم. درحالت خاص برای سه‌وجهی طبیعی $U_1(\mathbf{p})$، $U_2(\mathbf{p})$، $U_3(\mathbf{p})$ اتحاد

$$\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)=\sum v_iU_i(\mathbf{p})$$

یك بسط متعامد یکانی را نشان می‌دهد، وحاصل‌ضرب نقطه‌ای برحسب مؤلفه‌های اقلیدسی به‌صورت $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\sum v_iw_i$ معین می‌گردد. اگر یك سه‌وجهی دلخواه $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ را در نظر بگیریم، دراین صورت هر بردار $\mathbf{v}$ نسبت به‌این سه‌وجهی دارای مؤلفه‌های جدید $a_i=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i$ می‌باشد، اما حاصل‌ضرب نقطه‌ای همچنان با فرمول سادهٔ زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\sum a_ib_i$$

زیرا:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=(\sum a_i\mathbf{e}_i)\cdot(\sum b_i\mathbf{e}_i)=\sum_{i,j}a_ib_j\,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$$

$$=\sum_{i,j}a_ib_j\,\delta_{ij}=\sum a_ib_i$$

درکاربردهای پیچیده‌تر هندسی، فایدهٔ استفاده از سه‌وجهی روشنتر می‌گردد.
مفهوم سه‌وجهی به‌مفهوم ماتریس متعامد بسیار نزدیك است.

۶.۱ تعریف. سه‌وجهی $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ را درنظرمی‌گیریم. ماتریس 3×3 که سطرهای آن مؤلفه‌های اقلیدسی این سه‌بردار است، ماتریس ایستاری سه‌وجهی نامیده می‌شود.

یعنی اگر:

$$\mathbf{e}_1=(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})_p$$
$$\mathbf{e}_2=(a_{21},\ a_{22},\ a_{23})_p$$
$$\mathbf{e}_3=(a_{31},\ a_{32},\ a_{33})_p$$

دراین صورت:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

بدین ترتیب A «ایستار» سه‌وجهی را در $\mathbf{E}^3$ مشخص می‌کند، اما نقطهٔ اثـر آن را نشان نمی‌دهد.

واضح است که سطرهای A متعامد یکانی‌اند، زیرا

$$\sum_k a_{ik}a_{jk}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij} \qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant 3$$

بنابرتعریف، این روابط مبین آن است که A یك ماتریس متعامد می‌باشد.
با استفاده ازضرب ماتریسی این‌معادلات را می‌توان به‌صورت $A\,{}^tA=I$ نوشت که درآن I ماتریس یکهٔ 3×3 و ${}^tA$ ترانهادهٔ A است، یعنی:

$${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

و چون $I={}^tAA$، بنابراین ${}^tA=A^{-1}$، عکس ماتریس A است.
در $\mathbf{E}^3$ حاصل‌ضرب دیگری وجود داردکه به‌حاصل‌ضرب خارجی ۱-فرمیها نزدیك است، و از لحاظ اهمیت بعد از ضرب نقطه‌ای قرار می‌گیرد. این ضرب را می‌توان فوراً به هرفضای مماس $\mathbf{E}^3$ منتقل کرد.

۷.۱ تعریف. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ در یک نقطهٔ $\mathbf{p}$ باشند، حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردار مماسی است که با

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix} U_1(\mathbf{p}) & U_2(\mathbf{p}) & U_3(\mathbf{p}) \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

تعریف می گردد.

این دترمینان را باید برحسب سطر اول بسط داد، مثلاً اگر $\mathbf{v}=(1,0,-1)_p$ و $\mathbf{w}=(2,2,-7)_p$ باشد، داریم:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix} U_1(\mathbf{p}) & U_2(\mathbf{p}) & U_3(\mathbf{p}) \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$=2U_1(\mathbf{p})+5U_2(\mathbf{p})+2U_3(\mathbf{p})=(2,5,2)_p$$

با توجه به‌خواص دترمینانها ثابت می‌شود که این حاصل‌ضرب برحسب $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ خطی و در قاعدهٔ تناوبی زیر صادق است

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=-\mathbf{w}\times\mathbf{v}$$

(و بنابراین در حالت خاص $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$). استفادهٔ هندسی از حاصل‌ضرب خارجی بر لم زیر استوار است.

۸.۱ لم. حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ برداری است که بر هردو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ عمود، و طول آن چنین است

$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2$$

برهان. گیریم $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\sum c_iU_i(\mathbf{p})$. بنابراین حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ برابر است با $\sum v_ic_i$. ازطرف دیگر بنابرتعریف حاصل‌ضرب خارجی، c_1، c_2 ، c_3، مؤلفه‌های اقلیدسی $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$، چنان هستند که

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

و این دترمینان صفر است، زیرا دو سطر آن برابرند، بنابراین $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است،

به‌همین ترتیب بر $\mathbf{w}$.

برای اثبات فرمول طول مستقیماً به‌محاسبه می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2 &= \left(\sum v_i^2\right)\left(\sum w_j^2\right)-\left(\sum v_i w_i\right)^2\\ &= \left(\sum_{i,j} v_i^2 w_j^2-\left\{\sum v_i^2 w_i^2+2\sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j\right\}\right.\\ &= \sum_{i\neq j} v_i^2 w_j^2-2\sum_{i<j} v_i w_i v_j w_j\end{aligned}$$

ازطرف دیگر

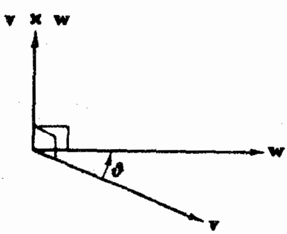
$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\sum c_i^2\\ &= (v_2w_3-v_3w_2)^2+(v_3w_1-v_1w_3)^2+(v_1w_2-v_2w_1)^2\end{aligned}$$

و از بسط این عبارتها همان نتیجهٔ بالا به‌دست می‌آید. ∎

تعبیر روشنتری برای طول حاصل‌ضرب خارجی ازفرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|=\|\mathbf{v}\|\;\|\mathbf{w}\|\sin\vartheta$$

که در آن $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ کوچکترین زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ است. راستای آن عملاً با «قاعدهٔ دست راست» مشخص می‌گردد: اگر انگشتان دست راست در جهت کوتاهترین دوران از $\mathbf{v}$ به $\mathbf{w}$ باشند، شست راستای $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ را نشان می‌دهد (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲

از ترکیب حاصل‌ضربهای نقطه‌ای و خارجی، حاصل‌ضرب اسکالر سه‌تایی به‌دست می‌آید که به‌هر سه‌بردار $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ عدد $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ را متناظر قرار می‌دهد (تمرین ۴). گذاشتن پرانتز ضرورتی ندارد. زیرا تنها معنی ممکن آن $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ است.

تمرینات

۱. گیریم $\mathbf{v}=(1,2,-1)$ و $\mathbf{w}=(-1,0,3)$ دوبردار مماس دریك‌نقطهٔ $\mathbf{E}^3$ باشند مطلوب است محاسبه:

(الف) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ (ب) $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

(ج) $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},\ \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ (د) $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$

(ه) کسینوس زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$.

۲. ثابت کنید که مسافت اقلیدسی دارای خواص زیر است:

(الف) $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geqslant ۰$، $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ۰$ اگر، و فقط اگر، $\mathbf{p} = \mathbf{q}$

(ب) $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

(ج) $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \geqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{r})$

به‌ازای همهٔ نقاط $\mathbf{p}$، $\mathbf{q}$ و $\mathbf{r}$ در $\mathbf{E}^۳$.

۳. ثابت کنید که بردارهای مماس

$$\mathbf{e}_۱ = \frac{(۱, ۲, ۱)}{\sqrt{۶}}, \quad \mathbf{e}_۲ = \frac{(-۲, ۰, ۲)}{\sqrt{۸}}, \quad \mathbf{e}_۳ = \frac{(۱, -۱, ۱)}{\sqrt{۳}}$$

یك سه‌وجهی تشکیل می‌دهند. بردار $\mathbf{v} = (۶, ۱, -۱)$ را به‌صورت ترکیب خطی از آنها بیان کنید. (نتیجه را با محاسبهٔ مستقیم بررسی کنید.)

۴. گیریم $\mathbf{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)$، $\mathbf{v} = (v_۱, v_۲, v_۳)$ ، $\mathbf{w} = (w_۱, w_۲, w_۳)$. ثابت کنید که:

(الف)
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_۱ & u_۲ & u_۳ \\ v_۱ & v_۲ & v_۳ \\ w_۱ & w_۲ & w_۳ \end{vmatrix}$$

(ب) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq ۰$ ، اگر، و فقط اگر، $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دارای استقلال خطی باشند.

(ج) اگر در $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ جای دوبردار باهم عوض شود حاصل‌ضرب تغییر علامت می‌دهد. یعنی

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$
$$= -\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

(د) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

۵. ثابت کنید که $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq ۰$، اگر، و فقط اگر، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ استقلال خطی داشته باشند، و نشان دهید که $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ مساحت متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ هستند.

۶. اگر $\mathbf{e}_۱$، $\mathbf{e}_۲$ ، $\mathbf{e}_۳$ یك سه‌وجهی باشد، نشان دهید که

$$\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \times \mathbf{e}_۳ = \pm ۱$$

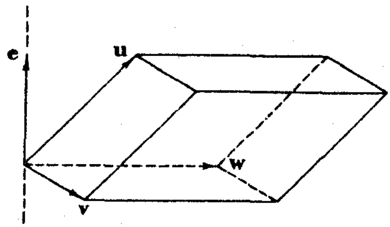
و از آنجا نتیجه بگیرید که دترمینان هرماتریس متعامد ۳×۳ برابر ± ۱ است.

۰۷ اگر $\mathbf{u}$ یك بردار یکه باشد، مؤلفهٔ $\mathbf{v}$ در راستای $\mathbf{u}$ برابر است با

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}\,\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \cos \vartheta\, \mathbf{u}$$

و نشان دهید که $\mathbf{v}$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ نوشت، که در آن $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ و $\mathbf{v}_1$ مؤلفهٔ $\mathbf{v}$ در راستای $\mathbf{u}$ است.

۰۸ نشان‌دهید که حجم متوازی‌السطوح با یالهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ برابراست با $\pm\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (شکل ۵.۲). (راهنمایی: از بردار یکهٔ $\mathbf{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} / \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ استفاده کنید.)



شکل ۵.۲

۰۹ با استفاده از ε- همسایگی، دقیقاً اثبات کنید که هریك از این زیر مجموعه‌های $\mathbf{E}^3$ باز است:

(الف) همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ به‌طوری که $\|\mathbf{p}\| < 1$.

(ب) همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ به‌طوری که $p_3 > 0$ (راهنمایی: $|p_i - q_i| \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.)

۰۱۰ در هریك ازحالتهای زیر، S مجموعهٔ همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ را نشان می‌دهد که در شرط داده شده صدق می‌کنند. S را مشخص و معلوم کنید که آیا باز است یا نیست.

(الف) $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ (ج) $p_1 = p_2 \neq p_3$

(ب) $p_3 \neq 0$ (د) $p_1^2 + p_2^2 < 9$

۰۱۱ اگر f یك تابع دیفرانسیلپذیر روی $\mathbf{E}^3$ باشد، نشان دهید که گرادیان آن

$$\nabla f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} U_i$$

(تمرین ۸ بند ۶.۱) دارای خواص زیر است:

(الف) به‌ازای هر بردار مماس در $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{v}[f] = (df)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla f)(\mathbf{p})$$

(ب) نرم $(\nabla f)(\mathbf{p})$ یعنی

$$\|(\nabla f)(\mathbf{p})\| = \left[\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{۲} (\mathbf{p}) \right]^{۱/۲}$$

برابرماکسیمم مشتق‌امتدادی $\mathbf{u}[f]$ به‌ازای‌همهٔ بردارهای یکه در $\mathbf{p}$ می‌باشد. به‌علاوه اگـر $(\nabla f)(\mathbf{p}) \neq ۰$، بردار یکه‌ای که این ماکسیمم به ازای آن به دست می آید عبارت است از:

$$\frac{(\nabla f)(\mathbf{p})}{\|(\nabla f)(\mathbf{p})\|}$$

اغلب بـه‌جای نمادهای $\operatorname{grad} f$، $\operatorname{curl} V$ و $\operatorname{div} V$ بـه‌ترتیب از ∇f، $\nabla \times V$ و $\nabla \cdot V$ استفاده می‌شود.

۱۲. توابع زاویه‌ای. گیریم f و g دوتابع‌حقیقی دیفرانسیلپذیر روی یك‌فاصلهٔ I باشند، به‌طوری‌که $f^{۲}+g^{۲}=۱$، و $\vartheta_{\circ}$ عددی‌باشدکه

$$g(\circ)=\sin\vartheta_{\circ} \quad \text{و} \quad f(\circ)=\cos\vartheta_{\circ}$$

اگر تابع ϑ را به‌صورت زیر تعریف‌کنیم

$$\vartheta(t)=\vartheta_{\circ}+\int_{\circ}^{t}(fg'-gf')\,dt$$

ثابت‌کنیدکه

$$f=\cos\vartheta, \quad g=\sin\vartheta$$

(راهنمایی: باید نشان‌دادکه $(f-\cos\vartheta)^{۲}+(g-\sin\vartheta)^{۲}=\circ$؛ برای‌این‌منظور ثابت‌کنیدکه $(f\cos\vartheta+g\sin\vartheta)'=\circ$).

نکتهٔ مهم در این تمرین آن است کـه ϑ روی تمام فاصلهٔ I بدون ابهام معین و دیفرانسیلپذیر است.

۲. خمها

بررسی هندسی خمها را با یادآوری چند تعریف‌آشنا آغاز می‌کنیم. گیریم $\alpha\colon I\to\mathbf{E}^{۳}$ یك خم باشد، درفصل اول، بند ۴، $\alpha'(t)$ بردار سرعت α در t تعریف شد. اکنون تندی α را در t با $v(t)=\|\alpha'(t)\|$، طول بردار سرعت، تعریف می‌کنیم. بدینسان تندی تابعی است با مقدارحقیقی روی فاصلهٔ I. برحسب مختصات اقلیدسی $\alpha=(\alpha_{۱},\alpha_{۲},\alpha_{۳})$ داریم

$$\alpha'(t)=\left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t)\,,\ \frac{d\alpha_2}{dt}(t)\,,\ \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)$$

بنابراین، v به‌صورت تابعی از α به‌وسیلهٔ فرمول زیر معین می‌گردد

$$v=\|\alpha'\|=\left(\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2\right)^{1/2}$$

در فیزیك مسافتی را که نقطهٔ متحرك می‌پیماید به‌وسیلهٔ انتگرال تندی برحسب زمان محاسبه می‌کنند. بدین ترتیب طول قوس α از $t=a$ تا $t=b$ را با عدد

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$$

تعریف می‌کنیم.

چون به‌جای $\|\alpha'\|$ مقدار آن‌را ازفرمول بالا قرار دهیم، فرمول‌معمولی طول‌قوس به‌دست می‌آید.

اغلب مسیر یك خم مورد توجه است نه تندی خاصی‌که با آن مسیر را می‌پیماید. برای این منظور مناسبتر است که خم α را طوری پارامتری کنیم که تندی آن برابر ۱ باشد، یعنی اگر خم به‌صورت β درآید $\|\beta'\|=1$. دراین‌حال β را «پیمایش‌استاندارد» خم α می‌نامند.

۱.۲. قضیه. اگر α خم منظمی در $\mathbf{E}^3$ باشد، می‌توان برای‌آن نمایش دیگر β را طوری تعیین کرد که تندی β برابر ۱ باشد.

برهان. درحوزهٔ I، $\alpha: I \to \mathbf{E}^3$، عدد a را اختیار می‌کنیم و تابع طول قوس

$$s(t)=\int_a^t \|\alpha'(u)\|\,du$$

را در نظر می‌گیریم (نقطهٔ $t=a$ را مبنای این نمایش پارامتری می‌نامند). بدین ترتیب ds/dt مشتق تابع $s=s(t)$ تابع تندی $v=\|\alpha'\|$ خم α است. چون α منظم است، α' هیچ‌گاه صفر نیست؛ بنابراین $ds/dt>0$، و بنابرقضیه‌ای درآنالیز، تابع s دارای یك تابع معکوس $t=t(s)$ است‌که مشتق آن در $s=s(t)$ عکس ds/dt در $t=t(s)$ است. به‌ویژه $dt/ds>0$.

اکنون برای α تعویض پارامتر $\beta(s)=\alpha(t(s))$ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که تندی β برابر یك است. بنابر لم ۵.۴ فصل اول داریم

$$\beta'(s)=\left(\frac{dt}{ds}\right)(s)\,\alpha'(t(s))$$

و از آنجا:

$$\|\beta'(s)\| = \frac{dt}{ds}(s)\|\alpha'(t(s))\| = \frac{dt}{ds}(s)\frac{ds}{dt}(t(s)) = ۱ \quad \blacksquare$$

این نمایش را اغلب نمایش پارامتری برحسب طول قوس می‌نامند. زیرا طول‌قوس β از $s=a$ تا $s=b$ $(a<b)$ درست برابر است با $b-a$.

برای مثال مارپیچ α راکه درفصل اول،مثال ۲.۴ بیان شد درنظر می‌گیریم. چون $\alpha(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$، پس α' سرعت آن با فرمول زیر بیان می‌شود

$$\alpha'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$

بنابراین:

$$\|\alpha'(t)\|^۲=\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)=a^۲\sin^۲t+a^۲\cos^۲t+b^۲=a^۲+b^۲$$

بدین‌ترتیب α دارای تندی ثابت $c=\|\alpha'\|=(a^۲+b^۲)^{۱/۲}$ می‌باشد. اگر طول قوس را از $t=۰$ اندازه‌گیری کنیم، دراین صورت:

$$s(t)=\int_۰^t c\,dt=ct$$

و ازآنجا $t(s)=s/c$. با جایگذاری‌آن در α نمایش خم با تندی واحد به‌دست‌می‌آید:

$$\beta(s)=\alpha\left(\frac{s}{c}\right)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$$

به‌آسانی می‌توان مستقیماً نیز تحقیق‌کرد که به‌ازای هر s داریم $\|\beta'(s)\|=۱$.

درنمایش پارامتری خم α به‌صورت $\alpha(h)$ اگر داشته‌باشیم $h'\geqslant ۰$، گوییم $\alpha(h)$ سونگهدار است و اگر $h'\leqslant ۰$، گوییم $\alpha(h)$ سوبرگردان است. درحالت اخیر α و $\alpha(h)$ مسیر مشترك را در جهتهای متقابل می‌پیمایند. نمایش با تندی واحد جهت را حفظ می‌کند، زیرا برای یك خم منظم α، $ds/dt>۰$.

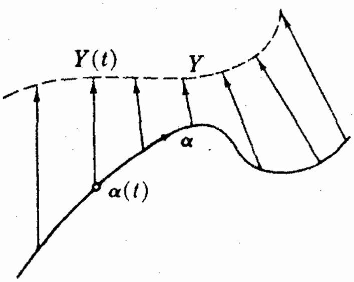
اکنون برای مفهوم کلی میدان برداری (تعریف ۳.۲، فصل اول) تعریف دیگری می‌آوریم که برای بررسی خمها مناسبتر است. به‌بیان اجمالی یك میدان برداری روی یك‌خم با مشخص‌کردن یك بردار درهر نقطه از خم معین می‌گردد.

۲.۲. تعریف. میدان برداری Y روی خم $\alpha: I\to \mathbf{E}^۳$ عبارت است ازتابعی که به‌هرعدد t از I یك بردار $Y(t)$ مماس بر $\mathbf{E}^۳$ درنقطهٔ $\alpha(t)$ را متناظر قرار می‌دهد.

تاکنون از این قبیل میدانهای برداری داشته‌ایم، مثلاً برای هر خم α سرعت آن α' دراین تعریف صدق می‌کند. باید توجه داشت‌که یك میدان برداری دلخواه روی α

لزومی ندارد که مانند α' بر α مماس باشد، و می‌تواند درهر راستایی باشد (شکل ۶.۲).

خواص میدانهای برداری روی خمها مشابه خواص میدانهای برداری روی $\mathbf{E}^3$ است. مثلاً اگر Y یک میدان برداری روی $\alpha : I \to \mathbf{E}^3$ باشد، دراین صورت به‌ازای هر t در I می‌توان نوشت:



شکل ۶.۲

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))_{\alpha(t)}$$
$$= \sum y_i(t) U_i(\alpha(t))$$

و بدین ترتیب توابع y_1، y_2، y_3 روی I با مقدار حقیقی معین می‌گردند که توابع مختصاتی اقلیدسی Y نام دارند. همواره فرض می‌کنیم که این توابع دیفرانسیلپذیرند تابع مرکب $t \to U_i(\alpha(t))$ نیز یک میدان برداری روی α است. اغلب ازلحاظ اختصار به‌جای $U_i(\alpha(t))$ فقط U_i می‌نویسیم.

اعمال جمع، ضرب دراسکالر، حاصل‌ضرب نقطه‌ای وحاصل‌ضرب خارجی میدانهای برداری روی یك خم مطابق معمول به‌روش نقطه‌ای تعیین می‌گردند. مثلاً اگر داشته‌باشیم

$$Y(t) = t^2 U_1 - t U_3, \quad Z(t) = (1 - t^2) U_2 + t U_3$$

و

$$f(t) = \frac{t+1}{t}$$

میدانهای برداری

$$(Y+Z)(t) = t^2 U_1 + (1-t^2) U_2$$

$$(fY)(t) = t(t+1) U_1 - (t+1) U_3$$

$$(Y \times Z)(t) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ t^2 & 0 & -t \\ 0 & 1-t^2 & t \end{vmatrix}$$
$$= t(1-t^2) U_1 - t^3 U_2 + t^2(1-t^2) U_3$$

وتابع با مقدار حقیقی

$$(Y \cdot Z)(t) = -t^2$$

به‌دست می‌آید.

برای محاسبهٔ مشتق یک میدان برداری روی خم α می‌توان از توابع مختصاتی اقلیدسی آن مشتق گرفت، و بدین ترتیب یك میدان برداری جدید روی α به‌دست آورد. توضیح آنکه اگر $Y=\sum y_i U_i$، آنگاه $Y'=\sum (dy_i/dt)U_i$. بدین ترتیب برای Y که در بالا بیان شد داریم

$$Y'=2tU_1-U_3, \quad Y''=2U_1, \quad Y'''=0$$

به‌ویژه α''، مشتق α' سرعت α، را شتاب α می‌نامند، و اگر $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$، آنگاه شتاب

$$\alpha''=\left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}\right)_\alpha$$

یك میدان برداری روی α است، و برخلاف سرعت، شتاب درحالت کلی برخم مماس نیست.

چنان‌که درپیش گفته شد مشتق همواره دارای خواص خطی و لایبنیتزی می‌باشد. در حالت میدانهای برداری روی یك خم به‌آسانی می‌توان خواص زیر را اثبات کرد

$$(aY+bZ)'=aY'+bZ'$$

(a و b دوعددند)

$$(fY)'=\frac{df}{dt}Y+fY' \quad و \quad (Y\cdot Z)'=Y'\cdot Z+Y\cdot Z'$$

اگر تابع $Y\cdot Z$ ثابت باشد، فرمول اخیر نشان می‌دهدکه

$$Y'\cdot Z+Y\cdot Z'=0$$

این نکته در بررسیهای آینده‌کراراً به‌کار خواهد رفت. به‌خصوص اگر Y دارای طول ثابت $\|Y\|$ باشد، دراین صورت Y و Y' درهرنقطهٔ خم متعامدند. زیرا ازثابت بودن $\|Y\|^2=Y\cdot Y$ نتیجه می‌شودکه $2YY'=0$.

چنان‌که گفتیم دوبردار مماس هنگامی موازی‌اندکه قسمت برداری آنها یکی باشد، و به‌همین‌ترتیب یك میدان برداری Y روی یك خم متوازی است اگر همهٔ مقادیر آن (بردارهای مماس) یکی‌باشند. دراین حالت، اگر قسمت برداری مشترك آن (c_1, c_2, c_3) باشد، آنگاه:

$$Y(t)=(c_1, c_2, c_3)_{\alpha(t)}=\sum c_i U_i \quad \text{به‌ازای همهٔ مقادیر } t$$

بدین‌ترتیب توازی دربارهٔ میدان برداری با ثابت بودن توابع مختصاتی اقلیدسی آن هم‌ارز است.

صفرشدن مشتقها درآنالیز همواره دارای اهمیت است، دراینجا سه حالت ساده را درنظر می‌گیریم.

۳.۲ لم. (۱) شرط لازم و کافی برای آنکه خم α ثابت باشد آن است که سرعت آن صفر باشد، $\alpha' = 0$.

(۲) شرط لازم و کافی برای آنکه خم غیرثابت α خط راست باشد آن است که شتاب آن صفر باشد، $\alpha'' = 0$.

(۳) شرط لازم و کافی برای آنکه میدان برداری Y روی یك خم متوازی باشد، آن است که مشتق آن صفر باشد، $Y' = 0$.

برهان. درهریك ازحالتها کافی است توابع مختصاتی اقلیدسی را درنظر بگیریم. به‌عنوان مثال ما (۲) را اثبات می‌کنیم. اگر $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$، دراین صورت داریم

$$\alpha'' = \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}\right)$$

وشرط $\alpha'' = 0$ هنگامی برقراراست که هریك از $d^2\alpha_i/dt^2$ ها صفر باشد. این‌مطلب باوجود مقادیر ثابت p_i و q_i به‌طوری که

$$\alpha_i(t) = p_i + tq_i \quad \text{به‌ازای } i = 1, 2, 3$$

هم‌ارز است. بنابراین $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$، و α طبق تعریفی که درمثال ۲.۴ فصل اول بیان شد یك‌خط راست‌است (توجه شود که ازشرط غیرثابت بودن α نتیجه می‌شود $\mathbf{q} \neq 0$). ∎

تمرینات

۱. برای خم $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$،

(الف) سرعت، تندی وشتاب را به‌ازای t دلخواه و $t = 1$ بیابید.

(ب) تابع‌طول قوس $s = s(t)$ (به‌مبنای $t = 0$) را بیابید وطول‌قوس α از $t = -1$ تا $t = +1$ را محاسبه کنید.

۲. نشان دهید که خم $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ روی یك مخروط در $\mathbf{E}^3$ واقع است. سرعت، تندی وشتاب α را در رأس مخروط بیابید.

۳. نشان دهید که تابع طول قوس خم $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ به‌صورت $s(t) = \sqrt{2}\sinh t$ است، وتعویض پارامتری به‌تندی واحد برای α بیابید.

۴. خم $\alpha(t) = (2t, t^2, \log t)$ را روی $I: t > 0$ درنظر می‌گیریم. نشان دهید که این خم ازنقاط $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$ و $\mathbf{q} = (4, 4, \log 2)$ می‌گذرد، وطول قوس بین این نقاط را بیابید.

۵. اگر β_1 و β_2 دو تعویض پارامتر با تندی واحد از خم α باشند، نشان دهید که عدد s_0 را می‌توان طوری تعیین کرد که به‌ازای هر s داشته باشیم $\beta_2(s) = \beta_1(s + s_0)$.

تعبیر هندسی s_0 چیست؟

۶. گیریم Y یك میدان برداری روی مارپیچ $\alpha(t)=(\cos t,\ \sin t,\ t)$ باشد. درهریك ازحالتهای زیر آن را به‌صورت $\sum y_i U_i$ بنویسید:
(الف) $Y(t)$ برداری است از $\alpha(t)$ به‌مبدأ $\mathbf{E}^3$.
(ب) $Y(t)=\alpha'(t)-\alpha''(t)$.
(ج) $Y(t)$ به‌طول واحد وعمود بر $\alpha'(t)$ و $\alpha''(t)$ است.
(د) $Y(t)$ برداری است از $\alpha(t)$ به $\alpha(t+\pi)$.

۷. گیریم Y یك‌میدان‌برداری روی خم α است. اگر $\alpha(h)$ یك تعویض‌پارامتر α باشد، نشان دهید که $Y(h)$ یك میدان برداری روی $\alpha(h)$ است، و ثابت کنید که $Y(h)'=h'Y'(h)$.

۸. گیریم $\alpha,\beta: I\rightarrow \mathbf{E}^3$ دوخم باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر t، $\alpha'(t)$ و $\beta'(t)$ موازی (مختصات اقلیدسی آنها یکی) باشند. ثابت کنید که α و β موازی‌اند بدین‌معنی که می‌توان در $\mathbf{E}^3$ نقطه‌ای مانند $\mathbf{p}$ یافت به طوری که به ازای هر t داشته باشیم $\beta(t)=\alpha(t)+\mathbf{p}$.

۹. اگر α خم منظمی باشد نشان دهید که
(الف) شرط لازم و کافی برای آنکه α دارای تندی ثابت باشد آن است که شتاب α'' همواره بر α (یعنی بر α') عمود باشد.
(ب) برای آنکه α یك تعویض پارامتر خط راست $t\rightarrow \mathbf{p}+t\mathbf{q}$ باشد لازم و کافی است که α'' همواره بر α مماس باشد (یعنی α'' و α' همخط باشند).

۱۰. قسمتی از خم که روی‌فاصله بستهٔ $[a,\ b]: a\leqslant t\leqslant b$ معین است قطعه خم نام دارد. تعویض پارامتر $\alpha(h):[a,\ b]\rightarrow \mathbf{E}^3$ ازقطعه خم $\alpha:[c,\ d]\rightarrow \mathbf{E}^3$ را یکنوا می‌نامند هرگاه یکی از دوشرط زیر برقرار باشد

(الف) $h'\geqslant 0,\ h(a)=c,\ h(b)=d$ یا (ب) $h'\leqslant 0,\ h(a)=d,\ h(b)=c$

ثابت کنید که تعویض پارامتر یکنوا طول قوس را تغییر نمی‌دهد.

۱۱. ثابت کنید که خط راست کوتاهترین مسافت بین دونقطه در $\mathbf{E}^3$ می‌باشد. برای این منظور از طرح زیر استفاده کنید: خم دلخواه $\mathbf{E}^3 \rightarrow \alpha:[a,\ b]$ وقطعهٔ خم از $\mathbf{p}=\alpha(a)$ تا $\mathbf{q}=\alpha(b)$ رادرنظرمی گیریم، وقرارمی‌دهیم $\mathbf{u}=(\mathbf{q}-\mathbf{p})/\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|$.
(الف) اگر σ قطعهٔ خط راستی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ باشد، مثلاً

$$\sigma(t)=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

نشان دهید که $L(\sigma)=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$.
(ب) ازا $\|\alpha'\|\geqslant\alpha'\cdot\mathbf{u}$ نتیجه بگیرید که $L(\alpha)\geqslant d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ که در آن $L(\alpha)$ طول α

و d مسافت اقلیدسی است.

(ج) علاوه براین نشان دهید که اگر $L(\alpha)=d(\mathbf{p},\mathbf{q})$، آنگاه α یك قطعه خط راست است. (راهنمایی: بنویسید $\alpha'=(\alpha'\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}+Y$ که در آن $Y\cdot\mathbf{u}=0$.)

۳. فرمولهای فرنه

اکنون به بیان اندازه‌گیریهای ریاضی برای چرخش و تاب یك خم در $\mathbf{E}^3$ می‌پردازیم. دراین بند فقط خمهای با تندی واحد را درنظر می‌گیریم و در بند دیگر نتایج را به خمهای منظم با تندی دلخواه تعمیم می‌دهیم.

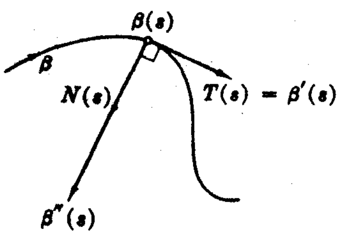
گیریم $\beta: I\to\mathbf{E}^3$ خمی با تندی واحد باشد، یعنی به‌ازای هر s در I داریم $\|\beta'(s)\|=1$. دراین صورت $T=\beta'$ را میدان برداری مماس یکانی روی β می‌نامند، و چون طول T همواره برابر ۱ است مشتق آن $T'=\beta''$ چرخش خم را در $\mathbf{E}^3$ نشان می‌دهد. T' را میدان برداری خمیدگی β می‌نامند، اگر از $T\cdot T=1$ مشتق بگیریم به‌دست‌می‌آید $2T'\cdot T=0$ یعنی T' همواره بر T عمود است، به‌عبارت دیگر T' بر خم β قائم است.

طول میدان برداری خمیدگی T' یك اندازه عددی برای چرخش β به‌دست می‌دهد. تابع با مقدار حقیقی κ به‌طوری‌که به‌ازای هر s در I،

$$\kappa(s)=\|T'(s)\|$$

تابع خمیدگی β نام دارد. بنابراین $\kappa\geqslant 0$، وهرچه κ بزرگتر باشد، چرخش β تندتر است.

برای بررسیهای بیشتر، فرض‌می‌کنیم κ هیچ‌گاه صفرنباشد، یعنی $\kappa>0$.[1] در این صورت میدان برداری یکانی $N=T'/\kappa$ راستای چرخش β را در هرنقطه معین می‌کند. N را میدان برداری قائم اصلی β می‌نامند (شکل ۷.۲). میدان برداری $B=T\times N$ روی β را میدان برداری بی‌نرمال می‌نامند.



شکل ۷.۲

۱.۳. لم. گیریم β خمی با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ باشد، و $\kappa>0$. دراین صورت سه میدان برداری T، N و B روی β میدانهای برداری یکانی‌اند که درهرنقطه بریکدیگر عمودند. T، N، B را میدان سه‌وجهی فرنه روی β می‌نامند.

برهان. بنابر تعریف $\|T\|=1$، و چون $\kappa=\|T'\|>0$، پس:

---

۱. این بدان معنی‌است که برای هر خم دلخواه با سرعت واحد باید هرقطعه متناظر با $\kappa>0$ را جداگانه بررسی کرد، تمرین ۱۹ بند ۴ را ببینید.

$$\|N\| = \frac{1}{\kappa}\|T'\| = 1$$

در بالا دیدیم که T و N متعامدند، یعنی $T \cdot N = 0$. با استفاده از لم ۸.۱ نتیجه می گیریم که درهر نقطه $\|B\| = 1$، و B نیز بر T و N عمود است. ∎

به‌طور خلاصه داریم:

$$T = \beta', \ N = \frac{T'}{\kappa}, \ B = T \times N$$

که در $T \cdot T = B \cdot B = N \cdot N = 1$ صدق می کنند و همهٔ حاصل‌ضربهای نقطه‌ای دیگر برابر صفرند.

کلید بررسی موفقیت‌آمیز هندسهٔ یك خم β استفاده ازمیدان‌سه‌وجهی فرنه T، N، B به‌جای میدان سه‌وجهی طبیعی U_1، U_2، U_3 می‌باشد. زیرا میدان سه وجهی فرنه پراز اطلاع در بـارهٔ β است، در صورتی که میدان سه وجهی طبیعی حاوی هیچ گونه اطلاعی نمی باشد.

نخستین و مهمترین استفاده ازاین اندیشه آن است کـه مشتقهای T'، N'، B' را برحسب T، N، B بیان کنیم. چـون $T = \beta'$، داریم $T' = \beta'' = \kappa N$. اکنون B' را مورد توجه قرارمی‌دهیم، و ادعا می کنیم که B' در هرنقطه مضرب اسکالری از N است. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم که $B' \cdot B = 0$ و $B' \cdot T = 0$. فرمول اول به‌علت آنکه B بردار یکانی است برقـرار می باشد. بـرای اثبات صحت فرمول دوم از $B \cdot T = 0$ مشتق می گیریم، داریم $B' \cdot T + B \cdot T' = 0$ ازآنجا:

$$B' \cdot T = -B \cdot T' = -B \cdot \kappa N = 0$$

بدین‌ترتیب می‌توان تابع پیچش یا تاب τ را برای خم β به‌صورت‌تابع با مقدار حقیقی روی‌فاصله I با $B' = -\tau N$ تعریف کرد(علامت منها قراردادی است). برخلاف خمیدگی، دربارهٔ مقادیر τ هیچ‌گونه قیدی وجود ندارد، می‌تواند مثبت یا منفی و یا صفر باشد (علامت τ دارای تعبیر هندسی جالبی می‌باشد). اکنون نشان می‌دهیم که τ مقیاسی برای اندازهٔ پیچش یا تاب خم β است.

۲.۳. قضیه. (فرمولهای‌فرنه). اگر $\beta : I \to \mathbf{E}^3$ خمی با تندی‌واحد و خمیدگی $\kappa > 0$ و تاب τ باشد، دراین‌صورت:

$$\begin{aligned} T' &= \quad\ \ \kappa N \\ N' &= -\kappa T \qquad + \tau B \\ B' &= \qquad -\tau N \end{aligned}$$

برهان. چنان‌که در بالا دیدیم فرمولهای اول و سوم، همان فرمولهای تعریف خمیدگی و تاب می‌باشند. برای اثبات فرمول دوم، N' را برحسب T، N ، B بیان می‌کنیم:

$$N' = N' \cdot T\,T + N' \cdot N\,N + N' \cdot B\,B$$

این ضرایب به‌آسانی محاسبه می‌شوند. از $N \cdot T = 0$ مشتق می‌گیریم، داریم $N' \cdot T + N \cdot T' = 0$، بنابراین:

$$N' \cdot T = -N \cdot T' = -N \cdot \kappa N = -\kappa$$

و نیز $N' \cdot N = 0$، زیرا N میدان برداری یکانی است. بالاخره،

$$N' \cdot B = -N \cdot B' = -N \cdot (-\tau N) = \tau \qquad \blacksquare$$

۳.۳ مثال. سه‌وجهی فرنه T، N ، B و توابع خمیدگی و تاب را در مورد مارپیچ با تندی واحد زیر محاسبه می‌کنیم

$$\beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{c},\ a \sin \frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$$

که در آن $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$ و $a > 0$. داریم

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c},\ \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

ازآنجا

$$T'(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2} \sin \frac{s}{c},\ 0\right)$$

بنابراین

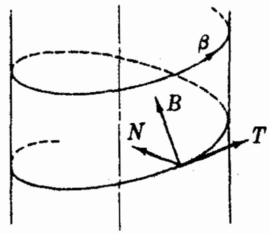
$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0$$

چون $T' = \kappa N$، خواهیم داشت

$$N(s) = \left(-\cos \frac{s}{c},\ -\sin \frac{s}{c},\ 0\right)$$

دیده می‌شود که a و b هرچه باشند، N همواره به‌جهت محور استوانه‌ای که خم برآن قرار دارد متوجه است (شکل ۸.۲).

با استفاده از تعریف حاصل‌ضرب خارجی برای $B = T \times N$ خواهیم داشت



شکل ۸.۲

$$B(s)=\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right)$$

برای محاسبهٔ تاب از بردار $B(s)$ مشتق می گیریم

$$B'(s)=\left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

و بنا بر تعریف $B'=-\tau N$. از مقایسهٔ B' و N، به‌دست می آید:

$$\tau(s)=\frac{b}{c^2}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

بنابراین تاب مارپیچ نیز ثابت است.

دیده می‌شود که اگر b صفر باشد، مارپیچ به دایره‌ای به‌شعاع a بدل می‌شود. خمیدگی این دایره برابر $\kappa=1/a$ است (هرچه شعاع کوچکتر باشد خمیدگی بزرگتر می‌شود) و تاب آن صفر است.

این مثال حالت بسیار خاصی است، درحالت کلی لزومی نداردکه توابع خمیدگی و تاب یك خم ثابت باشند.

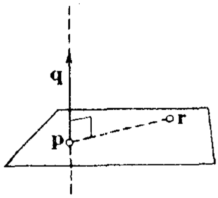
۴.۳. تبصره. تا اینجا همواره بر تمایز بین یك بردار مماس و یك نقطه از $\mathbf{E}^3$ تأکید کرده‌ایم. اما چنان‌که دیدیم فضای اقلیدسی دارای این خصوصیت جالب توجه است که به ازای نقطهٔ $\mathbf{p}$ می‌توان یك تناظر یك به یك طبیعی بین نقاط (v_1, v_2, v_3) و بردارهای مماس $(v_1, v_2, v_3)_p$ در $\mathbf{p}$ برقرار کرد. بدین‌ترتیب می‌توان با این ایزومرفیسم نقاط را به‌بردارهای مماس (و برعکس) تبدیل کرد. در دو بند آینده اغلب از یك نمایش به‌نمایش دیگر می‌رویم بدون آنکه علایم را تغییر دهیم. چون اشیاء متناظر دارای یك مختصات اقلیدسی‌اند، این عمل برضرب داخلی، جمع، حاصل‌ضرب نقطه‌ای، و مشتقگیری و هرعمل دیگری که برحسب مختصات اقلیدسی بیان شده باشد تأثیر نمی‌گذارد.

بدین‌ترتیب میدان‌برداری $Y=(y_1, y_2, y_3)$ روی خم β نیز خود در $\mathbf{E}^3$ به‌خم (y_1, y_2, y_3) بدل می‌شود. در حالت خاص اگر Y متوازی باشد توابع مختصاتی اقلیدسی آن ثابت‌اند و Y به‌صورت یك نقطه از $\mathbf{E}^3$ درمی‌آید.

درهندسهٔ فضایی یك صفحه از $\mathbf{E}^3$ را به صورت همهٔ قائمهایی که از نقطهٔ مفروضی واقع بریك خط اخراج می‌شوند در نظر می گیرند. به بیان برداری صفحه‌ای که از $\mathbf{p}$ می‌گذرد و بر $\mathbf{q}\neq 0$ عمود است ازنقاطی مانند $\mathbf{r}$ در $\mathbf{E}^3$ تشکیل می‌شود که در رابطهٔ زیر صدق می کنند

$$(\mathbf{r}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}=0$$

بنابر تبصرهٔ بالا $\mathbf{q}$ را می‌توان به‌صورت بردار مماس در $\mathbf{p}$، چنان‌که در شکل ۹.۲ دیده می‌شود، درنظر گرفت.



شکل ۹.۲

اکنون می‌توان از خم‌مفروضی درمجاورت یك نقطهٔ دلخواه آن به‌تقریب اطلاعاتی به‌دست آورد، یعنی تأثیر خمیدگی و تاب را بر شکل خم بررسی‌کرد. برای این منظور از تقریب تیلر برای خم‌استفاده می‌کنیم و آن را برحسب سه‌وجهی فرنه در نقطهٔ انتخابی بیان می‌کنیم.

برای سادگی، خم $\beta=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ را باتندی واحددرمجاورت نقطهٔ $\beta(0)$ در نظر می‌گیریم. هنگامی‌که s کوچك باشد، هریك ازمختصات $\beta_i(s)$ به‌جمله‌های اول سری تیلر نزدیك است:

$$\beta_i(s)\sim\beta_i(0)+\frac{d\beta_i}{ds}(0)s+\frac{d^2\beta_i}{ds^2}(0)\frac{s^2}{2}+\frac{d^3\beta_i}{ds^3}(0)\frac{s^3}{6}$$

بنابراین

$$\beta(s)\sim\beta(0)+s\beta'(0)+\frac{s^2}{2}\beta''(0)+\frac{s^3}{6}\beta'''(0)$$

اما $\beta'(0)=T_0$ و $\beta''(0)=\kappa_0 N_0$ که درآن اندیس صفر مبین آن است‌که مقادیر را به‌ازای $s=0$ درنظر گرفته‌ایم. فرض می‌کنیم $\kappa_0\neq 0$، ونیز داریم

$$\beta'''=(\kappa N)'=\frac{d\kappa}{ds}N+\kappa N'$$

با استفاده ازفرمول فرنه برای N' به‌دست می‌آید

$$\beta'''(0)=-\kappa_0^2T_0+\frac{d\kappa}{ds}(0)N_0+\kappa_0\tau_0B_0$$

بالاخره با قرار دادن این مقادیر درتقریب $\beta(s)$ که دربالا آمد، و درنظر گرفتن جملهٔ با کمترین درجه در هرمؤلفه خواهیم داشت:

$$\beta(s)\sim\beta(0)+sT_0+\kappa_0\frac{s^2}{2}N_0+\kappa_0\tau_0\frac{s^3}{6}B_0$$

اگر طرف دوم را با $\hat{\beta}(s)$ نشان دهیم، خم $\hat{\beta}$ موسوم به‌تقریب فرنه β درمجاورت $s=0$ به‌دست می‌آید. باید توجه داشت‌که β درمجاورت هریك ازنقاط خود تقریب‌فرنهٔ متفاوتی دارد، اگر به‌جای ۰ عدد دلخواه s_0 را درنظر بگیریم، باید به‌جای s مانند بسط معمولی

تیلر $s_\circ - s$ قرار دهیم.

اکنون تقریب فرنـه دربالا را بررسی می‌کنیم. جملهٔ اول در بسط $\hat{\beta}$ همـان نقطهٔ $\beta(\circ)$ است. دوجملهٔ اول بـا هم خط مماس $s \to \beta(\circ)+sT_\circ$ بر خم β درنقطهٔ $\beta(\circ)$ را به‌دست می‌دهد، که بهترین تقریب خطی β در مجاورت $\beta(\circ)$ می‌بـاشد، سه جملهٔ اول با هم معرف سهمی

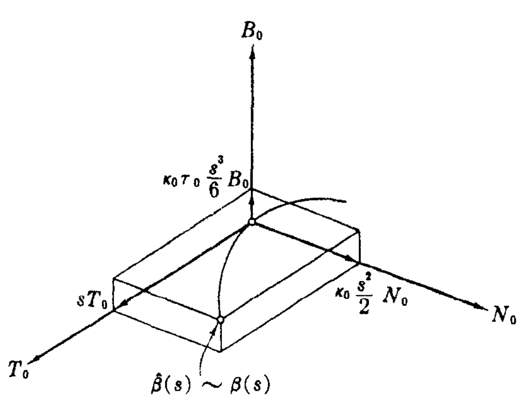
$$s \to \beta(\circ)+sT_\circ+\kappa_\circ\left(\frac{s^{۲}}{۲}\right)N_\circ$$

است، که بهترین تقریب درجـهٔ دوم β درمجاورت $\beta(\circ)$ می‌باشد. دیده می‌شود کـه این سهمی درصفحهٔ مار بر $\beta(\circ)$ وعمود بر $B_\circ$ واقع است، که صفحهٔ بوسان β درنقطهٔ $\beta(\circ)$ است. این سهمی با سهمی $y=\kappa_\circ x^{۲}/۲$ درصفحهٔ xy به‌یك شکل است، وبا $\kappa_\circ$ خمیدگی β در $s=\circ$ کاملاً معین می گردد.

بالاخره تاب $\tau_\circ$ درآخرین وکوچکترین جملهٔ $\hat{\beta}$ ظاهر می‌شود، و حرکت β را در امتداد قائم برصفحهٔ بوسان این نقطه نشان می‌دهد (شکل ۱۰.۲).

براساس این بحث می‌توان حدس زدکه اگر خمیدگی خمی با تندی واحد همواره صفر باشد، دراین صورت خطی است راست. در واقع این مطلب از رابطهٔ (۲) لم ۳.۲ نتیجه می گردد، زیـرا $\kappa=\|T'\|=\|\beta''\|$ و لذا $\kappa=\circ$، اگـر، و فقط اگـر، $\beta''=\circ$. بنا براین خمیدگی، مقیاس انحراف خم ازخط مستقیم است.

خم مسطح در $\mathbf{E}^{۳}$ خمی است که کلاً دریك صفحه از $\mathbf{E}^{۳}$ واقع باشد. بدیهی است که خم مسطح حتی مانند مارپیچ مثال ۳.۳ دارای پیچش نیست. ازبحث بالا نتیجه‌می‌شود که بـه‌ازای s کوچك خم β درصفحهٔ بوسان‌نقطهٔ $\beta(\circ)$ قـرار می گیرد. اگر $\tau_\circ \neq \circ$، β دارای پیچش خواهـد بود و ازصفحهٔ بوسان خارج می گردد. بنا براین می‌توان حدس زدکه اگر تاب خم β متحد با صفر باشد β هیچ‌گاه ازاین صفحه خارج نمی‌شود.



شکل ۱۰.۲

۳.۵. فرع. شرط لازم وکافی برای آنکه خم β با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ بـا $\kappa > 0$ مسطح باشد آن است که $\tau = 0$.

برهان. اگر β خم مسطحی باشد، بنا بر تبصرهٔ بـالا می‌توان نقاط $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ را طوری تعیین کردکـه تساوی $(\beta(s) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} = 0$ به ازای همهٔ مقادیر s برقـرار باشد. چون مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\beta'(s) \cdot \mathbf{q} = \beta''(s) \cdot \mathbf{q} = 0 \qquad \text{به‌ازای همهٔ مقادیر } s$$

بنابراین $\mathbf{q}$ همواره بر $T = \beta'$ و $N = \beta''/\kappa$ عمود است. اما B نیز براین دو بردار عمود است وچون طول‌آن واحد است پس $B = \pm \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$. درنتیجه $\beta' = 0$ و ازآنجا بنا بر تعریف $\tau = 0$ (شکل ۱۱.۲).

برعکس اگر $\tau = 0$، خواهیم داشت $B' = 0$، یعنی B متوازی است ومی‌توان آن را با یك نقطه از $\mathbf{E}^3$ نشان داد (تبصرهٔ ۴.۳). اکنون نشان می‌دهیم که β درصفحه‌ای که از $\beta(0)$ می‌گذرد و بر B عمود است قرار دارد. برای این منظور تابع با مقدار حقیقی

$$f(s) = (\beta(s) - \beta(0)) \cdot B \qquad \text{به‌ازای همهٔ مقادیر } s$$

را درنظر می‌گیریم. داریم

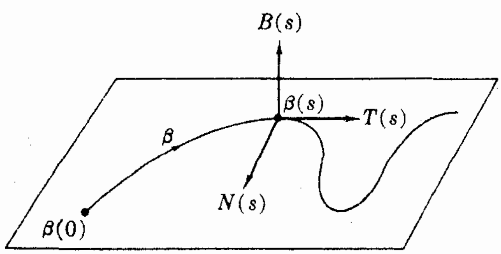
$$\frac{df}{ds} = \beta' \cdot B = T \cdot B = 0$$

وچون $f(0) = 0$، پس f متحد با صفر است. بنابراین

$$(\beta(s) - \beta(0)) \cdot B = 0 \qquad \text{به‌ازای همهٔ مقادیر } s$$

که نشان می‌دهد β کاملاً دراین صفحه قرار دارد. ∎

درپایان مثال ۳.۳ دیدیم که خمیدگی دایره‌ای بـه شعاع a برابر $1/a$ و تاب آن صفر است، و نیز فرمول قائم اصلی که درآنجا بیان شد نشان می‌دهدکه N همواره متوجه



شکل ۱۱.۲

مرکز دایره است. اکنون عکس این مطلب را اثبات می‌کنیم.

۶.۳ لم. اگر β خمی با تندی واحد و خمیدگی ثابت $\kappa > 0$ و تاب صفر باشد، آنگاه β قوسی از دایرهٔ به‌شعاع $1/\kappa$ است.

برهان. چون $\tau = 0$، لذا β یك خم مسطح است. اکنون بــاید نشان دهیم که هر نقطهٔ آن به‌فاصلهٔ $1/\kappa$ ازنقطهٔ ثابتی قرار دارد، این نقطه مرکز دایره خواهد بود. برای این منظور خم $\gamma = \beta + (1/\kappa)N$ را درنظر می‌گیریم. با استفاده ازفرمول فرنه خواهیم داشت

$$\gamma' = \beta' + \frac{1}{\kappa} N' = T + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T) = 0$$

بنابراین خم γ ثابت است، یعنی $\beta(s) + (1/\kappa)N(s)$ همواره مقداری است ثابت، مثلاً $\mathbf{c}$ (شکل ۱۲.۲). اما فاصلهٔ از $\mathbf{c}$ تا $\beta(s)$ عبارت است از

$$d(\mathbf{c}, \beta(s)) = \|\mathbf{c} - \beta(s)\| = \left\|\frac{1}{\kappa} N(s)\right\| = \frac{1}{\kappa}$$ ∎

اساساً هرمسألهٔ هندسی دربارهٔ خمها را می‌توان به‌وسیلهٔ فرمولهــای فرنه حل کرد. درحالتهای ساده‌کافی است مفروضات مسأله را به‌صورتی مناسب نوشت، مشتقها را محاسبه کرد و فرمولهای فرنه را به‌کار برد. مثلاً گیریم β خمی بــا تندی واحد باشد، که تماماً روی‌کرهٔ Σ به‌شعاع a و به مرکز مبدأ $\mathbf{E}^3$ قــرار دارد. می‌توان حدس زدکه خمیدگی β هنگامی مینیمم است که β بریك دایرهٔ عظیم Σ قرار گیرد. شعاع این دایره برابر a است، و ازآنجا می‌توان پیشبینی‌کردکه خمیدگی خم‌کروی β، $\kappa \geqslant 1/a$ خواهد بود که a شعاع کرهٔ آن است.

برای اثبات، ملاحظه می‌شودکــه فاصلهٔ هرنقطه Σ از مبدأ برابر a است و درنتیجه $\beta \cdot \beta = a^2$. بامشتقگیری داریم $2\beta' \cdot \beta = 0$، یعنی $\beta \cdot T = 0$. بار دیگرمشتق می‌گیریم $\beta' \cdot T + \beta \cdot T' = 0$، وبا استفاده از فرمول فرنه نتیجه می‌شود $T \cdot T + \kappa\beta \cdot N = 0$ ازآنجا:

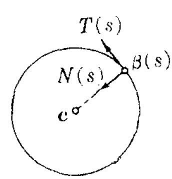
$$\kappa\beta \cdot N = -1$$

باتوجه به‌نامساوی شوارتس خواهیم داشت:

$$|\beta \cdot N| \leqslant \|\beta\|\|N\| = a$$

وچون $\kappa \geqslant 0$، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌گردد:

$$\kappa = |\kappa| = \frac{1}{|\beta \cdot N|} \geqslant \frac{1}{a}$$



شکل ۱۲.۲

چون این روش را ادامه دهیم، شرط لازم وکافی

(برحسب خمیدگی و تاب) برای آنکه خمی کروی باشد، یعنی، برروی یك کره در $\mathbf{E}^3$ واقع باشد به‌دست می‌آید (تمرین ۱۰).

تمرینات

۱. مطلوب است محاسبهٔ اجزای دستگاه فرنه κ، τ، T، N ، B برای خم با تندی واحد

$$\beta(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s,\ 1-\sin s,\ -\frac{3}{5}\cos s\right)$$

نشان دهیدکه این خم یك دایره است، مرکز وشعاع آن را بیابید.

۲. خم زیر راکه درفاصلهٔ $I: -1 < s < 1$ تعریف شده است درنظر می‌گیریم:

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3},\ \frac{(1-s)^{3/2}}{3},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

نشان دهیدکه β خمی با تندی واحد است، و اجزای دستگاه فرنهٔ آن را محاسبه‌کنید.

۳. صحت فرمولهای فرنه را دربارهٔ مارپیچ مثال ۳.۲ با محاسبهٔ مستقیم κ، τ، T، N ، B تحقیق کنید.

۴. ثابت کنید که:

$$T = N\times B = -B\times N$$

$$N = B\times T = -T\times B$$

$$B = T\times N = -N\times T$$

(دریك برهان صوری ازخواص حاصل‌ضرب خارجی‌که درتمرینهای بند ۱ ثابت کردیم استفاده می‌شود،ولی می‌توان این فرمولها را با استفاده ازقاعدهٔ دست راست، که در صفحهٔ ۴۸ آمده‌است نیز به‌دست آورد.)

۵. اگر A میدان برداری $\tau T+\kappa B$ روی خم β با تندی واحد باشد، نشان دهیدکه فرمولهای فرنه به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$T' = A\times T$$

$$N' = A\times N$$

$$B' = A\times B$$

۶. برای هر دایره می‌توان نمایش پارامتری با تندی واحد زیر را درنظر گرفت:

$$\gamma(s)=\mathbf{c}+r\cos\frac{s}{r}\mathbf{e}_1+r\sin\frac{s}{r}\mathbf{e}_2$$

که در آن $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$.

اگر β خمی با تندی واحد باشد و $\kappa(0)>0$، ثابت کنید که فقط و فقط یک دایرهٔ γ وجود دارد که درمجاورت $\beta(0)$ تقریب β باشد، بدین معنی که:

$$\gamma(0)=\beta(0),\quad \gamma'(0)=\beta'(0),\quad \text{و}\quad \gamma''(0)=\beta''(0)$$

نشان دهید که γ درصفحهٔ بوسان خم β در نقطهٔ $\beta(0)$ واقع است و $\mathbf{c}$ و r مرکز وشعاع آن را بیابید (دایرهٔ γ را دایرهٔ بوسان و $\mathbf{c}$ را مرکز خمیدگی β در نقطهٔ $\beta(0)$ می‌نامند. همین نتایج هنگامی که به‌جای 0 عدد s را در نظر بگیریم برقرار است.) (شکل ۱۳.۲).

۷. اگر خم α و خم $\bar{\alpha}=\alpha(h)$ که از تعویض پارامتر آن به‌دست آمده‌است هردو با تندی واحد باشند، نشان دهید که

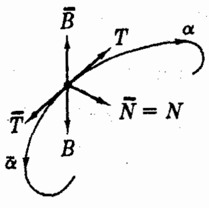
(الف) s_0 را می‌توان طوری تعیین کرد که $h(s)=\pm s+s_0$ (ب) $\bar{\tau}=\tau(h)$، $\bar{\kappa}=\kappa(h)$، $\bar{B}=\pm B(h)$، $\bar{N}=N(h)$، $\bar{T}=\pm T(h)$. که در آنها علامت ($\pm$) با علامت موجود در (الف) مطابقت دارد، و فرض می‌کنیم $\kappa>0$ (شکل ۱۴.۲). بنابراین حتی درحالتی که تعویض پارامتر موجب تغییرجهت می‌شود. قائمهای اصلی N و $\bar{N}$ همسو می‌باشند.

۸. خمهای مسطح. برای خم با تندی واحد $\beta(s)=(x(s),\ y(s))$ در $\mathbf{E}^2$ بردار یکهٔ مماس عبارت است از $T=\beta'=(x',\ y')$، اما بردار یکهٔ قائم N با دوران T به اندازهٔ $+90°$ به‌دست می‌آید، درنتیجه $N=(-y',\ x')$. بدین ترتیب T' و N همخط‌اند، وخمیدگی β با معادلهٔ فرنهٔ $T'=\kappa N$ تعریف می‌شود. ثابت کنید که:

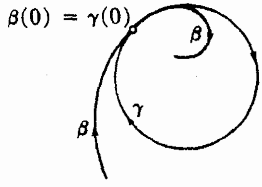
(الف) $N'=-\kappa T$

(ب) اگر φ زاویهٔ شیب β[1] باشد، دراین صورت $\kappa=\varphi'$.

این روش باآنچه دربارهٔ $\mathbf{E}^3$ بیان‌شد تفاوت‌دارد، زیرا لازم نیست که κ را مثبت



شکل ۱۴.۲



شکل ۱۳.۲

---

۱. وجود φ به‌عنوان یك تابع دیفرانسیلپذیر با $T=\cos\varphi\, U_1+\sin\varphi\, U_2$ ازتمرین ۱۲ بند ۱ نتیجه می‌شود.

فرض کنیم و اصولاً علامت آن جهت گردش β را مشخص می‌کند. علاوه براین بدون این فرض N نیز کاملاً معین می‌شود.

۹. گیریم $\hat{\beta}$ تقریب فرنهٔ خم دلخواه β با تندی واحد درمجاورت $s=\circ$ باشد. اگر مثلاً مؤلفهٔ $B_\circ$ خم $\hat{\beta}$ را حذف کنیم، خم حاصل تصویر قائم $\hat{\beta}$ برصفحهٔ $T_\circ N_\circ$ خواهد بود. وقتی مستقیماً در طول بردار $\beta_\circ$ به‌سمت $\hat{\beta}(\circ)=\beta(\circ)$ نگاه کنیم، منظرهٔ $\beta \sim \hat{\beta}$ را به‌دست می‌آوریم. شکل کلی تصویرهای قائم $\hat{\beta}$ را روی صفحه‌های $T_\circ N_\circ$، $T_\circ B_\circ$، $N_\circ B_\circ$ با فرض $\tau > \circ$ رسم کنید. (این مناظر β را می‌توان از راه تجربه با استفاده ازیك تکه سیم خمیده تأییدکرد.)

۱۰. خمهای کروی. خم α با تندی واحد و $\kappa > \circ$ و $\tau \neq \circ$ را درنظر می‌گیریم.
(الف) نشان دهید که اگر α روی کره‌ای به‌مرکز $\mathbf{c}$ وشعاع r واقع باشد، داریم

$$\alpha - \mathbf{c} = -\rho N - \rho' \sigma B$$

که درآن $\rho = 1/\kappa$ و $\sigma = 1/\tau$. بدین‌ترتیب $r^2 = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2$.

(ب) برعکس، اگر $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ همواره برابر مقدار ثابت r^2 باشد و $\rho' \neq \circ$، نشان دهیدکه α روی کره به‌شعاع r واقع است.

(راهنمایی: برای (ب) نشان‌دهیدکه «مرکزخم» یعنی $\gamma = \alpha + \rho N + \rho' \sigma B$ که به‌وسیلهٔ (الف) مشخص شده، ثابت است.)

۱۱. گیریم β و $\bar{\beta} : I \rightarrow \mathbf{E}^3$ خمهای با تندی واحد باشند، که خمیدگی و تاب آنها همواره مخالف صفر است. نشان دهیدکه اگر $T = \bar{T}$ آنگاه، β و $\bar{\beta}$ موازی‌اند، (مثال ۸، II.۲). و اگر $B = \bar{B}$، آنگاه $\bar{\beta}$ با β یا باخم $s \rightarrow -\beta(s)$ موازی‌است.

۴. خمهای با تندی دلخواه

به‌آسانی می‌توان نتایج بند قبل را دربارهٔ خمهای منظم $\alpha : I \rightarrow \mathbf{E}^3$ که لزوماً با تندی واحد نیستند تعمیم‌داد. برای‌این منظورکافی است اجزای دستگاه فرنه را درمورد تعویض پارامتر $\bar{\alpha}$ برای خم α که با تندی واحد باشد بیان کنیم. توضیح آنکه اگر s تابع طول قوس خم α باشد، بنابر قضیهٔ ۱.۲ داریم

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)) \qquad \text{به‌ازای همهٔ مقادیر } t$$

که با نمایش تابعی به‌صورت $\alpha = \bar{\alpha}(s)$ نوشته می‌شود. حال اگر $\bar{\kappa} > \circ$ و $\bar{\tau}$، $\bar{T}$، $\bar{N}$ و $\bar{B}$ را مانند بند ۳ برای $\bar{\alpha}$ تعریف کنیم، دراین صورت برای α قرار می‌دهیم

تابع خمیدگی: $\kappa = \bar{\kappa}(s)$
تابع تاب: $\tau = \bar{\tau}(s)$

میدان برداری مماس یکه : $T = \bar{T}(s)$
میدان برداری قائم اصلی : $N = \bar{N}(s)$
میدان برداری بی‌نرمال : $B = \bar{B}(s)$

به طور کلی κ و $\bar{\kappa}$ توابع مختلفی هستند، و روی فواصل مختلفی تعریف شده‌اند. اما دقیقاً خمیدگی مسیر مشترك α و $\bar{\alpha}$ را به یك طریق بیان می‌کنند. زیرا در هر نقطه $\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t))$ و بنابراین اعداد $\kappa(t)$ و $\bar{\kappa}(s(t))$ بنا بر تعریف برابرند. سایر اجزای دستگاه فرنه نیز به‌همین گونه‌اند. و به‌خصوص T ، N و B یك سه‌وجهی برداری روی α می‌باشد، که شکل خم α را همان‌طور که درتقریبات فرنه بیان کردیم نشان می‌دهد (شکل ۲۰۵۱).

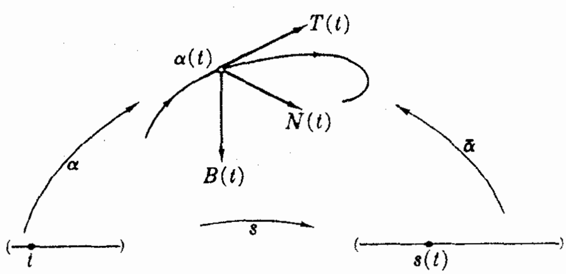
اغلب دربررسیهای نظری تنها به‌این تبدیل نیاز داریم، وبه‌کمك آن نتایج مربوط به α را دربارهٔ $\bar{\alpha}$ می‌توانیم بیان کنیم. مثلاً اگر α خم منظمی با $\tau = 0$ باشد، آنگاه به‌موجب تعریف بالا $\bar{\alpha}$ نیز دارای $\bar{\tau} = 0$ است؛ بنا بر فرع ۵۰۳، $\bar{\alpha}$ خمی است مسطح. بدینسان به‌وضوح دیده می‌شود که α نیزمسطح است.

اما برای محاسبات عددی و گاه ازلحاظ نظری نیز این تبدیل عملی نیست، زیرا به‌ندرت‌می‌توان فرمهای صریح $\bar{\alpha}$ را یافت. (به‌عنوان مثال نمایش‌پارامتری باتندی‌واحد متناظر به‌خم $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ را بررسی کنید.)

فرمولهای فرنه فقط درمورد خمهای باتندی واحد صادق‌اند، ومیزان تغییر میدان سه‌وجهی T ، N و B را برحسب طول قوس بیان می‌کنند. تندی v متناظر به‌خم درحالت کلی‌عامل تصحیح مناسبی می‌باشد.

۴۰۱. لم. اگر α خم منظمی در $\mathbf{E}^3$ با $\kappa > 0$ باشد، دراین‌صورت

$$\begin{aligned} T' &= \kappa v N \\ N' &= -\kappa v T + \tau v B \\ B' &= -\tau v N \end{aligned}$$



شکل ۲۰۵۱

برهان. گیریم $\bar{\alpha}$ تعویض پارامتری باتندی واحد برای خم α باشد. بنابرتعریف خواهیم داشت $T = \bar{T}(s)$، که درآن s تابع طول‌قوس α است. با استفاده ازمشتق توابع مرکب دربارهٔ میدانهای برداری (تمرین ۷، بند ۲) به‌دست می‌آید

$$T' = \bar{T}'(s)\frac{ds}{dt}$$

و بنابر معادلات معمولی فرنه $\bar{T}' = \bar{\kappa}\bar{N}$. با گذاردن تابع s دراین معادله خواهیم داشت

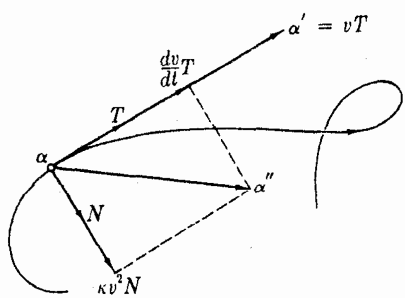
$$\bar{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) = \kappa N$$

بنابر تعریف κ و N برای خم باتندی دلخواه، چون ds/dt تـابع تندی v خم α است، ازترکیب این دومعادله خواهیم داشت $T' = \kappa v N$. فرمولهای N' و B' نیز به‌همین‌طریق به‌دست می‌آیند. ∎

درحساب دیفرانسیل‌وانتگرال، اغلب‌از نمادهایی‌استفاده‌می‌شودکه‌درآنها اصلاً به‌تعویض پارامتر توجهی نیست. مثلاً خم α ونمایش‌پارامتری باتندی‌واحدآن، $\bar{\alpha}$، را با یك‌حرف نشان می‌دهند، و به‌همین‌طریق ازیك‌حرف برای نمایش‌اجزای دستگاههای‌فرنه‌متناظر با این دوخم استفاده می‌شود. درمشتق‌گیری به‌جای T' از dT/dt وبه جای $\bar{T}'$ و $\bar{T}'(s)$ (حاصل از تعویض پارامتر) از dT/ds استفاده می‌کنند. بااین‌قراردادها برای‌اثبات، قاعدهٔ زنجیری $dT/dt = (dT/ds)(ds/dt)$ را با فرمول فرنه $dT/ds = \kappa N$ ترکیب مـی‌کنند و $dT/dt = \kappa v N$ را به‌دست می‌آورند.

تنها برای‌خمهای باتندی ثابت، شتاب برسرعت عمود است، زیرا از $\beta' \cdot \beta'$ ثابت نتیجه می‌شودکه $0 = (\beta' \cdot \beta')' = 2\beta' \cdot \beta''$. درحالت‌کلی برای بررسی سرعت وشتاب آنهارا برحسب میدان سه‌وجهی فرنه بیان می‌کنیم.

۲.۴ لم. اگر α خم منظمی باتابع تندی v باشد، دراین‌صورت سرعت وشتاب α (شکل ۱۶.۲) با فرمولهای زیر بیان می‌شود



شکل ۱۶.۲

$$\alpha' = vT \qquad\qquad \alpha'' = \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N$$

برهان. چون $\alpha = \bar{\alpha}(s)$، که در آن s تابع طول‌قوس α است، با استفاده از لم ۵.۴ فصل اول داریم

$$\alpha' = \bar{\alpha}'(s)\frac{ds}{dt} = v\bar{T}(s) = vT$$

بار دیگر مشتق می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt}T + vT' = \frac{dv}{dt}T + \kappa v^2 N$$

که در آن لم ۱.۴ را به‌کار برده‌ایم. ∎

فرمول $\alpha' = vT$ را می‌توانستیم از پیش حدس بزنیم، زیرا α' و T هر دو بر خم مماس‌اند و T برداری‌است یکه زیرا $v = \|\alpha'\|$. فرمول شتاب جالبتراست. بنا بر تعریف، α'' میزان تغییر سرعت α' است ودرحالت کلی طول وراستای α' متغیراست. $(dv/dt)T$ مؤلفهٔ مماسی α'' میزان تغییر طول α' (یعنی تندی α) است. $\kappa v^2 N$ مؤلفهٔ قائم آن میزان تغییر راستای α' می‌باشد. قوانین حرکت نیوتن مبین آن است که می‌توان این مؤلفه‌ها را به‌عنوان نیرو درنظر گرفت. به‌عنوان مثال هنگامی که اتومبیلی درجاده‌ای مستقیم سرعت خود را تغییر می‌دهد تنها نیرویی که احساس می‌شود معلول $T(dv/dt)$ است. اما هنگامی که با تندی v می‌پیچد نیروی جانبی که احساس می‌شود معلول $\kappa v^2 N$ است. دراینجا κ مبین کم و بیش پیچ جاده است، واثر تندی با v^2 ظاهر می‌شود. لذا تشویش حاصل از پیچیدن باسرعت ۱۰۰ کیلومتر، ۴ برابر تشویش حاصل‌از پیچیدن باسرعت ۵۰ کیلومتر است.

بدین‌ترتیب عبارتهایی قابل محاسبه برای اجزای دستگاه فرنه به‌دست می‌آیند.

۳.۴. قضیه. اگر α خم منظمی در $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$N = B \times T \qquad\qquad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \qquad\qquad \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'')\cdot\alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

برهان. چون $v = \|\alpha'\| > 0$، فرمول $T = \alpha'/\|\alpha'\|$ با $\alpha' = vT$ هم‌ارز است. از لم پیش به‌دست می‌آید

$$\alpha' \times \alpha'' = (vT) \times \left(\frac{dv}{dt}T + \kappa v^{۲} N\right)$$

$$= v\frac{dv}{dt} T \times T + \kappa v^{۳} T \times N = \kappa v^{۳} B$$

چون $T \times T = ۰$. با درنظرگرفتن نرم خواهیم داشت

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = \|\kappa v^{۳} B\| = \kappa v^{۳}$$

زیرا $\|B\| = ۱$ ، $\kappa \geqslant ۰$ و $v > ۰$. این معادله مبین آن است که برای خمهای منظم، $\|\alpha' \times \alpha''\| > ۰$ با شرط معمولی $\kappa > ۰$ هم‌ارز است. (بدین‌ترتیب برای $\kappa > ۰$ ، α' و α'' دارای استقلال خطی‌اند ومانند T و N درهرنقطه صفحهٔ بوسان رامشخص‌می‌کنند).
از آنجا

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\kappa v^{۳}} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

رابطهٔ $N = B \times T$ برای هرمیدان سه‌وجهی فرنه بـرقرار است (تمرین ۴ بند ۳)؛ فقط باقی می‌ماند که فرمول تاب را اثبات کنیم. برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$ عوامل آن را برحسب T ، N و B بیان می‌کنیم. هم‌اکنون دیدیم که $\alpha' \times \alpha'' = \kappa v^{۳} B$.
چون $T \cdot B = N \cdot B = ۰$، فقط باید مؤلفهٔ α''' را روی B پیدا کنیم

$$\alpha''' = \left(\frac{dv}{dt}T + \kappa v^{۲} N\right)' = \kappa v^{۲} N' + \cdots$$

$$= \kappa v^{۳} \tau B + \cdots$$

که درآن از لم ۱.۴ استفاده مـی‌کنیم. درنتیجـه $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \kappa^{۲} v^{۶} \tau$ ، و چـون $\|\alpha' \times \alpha''\| = \kappa v^{۳}$ ، فرمول مطلوب برای τ به‌دست می‌آید. ∎

به‌جای حاصل‌ضرب $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$ درفرمول τ می‌توان از $\alpha' \cdot \alpha'' \times \alpha'''$ استفاده کرد (بنابر تمرین ۴ بند ۱). اما چـون درهـرصورت $\alpha' \times \alpha''$ موردنیاز است، معمولاً ساده‌تر است که $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$ را به‌دست آوریم.

۴.۴ مثال. اکنون به‌محاسبهٔ اجزای دستگاه فرنهٔ خم

$$\alpha(t) = (۳t - t^{۳},\ ۳t^{۲},\ ۳t + t^{۳})$$

می‌پردازیم. مشتقهای آن به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$\alpha'(t) = ۳(۱ - t^{۲},\ ۲t,\ ۱ + t^{۲})$$

$$\alpha''(t) = ۶(-t,\ ۱,\ t)$$

$$\alpha'''(t)=6(-1,0,1)$$

اما

$$\alpha'(t)\cdot\alpha'(t)=18(1+2t^2+t^4)$$

از آنجا

$$v(t)=\|\alpha'(t)\|=\sqrt{18}\,(1+t^2)$$

با استفاده از تعریف حاصل‌ضرب خارجی خواهیم داشت

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=18\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2 \\ -t & 1 & t \end{vmatrix}=18(-1+t^2,\ -2t,\ 1+t^2)$$

از ضرب داخلی این بردار درخودش داریم

$$(18)^2\{(-1+t^2)^2+4t^2+(1+t^2)^2\}=2(18)^2(1+t^2)^2$$

از آنجا

$$\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|=18\sqrt{2}(1+t^2)$$

و نیز

$$(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''=6\cdot18\cdot2$$

با قرار دادن این مقادیر درفرمولهای قضیهٔ ۳.۴ و بـه‌دست آوردن N بدوسیلهٔ یك ضرب خارجی دیگر، نتیجه می‌شود

$$T=\frac{(1-t^2,\ 2t,\ 1+t^2)}{\sqrt{2}(1+t^2)}$$

$$N=\frac{(-2t,\ 1-t^2,\ 0)}{1+t^2}$$

$$B=\frac{(-1+t^2,\ -2t,\ 1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}$$

$$\kappa=\tau=\frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

البته می‌توان با استفاده از اتحاد لم ۸.۱ به‌محاسبهٔ $\|\alpha'\times\alpha''\|$ پرداخت و عبارت

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = \alpha' \cdot (\alpha'' \times \alpha''')$$

را طبق تمرین ۴ بند ۱ به‌صورت دترمینان بیان کرد.

خلاصه آنکه در اینجا اجزای دستگاه فرنه برای خم α باتندی دلخواه معین گردید. این اجزا درتعمیم فرمولهای فرنه (با سازهٔ v) صدق می‌کنند و می‌توان آنها را با استفاده از قضیهٔ ۳.۴ محاسبه کرد. اگر $v = 1$، یعنی، اگر α خمی باتندی واحد باشد، فرمولهای فرنه درلم ۱.۴ کمی ساده می‌شوند (به‌صورت قضیهٔ ۲.۳)، اما به‌جای قضیهٔ ۳.۴ می‌توان تعاریف بسیار ساده‌تر بند ۳ را قرار داد.

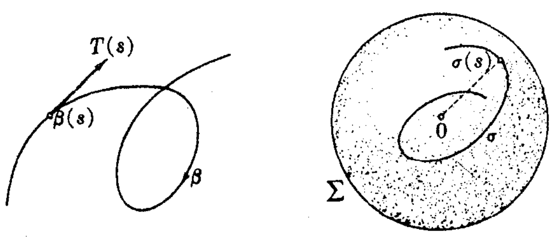
اکنون بعضی از کاربردهای این نتایج را مطرح می‌کنیم. طرق گوناگون جالبی وجود دارند که به‌وسیلهٔ آنها می‌توانیم به‌خم مفروض β خم جدید $\tilde{\beta}$ رامتناظرقرار دهیم به‌طوری‌که خواص هندسی آن بعضی از تغییرات β را به‌خوبی روشن‌کند. مثلاً اگر β خمی باتندی واحدباشد، خم $\sigma = T$ نگارهٔ کروی β است و بنا برتبصرهٔ ۴.۳، σ خمی است که هرنقطهٔ $\sigma(s)$ ازآن دارای همان مختصات اقلیدسی بردار مماس یکهٔ $T(s)$ می‌باشد (شکل ۱۷.۲). به‌عبارت ساده‌تر $\sigma(s)$ از انتقال $T(s)$ به‌مبدأ به‌دست می‌آید و این نگارهٔ کروی تماماً روی کرهٔ یکهٔ Σ از $\mathbf{E}^3$ واقع است، زیـرا $\|\sigma\| = \|T\| = 1$ و حرکت σ مبین خمیدگی β است.

مثلاً اگر β ماربیچ مثال ۳.۳ باشد، از فرمول T خواهیم داشت

$$\sigma(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin \frac{s}{c} \ , \ \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c} \ , \ \frac{b}{c} \right)$$

بدین‌ترتیب نگارهٔ کروی ماربیچ، روی دایرهٔ مقطع صفحهٔ $z = b/c$ باکرهٔ به‌شعاع واحد واقع است.

البته فرض آنکه خم اصلی β باتندی واحد باشد، از عمومیت مسأله نمی‌کاهد، اما نمی‌توان علاوه‌براین متوقع بود کـه خم σ نیز باتندی واحـد باشد. در واقع از $\sigma = T$ نتیجه‌می‌شود $\sigma' = T' = \kappa N$. بنابراین σ همواره در راستای قائم اصلی β حرکت می‌کند و تندی آن $\|\sigma'\|$ برابر با κ خمیدگی β است.



شکل ۱۷.۲

اکنون فرض می‌کنیم $\kappa > 0$، و با استفاده از فرمولهای فرنهٔ خم β به محاسبهٔ خمیدگی σ می‌پردازیم. داریم

$$\sigma'' = (\kappa N)' = \frac{d\kappa}{ds} N + \kappa N' = -\kappa^2 T + \frac{d\kappa}{ds} N + \kappa\tau B$$

از آنجا

$$\sigma' \times \sigma'' = -\kappa^3 N \times T + \kappa^2 \tau N \times B = \kappa^2(\kappa B + \tau T)$$

بنا برقضیهٔ ۳.۴، خمیدگی نگارهٔ کروی σ چنین است

$$\kappa_\sigma = \frac{\|\sigma' \times \sigma''\|}{v^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa} = \left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{1/2} > 1$$

ولذ این خمیدگی فقط به‌نسبت تاب به‌خمیدگی خم اصلی β بستگی دارد.

کاربرد دیگری که به‌این مطلب نزدیك است و در آن نسبت τ/κ نقش اساسی دارد ذیلاً بیان می‌شود.

۵.۴. تعریف. خم منظم α در $\mathbf{E}^3$ هنگامی یك مارپیچ استوانه‌ای است که T بردار مماس یکهٔ آن با یك بردار ثابت $\mathbf{u}$ زاویهٔ ثابت(ϑ) بسازد، یعنی به‌ازای‌هر t، $T(t) \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$.

این شرط با تعویض پارامتر تغییر نمی‌کند، بنا براین می‌توان مارپیچ استوانه‌ای β را باتندی واحد درنظر گرفت. فرض کنیم β خمی باتندی واحد است که در شرط $T \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$ صدق می‌کند. اگرمثلاً $\beta(0)$ را روی β به‌عنوان نقطهٔ مبدأ اختیار کنیم تابع با مقدار حقیقی

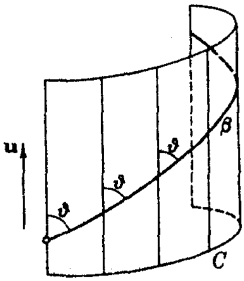
$$h(s) = (\beta(s) - \beta(0)) \cdot \mathbf{u}$$

مبین مقداری است که $\beta(s)$ پس‌از حرکت از $\beta(0)$ در راستای $\mathbf{u}$ «بالا رفته» است (شکل ۱۸.۲). اما

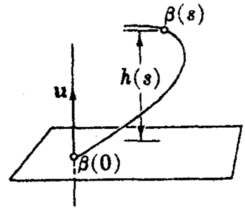
$$\frac{dh}{ds} = \beta' \cdot \mathbf{u} = T \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$$

یعنی میزان‌تغییر β برحسب طول قوسی ثابت است و $h(s) = s\cos\vartheta$. (با تعویض پارامتر، این فرمول به‌صورت $h(t) = s(t)\cos\vartheta$ درمی‌آید که درآن s تابع طول‌قوس است.)

اگر ازهرنقطهٔ β خطی در راستای $\mathbf{u}$ رسم کنیم استوانهٔ C تشکیل می‌گردد که β روی آن واقع است وهرمولد را به زاویهٔ ثابت ϑ قطع می‌کند (شکل ۱۹.۲). درحالت خاص، هنگامی‌که این استوانه مستدیر باشد، بدیهی است مارپیچ ازنوعی است که درمثال ۳.۳ تعریف شد.



شکل ۱۹.۲



شکل ۱۸.۲

بدینسان به‌آسانی می‌توان مارپیچهای استوانه‌ای را مشخص کرد.

۶.۴. قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه خم منتظم α با $\kappa > 0$، یك مارپیچ استوانه‌ای باشد آن است که نسبت τ/κ ثابت باشد.

برهان. کافی است این قضیه را فقط در حالتی که α با تندی واحد است اثبات کنیم. اگر α مارپیچ استوانه‌ای باشد بنا بر تعریف $T \cdot \mathbf{u} = \cos\vartheta$، و از آنجا

$$0 = (T \cdot \mathbf{u})' = T' \cdot \mathbf{u} = \kappa N \cdot \mathbf{u}$$

و چون $\kappa > 0$، درنتیجه $N \cdot \mathbf{u} = 0$. یعنی به‌ازای هر s، $\mathbf{u}$ درصفحهٔ حاصل از $T(s)$ و $B(s)$ واقع است. ازبسط متعامد یکانی داریم

$$\mathbf{u} = \cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B$$

ازمشتقگیری و با استفاده ازفرمولهای فرنه خواهیم داشت

$$0 = (\kappa\cos\vartheta - \tau\sin\vartheta) N$$

بنا براین

$$\tau\sin\vartheta = \kappa\cos\vartheta$$

یعنی τ/κ دارای مقدار ثابت $\operatorname{cotg}\vartheta$ است.

برعکس، گیریم τ/κ ثابت باشد. زاویهٔ ϑ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\operatorname{cotg}\vartheta = \tau/\kappa$، و قرار می‌دهیم

$$U = \cos\vartheta\, T + \sin\vartheta\, B$$

و از آنجا

$$U' = (\kappa\cos\vartheta - \tau\sin\vartheta) N = 0$$

این میدان برداری متوازی U، چنان‌که در تبصرهٔ ۴.۳ دیدیم، یك بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ به‌دست می‌دهد، به‌طوری‌که $\mathbf{u} = \cos\vartheta$. T و بنابراین α یك مارپیچ استوانه‌ای است. ∎

این برهان همچنین طرز محاسبهٔ بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ و زاویهٔ ϑ را نیز نشان می‌دهد. مثلاً، خم α مثال ۴.۴ یك مارپیچ استوانه‌ای است، زیرا $\kappa = \tau$، و زاویهٔ ϑ در معادلهٔ $\operatorname{cotg}\vartheta = \tau/\kappa = ۱$ صدق می‌کند. اگر قرار دهیم $\vartheta = \pi/۴$ در این صورت $\cos\vartheta = \sin\vartheta = ۱/\sqrt{۲}$ و بنا بر برهان بالا داریم $\mathbf{u} = (۱/\sqrt{۲})(T+B)$. از مفروضات مثال ۴.۴ به دست می‌آید $\mathbf{u} = (۰, ۰, ۱)$. (چون تعویض پارامتر α فقط موجب تعویض پارامتر κ، τ، T و B می‌گردد و تأثیری بر ϑ و $\mathbf{u}$ ندارد، لزومی نداشت که α را به‌خمی با تندی واحد بدل کنیم.)

در تمرین ۱۰ از این خاصیت مارپیچهای استوانه‌ای استفاده شده است تا نشان داده شود مارپیچهای مستدیر بر اساس ثابت بودن خمیدگی و تاب آنها مشخص می‌گردند (فرع ۵.۵ فصل ۳ نیز دیده شود).

فرضهای ساده دربارهٔ خمهای منظم در $\mathbf{E}^۳$ نتایج زیر را به‌دست می‌دهد (نماد $\Longleftrightarrow$ به‌معنی «اگر و فقط اگر» است)

$\kappa = ۰$ $\Longleftrightarrow$ خط راست

$\tau = ۰$ $\Longleftrightarrow$ خم مسطح

$\tau = ۰$ و κ ثابت و مثبت $\Longleftrightarrow$ دایره

τ ثابت ومخالف صفر، κ ثابت ومثبت $\Longleftrightarrow$ مارپیچ مستدیر

τ/κ ثابت $\Longleftrightarrow$ مارپیچ استوانه‌ای

تمرینات

۱. خم $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{E}^۳$ راکه درآن $\alpha(t) = (۲t, t^۲, t^۳/۳)$، درنظر می‌گیریم.

(الف) اجزای دستگاه فرنه α: κ، τ، T، N ، B را محاسبه کنید.

(ب) به ازای $-۴ \leqslant t \leqslant ۴$ طرح دقیق آن را ترسیم کنید، و T، N و B را در $t = ۰, ۲, ۴$ نمایش دهید. (راهنمایی: از تصویر $(۲t, t^۲, ۰)$ در صفحهٔ xy شروع کنید.)

(ج) وضع حدی سه وجهی فرنهٔ T، N ، B خم α را به ازای $t \to +\infty$ و $t \to -\infty$ بیابید.

۲. اجزای دستگاه فرنه مربوط به‌خم $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ را محاسبه کنید و خمیدگی و تاب α را به صورت توابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ بیان کنید. s را از $t = ۰$ اندازه می‌گیریم.

۳. اجزای دستگاه فرنــه مربوط به‌خم $\alpha(t)=(t\cos t,\ t\sin t,\ t)$ را در نقطهٔ $t=0$ محاسبه کنید (α'، α''، α''' را در $t=0$، پیش‌ازاستفاده از قضیهٔ ۳.۴ به‌دست آورید.) و به ازای $-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ طرح آن را ترسیم کنید و T، N و B را در $t=0$ نمایش دهید. (راهنمایی: تمرین ۲ فصل ۲، بند ۲.)

۴. برای خم α مثال ۴.۴، مستقیما از راه محاسبه، لم ۲.۴ را تحقیق،وطرح آن راترسیم کنید. بردارهای $T(0)$، $N(0)$، $\alpha'(0)$ و $\alpha''(0)$ را نمایش دهید.

۵. ثابت کنید که خمیدگی خم منظم α در $\mathbf{E}^3$ چنین است:

$$\kappa^2 v^4 = \|\alpha''\|^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

۶. اگر α خمی با تندی ثابت $c>0$ باشد، نشان دهید که:

$$T = \frac{\alpha'}{c} \qquad \kappa = \frac{\|\alpha''\|}{c^2}$$

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} \qquad \tau = \frac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{c^2\|\alpha''\|^2}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{c\,\|\alpha''\|}$$

با فرض $\alpha'' \neq 0$ یعنی $\kappa > 0$ برای N، B و τ.

۷. با استفاده ازفرمولهای تمرین قبل،اجزای دستگاه فرنه مارپیچ α، مثال ۲.۴ فصل اول را محاسبه کنید.

۸. گیریم α مارپیچ استوانه‌ای با بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ و زاویهٔ ϑ و تابع طول قوس s (نقطهٔ مبدأ $t=0$) باشد. خم یکتای γ:

$$\alpha(t) = \gamma(t) + s(t)\cos\vartheta\,\mathbf{u}$$

را خم مقطع عرضی استوانه، که α روی آن واقع است می‌نامند. ثابت کنید که
(الف) γ درصفحه‌ای که از $\alpha(0)$ می‌گذرد و بر $\mathbf{u}$ عمود است واقع می‌باشد.
(ب) خمیدگی γ برابر است با $\kappa/\sin^2\vartheta$، که درآن κ خمیدگی α است.
(راهنمایی: برای (ب) کافی است α را با تندی واحد فرض کنید.)

۹. (ادامــه). خمهای زیر مارپیچهای استوانه‌ای‌اند. برای هرکدام بردار $\mathbf{u}$، زاویهٔ ϑ و خم مقطع عرضی γ را بیابید و شرط (الف) تمرین بالا را تحقیق کنید.
(الف) خم تمرین ۱.

(ب) خم مثال ۴.۴.
(ج) خم تمرین ۲.

۱۰. اگر β خمی با تندی واحد و $\kappa > 0$ و $\tau \neq 0$ و هردو ثابت باشند، ثابت کنید که β یك مارپیچ «مستدیر» است.

۱۱. گیریم σ نگارهٔ کروی (بند ۴) خم با تندی واحد β باشد. ثابت کنید که خمیدگی و تاب σ عبارت‌اند از:

$$\kappa_\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2} \qquad\qquad \tau_\sigma = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left[1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right]}$$

که درآن κ و τ خمیدگی و تاب خم β هستند.

۱۲. (الف) ثابت کنید که شرط لازم وکافی برای آنکه خمی یك مارپیچ استوانه‌ای باشد، آن است که نگارهٔ کروی آن قسمتی ازیك دایره باشد (به‌محاسبه نیازی نیست.)
(ب) طرح نگارهٔ کروی مارپیچ استوانه‌ای تمرین ۱ را ترسیم کنید. آیا این نگاره یك دایرهٔ کامل است؟ مرکز آن را بیابید.

۱۳. اگر α خمی با $\kappa > 0$ باشد، در این صورت بنا بر تعریف خم مرکزی $\alpha^* = \alpha + (1/\kappa)N$ خمی است که از همهٔ مرکزهای خمیدگی α تشکیل شده است (مثال ۶، فصل ۲، بند ۳). به‌ازای هردو عدد مخالف صفر a و b مارپیچ مثال ۳.۲ را با β_{ab} نشان می‌دهیم. ثابت کنید که خم مرکزی β_{ab} عبارت است از $\beta_{\bar{a}b}$ که در آن $\bar{a} = -b^2/a$، نشان دهید که خم مرکزی $\beta_{\bar{a}b}$ همان مارپیچ اصلی β_{ab} است.

۱۴. اگر $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ خم منظمی در $\mathbf{E}^2$ باشد، نشان دهید که خمیدگی آن (مثال ۸، فصل ۲، بند ۳) عبارت است از

$$\kappa = \frac{\alpha'' \cdot J(\alpha')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

دراینجا J عملگر $J(t_1, t_2) = (-t_2, t_1)$ است.

۱۵. اگر α خم منظمی در $\mathbf{E}^2$ باشد، خم مرکزی $\alpha^* = \alpha + (1/\kappa)N$ را گستردهٔ α می‌نامند. (بدیهی است در نقاطی که $\kappa = 0$، معین نیست.)
(الف) نشان دهید که α^* به‌طور یکتا از شرط آنکه مماس درهر نقطهٔ آن قائم بر α باشد، معین می‌گردد.
(ب) ثابت کنید که

$$\alpha^* = \alpha + \frac{\alpha' \cdot \alpha'}{\alpha'' \cdot J(\alpha')} J(\alpha')$$

(J عملگری است که در تمرین ۱۴ بیان شد.)

(ج) گستردهٔ چرخزاد زیر را بیابید و هردو خم را ترسیم کنید

$$\alpha(t) = (t + \sin t,\ 1 + \cos t), \quad -\pi < t < \pi$$

۱۶. خمیدگی کلی خم با تندی واحد α که روی I تعریف شده است عبارت است از $\int_I \kappa(s)\, ds$. اگر α خم منظمی باشد، خمیدگی کلی به‌صورت $\int_I \kappa(t) v(t) dt$ درمی‌آید، و در نتیجه از انتخاب پارامتر مستقل است. خمیدگی کلی خمهای زیر را پیدا کنید.

(الف) خم مثال ۴.۴.

(ب) مارپیچ مثال ۳.۳.

(ج) خم تمرین ۲.

این سه خم روی تمام خط حقیقی معین‌اند.

(د) بیضی $\alpha(t) = (a \cos t,\ b \sin t)$. چون این خم بسته است، فقط یك دورهٔ آن $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ را درنظر بگیرید.

۱۷. توابع با مقدارحقیقی دیفرانسیلپذیر $f > 0$ و g دلخواه را روی فاصله‌ای از $\mathbf{R}$ در نظرمی‌گیریم. نشان دهید که خمیدگی و تاب خم

$$\alpha(t) = \left(\int f(t) \sin t\, dt,\ \int f(t) \cos t\, dt,\ \int f(t) g(t) dt \right)$$

که در آن $\int h$ معرف تابعی است که مشتق آن h است عبارت‌اند از:

$$\kappa = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{1 + g^2 + g'^2}{(1 + g^2)^3}}, \quad \tau = -\frac{1}{f} \frac{g + g''}{(1 + g^2 + g'^2)}$$

۱۸. خم درجهٔ سوم $\gamma(t) = (at,\ bt^2,\ ct^3)$ را که در آن $abc \neq 0$، در نظرمی‌گیریم.

(الف) نشان دهید که

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{3ac}{2b^2} \left[\frac{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2}{9c^2t^4 + 9\left(\frac{a^2c^2}{b^2}\right)t^2 + a^2} \right]^{3/2}$$

و ثابت کنید که شرط لازم وکافی برای آنکه γ یك مارپیچ استوانه‌ای باشد آن است که $3ac = \pm 2b^2$.

(ب) در حالتی که $3ac = 2b^2$، بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ و زاویهٔ ϑ را بیابید.

۱۹. یکی از ترفندهای استاندهٔ آنالیز پیشرفته آن است که تابع f را طوری می‌سازند که بی‌نهایت بار روی خط حقیقی مشتقپذیر باشد، و به‌ازای $t \leqslant 0$، $f(t) = 0$ و به‌ازای $t > 0$، $f(t) > 0$ (و نیز به‌ازای $t > 0$، $f''(t) > 0$). اگر قرار دهیم $g(t) = f(-t)$ وخم

$$\alpha(t) = (t,\ f(t),\ g(t))$$

را درنظر گیریم.

(الف) ثابت کنید که خمیدگی α فقط به‌ازای $t = 0$ صفر است.

(ب) طرح این خم را به‌ازای مقادیر کوچك $|t|$ رسم کنید وچند قائم اصلی آن را به‌ازای $t > 0$ و $t < 0$ نمایش دهید.

این مثال نشان می‌دهد که در بررسی دقیق هندسهٔ خمهای $\mathbf{E}^3$، نمی‌توان از شرط $\kappa > 0$ صرفنظر کرد. زیرا اگر κ حتی در یك نقطه صفر باشد، مشخصات هندسی خم در آن نقطه اساساً تغییر می‌کند. (باید توجه داشت که دربارهٔ خمهای $\mathbf{E}^2$ این اشکال پیش نمی‌آید؛ تمرین ۸ فصل ۲ بند ۳ را ببینید.)

۵. مشتقهای کوواریان

در فصل اول هر بار که شیء جدیدی (خم، فرم دیفرانسیلی، نگاشت، ...) را تعریف کردیم مفهوم مناسبی نیز به‌عنوان مشتق آن بیان کردیم. اما تعریف مشتق میدانهای برداری را استثنائاً به‌تأخیر انداختیم، زیرا این مفهوم به‌هندسهٔ فضای اقلیدسی تعلق دارد.

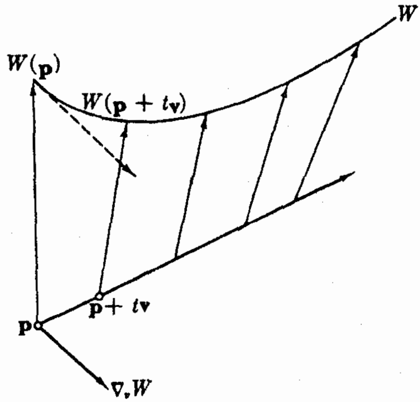
مشتق‌میدان برداری، تعمیم مفهوم $\mathbf{v}[f]$ مشتق تابع f نسبت به‌بردارمماس $\mathbf{v}$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ (تعریف ۱.۳ فصل اول) می‌باشد. زیرا اگر به‌جای f یك میدان برداری W در نظر گیریم، مشاهده می‌شود که تابع $t \to W(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ یك میدان برداری روی خم $t \to \mathbf{p}+t\mathbf{v}$ می‌باشد (مشتق این میدان برداری در بند ۲ تعریف شد). در اینجا مشتق W نسبت به $\mathbf{v}$ همان مشتق $t \to W(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ در $t = 0$ خواهد بود.

۱.۵. تعریف. گیریم W یك میدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ و $\mathbf{v}$ یك بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ باشد. در این‌صورت مشتق‌کوواریان W نسبت به $\mathbf{v}$ عبارت است از بردار مماس

$$\nabla_{\mathbf{v}_p} W = W(\mathbf{p}+t\mathbf{v})'(0)$$

در نقطهٔ $\mathbf{p}$.

بدیهی است که $\nabla_{\mathbf{v}} W$ میزان تغییر $W(\mathbf{p})$ را هنگام حرکت $\mathbf{p}$ در راستای $\mathbf{v}$ نشان می‌دهد (شکل ۲۰.۲). (اصطلاح «کوواریان» مأخوذ از مفهوم عامتری است که در فصل ۷ بیان شده است.)



شکل۲۰۰۲

به‌عنوان مثال، گیریم $W = x^{2}U_{1} + yzU_{3}$ و $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$ در $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$.
از آنجا

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (2 - t, 1, 2t)$$

و بنابراین

$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = (2 - t)^{2}U_{1} + 2tU_{3}$$

که در آن U_1 و U_3 نیز دقیقاً در $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ محاسبه شده‌اند. بدین‌ترتیب:

$$\nabla_{v}W = W(\mathbf{p} + t\mathbf{v})'(0) = -4U_{1}(\mathbf{p}) + 2U_{3}(\mathbf{p})$$

۲.۵لم. اگر $W = \sum w_{i}U_{i}$ یك میدان برداری روی $\mathbf{E}^{3}$ و $\mathbf{v}$ یك بردار مماس در $\mathbf{p}$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\nabla_{v}W = \sum \mathbf{v}[w_{i}]U_{i}(\mathbf{p})$$

برهان. چون تخصیص W را به‌خم $t \rightarrow \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ درنظربگیریم، خواهیم داشت:

$$W(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = \sum w_{i}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})U_{i}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$$

برای تعیین مشتق این‌میدان برداری (در $t = 0$)کافی‌است به‌محاسبهٔ مشتق مختصات اقلیدسی آن (در $t = 0$) بپردازیم. اما چنان‌که دیدیم (تعریف ۱.۳ فصل اول) مشتق $w_{i}(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ در $t = 0$ دقیقاً برابر است با $\mathbf{v}[w_{i}]$. از این‌رو

$$\nabla_v W = W(\mathbf{p}+t\mathbf{v})'(0) = \sum \mathbf{v}[w_i]\,U_i(\mathbf{p})$$ ∎

به‌طور خلاصه برای اثر دادن ∇_v بریك میدان برداری کافی است $\mathbf{v}$ را بر مختصات اقلیدسی آن تأثیر دهیم، و از اینجا خواص خطی و لایبنیتزی مشتق کوواریان، که در زیر آمده‌اند، به‌آسانی از خواص مشتقهای امتدادی (قضیهٔ ۳.۳ فصل اول) نتیجه می‌شوند.

۳.۵ قضیه. گیریم $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای مماس بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ و Y و Z دومیدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشند. در این‌صورت داریم

(۱) به‌ازای همهٔ اعداد a و b، $\nabla_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}}Y = a\nabla_v Y + b\nabla_w Y$

(۲) به‌ازای همهٔ اعداد a و b، $\nabla_v(aY+bZ) = a\nabla_v Y + b\nabla_v Z$

(۳) به‌ازای همهٔ توابع دیفرانسیلپذیر f، $\nabla_v(fY) = \mathbf{v}[f]Y(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\nabla_v Y$

(۴) $\mathbf{v}[Y\cdot Z] = \nabla_v Y\cdot Z(\mathbf{p}) + Y(\mathbf{p})\cdot\nabla_v Z$

برهان. به‌عنوان مثال به‌اثبات (۴) می‌پردازیم. اگر

$$Y = \sum y_i U_i \quad \text{و} \quad Z = \sum z_i U_i$$

در این‌صورت

$$Y\cdot Z = \sum y_i z_i$$

و بنا بر قضیهٔ ۳.۳ فصل اول خواهیم داشت:

$$\mathbf{v}[Y\cdot Z] = \mathbf{v}[\sum y_i z_i] = \sum \mathbf{v}[y_i]z_i(\mathbf{p}) + \sum y_i(\mathbf{p})\mathbf{v}[z_i]$$

با توجه به‌لم بالا داریم

$$\nabla_v Y = \sum \mathbf{v}[y_i]U_i(\mathbf{p}) \quad \text{و} \quad \nabla_v Z = \sum \mathbf{v}[z_i]U_i(\mathbf{p})$$

و دیده می‌شود که دومجموع مطلوب به‌ترتیب با $\nabla_v Y\cdot Z(\mathbf{p})$ و $Y(\mathbf{p})\cdot\nabla_v Z$ برابرند. ∎

با استفادهٔ مجدد از اصل نقطه‌ای (فصل اول بند ۲) می‌توان مشتق کوواریان یك میدان برداری W را نسبت به‌یك میدان برداری V معین کرد. این‌مشتق خود نیز یك میدان برداری $\nabla_V W$ خواهد بود، که مقدار آن در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ برابر است با $\nabla_{V(p)}W$. از لم بالا نتیجه می‌شود که اگر $W = \sum w_i U_i$، خواهیم داشت

$$\nabla_V W = \sum V[w_i]U_i$$

محاسبات مختصاتی با استفاده از اتحاد اساسی $U_i[f] = \partial f/\partial x_i$ به‌آسانی انجام می‌گیرد. مثلاً اگر $V = (y-x)U_1 + xyU_3$ و $W = x^2U_1 + yzU_3$، داریم

$$V[x^2] = (y-x)U_1[x^2] = 2x(y-x)$$

$$V[yz] = xyU_3[yz] = xy^2$$

از آنجا

$$\nabla_V W = 2x(y-x)U_1 + xy^2 U_3$$

دراینجا میدان برداری V را با توجه به‌مثال پیش انتخاب کرده‌ایم. در واقع مقدار V در نقطهٔ $\mathbf{p}(2, 1, 0)$ عبارت است از:

$$V(\mathbf{p}) = (1-2)U_1(\mathbf{p}) + 2U_3(\mathbf{p}) = (-1, 0, 2)_p = \mathbf{v}_p$$

که همان بردار $\mathbf{v}$ در مثال پیش است. بدینسان مقدار میدان برداری $\nabla_V W$ در این نقطه باید با محاسبهٔ قبلی $\nabla_V W$ سازگار باشد و در واقع به‌ازای $\mathbf{p} = (2, 1, 0)$ داریم

$$\nabla_V(W)(\mathbf{p}) = 2 \cdot 2(1-2)U_1(\mathbf{p}) + 2U_3(\mathbf{p}) = -4U_1(\mathbf{p}) + 2U_3(\mathbf{p})$$

هنگامی که مشتق کوواریان $\nabla_V W$ تماماً برحسب میدانهای برداری بیان شود، خواصی که در قضیهٔ بالا دیدیم، به‌صورت زیر درمی‌آیند.

۴۰۵ فرع. گیریم V، W، Y و Z میدانهای برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشند. در این صورت

(۱) به‌ازای همهٔ اعداد a و b، $\nabla_V(aY+bZ) = a\nabla_V Y + b\nabla_V Z$

(۲) به‌ازای همهٔ توابع f و g، $\nabla_{fV+gW}Y = f\nabla_V Y + g\nabla_W Y$

(۳) به‌ازای همهٔ توابع f، $\nabla_V(fY) = V[f]Y + f\nabla_V Y$

(۴) $V[Y \cdot Z] = \nabla_V Y \cdot Z + Y \cdot \nabla_V Z$

از اثبات این فرع که تمرینی است برای کاربرد پرانتزها براساس (اصل نقطه‌ای) تعریف $(\nabla_V Y)(\mathbf{p}) = \nabla_{V(p)} Y$، صرفنظر می‌کنیم.

باید توجه داشت که $\nabla_V Y$ برحسب V و Y متقارن نیست، و این نکته به آسانی قابل‌توجیه است. زیرا از Y باید مشتق گرفت درصورتی که V فقط دارای یك نقش جبری است. به‌ویژه داریم $\nabla_{fV} Y = f\nabla_V Y$ اما $\nabla_V(fY)$ با $f\nabla_V Y$ برابر نیست، زیرا دراولی جملهٔ اضافی، حاصل از مشتق f نسبت به $\mathbf{v}$ موجود است.

تمرینات

۱. بردارمماس $\mathbf{v} = (-1, -1, 2)$ را درنقطهٔ $\mathbf{p} = (1, 3, -1)$ درنظرمی گیریم. مستقیماً با استفاده از تعریف، $\nabla_V W$ را در حالتهای زیر محاسبه کنید:

(الف) $W = x^2 U_1 + yU_2$ (ب) $W = xU_1 + x^2 U_2 - z^2 U_3$

۲. گیریم $V = -yU_1 + xU_3$ و $W = \cos xU_1 + \sin xU_2$. مشتقهای کوواریانی

زیر را برحسب U_1، U_2 و U_3 بیان کنید:

(الف) $\nabla_V W$ (ج) $\Delta_V(z^2W)$ (ه) $\nabla_V(\nabla_V W)$

(ب) $\nabla_V V$ (د) $\nabla_W(V)$ (و) $\nabla_V(xV - zW)$

۳. اگر W یك میدان برداری با طول ثابت $\|W\|$ باشد، ثابت کنید که مشتق کوواریان $\nabla_V W$ به‌ازای هرمیدان برداری V همواره بر W عمود است.

۴. گیریم X میدان برداری خاص $\sum x_i U_i$ باشد که در آن x_1، x_2 و x_3 توابع مختصاتی طبیعی $\mathbf{E}^3$ اند. ثابت کنید که به‌ازای هرمیدان برداری V داریم $\nabla_V X = V$.

۵. اگر $W = \sum w_i U_i$ یك میدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشد، دیفرانسیل کوواریان W با $\nabla W = \sum dw_i U_i$ تعریف می‌شود. ∇W تابعی‌است روی‌همهٔ بردارهای‌مماس، که مقدار آن به‌ازای $\mathbf{v}$ به‌صورت زیر است

$$\sum dw_i(\mathbf{v})U_i(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{v}} W$$

دیفرانسیل کوواریان $W = xy^3U_1 - x^2z^2U_3$ را محاسبه کنید و با استفاده از آن $\nabla_{\mathbf{v}} W$ را در حالتهای زیر بیابید

(الف) $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$ در $\mathbf{p} = (-1, 2, -1)$

(ب) $\mathbf{v} = (-1, 2, -1)$ در $\mathbf{p} = (1, 3, 2)$

۶. گیریم W یك میدان برداری روی ناحیه‌ای شامل خم α باشد. در این‌صورت $t \to W(\alpha(t))$ یك میدان برداری روی α خواهد بود که تخصیص W به α نام دارد و آن را با W_α نشان می‌دهند.

(الف) ثابت کنید که $\nabla_{\alpha'(t)} W = (W_\alpha)'(t)$

(ب) از آنجا نتیجه بگیرید که در تعریف ۱.۵ می‌توان به‌جای خط راست هر خم با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ را قرارداد. بدین ترتیب Y' مشتق یك میدان برداری Y روی یك خم α (تقریباً) همان $\nabla_{\alpha'} Y$ است.

۷. کروشهٔ دو میدان برداری عبارت است از میدان برداری

$$[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$$

نشان دهید که کروشه دارای خواص زیر است:

(الف) $[V, W][f] = VW[f] - WV[f]$

که درآن $VW[f]$ نمایشگر «مشتق دوم» یعنی $V[W[f]]$ است.

(ب) $[W, V] = -[V, W]$

(ج) $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0$

$$[fV, gW] = fV[g]W - gW[f]V + fg[V, W] \quad (\text{د})$$

(راهنمایی: اگر تساوی $Z[f] = 0$ به‌ازای همهٔ fها برقرار باشد، آنگاه داریم $Z = 0$.)

۶. میدانهای سه‌وجهی

هنگامی که فرمولهای فرنه (به‌وسیلهٔ فرنه در ۱۸۴۷، و مستقلاً به‌وسیلهٔ سره در ۱۸۵۱) کشف شد، نظریهٔ رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ بخش توسعه یافته‌ای از هندسه به‌شمار می‌رفت. موفقیت روش فرنه دربارهٔ خمها موجب شد که داربو (در حوالی ۱۸۸۰) این «روش سه‌وجهیهای متحرك» را نیز برای بررسی رویه‌ها مورد استفاده قرار دهد، وچنان‌که در پیش گفتیم کارتان توانست این روش را به‌صورت عام آن بیان کند. اندیشهٔ اصلی وی بسیار ساده بود: به‌هر نقطه از شیء مورد بررسی (خم، رویه، خود فضای اقلیدسی، ...) یك سه‌وجهی متناظر قرار می‌دهیم، سپس با استفاده از بسط متعامد، میزان تغییر این سه‌وجهی را برحسب خود سه‌وجهی بیان می‌کنیم. این درست همان مطلبی است که دربارهٔ خمها به‌وسیلهٔ فرمول فرنه تحقق یافت.

در سه بند آینده جزئیات این طرح را در فضای اقلیدسی $\mathbf{E}^3$ توضیح می‌دهیم. خواهیم دید که هندسهٔ خمها و رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ نه‌فقط مشابه یکدیگرند بلکه فرعی از این نتایج بنیادی می‌باشند. چون کاربرد عمدهٔ آن (در نظریهٔ رویه‌ها) فقط درفصل ششم مطرح می‌شود، بررسی این بندها را می‌توان به‌تعویق انداخت و به‌عنوان مقدمهٔ فصل مزبور مطالعه کرد.

با استفاده ازاصل نقطه‌ای (فصل‌اول بند۲) می‌توان عملیات روی بردارهای مماس را مستقیماً به‌عملیات روی میدانهای برداری تعمیم داد. مثلاً اگر V و W دومیدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشند، در این صورت حاصل‌ضرب داخلی $V \cdot W$ عبارت است از تابعی دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}$ که مقدار آن در هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ عبارت است از $V(\mathbf{p}) \cdot W(\mathbf{p})$. $\|V\|$ نرم V تابعی است با مقدارحقیقی روی $\mathbf{E}^3$ که مقدارآن درp برابر است با $\|V(\mathbf{p})\|$. بدین ترتیب داریم $\|V\| = (V \cdot V)^{1/2}$. برخلاف $V \cdot W$، تابع‌نرم $\|V\|$ لزومی ندارد که در نقاط $V(\mathbf{p}) = 0$ دیفرانسیلپذیر باشد، زیرا تابع جذر در ۰ تغییرات مناسبی ندارد.

در هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ سه بردار مماس $U_1(\mathbf{p})$، $U_2(\mathbf{p})$، $U_3(\mathbf{p})$ یك سه‌وجهی در این‌نقطه تشکیل می‌دهند. این مطلب را با استفاده ازضرب داخلی‌میدانهای برداری می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد و نوشت

$$U_i \cdot U_j = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

در سراسرفصل اول U_1، U_2، U_3 را مورد استفاده قرار دادیم. اکنون با در اختیارداشتن حاصل‌ضرب داخلی می‌توانیم تعمیمی ساده راکه دارای اهمیت بنیادی است بیان کنیم.

۱.۶ تعریف. هنگامی میدانهای برداری E_1، E_2، E_3 روی $\mathbf{E}^3$ یك میدان سه‌وجهی

تشکیل می‌دهند که داشته باشیم

$$E_i \cdot E_j = \delta_{ij} \qquad (۱ \leqslant i, j \leqslant ۳)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است.

توجیه اصطلاح میدان سه‌وجهی آن است کــه در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ سه‌بـردار $E_۱(\mathbf{p})$ ، $E_۲(\mathbf{p})$ ، $E_۳(\mathbf{p})$ تشکیل یك سه‌وجهی می‌دهند، و با توجه به این نکته بوده است که در فصل اول $U_۱$ ، $U_۲$ ، $U_۳$ را میدان سه‌وجهی طبیعی روی $\mathbf{E}^۳$ نامیدیم.

۲.۶. مثال. (۱) میدان سه‌وجهی استوانــه‌ای (شکل ۲۱.۲). گیریم r ، ϑ و z تـوابع مختصاتی استوانه‌ای معمولی روی $\mathbf{E}^۳$ باشند. اکنون برای هریك از راستاها یـك میدان برداری یکه در راستای افزایش مختص (وقتی دوتای دیگر ثابت اختیار شوند) انتخاب می‌کنیم. برای r بدیهی است که داریم:

$$E_۱ = \cos\vartheta\, U_۱ + \sin\vartheta\, U_۲$$

که جهت آن درجهت افزایش z می‌باشد. بدین‌ترتیب، جهت

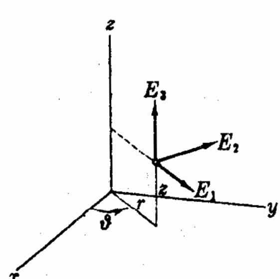
$$E_۲ = -\sin\vartheta\, U_۱ + \cos\vartheta\, U_۲$$

چنان‌که‌درشکل ۲۱.۲ دیده‌می‌شود، به‌جهت افزایش ϑ متوجه است. بالاخره‌جهت افزایش z مستقیماً به‌طرف بالاست، لذا

$$E_۳ = U_۳$$

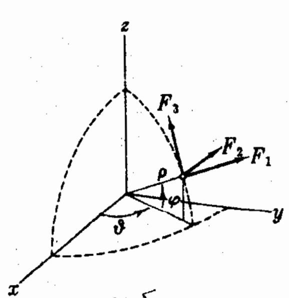
به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$، وبدین‌ترتیب یك میدان سه‌وجهی تشکیل می‌دهند (که روی همهٔ $\mathbf{E}^۳$ به‌جز محور zها معین است). ما آن‌را میدان سه‌وجهی استوانه‌ای روی $\mathbf{E}^۳$ می‌نامیم.

(۲) میدان سه‌وجهی کروی روی $\mathbf{E}^۳$(شکل ۲۲.۲). به‌همین‌طریق می‌توان یك میدان



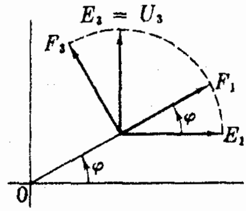
استوانه‌ای

شکل ۲۱.۲



کروی

شکل ۲۲.۲



شکل ۲۳.۲

سه‌وجهی F_1 ، F_2 ، F_3 از توابع مختصاتی کروی ρ ، ϑ ، φ روی $\mathbf{E}^3$ فراهم کرد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، دراینجا زاویهٔ φ را از صفحهٔ xy به‌جهت بالا اندازه می‌گیریم.

گیریم E_1 ، E_2 ، E_3 میدان سه‌وجهی استوانه‌ای باشد. برای مختصات استوانه‌ای، میدان برداری یکهٔ F_2 در جهت افزایش ϑ در هر دو میدان یکی است، لذا $F_2 = E_2$. میدان برداری یکهٔ F_1، درجهت افزایش ρ از مبدأ به‌جهت بیرون متوجه و بنابراین به‌صورت زیر است

$$F_1 = \cos\varphi\, E_1 + \sin\varphi\, E_3$$

(شکل ۲۳.۲). به‌همین‌طریق میدان برداری F_3 درجهت افزایش φ چنین است:

$$F_3 = -\sin\varphi\, E_1 + \cos\varphi\, E_3$$

بدین‌ترتیب از فرمولهای E_1 ، E_2 و E_3 درمثال (۱) خواهیم داشت

$$F_1 = \cos\varphi\,(\cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2) + \sin\varphi\, U_3$$

$$F_2 = -\sin\vartheta\, U_1 + \cos\vartheta\, U_2$$

$$F_3 = -\sin\varphi\,(\cos\vartheta\, U_1 + \sin\vartheta\, U_2) + \cos\varphi\, U_3$$

با استفادهٔ مکرر از اتحاد $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ، می‌توان تحقیق کرد که F_1 ، F_2، F_3 یك میدان سه وجهی است که میدان سه‌وجهی کروی روی $\mathbf{E}^3$ نامیده می‌شود (حوزهٔ تعریف آن، مانند حالت استوانه‌ای، همهٔ $\mathbf{E}^3$ با حذف محور z ها می‌باشد).

نتیجهٔ مفید زیر مستقیماً از بسط متعامد به‌دست می‌آید.

۳.۶ لم. گیریم E_1 ، E_2 ، E_3 یك میدان سه‌وجهی روی $\mathbf{E}^3$ باشد.

(۱) اگر V یك میدان برداری روی $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت $V = \sum f_i E_i$ ، که درآن توابع $f_i = V \cdot E_i$ ، توابع مختصاتی V برحسب E_1 ، E_2، و E_3 نامیده می‌شوند.

(۲) اگر $V = \sum f_i E_i$ و $W = \sum g_i E_i$، دراین‌صورت داریم

$$V \cdot W = \sum f_i g_i\,, \quad \|V\| = \left(\sum f_i^2\right)^{1/2}$$

بدین‌ترتیب هرمیدان برداری V دارای توابع مختصاتی مختلفی برحسب انتخاب میدان‌سه‌وجهی E_1 ، E_2، و E_3 خواهدبود. توابع مختصاتی اقلیدسی (لم ۵.۲ فصل اول)، طبعاً از میدان سه‌وجهی طبیعی U_1 ، U_2 ، U_3 حاصل می‌شوند. درفصل اول منحصراً این میدان سه‌وجهی طبیعی مورد استفاده قرار گرفت، اما اکنون به‌تدریج آن را به‌میدانهای

سه‌وجهی دلخواه تبدیل خواهیم کرد. علت این‌کار روشن است: در بررسی خمها و رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ خواهیم توانست میدان سه‌وجهی مناسبی با هر مسأله انتخاب کنیم. بدین‌ترتیب نه‌تنها محاسبات ساده می‌شوند بلکه درك هندسه نیز آسانتر می‌شود.

تمرینات

۱. اگر V و W میدانهای برداری‌روی $\mathbf{E}^3$، بااستقلال‌خطی درهرنقطه باشند، نشان‌دهید که

$$E_1=\frac{V}{\|V\|},\quad E_2=\frac{\tilde{W}}{\|\tilde{W}\|},\quad E_3=E_1\times E_2$$

که در آن $\tilde{W}=W-W\cdot E_1E_1$ یك میدان سه‌وجهی است.

۲. هریك از میدانهای برداری زیر را
(I) برحسب میدان سه‌وجهی استوانه‌ای (با ضرایبی برحسب r ، ϑ ، z)،
(II) برحسب میدان سه‌وجهی کروی (با ضرایبی برحسب ρ ، ϑ ، φ)
بیان کنید:

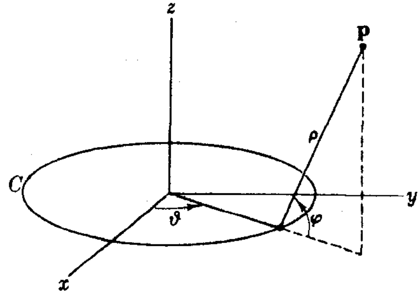
(الف) U_1 (ب) $\cos\vartheta U_1+\sin\vartheta U_2+U_3$

(ج) $xU_1+yU_2+zU_3$

۳. مطلوب است تعیین میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 ، E_3 به‌طوری‌که

$$E_1=\cos x U_1+\sin x\cos z U_2+\sin x\sin z U_3$$

۴. میدان سه‌وجهی چنبره‌ای. گیریم $\mathscr{O}$ همهٔ نقاط $\mathbf{E}^3$ بجز محور z و دایرهٔ C واقع درصفحهٔ xy به‌شعاع R باشد. توابع مختصاتی چنبره‌ای ρ ، ϑ ، φ روی $\mathscr{O}$ باتوجه به‌شکل ۲۴.۲ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند



شکل ۲۴۰۲

$$x=(R+\rho\cos\varphi)\cos\vartheta$$
$$y=(R+\rho\cos\varphi)\sin\vartheta$$
$$z=\rho\sin\varphi$$

اگر E_1 ، E_2 و E_3 میدانهای برداری یکه درجهت افزایش ρ ، ϑ و φ باشند، E_1 ، E_2 ، E_3 را برحسب U_1 ، U_2 ، U_3 بیان کنید و نشان دهیدکه یك‌میدان سه‌وجهی تشکیل می‌دهند.

۷. فرمهای همبندی

بار دیگر به‌تأکید نکتهٔ اصلی می‌پردازیم: اهمیت فرمولهای فرنه دراین نیست‌که مشتقهای T' ، N' ، B' را به دست می‌دهند، بلکه بیشتر از آنجاست‌که مشتقهای T' ، N' ، B' را برحسب T ، N ، B بیان می‌کنند، و بدین‌وسیله به‌تعریف خمیدگی و تاب می‌پردازند. اکنون همین مطلب را دربارهٔ میدان سه وجهی دلخواه E_1 ، E_2 ، E_3 روی $\mathbf{E}^3$ تعمیم می‌دهیم، یعنی، مشتقهای کوواریان این میدانهای برداری را برحسب خود آنها بیان می‌کنیم. برای این کار مشتق کوواریان برحسب یك میدان مماسی دلخواه $\mathbf{v}$ را در نقطهٔ $\mathbf{p}$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\nabla_v E_1=c_{11}E_1(\mathbf{p})+c_{12}E_2(\mathbf{p})+c_{13}E_3(\mathbf{p})$$
$$\nabla_v E_2=c_{21}E_1(\mathbf{p})+c_{22}E_2(\mathbf{p})+c_{23}E_3(\mathbf{p})$$
$$\nabla_v E_3=c_{31}E_1(\mathbf{p})+c_{32}E_2(\mathbf{p})+c_{33}E_3(\mathbf{p})$$

با استفاده از بسط متعامد ضرایب این معادلات به‌صورت زیر معین می‌گردند:

$$c_{ij}=\nabla_v E_i\cdot E_j(\mathbf{p}) \quad \text{و} \quad 1\leqslant i,\, j\leqslant 3$$

این ضرایب c_{ij} به بردار مماس $\mathbf{v}$ بستگی دارند، بنابراین بهتر است که آنها را به‌صورت زیر نشان دهیم.

$$\omega_{ij}(\mathbf{v})=\nabla_v E_i\cdot E_j(\mathbf{p}), \qquad (1\leqslant i,\, j\leqslant 3)$$

ω_{ij} تابعی‌است با مقدارحقیقی‌که روی همهٔ بردارهای مماس معین است. ولی‌این‌نوع تابع را قبلاً دیده‌ایم.

۱.۷ لم. گیریم E_1 ، E_2 ، E_3 یك میدان سه‌وجهی روی $\mathbf{E}^3$ باشد. به ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{E}^3$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ قرار می‌دهیم:

$$\omega_{ij}(\mathbf{v})=\nabla_v E_i\cdot E_j(\mathbf{p}), \qquad (1\leqslant i,j\leqslant 3)$$

دراین‌صورت هر ω_{ij} یك ۱- فرمی خواهد بود، و داریم $\omega_{ji}=-\omega_{ij}$. این ۱- فرمیها را فرمهای همبندی میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 ، E_3 می‌نامند.

برهان. بنابر تعریف، ω_{ij} تابعی است با مقدار حقیقی روی بردارهای مماس، بنابراین برای اثبات آنکه ω_{ij} یك ۱- فرمی است (تعریف ۱.۵ فصل اول) کافی است شرط خطی بودن آن‌را تحقیق کنیم. بااستفاده از قضیهٔ ۳.۵ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\omega_{ij}(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) &= \nabla_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}}E_i\cdot E_j(\mathbf{p})\\ &=(a\nabla_{\mathbf{v}}E_i+b\nabla_{\mathbf{w}}E_i)\cdot E_j(\mathbf{p})\\ &=a\nabla_{\mathbf{v}}E_i\cdot E_j(\mathbf{p})+b\nabla_{\mathbf{w}}E_i\cdot E_j(\mathbf{p})\\ &=a\omega_{ij}(\mathbf{v})+b\omega_{ij}(\mathbf{w})\end{aligned}$$

برای اثبات آنکه $\omega_{ji}=-\omega_{ij}$، باید نشان دهیم‌که به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ داریم $\omega_{ij}(\mathbf{v})=-\omega_{ji}(\mathbf{v})$، بنابر تعریف میدان سه‌وجهی داریم $E_i\cdot E_j=\delta_{ij}$ و چون دلتای کرونکر مقادیر ثابت ۰ و ۱ را اختیار می‌کند، خواهیم داشت $\mathbf{v}[\delta_{ij}]=0$، وبنابر فرمول لایبنیتزی (۴) مربوط به‌قضیهٔ ۳.۵ داریم:

$$0=\mathbf{v}[E_i\cdot E_j]=\nabla_{\mathbf{v}}E_i\cdot E_j(\mathbf{p})+E_i(\mathbf{p})\cdot\nabla_{\mathbf{v}}E_j$$

و با استفاده از تقارن ضرب داخلی می‌توان جای دو بردار را درجملهٔ آخر عوض کرد. ازآنجا:

$$0=\omega_{ij}(\mathbf{v})+\omega_{ji}(\mathbf{v})$$

∎

تعبیر هندسی فرمهای همبندی بسیار آسان است. تعریف $\omega_{ij}(\mathbf{v})=\nabla_{\mathbf{v}}E_i\cdot E_j(\mathbf{p})$ مبین آن‌است‌که $\omega_{ij}(\mathbf{v})$ میزان دوران E_i به‌سمت E_j را، درآغاز حرکت $\mathbf{p}$ در راستای $\mathbf{v}$ ، نشان می‌دهد. بنابراین ۱- فرمیهای ω_{ij} این اطلاع را دربارهٔ همهٔ بردارهای مماس بر $\mathbf{E}^3$ به‌دست می‌دهند.

قضیهٔ اساسی زیر اندکی از تعریف فرمهای همبندی غنیتر است.

۲.۷ قضیه. گیریم ω_{ij} $(1\leqslant i,j\leqslant 3)$ فرمهای همبندی میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 ، E_3 روی $\mathbf{E}^3$ باشد. دراین‌صورت به‌ازای هرمیدان برداری V روی $\mathbf{E}^3$ داریم

$$\nabla_V E_i=\sum_j \omega_{ij}(V)E_j,\qquad (1\leqslant i\leqslant 3)$$

که به معادلات همبندی میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 ، E_3 موسوم‌اند.

برهان. به‌ازای i ثابت، دوطرف این معادله میدانهای برداری‌اند، و باید ثابت‌کنیم که درهرنقطهٔ $\mathbf{p}$ داریم:

$$\nabla_{V(p)} E_i = \sum \omega_{ij}(V(\mathbf{p})) E_j(\mathbf{p})$$

اما چنان‌که دیده‌ایم با توجه به تعریف فرمهای همبندی این معادله نتیجه‌ای از بسط متعامد است. ∎

به‌ازای $j = i$ ، از شرط $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ نتیجه می‌شود

$$\omega_{ii} = -\omega_{ii}$$

بنا براین

$$\omega_{۱۱} = \omega_{۲۲} = \omega_{۳۳} = ۰$$

لذا این شرط، نه ۱- فرمی ω_{ij} را فقط بـه سه ۱-فرمی $\omega_{۱۲}$ ، $\omega_{۱۳}$ ، $\omega_{۲۳}$ تقلیل مـی‌دهد. شاید بهتر باشد که فرمهای همبندی ω_{ij} را به‌صورت عناصر یك ماتـریس متقارن چپ از ۱- فرمیها نمایش داد

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{۱۱} & \omega_{۱۲} & \omega_{۱۳} \\ \omega_{۲۱} & \omega_{۲۲} & \omega_{۲۳} \\ \omega_{۳۱} & \omega_{۳۲} & \omega_{۳۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & \omega_{۱۲} & \omega_{۱۳} \\ -\omega_{۱۲} & ۰ & \omega_{۲۳} \\ -\omega_{۱۳} & -\omega_{۲۳} & ۰ \end{pmatrix}$$

وبدین‌ترتیب معادلات همبندی (قضیهٔ ۲.۷) به‌صورت گسترده چنین نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned} \nabla_V E_۱ &= && \omega_{۱۲}(V)E_۲ + \omega_{۱۳}(V)E_۳ \\ \nabla_V E_۲ &= -\omega_{۱۲}(V)E_۱ && \qquad\qquad + \omega_{۲۳}(V)E_۳ \\ \nabla_V E_۳ &= -\omega_{۱۳}(V)E_۱ - \omega_{۲۳}(V)E_۲ && \end{aligned}$$

و رابطهٔ آنها با فرمولهای فرنه کاملاً روشن است

$$\begin{aligned} T' &= && \kappa N && \\ N' &= -\kappa T && && + \tau B \\ B' &= && -\tau N && \end{aligned}$$

اینکه درفرمولهای فرنه جمله‌های‌نظیر $\omega_{۱۳}(V)E_۳$ و $\omega_{۱۳}(V)E_۱-$ وجود ندارند، نتیجهٔ طرز انتخاب میدان سه‌وجهی فرنه برای خم است. بـا تعیین $T(\sim E_۱)$ ، $N(\sim E_۲)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که T' تنها مضربی از N باشد و شامل $B(\sim E_۳)$ نشود.

اختلاف دیگر بین فرمولهای فرنه ومعادلات بالا در آن است که $\mathbf{E}^۳$ سه‌بعدی وخم یك بعدی است. ضرایب κ و τ درفرمولهای فرنه میزان تغییرمیدان سه‌وجهی T ، N و B را فقط در طول این خم یعنی فقط در راستای T بـه‌دست مـی‌دهد. اما ضرایب معادلات همبندی باید بتوانند این اندازه‌گیریها رابرای $E_۱$ ، $E_۲$ ، $E_۳$ برحسب هرمیدان برداری

دلخواه در $\mathbf{E}^3$ انجام دهند. بدین دلیل است که فرمهای همبندی به‌صورت ۱- فرمی‌اند و نه به‌صورت توابع.

غیر از این اختلافهای صوری وجه‌تمایز اساسی دیگری‌هم موجود است. چون میدان سه‌وجهی فرنه به‌خمی وابسته است، دربارهٔ خم‌ازفرمولهای فرنه اطلاعاتی به‌دست می‌آید. اما سه‌وجهی E_1 ، E_2 ، E_3 که در بالا به‌کار رفت کاملاً دلخواه است و درنتیجه معادلات همبندی هیچ‌گونه اطلاع مستقیمی دربارهٔ $\mathbf{E}^3$ به‌دست نمی‌دهند و فقط حاوی اطلاعی دربارهٔ میزان دوران میدان سه‌وجهی مزبور می‌باشند. این نکته نه‌تنها ضعف معادلات به‌حساب نمی‌آید بلکه منشأ توان آنها نیز می‌باشد، زیرا چنان‌که گفتیم اگر بتوان میدان سه‌وجهی مناسبی برای مسألهٔ هندسی انتخاب کرد، دراین‌صورت معادلات همبندی‌اطلاعات مستقیمی دربارهٔ آن مسأله به‌دست می‌دهند. بدین‌سبب این‌معادلات درتمام هندسهٔ دیفرانسیل $\mathbf{E}^3$ دارای نقشی اساسی‌اند، به‌ویژه فرمولهای فرنه را می‌توان از آنها نتیجه گرفت (تمرین۸). مافقط از لحاظ توضیح ترجیح دادیم که نخست حالت‌سادهٔ فرنه را بررسی کنیم.

به‌آسانی می‌توان فرمولهای صریح فرمهای همبندی هر میدان سه‌وجهی دلخواه E_1 ، E_2 ، E_3 را به‌دست آورد. نخست با استفاده از بسط متعامد میدانهای برداری، E_1 ، E_2 ، E_3 را برحسب‌میدان سه‌وجهی طبیعی U_1 ، U_2 ، U_3 روی $\mathbf{E}^3$ بیان می‌کنیم:

$$E_1 = a_{11}U_1 + a_{12}U_2 + a_{13}U_3$$

$$E_2 = a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + a_{23}U_3$$

$$E_3 = a_{31}U_1 + a_{32}U_2 + a_{33}U_3$$

دراینجا هر $a_{ij} = E_i \cdot U_j$ تابعی با مقدارحقیقی‌روی $\mathbf{E}^3$ است. ماتریس

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

که عناصر آن ازاین توابع تشکیل شده‌اند به ماتریس ایستاری میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 و E_3 موسوم است. زیرا درهرنقطهٔ $\mathbf{p}$ ، ماتریس عددی

$$A(\mathbf{p}) = (a_{ij}(\mathbf{p}))$$

درست ماتریس ایستاری سه‌وجهی $E_1(\mathbf{p})$ ، $E_2(\mathbf{p})$ ، $E_3(\mathbf{p})$ ، که درتعریف ۶.۱ بیان شد، می‌باشد. چون ماتریسهای ایستاری متعامدند، A' ماتریس ترانهادهٔ A با A^{-1} برابر است.

دیفرانسیل ماتریس $A = (a_{ij})$ را با $dA = (da_{ij})$ تعریف می‌کنیم، بنابراین dA ماتریسی است که عناصر آن ۱- فرمی می‌باشند. اکنون می‌توان فرمهای همبندی را برحسب ماتریس ایستاری با عبارتی ساده بیان کرد.

۳.۷ قضیه. اگر $A=(a_{ij})$ ماتریس ایستاری و $\omega=(\omega_{ij})$ ماتریس فرمهای همبندی میدان سه‌وجهی E_1، E_2 و E_3 باشد، در این‌صورت:

$$\omega = dA\,{}^tA \qquad \text{(ضرب ماتریسها)}$$

یا به‌عبارت دیگر $\omega_{ij}=\sum_k a_{jk}\,da_{ik}$ بدازای $1\leqslant i,\ j\leqslant 3$.

برهان. اگر $\mathbf{v}$ بردار مماس در $\mathbf{p}$ باشد، در این‌صورت بنا بر تعریف داریم

$$\omega_{ij}(\mathbf{v})=\nabla_v E_i\cdot E_j(\mathbf{p})$$

چون A ماتریس ایستاری است، داریم

$$E_i=\sum a_{ik}U_k$$

و بنا بر لم ۲.۵

$$\nabla_v E_i=\sum \mathbf{v}[a_{ik}]U_k(\mathbf{p})$$

از ضرب داخلی این بردار با بردار

$$E_j(\mathbf{p})=\sum a_{jk}(\mathbf{p})U_k(\mathbf{p})$$

خواهیم داشت

$$\omega_{ij}(\mathbf{v})=\sum_k \mathbf{v}[a_{ik}]a_{jk}(\mathbf{p})$$

اما بنا بر تعریف دیفرانسیل

$$\mathbf{v}[a_{ik}]=da_{ik}(\mathbf{v})$$

در نتیجه

$$\omega_{ij}(\mathbf{v})=\sum_k a_{jk}(\mathbf{p})da_{ik}(\mathbf{v})=(\sum_k a_{jk}da_{ik})(\mathbf{v})$$

چون این معادله به‌ازای هر بردارمماس برقراراست، دو ۱-فرمی ω_{ij} و $\sum a_{jk}da_{ik}$ برابرند. به‌آسانی می‌توان فرمول ماتریسی آن را نوشت. عناصر ${}^tA$ عبارت‌اند از ${}^ta_{kj}=a_{jk}$، پس

$$\omega_{ij}=\sum_k da_{ik}\,{}^ta_{kj} \quad , \quad 1\leqslant i,\ j\leqslant 3$$

یعنی

$$\omega = dA\,{}^tA \qquad \blacksquare$$

با استفاده از این‌قضیه به‌محاسبهٔ فرمهای همبندی میدان سه‌وجهی استوانه‌ای مثال ۲.۶ می‌پردازیم. از روی تعریف، ماتریس ایستاری به‌صورت زیر معین می‌گردد

$$A=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta & 0\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

و از آنجا

$$dA=\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\, d\vartheta & \cos\vartheta\, d\vartheta & 0\\ -\cos\vartheta\, d\vartheta & -\sin\vartheta\, d\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

و چون

$${}^tA=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

به‌آسانی خواهیم داشت

$$\omega=dA\,{}^tA=\begin{pmatrix}0 & d\vartheta & 0\\ -d\vartheta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

بدین‌ترتیب $\omega_{12}=d\vartheta$ و $\omega_{21}=-\omega_{12}$ و بقیهٔ فرمهای همبندی صفرند. معادلات همبندی (قضیهٔ ۲.۷) میدان سه‌وجهی استوانه‌ای چنین‌اند

$$\nabla_V E_1=d\vartheta(V)E_2=V[\vartheta]E_2$$

$$\nabla_V E_2=-d\vartheta(V)E_1=-V[\vartheta]E_1$$

$$\nabla_V E_3=0$$

به‌ازای همهٔ میدانهای برداری V.

تعبیر هندسی این معادلات روشن است. معادلهٔ سوم مبین آن است که میدان برداری E_3 متوازی است، و این‌را قبلاً می‌دانستیم. زیرا در میدان سه‌وجهی استوانه‌ای E_3 همان U_3 است. دو معادلهٔ اول مبین آن است که مشتقهای کوواریان E_1 و E_2 نسبت به‌هرمیدان برداری دلخواه V فقط به‌میزان تغییرزاویهٔ ϑ در راستای V بستگی‌دارند. از تعریف تابع ϑ به‌آسانی نتیجه می‌شود که هر گاه V برصفحهٔ ماربرمحور z مماس باشد، آنگاه $V[\vartheta]=0$. بدین‌ترتیب برای یك میدان برداری از این نوع معادلات همبندی بالا نشان می‌دهندکه $\nabla_V E_1=\nabla_V E_2=0$. ازشکل ۲۱.۲ به‌روشنی دیده می‌شود که درهرصفحهٔ ماربرمحور zها E_1 و E_2 متوازی باقی می‌مانند.

میدان سه‌وجهی فرنه T، N ، B مربوط به β را بدست می‌دهد. ثابت کنید که

$$\omega_{12}(T)=\kappa, \quad \omega_{13}(T)=0, \quad \omega_{23}(T)=\tau$$

و فرمولهای فرنه را از معادلات همبندی نتیجه بگیرید. (راهنمایی: مثال ۶، فصل ۲ بند ۵).

۸. معادلات ساختاری

چنان که دیدیم ۱-فرمیها، فرمهای همبندی، ساده‌ترین بیان را برای میزان دوران میدان سه‌وجهی به‌دست می‌دهند، و علاوه براین میدان سه‌وجهی مزبور نیز برحسب ۱-فرمیها بیان می‌شود.

۱.۸. **تعریف.** اگر E_1، E_2 ، E_3 یك میدان سه‌وجهی روی $\mathbf{E}^3$ باشد، در این صورت ۱-فرمیهای دوگان میدان سه‌وجهی مزبور که با θ_1، θ_2 ، θ_3 نمایش داده می‌شوند عبارت‌اند از ۱-فرمیهایی که به‌ازای هربردار مماس $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ داشته باشیم

$$\theta_i(\mathbf{v})=\mathbf{v} \cdot E_i(\mathbf{p})$$

باید توجه داشت که θ_i در هرنقطه روی بردارهای مماس، خطی است و بنابراین یك ۱-فرمی است. (به‌آسانی دیده می‌شود که در هرنقطه θ_1، θ_2 ، θ_3 پایهٔ دوگان E_1،E_2، E_3 را به‌دست می‌دهد.)

در حالت میدان سه‌وجهی طبیعی U_1، U_2 ، U_3 فرمهای دوگان‌همان dx_1، dx_2 ، dx_3 هستند. زیرا با توجه به‌مثال ۳.۵ فصل اول، به‌ازای هربردار مماس $\mathbf{v}$ داریم

$$dx_i(\mathbf{v})=v_i=\mathbf{v} \cdot U_i(\mathbf{p})$$

بنابراین $dx_i=\theta_i$.

با استفاده ازفرمهای دوگان، فرمول بسط متعامد لم ۳.۶ را می‌توان به‌صورت $V=\sum\theta_i(V)E_i$ نوشت. با توجه به‌خصوصیت دوگانی، این فرمول به‌صورت لم زیر درمی‌آید.

۲.۸. **لم.** گیریم θ_1، θ_2 ، θ_3، ۱-فرمیهای دوگان میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 ، E_3 باشد. در این‌صورت هر ۱-فرمی ϕ روی $\mathbf{E}^3$ به‌طور یکتا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi=\sum\phi(E_i)\theta_i$$

برهان. هنگامی دو ۱-فرمی برابرند که به‌ازای هرمیدان برداری V مقدار آنها یکی باشد. در اینجا داریم

$$\begin{aligned}(\sum\phi(E_i)\theta_i)(V)&=\sum\phi(E_i)\theta_i(V)\\&=\phi(\sum\theta_i(V)E_i)=\phi(V)\end{aligned}$$

تمرینات

۱. نشان دهید که به‌ازای هر تابع f میدانهای برداری:

$$E_1 = \frac{(\sin f U_1 + U_2 - \cos f U_3)}{\sqrt{2}}$$

$$E_2 = \frac{(\sin f U_1 - U_2 - \cos f U_3)}{\sqrt{2}}$$

$$E_3 = \cos f U_1 + \sin f U_2$$

تشکیل یك میدان سه‌وجهی می‌دهند. فرمهای همبندی آن را بیابید.

۲. مطلوب است تعیین فرمهای همبندی میدان سه‌وجهی طبیعی U_1، U_2، U_3.

۳. نشان دهید که به‌ازای هر تابع f ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 f & \cos f \sin f & \sin f \\ \sin f \cos f & \sin^2 f & -\cos f \\ -\sin f & \cos f & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس ایستاری یك میدان سه‌وجهی است، و فرمهای همبندی آن را محاسبه کنید.

۴. ثابت کنید که فرمهای همبندی میدان سه‌وجهی کروی عبارت‌اند از:

$$\omega_{12} = \cos\varphi\, d\vartheta, \quad \omega_{13} = d\varphi, \quad \omega_{23} = \sin\varphi\, d\vartheta$$

۵. اگر E_1، E_2، E_3 یك میدان سه‌وجهی باشد و $W = \sum f_i E_i$، فرمول مشتق کوواریان زیر را ثابت کنید:

$$\nabla_V W = \sum_j \{V[f_j] + \sum_i f_i \omega_{ij}(V)\} E_j$$

۶. اگر E_1، E_2، E_3 میدان سه‌وجهی استوانه‌ای، و V یك‌میدان برداری باشد، به‌طوری که $V[\vartheta] = 1$، عبارت $\nabla_V(r\cos\vartheta\, E_1 + r\sin\vartheta\, E_2)$ را محاسبه کنید.

۷. اگر F_1، F_2، F_3 یك میدان سه‌وجهی کروی باشد

(الف) ثابت کنید که $F_1[\rho] = 1$ و $F_1[\vartheta] = F_1[\varphi] = 0$.

(ب) عبارت $\nabla_{F_1}(\cos\rho F_2 + \sin\rho F_3)$ را محاسبه کنید.

۸. گیریم β خمی با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ با $\kappa > 0$ باشد، و فرض کنیم که E_1، E_2، E_3 یك میدان سه‌وجهی روی $\mathbf{E}^3$ است به‌طوری که تخصیص این میدانهای برداری بـه β

این توابع $\phi(E_i)$ تنها توابع مختصاتی ممکن برای ϕ برحسب θ_1، θ_2، θ_3 می‌باشند، زیرا اگر $\phi = \sum f_i\theta_i$ داریم

$$\phi(E_j) = \sum f_i\theta_i(E_j) = \sum f_i\delta_{ij} = f_j \qquad \blacksquare$$

بدین ترتیب ϕ برحسب فرمهای دوگان E_1، E_2، E_3 با محاسبهٔ مقدار آن روی E_1، E_2، E_3 بیان می‌گردد. این مطلب تعمیم لم ۴.۵ فصل اول، دربارهٔ هر میدان سه‌وجهی دلخواه است.

برای مقایسهٔ میدان سه‌وجهی E_1، E_2، E_3 با میدان سه‌وجهی طبیعی ازماتریس ایستاری $A = (a_{ij})$ که در آن

$$E_i = \sum a_{ij}U_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

است استفاده کردیم، عبارت دوگان آن چنین است

$$\theta_i = \sum a_{ij}\, dx_j$$

که در آن ضرایب تغییر نکرده است. زیرا بنابر لم ۲.۸ (یا بهتر بگوییم حالت خاص آن، لم ۴.۵ فصل اول) داریم

$$\theta_i = \sum \theta_i(U_j)dx_j$$

از آنجا

$$\theta_i(U_j) = E_i \cdot U_j = \left(\sum a_{ik}U_k\right) \cdot U_j = a_{ij}$$

مقایسهٔ فرمولهای E_i و θ_i به‌وضوح نشان می‌دهند که θ_1، θ_2، θ_3 به‌صورت دوگان میدان سه‌وجهی E_1، E_2، E_3 را معرفی می‌کنند.

در آنالیز، هنگامی که تابع جدیدی مطرح می‌شود طبعاً دربارهٔ مشتق آن بحث پیش می‌آید. و به‌همین ترتیب دربارهٔ ۱-فرمیها، پس از اینکه به‌هرمیدان سه‌وجهی فرمهای دوگان آن و فرمهای همبندی را متناظر قرارداریم، مسألهٔ مشتق خارجی آنها مطرح می‌گردد. پاسخ این سؤال به‌وسیلهٔ دو دسته معادلات که به‌وسیلهٔ کارتان کشف گردیده بیان می‌شود.

۳.۸. قضیه (معادلات ساختاری کارتان). گیریم E_1، E_2، E_3 یك میدان سه‌وجهی روی $\mathbf{E}^3$ و فرمهای دوگان آن θ_1، θ_2، θ_3 و فرمهای همبندی آن $\omega_{ij}\ (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ باشد. دراین‌صورت مشتقهای خارجی این فرمها در معادلات زیرصدق می‌کنند:

(۱) معادلات ساختاری اول:

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

(۲) معادلات ساختاری دوم:

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$$

چون θ_i دوگان E_i است به‌آسانی می‌توان دید که معادلات ساختاری اول، دوگان معادلات همبندی است. براساس تجربه‌های بعدی مشخص خواهد شد که معادلات ساختاری دوم مبین آن است که $\mathbf{E}^3$ مستوی است، نظیر همان مفهوم مستوی بودن صفحهٔ $\mathbf{E}^2$.

برهان. دیدیم که

$$\theta_i = \sum a_{ij}\, dx_j$$

از این‌رو:

$$d\theta_i = \sum da_{ij} \wedge dx_j$$

چون ماتریس ایستاری $A = (a_{ij})$ متعامد است، عبارت ω_{ij} برحسب da_{ij} را، که در قضیهٔ ۳.۷ داشتیم، می‌توان با استفاده از فرمولهای جبرخطی برحسب da_{ij} حل کرد و در نتیجه

$$da_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\, a_{kj}$$

بدین ترتیب

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum_j \{(\sum_k \omega_{ik}\, a_{kj}) \wedge dx_j\} \\ &= \sum_k \{\omega_{ik} \wedge \sum_j a_{kj}\, dx_j\} \\ &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \theta_k \end{aligned}$$

و این همان معادلهٔ ساختاری اول است.

برای اثبات معادلهٔ ساختاری دوم، می‌توان ازطریق اندیسی بالا استفاده کرد، اما با استفاده از نمایش ماتریسی جریان‌کار روشنترمی گردد. مشتق خارجی یك ماتریس تابعی یا ۱-فرمی، بـا تأثیر d روی عناصرآن محاسبه می گـردد. مثـلاً معنی فرمـول ماتریسی $\omega = dA\ {}^tA$ در قضیهٔ ۳.۷ چنین است

$$\omega_{ij} = \sum da_{ik}\, a_{jk}$$

و ازآنجا

$$d\omega_{ij} = -\sum da_{ik} \wedge da_{jk}$$

(به‌علامت منها توجه شود!) بنابراین درنمایش ماتریسی، که علامت $\wedge$ را نمی‌نویسیم،

$$d\omega = -dA\ {}^t(dA)$$

با ضرب دوطرف $\omega = dA\ {}^tA$ در A به‌دست می‌آید

$$dA = \omega A$$

چون ${}^tA = A^{-1}$، پس

$${}^t(dA) = {}^t(\omega A) = {}^tA\,{}^t\omega$$

که با قراردادن آن درعبارت $d\omega$ و باتوجه به‌آنکه ω متقارن چپ است خواهیم داشت

$$d\omega = -\omega A\,{}^tA\,{}^t\omega = -\omega\,{}^t\omega = \omega\omega$$

واین همان معادلهٔ ساختاری دوم $d\omega_{ij} = \sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$ به‌صورت ماتریسی می‌باشد. ∎

۴.۸. مثال. معادلات ساختاری برای میدان سه‌وجهی کروی (مثال ۲.۶). فرمهای دوگان و فرمهای همبندی عبارت‌اند از:

$$\theta_1 = d\rho \qquad \omega_{12} = \cos\varphi\, d\vartheta$$

$$\theta_2 = \rho\cos\varphi\, d\vartheta \qquad \omega_{13} = d\varphi$$

$$\theta_3 = \rho\, d\varphi \qquad \omega_{23} = \sin\varphi\, d\vartheta$$

اکنون به‌عنوان مثال، معادلهٔ ساختاری اول را تحقیق می‌کنیم

$$d\theta_3 = \sum \omega_{3j} \wedge \theta_j = \omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2$$

بااستفاده از خاصیت تقارن چپ $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ و خواص فرمها که درفصل اول دیدیم حاصل می‌شود

$$\omega_{31} \wedge \theta_1 = -d\varphi \wedge d\rho = d\rho \wedge d\varphi$$

$$\omega_{32} \wedge \theta_2 = (-\sin\varphi\, d\vartheta) \wedge (\rho\cos\varphi\, d\vartheta) = 0$$

(چونکه درفرمول اخیر $d\vartheta \wedge d\vartheta = 0$). مجموع این جمله‌ها عبارت است از

$$d\theta_3 = d(\rho\, d\varphi) = d\rho \wedge d\varphi$$

بررسی‌معادلات ساختاری دوم نیز به‌آسانی انجام می‌گیرد. چون $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$، داریم:

$$d\omega_{12} = \sum \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

و دراین‌حال

$$\omega_{13} \wedge \omega_{32} = d\varphi \wedge (-\sin\varphi\, d\vartheta) = -\sin\varphi\, d\varphi \wedge d\vartheta$$

و ازجهت دیگر داریم

$$d\omega_{12} = d(\cos\varphi\, d\vartheta) = d(\cos\varphi) \wedge d\vartheta = -\sin\varphi\, d\varphi \wedge d\vartheta$$

واین دومقدار یکی هستند.

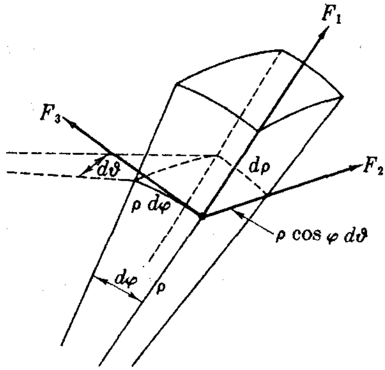
برای یافتن ۱- فرمیهای دوگان بالا نخست dx_1 ، dx_2 و dx_3 را از معادلات

$$x_1 = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$$

$$x_2 = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$x_3 = \rho\sin\varphi$$

به‌دست‌می‌آوریم‌ودرفرمول $\theta_i = \sum a_{ij}dx_j$ که‌درآن $A = (a_{ij})$ ماتریس‌ایستاری مثال ۲۰۶ است، قرار می‌دهیم.



شکل ۲۵۰۲

بعداً روش محاسبهٔ کارآمدتری خواهیم یافت که بر نکتهٔ مقدماتی زیر مبتنی است: اگر درهر نقطه، مختصات کروی ρ، ϑ، φ به $d\rho$، $d\vartheta$، $d\varphi$ بدل شوند، یالهای‌عنصر حجمی بینهایت‌کوچك حاصل $d\rho$ ، $\rho\cos\varphi\, d\vartheta$ ، $\rho d\varphi$ خواهد شد (شکل ۲۵۰۲). این عبارتها دقیقاً همان فرمولهای‌فرمهای دوگان θ_1 ، θ_2 ، θ_3 می‌باشند.

چنان‌که درپیش‌گفتیم، هدف اصلی ما معادلات ساختاری کارتان دربررسی هندسهٔ رویه‌هاست (فصلهای ۶ و ۷).

تمرینات

۱. ثابت کنیدکه به‌ازای هر ۱- فرمی $\phi = \sum f_i\theta_i$ داریم:

$$d\phi = \sum_j \{df_j + \sum_i f_i\omega_{ij}\}\wedge\theta_j$$

(با تمرین ۵، فصل ۲، بند ۷ مقایسه کنید.)

۲. نشان دهیدکه به‌ازای میدان سه‌وجهی چنبره‌ای (تمرین ۴، فصل ۲ بند ۶) داریم

$$\theta_1 = d\rho \qquad \omega_{12} = \cos\varphi\, d\vartheta$$

$$\theta_2 = (R+\rho\cos\varphi)d\vartheta \qquad \omega_{13} = d\varphi$$

$$\theta_3 = \rho\, d\varphi \qquad \omega_{23} = \sin\varphi\, d\vartheta$$

(راهنمایی: θ_i را به‌روشی که درپایان بند ۸، فصل ۲ بیان شد پیدا کنید. برای تعیین ω_{ij}، محاسبه لازم نیست.)

۳. معادلهٔ اول ساختاری را دربارهٔ میدان سه‌وجهی چنبره‌ای تحقیق کنید.

۴. میدان سه‌وجهی استوانه‌ای E_1 ، E_2 ، E_3 را درنظر می‌گیریم:
(الف) با محاسبه روی U_1 ، U_2 ، U_3 ثابت کنید که

$$\theta_1 = dr,\ \ \theta_2 = r d\vartheta,\ \ \theta_3 = dz$$

(ب) نشان دهید که $E_1[r] = 1$ ، $E_2[\vartheta] = 1/r$ ، $E_3[z] = 1$ و شش مقدار دیگر $E_1[\vartheta]$ ، . . . همه‌صفرند.
(ج) نشان دهید که به‌ازای تابع $f(r,\ \vartheta,\ z)$ درمختصات استوانه‌ای داریم

$$E_1[f] = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad E_2[f] = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \qquad E_3[f] = \frac{\partial f}{\partial z}$$

۵. میدانهای سه‌وجهی روی $\mathbf{E}^2$ را درنظر می‌گیریم. به‌ازای میدان سه‌وجهی E_1 ، E_2 روی صفحهٔ $\mathbf{E}^2$:
(الف) معادلات همبندی را بیابید.
(ب) اگر

$$E_1 = \cos\varphi U_1 + \sin\varphi U_2$$

$$E_2 = -\sin\varphi U_1 + \cos\varphi U_2$$

که در آن φ تابعی دلخواه است، θ_1 ، θ_2 و ۱- فرمیهای دوگان و فرم همبندی ω_{12} را برحسب φ بیان کنید.
(ج) معادلات ساختاری را دراین حالت ثابت کنید.

۹. خلاصه

به هدفهایی که درآغاز این فصل موردنظر قرار دادیم رسیدیم. مفهوم سه‌وجهی متحرك دقیقاً به‌صورت میدان سه‌وجهی، روی یك خم $\mathbf{E}^3$ یا روی یك مجموعهٔ باز $\mathbf{E}^3$ بیان شد. درحالت خم، فقط از میدان سه‌وجهی فرنهٔ T ، N ، B استفاده کردیم. با بیان مشتقهای این میدانهای برداری برحسب خود آنها خمیدگی و تاب خم را پیدا کردیم. اکنون روشن است که خمیدگی و تاب دربارهٔ هندسهٔ یك خم اطلاعات بسیاری به‌دست می‌دهند. درفصل سوم خواهیم دید که کلیهٔ مشخصات خم از آنها نتیجه می‌گردد. درحالت یك مجموعهٔ باز از $\mathbf{E}^3$ ، با یك میدان سه‌وجهی دلخواه E_1 ، E_2 ، E_3 سر و کار داشتیم. تعمیمی که‌کارتان برای فرمولهای فرنه به‌عمل‌آورد (قضیهٔ ۲.۷). با استفاده ازهمان روش، یعنی بیان مشتقهای (کوواریان) این میدانهای برداری برحسب خود میدانهای برداری بود. اگر میدان برداری V را درفرمولهای قضیهٔ ۲.۷ بنویسیم خواهیم داشت

کارتان فرنه

$$\begin{aligned}
\nabla E_1 &= \qquad\qquad \omega_{12}E_2+\omega_{13}E_3 & T' &= \quad \kappa N \\
\nabla E_2 &= -\omega_{12}E_1 \qquad\qquad +\omega_{23}E_3 & N' &= -\kappa T \quad +\tau B \\
\nabla E_3 &= -\omega_{13}E_1-\omega_{23}E_2 & B' &= \quad -\tau N
\end{aligned}$$

واگر توجه شود که ضرایب ω_{ij}، یعنی فرمهای همبندی، به‌صورت ۱- فرمی می‌باشند ملاحظه خواهد شد که معادلات کارتان از معادلات فرنه پیچیده‌تر نیستند.

۳

هندسهٔ اقلیدسی

مقدمتاً به‌یادآوری بعضی از مطالب هندسهٔ مسطحه می‌پردازیم. نخست آنکه هنگامی دو مثلث را قابل‌انطباق نامند، که بتوان به‌وسیلهٔ تغییرمکانی آنها را برهم منطبق کرد، به‌همین‌ترتیب زوایای متناظر دو مثلث قابل‌انطباق و اضلاع متناظر آنها با هم برابرند، وهمچنین مساحتهای دو مثلث قابل انطباق با یکدیگر برابرند، و غیره. در واقع هر خاصیت هندسی یك مثلث در مثلث قابل‌انطباق بـا آن نیز برقـرار است. برعکس روشهای ساده‌ای برای تشخیص قابلیت انطباق دو مثلث موجود است، مثلاً تساوی طولهای اضلاع متناظر آنها.

در این فصل به‌بررسی تغییرمکانهای فضای اقلیدسی (ایزومتریهای) آن می‌پردازیم ونشان می‌دهیم که چگونه این‌نکات مربوط به‌مثلث را می‌توان دربارهٔ سایر اشکال هندسی تعمیم داد.

۱. ایزومتریهای $\mathbf{E}^3$

ایزومتری یا تغییرمکان در فضای اقلیدسی تبدیلی است که مسافت اقلیدسی بین نقـاط را حفظ می‌کند (تعریف ۲.۱ فصل ۲).

۱.۱ تعریف. یك ایزومتری در $\mathbf{E}^3$ عبارت است از نگاشت $F: \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ به‌طوری که

$$d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q})) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

به‌ازای همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ در $\mathbf{E}^3$.

۲.۱. مثال

(۱) **انتقال.** نقطهٔ ثابت $\mathbf{a}$ در $\mathbf{E}^3$ و تبدیل T را که از جمع کردن نقطهٔ $\mathbf{a}$ با هریك از نقـاط $\mathbf{E}^3$ حاصل می‌شود درنظر می‌گیریـم. بدین ترتیب به‌ازای هرنقطـهٔ $\mathbf{p}$ داریـم $T(\mathbf{p})=\mathbf{p}+\mathbf{a}$. T را انتقال به‌وسیلهٔ $\mathbf{a}$ می‌نامند. به‌آسانی می‌توان دید که T یك ایزومتری است، زیرا

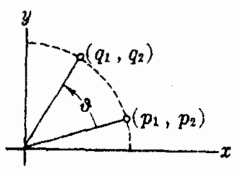
$$\begin{aligned} d(T(\mathbf{p}), T(\mathbf{q})) &= d(\mathbf{p}+\mathbf{a}, \mathbf{q}+\mathbf{a}) \\ &= \|(\mathbf{p}+\mathbf{a})-(\mathbf{q}+\mathbf{a})\| \\ &= \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

(۲) **دوران پیرامون یك محور مختصات.** دوران صفحـهٔ xy به اندازهٔ زاویـهٔ ϑ پیرامون محور zها، نقطهٔ (p_1, p_2) را به‌نقطهٔ (q_1, q_2) با مختصات:

$$q_1 = p_1 \cos\vartheta - p_2 \sin\vartheta$$

$$q_2 = p_1 \sin\vartheta + p_2 \cos\vartheta$$

تبدیل می‌کند (شکل ۳.۱).



شکل ۳.۱

بدین ترتیب C، دوران $\mathbf{E}^3$ پیرامون محور z (به‌اندازهٔ زاویهٔ ϑ)، با فرمول زیرمعین می‌گردد

$$C(\mathbf{p}) = C(p_1, p_2, p_3) = (p_1\cos\vartheta - p_2\sin\vartheta,\ p_1\sin\vartheta + p_2\cos\vartheta,\ p_3)$$

به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$. بدیهی است که C یك تبدیل خطی است، و با محاسبهٔ ساده‌ای می‌توان تحقیق کرد که C مسافت اقلیدسی را حفظ می‌کند و بنابراین یك ایزومتری است.

یادآوری می‌کنیم که هرگاه F و G نگاشتهایی از $\mathbf{E}^3$ باشند، تابـع مرکب GF نگاشتی از $\mathbf{E}^3$ است که از به‌کاربردن G پس از F، حاصل شده است.

۳.۱. لم. اگر F و G دو ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ باشند، تابع مرکب GF نیز یك ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ است.

برهان. چون G ایزومتری است، داریم

$$d(G(F(\mathbf{p})), G(F(\mathbf{q}))) = d(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q}))$$

و چون F نیز یك ایزومتری است، مقدار اخیر با $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ برابر است. یعنی GF مسافت را حفظ می‌کند و در نتیجه یك ایزومتری است. ∎

خلاصه، ترکیب چند ایزومتری، یك ایزومتری است.

همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر $F:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ نگاشت یك به‌یك ودوسویی باشد، آنگاه F دارای یك تابع معکوس یکتای $F^{-1}:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ است، که هر نقطهٔ $F(\mathbf{p})$ را به‌نقطهٔ $\mathbf{p}$ برمی‌گرداند. رابطهٔ بین F و F^{-1} از فرمولهای $FF^{-1}=I$ ،$F^{-1}F=I$ به‌دست می‌آید، که در آن I نگاشت همانی $\mathbf{E}^3$ است، یعنی، نگاشتی که به‌ازای هر $\mathbf{p}$، $I(\mathbf{p})=\mathbf{p}$.

انتقالها در $\mathbf{E}^3$ (مثال ۲.۱) ساده‌ترین ایزومتریها می‌باشند.

۴.۱. لم. (۱) اگر S و T دو انتقال باشند، آنگاه $ST=TS$ نیز یك انتقال است.

(۲) اگر T یك انتقال به‌وسیلهٔ $\mathbf{a}$ باشد، آنگاه T^{-1} عکس T موجود و انتقالی است به‌وسیلهٔ $-\mathbf{a}$.

(۳) به‌ازای هر دو نقطهٔ مفروض $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ از $\mathbf{E}^3$، تنها یك انتقال T وجود دارد به‌طوری که $T(\mathbf{p})=\mathbf{q}$.

برهان. به‌عنوان مثال، (۳) را اثبات می‌کنیم. دیده می‌شود که انتقال به‌وسیلهٔ $\mathbf{q}-\mathbf{p}$، $\mathbf{p}$ را به $\mathbf{q}$ بدل می‌کند، و بجز این، انتقال دیگری وجود ندارد. زیرا اگر T انتقال به‌وسیلهٔ $\mathbf{a}$ باشد و $T(\mathbf{p})=\mathbf{q}$، در این‌صورت $\mathbf{p}+\mathbf{a}=\mathbf{q}$، بنابراین $\mathbf{a}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$. ∎

حالت خاص جالب (۳) آن است که برای انتقال T نقطه‌ای وجود داشته باشد به‌طوری که $T(\mathbf{p})=\mathbf{p}$، در این‌صورت $T=I$.

تبدیل خطی $C:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ را که در آن حاصل‌ضرب داخلی محفوظ بماند تبدیل متعامد $\mathbf{E}^3$ می‌نامند.

$$C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \qquad \text{به‌ازای هر } \mathbf{q},\mathbf{p}$$

دوران مثال ۲.۱ یك نمونه از تبدیل متعامد است.

۵.۱. لم. اگر $C:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ یك تبدیل متعامد باشد، آنگاه C یك ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ است.

برهان. نخست نشان می‌دهیم که C نرم را حفظ می‌کند. بنابرتعریف $\|\mathbf{p}\|^2=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}$، بنابراین:

$$\|C(\mathbf{p})\|^2=C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{p})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=\|\mathbf{p}\|^2$$

بدین‌ترتیب به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ داریم $\|C(\mathbf{p})\|=\|\mathbf{p}\|$. از آنجا که C خطی است، به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت که C یك ایزومتری است، زیرا

$$\begin{aligned} d(C(\mathbf{p}),C(\mathbf{q})) &= \|C(\mathbf{p})-C(\mathbf{q})\| = \|C(\mathbf{p}-\mathbf{q})\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| \\ &= d(\mathbf{p},\mathbf{q}) \qquad \text{به‌ازای هر } \mathbf{q},\mathbf{p} \end{aligned}$$
∎

در اینجا هدف ما اثبات قضیهٔ ۷.۱ می‌باشد که مبین آن است که هر ایزومتری را می‌توان به‌صورت یك تبدیل متعامد و یك انتقال بیان کرد. قسمت اصلی برهان آن در لم زیر که عکس لم ۵.۱ است بیان می‌شود.

۶.۱ لم. اگر F یك ایزومتری از $\mathbf{E}^۳$ باشد به‌طوری که $F(\circ)=\circ$، در این‌صورت F یك تبدیل متعامد است.

برهان. نخست نشان می‌دهیم که F حاصل‌ضرب داخلی را حفظ می‌کند، وسپس نشان خواهیم داد که F یك تبدیل‌خطی‌است. با توجه به‌تعریف مسافت اقلیدسی، می‌بینیم که نرم $\|\mathbf{p}\|$ی نقطهٔ $\mathbf{p}$ درست مسافت اقلیدسی $d(\circ, \mathbf{p})$ از مبدأ تا $\mathbf{p}$ می‌باشد، وچون بنا برفرض F مسافت اقلیدسی را حفظ می‌کند و $\circ=F(\circ)$، بنا براین

$$\|F(\mathbf{p})\|=d(\circ,\ F(\mathbf{p}))=d(F(\circ),\ F(\mathbf{p}))=d(\circ,\ \mathbf{p})=\|\mathbf{p}\|$$

بدین ترتیب دیده می‌شود که F نرم را حفظ می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم که F حاصل‌ضرب داخلی را حفظ می‌کند. چون F یك ایزومتری است، داریم

$$d(F(\mathbf{p}),\ F(\mathbf{q}))=d(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$$

از آنجا

$$\|F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q})\|=\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$$

و بنا بر تعریف نرم

$$(F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q}))\cdot(F(\mathbf{p})-F(\mathbf{q}))=(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

از آنجا

$$\|F(\mathbf{p})\|^۲-۲F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q})+\|F(\mathbf{q})\|^۲=\|\mathbf{p}\|^۲-۲\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+\|\mathbf{q}\|^۲$$

و در نتیجه

$$F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{q})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$

اکنون نشان می‌دهیم که F خطی است. گیریم $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ ، $\mathbf{u}_۳$ به‌ترتیب نقاط یکهٔ $(۱,\circ,\circ)$، $(\circ,۱,\circ)$ ، $(\circ,\circ,۱)$ باشند، داریم

$$\mathbf{p}=(p_۱,\ p_۲,\ p_۳)=\sum p_i\mathbf{u}_i$$

همچنین نقاط $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ ، $\mathbf{u}_۳$ یکانی و متعامدند، یعنی $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=\delta_{ij}$.

چون F ضرب داخلی را حفظ می‌کند، لذا $F(\mathbf{u}_۱)$، $F(\mathbf{u}_۲)$ ، $F(\mathbf{u}_۳)$ نیز متعامد یکانی خواهند بود و با استفاده از بسط متعامد یکانی خواهیم داشت

$$F(\mathbf{p})=\sum F(\mathbf{p})\cdot F(\mathbf{u}_i)F(\mathbf{u}_i)$$

اما

$$F(\mathbf{p}) \cdot F(\mathbf{u}_i) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_i = p_i$$

از آنجا

$$F(\mathbf{p}) = \sum p_i F(\mathbf{u}_i)$$

با استفاده از این اتحاد به‌آسانی شرط خطی بودن محقق می‌گردد

$$F(a\mathbf{p}+b\mathbf{q}) = a\,F(\mathbf{p})+b\,F(\mathbf{q})$$ ▌

اکنون با بیان قضیهٔ زیر ماهیت یك ایزومتری را توضیح می‌دهیم.

۷.۱. قضیه. اگر F یك ایزومتری از E^3 باشد، در این‌صورت یك انتقال یکتای T و یك تبدیل متعامد C وجود دارد به‌طوری که

$$F = TC$$

برهان. گیریم T انتقال متناظر به $F(0)$ باشد. در لم ۴.۱ دیدیم که T^{-1} انتقال متناظر به $-F(0)$ است. اما $T^{-1}F$ یك ایزومتری است، و بنابر لم ۳.۱ و بعد از آن داریم

$$(T^{-1}F)(0) = T^{-1}(F(0)) = F(0) - F(0) = 0$$

و بنابر لم ۶.۱، $T^{-1}F$ یك تبدیل متعامد است، و اگر آن را با C نمایش دهیم داریم $T^{-1}F = C$ و از آنجا $F = TC$.

برای اثبات یکتایی فرض کنیم F به‌صورت $\bar{T}\bar{C}$ که در آن $\bar{T}$ یك انتقال و $\bar{C}$ یك تبدیل‌متعامداست نوشته شود. باید نشان دهیم که $\bar{T} = T$ و $\bar{C} = C$. اما داریم $TC = \bar{T}\bar{C}$، و از آنجا $C = T^{-1}\bar{T}\bar{C}$. چون C و $\bar{C}$ تبدیل خطی‌اند، مبدأ را حفظ می‌کنند،و درنتیجه $(T^{-1}\bar{T})(0) = 0$. اما چون $T^{-1}\bar{T}$ یك انتقال است پس $T^{-1}\bar{T} = I$ یعنی $\bar{T} = T$، وچون $C = T^{-1}\bar{T}\bar{C}$ پس $C = \bar{C}$. ▌

بدینسان هر ایزومتری از E^3 را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت یك تبدیل متعامدکه انتقالی به‌دنبال آن آمده است بیان‌کرد. هرگاه مانند قضیهٔ ۷.۱، داشته باشیم $F = TC$، C را بخش تعامد F و T را بخش انتقال می‌نامند. باید توجه داشت که در حالت‌کلی CT با TC برابر نیست (تمرین ۱).

قضیهٔ تجزیهٔ بالا دربارهٔ ایزومتریهای E^3 (که برهان‌آن برای E^n نیز صادق است) دارای اهمیت اساسی‌است. مثلاً با استفاده از آن فرمول‌صریح ایزومتری دلخواه $F = TC$ را به‌دست می‌آوریم. اگر (c_{ij}) ماتریس تبدیل خطی C باشد، به‌ازای جمیع نقاط $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ فرمول صریح زیر را داریم

$$C(p_1, p_2, p_3) = \left(\sum c_{1j}p_j,\ \sum c_{2j}\,p_j,\ \sum c_{3j}\,p_j\right)$$

با استفاده از قرارداد بردارستونی رابطهٔ $\mathbf{q} = C(\mathbf{p})$ به‌صورت ماتریسی‌چنین نوشته می‌شود

$$\begin{pmatrix} q_۱ \\ q_۲ \\ q_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_۱ \\ p_۲ \\ p_۳ \end{pmatrix}$$

و چون C تبدیل خطی متعامد است، به آسانی می توان نشان داد که ماتریس آن (c_{ij}) نیز متعامد است، یعنی معکوس و ترانهادهٔ آن برابرند.

اگر انتقال T را با $\mathbf{a}=(a_۱, a_۲, a_۳)$ نشان دهیم، با استفاده از تجزیهٔ $F=TC$ خواهیم داشت

$$F(\mathbf{p})=TC(\mathbf{p})=\mathbf{a}+C(\mathbf{p})$$

و با استفاده از فرمول بالا برای $C(\mathbf{p})$، داریم

$$F(\mathbf{p})=F(p_۱, p_۲, p_۳)=(a_۱+\sum c_{۱j}\, p_j,\ a_۲+\sum c_{۲j}\, p_j,\ a_۳+\sum c_{۳j}\, p_j)$$

و اگر از قرارداد بردار ستونی استفاده کنیم، $\mathbf{q}=F(\mathbf{q})$ به‌صورت زیر در می آید

$$\begin{pmatrix} q_۱ \\ q_۲ \\ q_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} \\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_۱ \\ p_۲ \\ p_۳ \end{pmatrix}$$

تمرینات

در این تمرینات، A، B و C تبدیلات متعامد (یا ماتریسهای آنها) و T_a انتقال متناظر به $\mathbf{a}$ را نشان می‌دهد.

۱. ثابت کنید که $CT_a=T_{C(a)}C$.

۲. ایزومتریهای $F=T_aA$ و $G=T_bB$ را درنظر می گیریم. مطلوب است تعیین بخش انتقال و بخش تعامد FG و GF.

۳. نشان دهید که یك ایزومتری $F=T_aC$ دارای یك نگاشت معکوس $F^{-۱}$ است که خود نیز یك ایزومتری است. بخشهای انتقال و تعامد $F^{-۱}$ را بیابید.

۴. اگر

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}, \quad \text{و} \quad \begin{cases} \mathbf{p}=(۳, ۱, -۶) \\ \mathbf{q}=(۱, ۰, ۳) \end{cases}$$

نشان دهید که C متعامد است، و $C(\mathbf{p})$ و $C(\mathbf{q})$ را حساب و تحقیق کنید که $C(\mathbf{p})\cdot C(\mathbf{q})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$.

۵. اگر $F=T_aC$ و $\mathbf{a}=(۱, ۳, -۱)$ و

$$C=\begin{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{pmatrix}$$

و $\mathbf{p}=(۲, -۲, ۸)$ باشد، مختصات نقطهٔ $\mathbf{q}$ را در حالتهای زیر بیابید
(الف) $\mathbf{q}=F(\mathbf{p})$. (ب) $\mathbf{q}=F^{-۱}(\mathbf{p})$. (ج) $\mathbf{q}=(CT_a)(\mathbf{p})$.

۶. درهریك از حالتهای زیر تشخیص دهید که آیا F یك ایزومتری از $\mathbf{E}^۳$ هست یا نیست؟ ودر این صورت بخشهای انتقال و تعامد آن را بیابید.

(الف) $F(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$.

(ب) $F(\mathbf{p})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{a}$ که در آن $\|\mathbf{a}\|=۱$.

(ج) $F(\mathbf{p})=(p_۳-۱, p_۲-۲, p_۱-۳)$.

(د) $F(\mathbf{p})=(p_۱, p_۲, ۱)$.

۷. ثابت کنید که $\mathcal{E}$ مجموعهٔ همهٔ ایزومتریهای $\mathbf{E}^۳$ با قانون ترکیب توابع تشکیل یك گروه می‌دهند. این گروه را گروه اقلیدسی (رتبهٔ ۳) یا گروه حرکتهای اقلیدسی $\mathbf{E}^۳$ می‌نامند.

۸. ثابت کنید که $\mathfrak{T}$ مجموعهٔ همهٔ انتقالهای $\mathbf{E}^۳$ و $O(۳)$ مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای متعامد $\mathbf{E}^۳$ زیرگروههای اقلیدسی $\mathcal{E}$ می‌باشند. $O(۳)$ را زیرگروه متعامد رتبهٔ ۳ می‌نامند. کدام یك از ایزومتریهای $\mathbf{E}^۳$ به‌هردو زیرگروه متعلق است؟

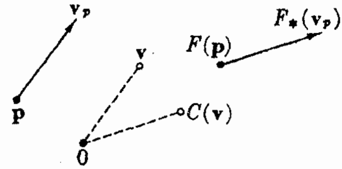
۲. نگاشت مشتق یك ایزومتری

در فصل اول بیان شد که هرنگاشت دلخواه $F:\mathbf{E}^۳\to\mathbf{E}^۳$ دارای یك نگاشت مشتق F_* است که هر بردار مماس $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ را به‌بردار مماس $F_*(\mathbf{v})$ در $F(\mathbf{p})$ تبدیل می‌کند. هنگامی که F یك ایزومتری است، نگاشت مشتق آن بسیار ساده است. (چون در اینجا تمایز بین بردار مماس و نقطه دارای اهمیت اساسی است، موقتاً نقطهٔ اثر را قید می‌کنیم.)

۱.۲ قضیه. گیریم F یك ایزومتری از $\mathbf{E}^۳$ با بخش متعامد C باشد. در این‌صورت

$$F_*(\mathbf{v}_p)=(C\mathbf{v})_{F(p)}$$

به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ از $\mathbf{E}^3$.



شکل ۲.۳

توضیح: بـرای تعیین $F_*(\mathbf{v}_p)$، نخست بردارمماس $\mathbf{v}_p$ را به‌بـردار متناظر آن $\mathbf{v}$ از $\mathbf{E}^3$ تبدیل می‌کنیم، سپس C بخش تعامد F را برآن اثر می‌دهیم و بعد بردار $C(\mathbf{v})$ را به‌بردار مماس متناظر آن در $F(\mathbf{p})$ تبدیل می‌کنیم (شکل ۲.۳). بدین‌ترتیب همهٔ بردارهای مماس درهرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ به‌وسیلهٔ F_* دقیقاً به‌یك طریق‌دوران می‌کنند وفقط نقطهٔ اثر جدید آنها $F(\mathbf{p})$ بستگی به‌$\mathbf{p}$ دارد.

برهان. بنابرقضیهٔ ۷.۱ داریم $F=TC$. گیریم انتقال T بـا $\mathbf{a}$ متنـاظـر باشد بنابراین $F(\mathbf{p})=\mathbf{a}+C(\mathbf{p})$. به‌ازای $\mathbf{v}_p$ بردارمماس $\mathbf{E}^3$، بنابرتعریف ۴.۷ فصل اول، $F_*(\mathbf{v}_p)$ برابر است باسرعت آغازی خم $t\rightarrow F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$. بااستفاده از خطی بودن C خواهیم داشت

$$F(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=TC(\mathbf{p}+t\mathbf{v})=T(C(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v}))=\mathbf{a}+C(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v})$$
$$=F(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v})$$

بدین ترتیب $F_*(\mathbf{v}_p)$ سرعت آغازی خم $t\longrightarrow F(\mathbf{p})+tC(\mathbf{v})$ می‌باشد، که دقیقاً همان بردار مماس $(C\mathbf{v})_{F(p)}$ است. ∎

این قضیه برحسب مختصات اقلیدسی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$F_*\Big(\sum_j v_j U_j\Big)=\sum_{i,j} c_{ij}\, v_j\, \bar{U}_i$$

که درآن $C=(c_{ij})$ بخش تعامد ایزومتری F می‌باشد، و U_i و $\bar{U}_i$ به‌ترتیب در $\mathbf{p}$ و $F(\mathbf{p})$ محاسبه می‌شوند.

۲.۲ فرع. ایزومتریها حاصل‌ضرب داخلی بردارهای مماس را حفظ می‌کنند. یعنی، به‌ازای بردارهای مماس $\mathbf{v}_p$ و $\mathbf{w}_p$ از $\mathbf{E}^3$ خواهیم داشت

$$F_*(\mathbf{v}_p)\cdot F_*(\mathbf{w}_p)=\mathbf{v}_p\cdot\mathbf{w}_p$$

برهان. گیریم C بخش تعامد F باشد، و یادآوری می‌کنیم که C، چون تبدیل متعامد است، حاصل‌ضرب داخلی در $\mathbf{E}^3$ را حفظ می‌کند. بنابرقضیهٔ ۱.۲ داریم

$$F_*(\mathbf{v}_p)\cdot F_*(\mathbf{w}_p)=(C\mathbf{v})_{F(p)}\cdot(C\mathbf{w})_{F(p)}=C\mathbf{v}\cdot C\mathbf{w}$$
$$=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}_p\cdot\mathbf{w}_p$$

که در آن دوبار از تعریف ۳.۱ فصل۲ (ضرب داخلی بردارهای مماس) استفاده کرده‌ایم. ∎

با اثبات این فرع اساسی وقضیهٔ زیر، (قضیهٔ ۱.۲) نقش خود راکاملاً ایفا کرده‌است. بدینسان می‌توان نقطهٔ اثر را از نمادها حذف کرد و به‌سادگی نوشت $F_*(\mathbf{v}) \cdot F_*(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. به‌بیان ساده این فرع مبین آن است که به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$، نگاشت مشتق F_{*p} در $\mathbf{p}$ یك تبدیل متعامد فضاهای مماس است (تفاوت آن با C تنها در ایزومرفیسمهای متعارف $\mathbf{E}^3$ است).

چون حاصل‌ضرب داخلی محفوظ می‌ماند، فوراً نتیجه می‌شود که مفاهیمی که از آن اشتقاق می‌یابند، مانند نرم و تعامد، حفظ می‌شوند. به‌بیان روشنتر، اگر F یك ایزومتری باشد، آنگاه $\|F_*(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$، واگر $\mathbf{v}$ و$\mathbf{w}$ متعامد باشند، $F_*(\mathbf{v})$ و$F_*(\mathbf{w})$ نیزمتعامدند، یعنی نرم وتعامد حفظ می‌شوند. بدین‌ترتیب سه‌وجهیها نیزحفظ می‌شوند: اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ یك سه‌وجهی درنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ باشد، به‌ازای ایزومتری F، $F_*(\mathbf{e}_1)$، $F_*(\mathbf{e}_2)$ ، $F_*(\mathbf{e}_3)$ نیز یك سه‌وجهی در $F(\mathbf{p})$ خواهد بود. (مستقیماً نیز می‌توان آن را اثبات کرد: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$، و بنابر فرع ۲.۲، $F_*(\mathbf{e}_i) \cdot F_*(e_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.)

درلم ۴.۱ دیدیم که هردو نقطه معرف یك انتقال یکتا می‌باشد. اکنون نشان می‌دهیم که هردو سه‌وجهی به‌طور یکتا معرف یك ایزومتری است.

۳.۲ قضیه. به ازای هر دو سه‌وجهی مفروض بر $\mathbf{E}^3$ مثل $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{f}_1$، $\mathbf{f}_2$ ، $\mathbf{f}_3$ درنقطهٔ $\mathbf{q}$، یك ایزومتری یکتای F از $\mathbf{E}^3$ وجود دارد، به‌طوری که $F_*(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$ به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 3$.

برهان. نخست وجود چنین ایزومتری را اثبات می‌کنیم. گیریم e_1، e_2 ، e_3 و f_1، f_2 ، f_3 نقاط متناظر به‌این دو سه‌وجهی در $\mathbf{E}^3$ باشند. گیریم C تنها تبدیل خطی $\mathbf{E}^3$ باشد، به‌طوری که $C(e_i) = f_i$ به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 3$. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که C متعامد است. انتقال T را با نقطهٔ $\mathbf{q} - C(\mathbf{p})$ تعریف می‌کنیم، و خواهیم دید که ایزومتری $F = TC$ سه‌وجهی $\mathbf{e}$ را به‌سه‌وجهی $\mathbf{f}$ بدل می‌کند. نخست ملاحظه می‌کنیم که

$$F(\mathbf{p}) = T(C\mathbf{p}) = \mathbf{q} - C(\mathbf{p}) + C(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$$

و با استفاده از قضیهٔ ۱.۲ داریم

$$F_*(\mathbf{e}_i) = (Ce_i)_{F(p)} = (f_i)_{F(p)} = (f_i)_q = \mathbf{f}_i$$

به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 3$.

برای اثبات یکتایی آن دیده می‌شود که با توجه به‌قضیهٔ ۱.۲، این‌انتخاب C به‌عنوان بخش تعامد ایزومتری مطلوب، منحصر به‌فرد است، و بخش انتقال آن نیزکاملاً معین‌است، زیرا باید $C(\mathbf{p})$ را به $\mathbf{q}$ بدل کنیم. بدین‌ترتیب ایزومتری $F = TC$ به‌طور یکتا معین گردید. ∎

محاسبهٔ صریح ایزومتری این قضیه نیز آسان است، گیریم به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant 3$ ، $e_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$ و $f_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3})$. بدین ترتیب ماتریسهای متعامد $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ به‌ترتیب ماتریسهای ایستاری سه‌وجهیهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{f}_1$، $\mathbf{f}_2$، $\mathbf{f}_3$ می‌باشند. اکنون نشان می‌دهیم که ماتریس C در این قضیه برابر است با ${}^tB \cdot A$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که ${}^tBA(e_i) = f_i$، زیرا بدین ترتیب C به‌طور یکتا معین می‌شود. اما داریم

$$
{}^tBA\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = {}^tB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}
$$

یعنی، ${}^tBA(e_1) = f_1$ (به‌همین ترتیب به‌ازای $i = 2, 3$). بدین ترتیب $C = {}^tBA$، وچنان که دیدیم انتقال T با $\mathbf{q} - C(\mathbf{p})$ معین می‌گردد.

تمرینات

۱. اگر T یك انتقال باشد، نشان دهید که به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$، $T_*(\mathbf{v})$ با $\mathbf{v}$ موازی است (دریك دستگاه مختصات اقلیدسی).

۲. فرمولهای عمومی $(GF)_* = G_*F_*$ و $(F^{-1})_* = (F_*)^{-1}$ را درحالت خاصی که F و G دو ایزومتری $\mathbf{E}^3$ می‌باشند ثابت کنید.

۳. (الف) گیریم $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ یك سه‌وجهی در $\mathbf{p}$ با ماتریس ایستاری A باشد. اگر F یك ایزومتری باشد که سه‌وجهی طبیعی در $\mathbf{o}$ را به‌این سه‌وجهی بدل کند، نشان دهید که $F = T_pA^{-1}$ $(A^{-1} = {}^tA)$.

(ب) اکنون گیریم $\mathbf{f}_1$، $\mathbf{f}_2$ ، $\mathbf{f}_3$ سه‌وجهی در $\mathbf{q}$ با ماتریس ایستاری B باشد. با استفاده از تمرین ۲ نشان دهید، بخش تعامد ایزومتری که سه‌وجهی $\mathbf{e}$ را به سه‌وجهی $\mathbf{f}$ بدل می‌کند $B^{-1}A$ می‌باشد.

۴. (الف) ثابت کنید که ایزومتری $F = TC$ صفحهٔ مار بر $\mathbf{p}$ وعمود بر $\mathbf{q}$ را به‌صفحهٔ مار بر $F(\mathbf{p})$ و عمود بر $C(\mathbf{q})$ بدل می‌کند.

(ب) اگر P صفحهٔ مار بر $(0, 1, -2/1)$ و عمود بر $(0, 1, 0)$ باشد، ایزومتری $F = TC$ را طوری تعیین کنید که $F(P)$ صفحهٔ مار بر $(1, -2, 1)$ وعمود بر $(1, 0, -1)$ باشد.

۵. سه‌وجهی $\mathbf{e}_1 = (2, 2, 1)/3$، $\mathbf{e}_2 = (-2, 1, 2)/3$ ، $\mathbf{e}_3 = (1, -2, 2)/3$ را در $\mathbf{p} = (0, 1, 0)$ و سه‌وجهی $\mathbf{f}_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ ، $\mathbf{f}_2 = (0, 1, 0)$، $\mathbf{f}_3 = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ را در $\mathbf{q} = (3, -1, 1)$ درنظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین ایزومتری $F = TC$ که سه‌وجهی $\mathbf{e}$ را به سه‌وجهی $\mathbf{f}$ بدل می‌کند.

۳. جهتدهی

دراینجا به یکی‌از جالبترین مفاهیم هندسی که اشتباه‌انگیز است می‌پردازیم. ازلحاظ تصور مفهوم جهت یا سو موجب تمایز بین دستکش دست راست و دستکش دست چپ درفضای معمولی می‌باشد. برای آنکه این مفهوم را به‌صورت ریاضی بیان کنیم به‌جای دستکشها سه‌وجهیهایی درنظرمی گیریم، وهمهٔ سه‌وجهیهای $\mathbf{E}^۳$ را به‌صورت زیر به دوطبقه تقسیم می‌کنیم. چنان‌که درپیش دیدیم به هر سه‌وجهی $\mathbf{e}_۱$ ، $\mathbf{e}_۲$ ، $\mathbf{e}_۳$ درنقطه‌ای از $\mathbf{E}^۳$ ماتریس ایستاری A به‌آن متناظر قرار می‌گیرد. بنابرتمرینهای بند ۱ فصل ۲ داریم:

$$\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \times \mathbf{e}_۳ = \det A = \pm ۱$$

هنگامی که این عدد ۱+ باشد، سه‌وجهی $\mathbf{e}_۱$ ، $\mathbf{e}_۲$ ، $\mathbf{e}_۳$ را با جهت مثبت (یا راست)، وهنگامی‌که برابر ۱− باشد سه‌وجهی را با جهت منفی (یا چپ) می‌نامیم.

به‌آسانی می‌توان نکات زیر را اثبات کرد.

۱.۳. تبصره. (۱) درهرنقطهٔ $\mathbf{E}^۳$ سه‌وجهیی که بامیدان‌سه‌وجهی‌طبیعی $U_۱$، $U_۲$ و $U_۳$ مشخص می‌شود دارای جهت مثبت است.

(۲) شرط لازم وکافی برای آنکه سه‌وجهی $\mathbf{e}_۱$ ، $\mathbf{e}_۲$ ، $\mathbf{e}_۳$ دارای جهت مثبت باشد آن است‌که $\mathbf{e}_۱ \times \mathbf{e}_۲ = \mathbf{e}_۳$. بدین‌ترتیب از لحاظ کاربرد، جهت یك سه‌وجهی را می‌توان بااستفاده از «قانون دست راست» که درانتهای بند ۱ فصل ۲ بیان شد تعیین‌کرد. درشکل ۳.۳ سه‌وجهی(P) دارای جهت‌مثبت وسه‌وجهی(N) دارای جهت‌منفی است. سه‌وجهیهای فرنه همواره دارای جهت مثبت‌اند زیرا بنا بر تعریف $B = T \times N$.

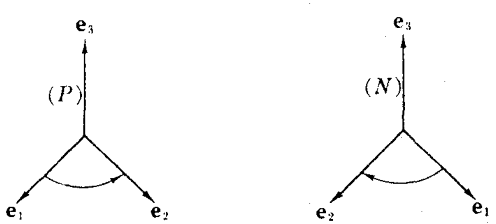
(۳) اگر سه‌وجهی $\mathbf{e}_۱$ ، $\mathbf{e}_۲$ ، $\mathbf{e}_۳$ دارای جهت مثبت باشد داریم

$$\mathbf{e}_۱ = \mathbf{e}_۲ \times \mathbf{e}_۳ = -\mathbf{e}_۳ \times \mathbf{e}_۲$$

$$\mathbf{e}_۲ = \mathbf{e}_۳ \times \mathbf{e}_۱ = -\mathbf{e}_۱ \times \mathbf{e}_۳$$

$$\mathbf{e}_۳ = \mathbf{e}_۱ \times \mathbf{e}_۲ = -\mathbf{e}_۲ \times \mathbf{e}_۱$$

درمورد سه‌وجهی باجهت منفی، باید ترتیب عوامل ضرب را عوض کرد. (حفظ کردن فرمولهای بالا لازم نیست، به‌آسانی می‌توان همه را از قانون دست راست نتیجه گرفت.)



شکل ۳.۳

همان‌طور که به هر سه وجهی از $\mathbf{E}^3$، علامتی وابسته گردید، به هر ایزومتری F از $\mathbf{E}^3$ نیز علامتی متناظر قرار می‌دهیم. درفصل ۲ اثبات شد که دترمینان یك ماتریس متعامد برابر است با ± 1. بدین ترتیب اگر C بخش تعامد ایزومتری F باشد، علامت F را با دترمینان C تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{sgn} F = \det C$$

دیدیم که نگاشت مشتق یك ایزومتری سه وجهی را به سه‌وجهی بدل می‌کند. اکنون تأثیر آن‌را برجهت سه‌وجهیها بررسی می‌کنیم.

۲.۳. لم. اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ یك سه‌وجهی درنقطه‌ای از $\mathbf{E}^3$ و F یك ایزومتری باشد دراین‌صورت، داریم

$$F_*(\mathbf{e}_1)\cdot F_*(\mathbf{e}_2)\times F_*(\mathbf{e}_3)=\operatorname{sgn} F\, \mathbf{e}_1\cdot \mathbf{e}_2\times \mathbf{e}_3$$

برهان. اگر $\mathbf{e}_j=\sum a_{jk} U_k$، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۱.۲ داریم

$$F_*(\mathbf{e}_j)=\sum_{i,k} c_{ik}\, a_{jk}\, \bar{U}_i$$

که‌در آن $C=(c_{ij})$ بخش تعامد F است. بدین ترتیب ماتریس ایستاری سه‌وجهی $F_*(\mathbf{e}_1)$، $F_*(\mathbf{e}_2)$، $F_*(\mathbf{e}_3)$ عبارت است از ماتریس

$$\Big(\sum_k c_{ik}\, a_{jk}\Big)=\Big(\sum_k c_{ik}\, {}^t a_{kj}\Big)=C\, {}^tA$$

اما حاصل‌ضرب مختلط سه‌وجهی با دترمینان ماتریس ایستاری آن برابر است، و بنابر تعریف $\operatorname{sgn} F=\det C$. درنتیجه

$$\begin{aligned} F_*(\mathbf{e}_1)\cdot F_*(\mathbf{e}_2)\times F_*(\mathbf{e}_3) &= \det\,(C\ {}^tA)\\ &= \det C\cdot \det {}^tA=\det C\cdot \det A\\ &= \operatorname{sgn} F \mathbf{e}_1\cdot \mathbf{e}_2\times \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$ ▌

این لم نشان می‌دهد که اگر $\operatorname{sgn} F=+1$، آنگاه F_* سه‌وجهیهای با جهت مثبت را به سه‌وجهیهای با جهت مثبت، و سه‌وجهیهای باجهت منفی را به سه‌وجهیهای با جهت منفی بدل می‌کند، و اگر $\operatorname{sgn} F=-1$، مثبت به منفی و منفی به مثبت تبدیل می‌شود.

۳.۳. تعریف. اگربه‌ازای ایزومتری F از $\mathbf{E}^3$ تساوی $\operatorname{sgn} F=\det C=+1$ برقرار باشد آن‌را سونگهدار، و اگر $\operatorname{sgn} F=\det C=-1$، آن‌را سوبرگردان می‌نامند. C بخش تعامد F است.

۴.۳. مثال

(۱) **انتقال.** هر انتقال سونگهدار است. از لحاظ هندسی این مطلب روشن است، و در واقع بخش تعامد انتقال T درست نگاشت همانی I می‌باشد، و

$$\operatorname{sgn} T = \det I = +۱$$

(۲) **دوران.** تبدیل متعامد C درمثال ۲.۱ که $\mathbf{E}^۳$ راحول محور z به‌زاویهٔ θ دوران می‌دهد، سونگهدار است. زیرا ماتریس آن‌چنین است

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و بنابراین، $\operatorname{sgn} C = \det C = +۱$ (تمرین ۴ را ببینید).

(۳) **تقارن.** می‌توان بااستفاده از یك آینه تغییرجهت‌را مشاهده کرد. گیریم صفحهٔ yz از $\mathbf{E}^۳$ یك آینه باشد. هنگامی که‌در آن نگاه کنیم، نقطهٔ $\mathbf{p} = (p_۱, p_۲, p_۳)$ رادرمحل نقطهٔ

$$R(\mathbf{p}) = (-p_۱, p_۲, p_۳)$$

خواهیم دید (شکل ۴.۳). نگاشت R تقارن نسبت به‌صفحهٔ yz نام دارد. روشن است که R تبدیلی است متعامد با ماتریس:

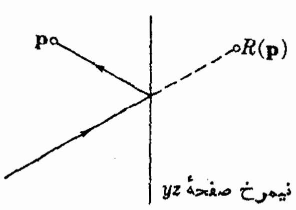
$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

بنابراین R یك ایزومتری سوبرگردان است، تجربه نیز این مطلب را تأیید می‌کند. زیرا نگارهٔ آینه‌ای یك دست راست، یك دست چپ است.

حاصلضربهای داخلی وخارجی را اساساً برحسب مختصات اقلیدسی تعریف کردیم، و دیدیم

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (\sum v_i \mathbf{e}_i)\cdot(\sum w_i \mathbf{e}_i) = \sum v_i w_i$$

و این نتیجه از انتخاب سه‌وجهی $\mathbf{e}_۱$، $\mathbf{e}_۲$ و $\mathbf{e}_۳$ برای تعیین مختصات $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مستقل است. دربارهٔ حاصلضرب‌خارجی نیز تقریباً همین نتیجه برقرار است، اما دراینجا مسألهٔ جهت پیش می‌آید.



شکل ۴.۳

۵.۳. لم. گیریم $\mathbf{e}_۱$، $\mathbf{e}_۲$، $\mathbf{e}_۳$ یك سه‌وجهی در نقطه‌ای از $\mathbf{E}^۳$ باشد. در این صورت بدازای

$\mathbf{v}=\sum v_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{w}=\sum w_i\mathbf{e}_i$ داریم:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\epsilon\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

که در آن $\epsilon=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\pm 1$.

برهان. کافی است بااستفاده ازفرمول (۳) تبصرهٔ ۱.۳ حاصل‌ضرب خارجی را بسط دهیم

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)\times(w_1\mathbf{e}_1+w_2\mathbf{e}_2+w_3\mathbf{e}_3)$$

مثلاً، هرگاه سه‌وجهی با جهت مثبت باشد، $\mathbf{e}_1$ یعنی مؤلفهٔ اول $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ برابر است با:

$$v_2\mathbf{e}_2\times w_3\mathbf{e}_3+v_3\mathbf{e}_3\times w_2\mathbf{e}_2=(v_2w_3-v_3w_2)\mathbf{e}_1$$

و دراین‌حالت چون $\epsilon=1$، همین‌نتیجه ازطرف راست معادله‌ای‌که می‌خواهیم ثابت‌کنیم به‌دست می‌آید. ∎

از اینجا دیده می‌شود که ایزومتری برجهت حاصل‌ضرب خارجی نیز دارای تأثیر است.

۶.۳. قضیه. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دوبردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$، و F یك ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت

$$F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\operatorname{sgn}F\,F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w})$$

برهان. گیریم $\mathbf{v}=\sum v_iU_i(\mathbf{p})$ و $\mathbf{w}=\sum w_iU_i(\mathbf{p})$. حال قرار می‌دهیم

$$\mathbf{e}_i=F_*(U_i(\mathbf{p}))$$

چون F_* خطی است، داریم

$$F_*(\mathbf{v})=\sum v_i\mathbf{e}_i \quad \text{و} \quad F_*(\mathbf{w})=\sum w_i\mathbf{e}_i$$

به‌آسانی با استفاده از لم ۵.۳ ثابت می‌شود که

$$F_*(\mathbf{v})\times F_*(\mathbf{w})=\epsilon\,F_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

که درآن

$$\epsilon=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=F_*(U_1(\mathbf{p}))\cdot F_*(U_2(\mathbf{p}))\times F_*(U_3(\mathbf{p}))$$

و چون U_1، U_2، U_3 باجهت مثبت است، بنابر لم ۲.۳ داریم $\epsilon=\operatorname{sgn}F$. ∎

تمرینات

۱. ثابت کنید

$$\operatorname{sgn}(FG)=\operatorname{sgn}F\cdot\operatorname{sgn}G=\operatorname{sgn}(GF)$$

و از آن نتیجه بگیرید که $\operatorname{sgn}F=\operatorname{sgn}(F^{-1})$.

۲. اگر $H_{\circ}$ یك ایزومتری سوبرگردان از $\mathbf{E}^{3}$ باشد، نشان دهید که هر ایزومتری سوبرگردان را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت $H_{\circ}F$ بیان کرد که در آن F یك ایزومتری سونگهدار است.

۳. گیریم $\mathbf{v}=(3,1,-1)$ و $\mathbf{w}=(-3,-3,1)$ بردارهای مماس در یك نقطه باشند. اگر C تبدیل متعامدی باشد که در تمرین ۴ بند ۱ بیان شد، درستی فرمول زیر را تحقیق کنید

$$C_*(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\operatorname{sgn}C\,C_*(\mathbf{v})\times C_*(\mathbf{w})$$

۴. دوران عبارت است از یك تبدیل متعامد C به‌طوری که $\det C=+1$. برعکس ثابت کنید که هر تبدیل متعامد C با شرط بالا، $\mathbf{E}^{3}$ را پیرامون یك محور دوران می‌دهد. به‌عبارت دیگر می‌توان عدد ϑ و نقاط $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ را طوری تعیین کرد که $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$ (شکل ۵.۳) و داشته باشیم:

$$C(\mathbf{e}_1)=\cos\vartheta\,\mathbf{e}_1+\sin\vartheta\,\mathbf{e}_2$$

$$C(\mathbf{e}_2)=-\sin\vartheta\,\mathbf{e}_1+\cos\vartheta\,\mathbf{e}_2$$

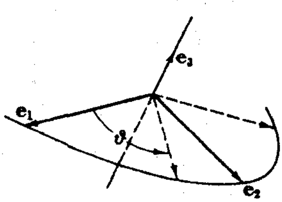
$$C(\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_3$$

(راهنمایی: این واقعیت که بعد $\mathbf{E}^{3}$ فرد است، بدین‌معنی است که C دارای ریشهٔ مشخصهٔ $+1$ است، لذا نقطه‌ای چون $\mathbf{p}\neq 0$ وجود دارد به‌طوری که $C(\mathbf{p})=\mathbf{p}$.)

۵. گیریم $\mathbf{a}$ نقطه‌ای از $\mathbf{E}^{3}$ با $\|\mathbf{a}\|=1$ باشد. ثابت کنید که فرمول

$$C(\mathbf{p})=\mathbf{a}\times\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{a}$$

معرف یك تبدیل متعامد است. اثر کلی آن را بر $\mathbf{E}^{3}$ مشخص کنید.



شکل ۵.۳

۶. ثابت کنید که
(الف) مجموعهٔ $O^{+}(3)$ متشکل از همهٔ دورانهای $\mathbf{E}^{3}$، یك زیرگروه از گروه متعامد $O(3)$ است (تمرین ۸، فصل ۳ بند ۱ را ببینید).

(ب) مجموعهٔ $\mathcal{E}^{+}$ متشکل از ایزومتریهای سونگهدار $\mathbf{E}^3$ یك زیرگروه ازگروه اقلیدسی $\mathcal{E}$ می باشد.

۰۷ یك فرمول برای همهٔ ایزومتریهای خط حقیقی $\mathbf{E}^1$ بیابید. همچنین برای صفحه $\mathbf{E}^2$ (از $\epsilon = \pm 1$ استفاده کنید). ایزومتریهای سونگهدار را مشخص کنید.

۴. هندسهٔ اقلیدسی

در آغاز این فصل یادآوری شد که یك خصوصیت بنیادی هندسهٔ مسطحه عبارت است از آنکه اگر مثلثی بهوسیلهٔ یك ایزومتری به مثلث دیگری تبدیل شود، آنگاه خواص هندسی این دومثلث (قابل انطباق) عیناً یکی هستند. بررسی دقیق نشان می‌دهد که این حکم برهان نمی‌پذیرد و درواقع این درست «تعریف خاصیت هندسی مثلث» می باشد. به‌طورکلی هندسهٔ اقلیدسی را می توان به‌عنوان کلیهٔ مفاهیمی درنظر گرفت که به‌وسیلهٔ ایزومتریهای فضای اقلیدسی حفظ می‌شوند. مثلاً فرع ۲.۲ نشان می‌دهد که مفهوم حاصل‌ضرب داخلی دو بردار مماس به‌هندسهٔ اقلیدسی تعلق دارد. به‌همین‌ترتیب قضیهٔ ۶.۳ نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب خارجی به‌وسیلهٔ ایزومتریها محفوظ می‌ماند (بجز احیاناً علامت آن).

این تعریف مشهور هندسهٔ اقلیدسی تا اندازه‌ای کلی است، زیرا درعمل «هندسهٔ اقلیدسی» با مفاهیمی سروکار دارد که به‌وسیلهٔ ایزومتریهای فضای اقلیدسی حفظ می‌شوند، اما به‌وسیلهٔ تبدیلات دلخواه یا دستهٔ محدودتری از آنها (دیفئومرفیسمها) که دارای تبدیل معکوس نیز می‌باشند محفوظ نمی‌مانند. مثال زیر این تمایز را روشن می‌سازد. اگر $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ خمی در $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت مشتقهای مختلف آن

$$\alpha' = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}\right), \quad \alpha'' = \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}, \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}\right), \ldots$$

وجه تشابهی دارند. اما قضیهٔ ۸.۷ فصل اول را به‌صورت زیر تعبیر کردیم: نگاشت دلخواه $F: \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ هنگامی سرعت را حفظ می‌کند که اگر $\beta = F(\alpha)$، آنگاه داشته باشیم $\beta' = F_*(\alpha')$. اما به‌آسانی می‌توان دید که هر تبدیل دلخواه شتاب را حفظ نمی‌کند. مثلاً اگر $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ و $F = (x^2, y, z)$، دراین صورت داریم $\alpha'' = 0$ و بنابراین $F_*(\alpha'') = 0$. اما $\beta = F(\alpha)$ به‌صورت $\beta(t) = (t^2, 0, 0)$ می باشد، ودرنتیجه $\beta'' = 2U_1$. بدین‌ترتیب $\beta = F(\alpha)$ و $\beta'' \neq F_*(\alpha'')$. اندکی بعد محفوظ بودن شتاب به‌وسیلهٔ ایزومتریها را بررسی می کنیم.

بدین‌دلیل است که مفهوم شتاب به هندسهٔ اقلیدسی و مفهوم سرعت فقط به آنالیز فضای اقلیدسی تعلق دارد. دراین بند بعضی از مفاهیم راکه در فصل ۲ بیان‌کردیم بررسی می کنیم ونشان می‌دهیم که به‌وسیلهٔ ایزومتریها محفوظ می‌مانند. (خواننده به‌آسانی می‌تواند ثابت‌کندکه این مفاهیم به‌وسیلهٔ دیفئومرفیسمها حفظ نمی‌شوند.)

مفهوم میدان برداری روی یك خم (تعریف ۲.۲ فصل ۲) را دوباره یادآوری

می‌کنیم. اگر Y یك میدان برداری روی $\alpha : I \to \mathbf{E}^3$ و $F : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ یك نگاشت باشد، دراین‌صورت $\bar{Y} = F_*(Y)$ یك میدان برداری روی خم نگارهٔ $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ خواهد بود. زیرا به‌ازای هر t از I، $Y(t)$ بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ درنقطهٔ $\alpha(t)$ می‌باشد، و $\bar{Y}(t) = F_*(Y(t))$ بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ درنقطهٔ $F(\alpha(t)) = \bar{\alpha}(t)$ است. (این روابط در شکل ۶.۳ نشان داده شده‌اند.)ایزومتری مشتق این‌نوع میدانهای برداری را حفظ می‌کند.

۱.۴ فرع. اگر Y یك میدان برداری روی خم α در $\mathbf{E}^3$، و F یك ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت $\bar{Y} = F_*(Y)$ یك میدان برداری روی $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ می‌باشد، و

$$\bar{Y}' = F_*(Y')$$

برهان. میدان برداری Y را برحسب توابع مختصاتی اقلیدسی آن بیان می‌کنیم

$$Y = \sum y_j U_j$$

و از آنجا $F_*(Y')$ و $\bar{Y}'$ را حساب می‌کنیم. برای پیدا کردن مشتق یك میدان برداری نظیر Y، کافی است که از توابع مختصاتی اقلیدسی آن مشتق بگیریم

$$Y' = \sum \frac{dy_j}{dt} U_j$$

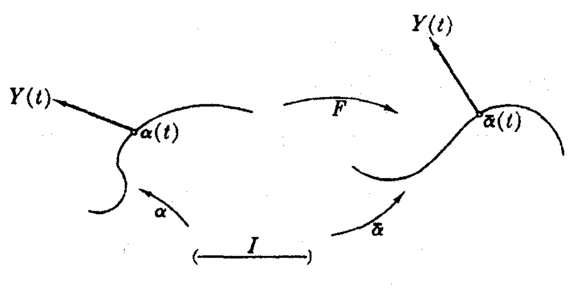
با استفاده از قضیهٔ ۱.۲ داریم

$$F_*(Y') = \sum c_{ij} \frac{dy_j}{dt} \bar{U}_i$$

از طرف دیگر

$$\bar{Y} = F_*(Y) = \sum c_{ij} y_j \bar{U}_i$$

که در آن ثابتهای c_{ij} بنابر تعریف، عناصر ماتریس بخش تعامد ایزومتری F می‌باشند. بنابراین



شکل ۶.۳

$$\bar{Y}' = \sum \frac{d}{dt}(c_{ij}y_j)\bar{U}_i = \sum c_{ij}\frac{dy_j}{dt}\bar{U}_i$$

که نشان می‌دهد میدانهای برداری $F_*(Y')$ و $\bar{Y}'$ یکی می‌باشند. ∎

دربالا ادعا شدکه ایزومتری شتاب را حفظ می‌کند: اگر $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ و F یک ایزومتری باشد، دراین‌صورت $\bar{\alpha}'' = F_*(\alpha'')$. این مطلب به سادگی از فرع بالا به‌دست می‌آید، زیرا اگر قرار دهیم $Y = \alpha'$ بنابر قضیهٔ ۸.۷ فصل اول داریم $\bar{Y} = \bar{\alpha}'$، وازآنجا

$$\bar{\alpha}'' = \bar{Y}' = F_*(Y') = F_*(\alpha'')$$

اکنون نشان می‌دهیم که دستگاه فرنهٔ هرخم به‌وسیلهٔ ایزومتری محفوظ می‌ماند.

این‌موضوع را قطعاً برمبانی شهودی می‌توان حدس زد، زیرا حرکت صلب، هرخم را به‌خمی بدل می‌کند کــه چرخش وتاب متناظر آنها دقیقاً یکسان است. و هنگامی کــه ایزومتری جهت را حفظ کند، همین وضعیت به‌وجود می‌آید.

۴.۲. قضیه. اگر β خمی با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ با خمیدگی مثبت، و $\bar{\beta} = F(\beta)$ نگارهٔ آن به‌وسیلهٔ ایزومتری F از $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت

$$\bar{\kappa} = \kappa \qquad \bar{T} = F_*(T)$$
$$\bar{\tau} = \operatorname{sgn} F\,\tau \qquad \bar{N} = F_*(N)$$
$$\bar{B} = \operatorname{sgn} F\, F_*(B)$$

که درآن $\operatorname{sgn} F = \pm 1$، علامت ایزومتری F است.

برهان. توجه شود که $\bar{\beta}$ نیز خمی با تندی واحد است، زیرا

$$\|\bar{\beta}'\| = \|F_*(\beta')\| = \|\beta'\| = 1$$

بدین‌ترتیب تعاریف بند ۳ فصل ۲ را می‌توان دربارهٔ β و $\bar{\beta}$ به‌کاربرد.

$$\bar{T} = \bar{\beta}' = F_*(\beta') = F_*(T)$$

چون F_* هم‌شتاب و هم‌نرم را حفظ می‌کند، ازتعریف خمیدگی نتیجه می‌شودکه

$$\bar{\kappa} = \|\bar{\beta}''\| = \|F_*(\beta'')\| = \|\beta''\| = \kappa$$

اکنون برای تعیین سه‌وجهی فــرنه ازفــرض $\kappa > 0$ (که ازآن $\bar{\kappa} > 0$ نتیجــه می‌شود، زیرا $\bar{\kappa} = \kappa$) استفاده می‌کنیم. بنابرتعریف، $N = \beta''/\kappa$ و درنتیجه

$$\bar{N}=\frac{\bar{\beta}''}{\bar{\kappa}}=\frac{F_*(\beta'')}{\kappa}=F_*\left(\frac{\beta''}{\kappa}\right)=F_*(N)$$

اکنون حالتهای جالب B و τ را بررسی می‌کنیم. چون $B=T\times N$، بااستفاده‌از قضیهٔ ۶.۳ خواهیم داشت

$$\bar{B}=\bar{T}\times\bar{N}=F_*(T)\times F_*(N)=\operatorname{sgn} F\, F_*(T\times N)=\operatorname{sgn} F F_*(B)$$

و چون تاب اساساً با $\tau=-B'\cdot N=B\cdot N'$ تعریف می‌شود بااستفاده ازنتایج بالا برای B و N، خواهیم داشت

$$\bar{\tau}=\bar{B}\cdot\bar{N}'=\operatorname{sgn} F\ F_*(B)\cdot F_*(N')=\operatorname{sgn} F\, B\cdot N'=\operatorname{sgn} F\,\tau \quad \blacksquare$$

وجود $\operatorname{sgn} F$ درفرمول تاب مبین آن است‌که تاب خم دقیقتر ازآنچه تاکنون می‌پنداشتیم وضعیت خم را مشخص می‌کند، زیرا علامت τ میزان جهت پیچش خم است. اگر F جهت را تغییردهدفرمول $\bar{\tau}=-\tau$ نشان می‌دهدکه خم‌نگارهٔ $F(\beta)$ درست درجهت‌مخالف خود β می‌پیچد.

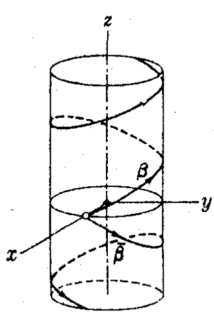
یك‌مثال ساده این دگرجهتی را روشن می‌سازد.

۳.۴. مثال. گیریم β مارپیچ باتندی واحد

$$\beta(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \ \frac{s}{c}\right)$$

باشد، که از مثال ۳.۳ فصل ۲ با قرار دادن $a=b=1$، و درنتیجه $c=\sqrt{2}$، به‌دست می‌آید. ازفرمول کلی مارپیچها داریم $\kappa=\tau=1/2$. اکنون تقارن R نسبت به‌صفحهٔ xy را که یك ایزومتری است در نظر می‌گیریم، لذا R ایزومتری زیر است $R(x,y,z)=(x,y,-z)$. خم نگارهٔ $\bar{\beta}=R(\beta)$ عبارت است از

$$\bar{\beta}(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ -\frac{s}{c}\right)$$



شکل ۷.۳

چنان‌که درشکل۷.۳ دیده می‌شود تقارن دراینجا نیز اثرمعمولی خود را دارد: β و $\bar{\beta}$ در دوجهت مخالف می‌پیچند. اگر β «به‌سمت‌راست» جهتدار شده باشد، $\bar{\beta}$ «به‌سمت چپ» جهتدار شده است (این واقعیت که β به بالا و $\bar{\beta}$ به‌پایین می‌رود، به‌خودی خود، خارج از موضوع بحث ماست.) از لحاظ صوری: تقارن R سوبرگردان است. لذا این قضیه‌گویای این است که $\bar{\kappa}=\kappa=1/2$

و $\bar{\tau} = -\tau = -1/2$. زیرا $\bar{\beta}$ درست همان مارپیچ مثال ۳.۳ فصل ۲ است که در آن $a = 1$ و $b = -1$ گرفته شده است و می‌توان این مطلب را از روی فرمول کلی آن تحقیق کرد.

تمرینات

۱. گیریم $F = TC$ یک ایزومتری $\mathbf{E}^3$ و β خمی با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ باشد. ثابت کنید که
(الف) اگر β مارپیچ استوانه‌ای باشد، $F(\beta)$ نیز یک مارپیچ استوانه‌ای است.
(ب) اگر $\tilde{\beta}$ نگارهٔ کروی β باشد، $C(\tilde{\beta})$ نیز نگارهٔ کروی $F(\beta)$ است.

۲. گیریم $Y = (t, 1-t^2, 1+t^3)$ یک میدان برداری روی مارپیچ

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$$

و C تبدیل متعامد

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

باشد. مطلوب است محاسبهٔ $\bar{\alpha} = C(\alpha)$ و $\bar{Y} = C_*(Y)$ وتحقیق تساویهای زیر

$$C_*(Y') = \bar{Y}', \qquad C_*(\alpha'') = \bar{\alpha}'', \qquad Y' \cdot \alpha'' = \bar{Y}' \cdot \bar{\alpha}''$$

۳. در $\mathbf{E}^2$ مثلثهایی با رأسهای

$$\Delta_1 : (3, 1), (7, 1), (7, 4) \quad \Delta_2 : (2, 0), (2, 5), \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

رادرنظرمی‌گیریم. ثابت کنید که این مثلثها قابل انطباق‌اند، بدین‌ترتیب یک ایزومتری F که Δ_1 را به Δ_2 منتقل کند بیابید. (راهنمایی: بخش تعامد F در اثر انتقال مثلثها تغییر نمی‌کند.)

۴. اگر $F : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ نگاشتی باشد که به‌ازای آن F_* حاصلضرب داخلی راحفظ کند، نشان دهید که F یک ایزومتری است. (راهنمایی: از مثال ۱۱، فصل ۲ بند ۲ استفاده کنید.)

۵. اگر F یک ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ باشد، وبه‌ازای هرمیدان برداری V میدان برداری $\bar{V}$ با

$F_*(V(\mathbf{p}))=\bar{V}(F(\mathbf{p}))$ (به‌ازای‌هر $\mathbf{p}$) تعریف گردد، ثابت کنید که‌مشتقهای کوواریان به‌وسیلهٔ ایزومتریها حفظ می‌شوند، یعنی‌نشان‌دهید که $\overline{\nabla_V W}=\nabla_{\bar{V}}\bar{W}$.

۵. انطباق خمها

دربارهٔ خمهای $\mathbf{E}^3$، مفهوم کلی انطباق به‌صورت زیر بیان می‌شود.

۱.۵. تعریف. دو خم $\alpha, \beta: I \to \mathbf{E}^3$ را قابل انطباق نامند اگر بتوان ایزومتری F از $\mathbf{E}^3$ را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $\beta=F(\alpha)$؛ یعنی به‌ازای هر t از I، $\beta(t)=F(\alpha(t))$.

به‌بیان شهودی دوخم‌قابل انطباق فقط از لحاظ وضع‌قرار گرفتن درفضا باهم اختلاف دارند، و معرف لغزشهایی با تندی یکسان در روی مسیرهای همشکل‌اند. مثلاً مارپیچ $\alpha(t)=(\cos t, \sin t, t)$ که حول محور zها می‌پیچد با مارپیچ $\beta(t)=(t, \cos t, \sin t)$ که حول محور xها می‌پیچد دو خم قابل انطباق را نشان می‌دهند، زیرا اگر F یك ایزومتری باشد به‌طوری که

$$F(p_1, p_2, p_3)=(p_3, p_1, p_2)$$

آنگاه $F(\alpha)=\beta$.

برای تشخیص قابلیت انطباق دو خم α و β عملاً به دشواری می‌توان همهٔ ایزومتریهای $\mathbf{E}^3$ را بررسی کرد تامعلوم شود که آیا می‌توان یك ایزومتری یافت که α را به β تبدیل کند. برای این منظور اساساً باید شکل یك خم با تندی واحد را بادقتی معلوم کنیم که اگر α و β دارای مشخصات یکسان بودند قابل انطباق باشند. همان‌طور که حدس زده می‌شود، این خصوصیات باخمیدگی وتاب مشخص می‌گردند. برای اثبات این نکته به‌یك لم مقدماتی نیازمندیم.

دو خم که با انتقال منطبق می‌گردند موازی نام دارند. بدین‌ترتیب شرط لازم وکافی برای‌آنکه دوخم $\alpha, \beta: I \to \mathbf{E}^3$ موازی‌باشند آن‌است که بتوان‌نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{E}^3$ راطوری تعیین‌کرد که به‌ازای هر s در I داشته باشیم $\beta(s)=\alpha(s)+\mathbf{p}$ یا با قرارداد تابعی $\beta=\alpha+\mathbf{p}$.

۲.۵. لم. دوخم $\alpha, \beta: I \to \mathbf{E}^3$ هنگامی موازی‌اند که بردارسرعت آنها $\alpha'(s)$ و $\beta'(s)$ به‌ازای هر s از I موازی باشند، و دراین‌حالت اگر به‌ازای یك مقدار s_0 داشته باشیم $\alpha(s_0)=\beta(s_0)$ آنگاه $\alpha=\beta$.

برهان. بنابر تعریف، اگر $\alpha'(s)$ و $\beta'(s)$ موازی باشند، مختصات اقلیدسی آنها یکی است. یعنی

$$\frac{d\alpha_i}{ds}(s)=\frac{d\beta_i}{ds}(s) \qquad ۱\leqslant i\leqslant ۳ \qquad \text{به‌ازای}$$

که‌در آن α_i و β_i توابع مختصاتی اقلیدسی α و β می‌باشند. اما به‌موجب حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی،معادلهٔ $d\alpha_i/ds=d\beta_i/ds$ ایجاب می‌کندکه یك‌نقطهٔ ثابت p_i وجود داشته‌باشد به‌طوری که $\beta_i=\alpha_i+p_i$. ازاین‌رو $\beta=\alpha+\mathbf{p}$، ونیز اگر $\alpha(s_\circ)=\beta(s_\circ)$، داریم $\mathbf{p}=\circ$ وبنابراین $\alpha=\beta$. ∎

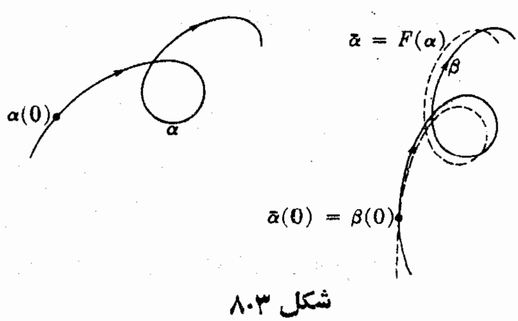
۳.۵. قضیه. اگر $\alpha, \beta: I\to \mathbf{E}^۳$ دوخم باتندی واحد باشند به‌طوری که $\kappa_\alpha=\kappa_\beta$ و $\tau_\alpha=\pm\tau_\beta$، دراین‌صورت α و β قابل انطباق‌اند.

برهان. برای اثبات، نخست α را به‌طور مناسب به‌خم قابل انطباق $F(\alpha)$ بدل می‌کنیم، وسپس نشان می‌دهیم که $F(\alpha)=\beta$ (شکل ۸.۳).

برای این منظور، باتوجه به‌قضیهٔ ۲.۴، درفاصلهٔ I عددی، مثلاً $\circ$، را درنظر می‌گیریم. اگر $\tau_\alpha=\tau_\beta$، دراین‌صورت ایزومتریی که سه‌وجهی فرنهٔ $T_\alpha(\circ)$ ، $N_\alpha(\circ)$ ، $\beta_\alpha(\circ)$ ازخم α در $\alpha(\circ)$ رابه سه‌وجهی فرنهٔ $T(\circ)$ ، $N(\circ)$ ، $B(\circ)$ ازخم β در $\beta(\circ)$ بدل می‌کند (و سونگهدار باشد) به‌عنوان F انتخاب می‌کنیم. (وجود این ایزومتری از قضیهٔ ۲.۳ نتیجه می‌شود.) دستگاه فرنهٔ خم $\bar\alpha=F(\alpha)$ را با $\bar\kappa$ ، $\bar\tau$ ، $\bar T$ ، $\bar N$ ، $\bar B$ نشان می‌دهیم، بنابرقضیهٔ ۲.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\bar\alpha(\circ)&=\beta(\circ) \qquad & \bar T(\circ)&=T(\circ)\\
\bar\kappa&=\kappa_\beta & \bar N(\circ)&=N(\circ) \qquad\qquad (+)\\
\bar\tau&=\tau_\beta & \bar B(\circ)&=B(\circ)
\end{aligned}$$

ازطرف دیگر اگر $\tau_\alpha=-\tau_\beta$ ، ایزومتریی که سه‌وجهی فرنه در $\alpha(\circ)$ را به سه‌وجهی فرنه در $\beta(\circ)$ بدل می‌کند (و سوبرگردان باشد) به‌عنوان F انتخاب می‌کنیم.



شکل ۸.۳

دراین‌صورت بنا برقضیهٔ ۲.۴ دیده‌می‌شود که به‌ازای β و $\bar{\alpha}=F(\alpha)$ معادلات(‡)برقرارند. مثلاً

$$\bar{B}(0)=-F_*(B_\alpha(0))=B(0)$$

اکنون نشان می‌دهیم که $\bar{T}=T$؛ یعنی بردارهای یکهٔ مماس $\bar{\alpha}$ و β درهر نقطه موازی‌اند. چون $\bar{\alpha}(0)=\beta(0)$، از لم ۲.۵ نتیجه می‌شود کــه $F(\alpha)=\beta$. تــابع با مقدار حقیقی $f=\bar{T}\cdot T+\bar{N}\cdot N+\bar{B}\cdot B$ را روی فاصلهٔ I درنظر می‌گیریم. چــون اینها میدانهای برداری یکه هستند، بنا برنامساوی شوارتس (فصل ۲، بند ۱) داریم

$$\bar{T}\cdot T\leqslant 1$$

و به‌علاوه $\bar{T}\cdot T=1$، اگر، وفقط اگر، $\bar{T}=T$. برای دوجملهٔ دیگر f نیز همین خواص موجود است. بنابراین کافی است نشان دهیم کــه f همواره دارای مقدار ثابت ۳ است. از معادلات(‡)به‌آسانی دیده می‌شود که $f(0)=3$، ازطرف دیگر داریم

$$f'=\bar{T}'\cdot T+\bar{T}\cdot T'+\bar{N}'\cdot N+\bar{N}\cdot N'+\bar{B}'\cdot B+\bar{B}\cdot B'$$

با درنظر گرفتن معادلات $\bar{\kappa}=\kappa$ و $\bar{\tau}=\tau$ واستفاده از فرمولهای(‡)فرنه خــواهیم داشت $f'=0$، بنابراین f همواره دارای مقدار ثابت ۳ می‌باشد. ■

بنابراین در $\mathbf{E}^3$ هرخم باتندی واحد به‌وسیلهٔ خمیدگی وتاب کاملاً مشخص می‌شود (بجز وضع قرارگرفتن آن).

دراثبات قضیهٔ ۳.۵ نه‌فقط قابلیت انطباق α و β اثبات شد، بلکه ایزومتریی که این دوخم رابه‌هم بدل می‌کند صریحاً محاسبه شد. این امر را دریك موردخاص نشان می‌دهیم.

۴.۵ مثال. خمهای باتندی واحد $\alpha,\beta:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{E}^3$ به‌طوری‌که:

$$\alpha(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \ \frac{s}{c}\right)$$

$$\beta(s)=\left(\cos\frac{s}{c},\ \sin\frac{s}{c},\ \ -\frac{s}{c}\right)$$

با $c=\sqrt{2}$ را درنظــر می‌گیریم. بدیهی است کــه ایــن دو خم به‌وسیلهٔ یك تقارن قابل انطباق‌اند ــ این دوخم را درمثال ۳.۴ بررسی کردیم، اما ازآن صرفنظرمی‌کنیم و به‌روش کلی تعیین ایزومتری مطلوب می‌پردازیم. درمثال ۳.۳ فصل ۲ دیدیم که $\kappa_\alpha=1/2=\kappa_\beta$ و $\tau_\beta=-1/2=\tau_\alpha$. بنا برقضیهٔ بالا ایــن دوخم به‌وسیلهٔ یك ایزومتری سوبرگردان F قابل انطباق خواهند بود، وچنان‌که دراثبات قضیه دیدیم F باید سه‌وجهی فرنهٔ

$$T_\alpha(0)=(0,\ a,\ a)$$

$$N_\alpha(\circ)=(-\text{۱},\circ,\circ)$$
$$B_\alpha(\circ)=(\circ,-a,a)$$

را به سه‌وجهی فرنهٔ

$$T_\beta(\circ)=(\circ,a,-a)$$
$$N_\beta(\circ)=(-\text{۱},\circ,\circ)$$
$$-B_\beta(\circ)=(\circ,-a,-a)$$

که در آن $a=\text{۱}/\sqrt{\text{۲}}$، بدل کند. (این دستورهای صریح از مثال ۳.۳ فصل ۲ به‌دست می‌آیند.) بنا برمطالب ذیل قضیهٔ ۳.۲ بخش تعامد F عبارت است از $C={}^tBA$ که در آن A و B ماتریسهای ایستاری سه‌وجهیهای بالا می‌باشند. بدین ترتیب

$$C=\begin{pmatrix}\circ & -\text{۱} & \circ\\ a & \circ & -a\\ -a & \circ & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\circ & a & a\\ -\text{۱} & \circ & \circ\\ \circ & -a & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{۱} & \circ & \circ\\ \circ & \text{۱} & \circ\\ \circ & \circ & -\text{۱}\end{pmatrix}$$

زیرا $a=\text{۱}/\sqrt{\text{۲}}$. نقطهٔ اثر دو سه‌وجهی یکی است $\alpha(\circ)=\beta(\circ)=(\text{۱},\circ,\circ)$ وچون C این نقطه را تغییر نمی‌دهد، بخش انتقال F نگاشت همانی است. بنا براین $F=C$ که یك تقارن است، α را به β تبدیل می‌کند.

از لحاظ هندسهٔ اقلیدسی، در $\mathbf{E}^\text{۳}$ خمهایی که با یك ایزومتری به‌هم بدل می‌شوند «یکی» اند. مثلاً مارپیچ تنها خمی که حول محور z مانند مثال ۳.۳ فصل ۲ می‌پیچد نیست، بلکه هرخمی که با آن قابل‌انطباق باشد مارپیچ است، و به‌طورکلی با خاصیت زیر مشخص می‌گردد.

۵.۵ فرع. شرط لازم وکافی برای آنکه خم α با تندی واحد در $\mathbf{E}^\text{۳}$ مارپیچ باشد،آن است که خمیدگی و تاب آن ثابت و مخالف صفر باشد.

برهان. به‌ازای هرعدد $a>\circ$ و $b\neq\circ$ مارپیچ مثال ۳.۳ فصل ۲ را با $\beta_{a,b}$ نشان می‌دهیم. اگر α با $\beta_{a,b}$ قابل انطباق باشد،پس(با تغییرعلامت b درصورت لزوم) می‌توان فرض کرد که ایزومتری سونگهدار است. بدین ترتیب α دارای خمیدگی و تاب

$$\kappa=\frac{a}{a^\text{۲}+b^\text{۲}},\quad \tau=\frac{b}{a^\text{۲}+b^\text{۲}}$$

می‌باشد.

برعکس اگر α دارای خمیدگی و تاب ثابت و مخالف صفر باشد، از حل دومعادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$a=\frac{\kappa}{\kappa^{2}+\tau^{2}}\,,\quad b=\frac{\tau}{\kappa^{2}+\tau^{2}}$$

بدین‌ترتیب خمیدگی و تاب α و $\beta_{a,b}$ برابرند، و درنتیجه این دوخم قابل‌انطباق‌اند. ∎

برای رسیدن به‌نتایج بالا خم را با تندی واحد فرض‌کردیم اما می‌توان این قید را حذف کرد.

۶.۵. فرع. دو خم $\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^{3}$ با تندی دلخواه درنظرمی‌گیریم. اگر

$$v_\alpha=v_\beta>0,\quad \kappa_\alpha=\kappa_\beta>0,\quad و \quad \tau_\alpha=\pm\tau_\beta$$

در این‌صورت خمهای α و β قابل‌انطباق‌اند.

برهان. گیریم $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$تعویض پارامتر با تندی واحد خمهای α و β باشند، ونقطهٔ آغازی بر هردو $t=0$ باشد. چون تابــع تندی α و β یکی است، تابع طول قوس آنها $s=s(t)$ یکی، و همچنین تابع معکوس آن $t=t(s)$ نیز یکی است. اما چون:

$$\kappa_\alpha=\kappa_\beta \quad و \quad \tau_\alpha=\pm\tau_\beta$$

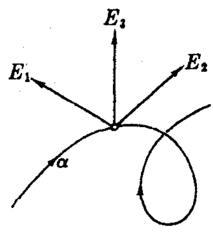
با استفاده از تعاریف کلی خمیدگی و تاب‌که در بند۴ فصل ۲ بیان شد داریم:

$$\kappa_{\bar{\alpha}}(s)=\kappa_\alpha(t(s))=\kappa_\beta(t(s))=\kappa_{\bar{\beta}}(s)$$
$$\tau_{\bar{\alpha}}(s)=\tau_\alpha(t(s))=\pm\tau_\beta(t(s))=\pm\tau_{\bar{\beta}}(s)$$

و بنابرقضیهٔ ۳.۵، $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ قابل انطباق‌اند، یعنی $F(\bar{\alpha})=\bar{\beta}$. امـا دیده می‌شودکـه همین ایزومتری α را به β بدل می‌کند، زیرا

$$F(\alpha(t))=F(\bar{\alpha}(s(t)))=F(\bar{\beta}(s(t))=F(\beta(t))$$ ∎

نظریهٔ‌خمها که دراینجا بیان شدفقط به‌خمهای منظم باخمیدگی‌مثبت اختصاص‌دارد، زیرا به‌طورکلی‌فقط برای این خمها می‌توان میــدان سه‌وجهی فرنه را تعریف‌کرد. دربارهٔ‌خم دلخواه α از $\mathbf{E}^{3}$ می‌توان از میدانهای سه‌وجهی دلخواه روی α استفاده‌کرد، یعنی‌سه‌میدان برداری یکانی E_1، E_2 و E_3 رویα کـه درهرنقطهٔ آن متعامد باشند (شکل۹.۳).



شکل ۹.۳

مثلاً قضیهٔ ۳.۵ را می‌تــوان بــه آسانی دربارهٔ خمهای دلخواه تعمیم داد.

۷.۵. قضیه. گیریم$\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^{3}$ خمهای دلخواه، وE_1، E_2، E_3 یك میدان سه‌وجهی

روی α و $F_۱$، $F_۲$، $F_۳$ یك میدان سه‌وجهی روی β باشد. اگر داشته باشیم:

$$\alpha' \cdot E_i = \beta' \cdot F_i \qquad (۱ \leqslant i \leqslant ۳) \tag{۱}$$

$$E'_i \cdot E_j = F'_i \cdot F_j \qquad (۱ \leqslant i,\ j \leqslant ۳) \tag{۲}$$

در این‌صورت α و β قابل‌انطباق‌اند.

برهان. برای اثبات، استدلال قضیهٔ ۳.۵ را تعمیم می‌دهیم. عددی، مثلاً ۰، را در I در نظرمی‌گیریم، و گیریم F یك ایزومتری باشد که $E_۱(۰)$، $E_۲(۰)$، $E_۳(۰)$ را به $F_۱(۰)$، $F_۲(۰)$، $F_۳(۰)$ بدل می‌کند. چون F_* حاصل‌ضرب داخلی را حفظ می‌کند، بنابراین $\bar{E}_i = F_*(E_i)$ $(۱ \leqslant i \leqslant ۳)$ یك میدان سه‌وجهی روی $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ خواهد بود. چون F_* سرعتها و مشتقهای میدانهای برداری را حفظ می‌کند، خواهیم داشت:

$$\bar{\alpha}(۰) = \beta(۰) \qquad \bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i = \beta' \cdot F_i \tag{$\ddagger$}$$

$$\bar{E}_i(۰) = F_i(۰) \qquad \bar{E}'_i \cdot \bar{E}_j = F'_i \cdot F_j \qquad \text{به‌ازای } ۱ \leqslant i,\ j \leqslant ۳$$

معادلهٔ اخیر نشان می‌دهد که می‌توان نوشت $\bar{E}'_i = \sum a_{ij}\bar{E}_j$ و $F'_i = \sum a_{ij}F_j$ و توابع ضریب a_{ij} در هردو عبارت یکی هستند. توجه شود که داریم $a_{ij} + a_{ji} = ۰$ (از $\bar{E}_i \cdot \bar{E}_j = \delta_{ij}$ مشتق می‌گیریم). اگر $f = \sum \bar{E}_i \cdot F_i$، درست مانند پیش ثابت می‌شود که $f = ۳$، زیرا

$$f' = \sum(\bar{E}'_i \cdot F_i + \bar{E}_i \cdot F'_i) = \sum(a_{ij} + a_{ji})\bar{E}_j \cdot F_i = ۰$$

بدین ترتیب $\bar{E}_i = F_i$ (خاصیت توازی!) و در نتیجه با استفاده از $(\ddagger)$ ثابت می‌شود که

$$\bar{\alpha}' = \sum \bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i\bar{E}_i \quad \text{و} \quad \beta' = \sum \beta' \cdot F_iF_i$$

در هرنقطه موازی‌اند، و چون داریم $\bar{\alpha}(۰) = \beta(۰)$ بنابرلم ۲.۵ خواهیم داشت

$$F(\alpha) = \bar{\alpha} = \beta \qquad \blacksquare$$

این تعمیم در فصل ۶، بند ۸ مورد نیاز است. صورت دیگری از این قضیه را در تمرین ۳ بررسی می‌کنیم (البته عمومیت آن کمتر ولی بیان آن بهتر است).

تمرینات

۱. خم $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳) : I \to \mathbf{E}^۳$ را درنظرمی‌گیریم، ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه خم $\beta : I \to \mathbf{E}^۳$ با α قابل انطباق باشد آن است که بتوان β را به‌صورت

$$\beta(t) = \mathbf{p} + \alpha_۱(t)\mathbf{e}_۱ + \alpha_۲(t)\mathbf{e}_۲ + \alpha_۳(t)\mathbf{e}_۳$$

که در آن $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$، نوشت.

۲. خم α مثال ۴.۴ فصل ۲ را در نظر می‌گیریم. خمی به‌صورت $\gamma(t)=(at, bt^{2}, ct^{3})$ را طوری تعیین کنید که با α قابل انطباق باشد و یك ایزومتری F بیابید که به‌ازای آن $F(\alpha)=\gamma$.

۳. میدان سه‌وجهی E_1، E_2، E_3 را روی $\mathbf{E}^3$ با فرمهای دوگان θ_i و فرمهای همبندی ω_{ij} در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که دوخم $\alpha, \beta: I \to \mathbf{E}^3$ هنگامی قابل انطباق‌اند که داشته باشیم

$$\theta_i(\alpha')=\theta_i(\beta') \quad \text{و} \quad \omega_{ij}(\alpha')=\omega_{ij}(\beta') \qquad \text{به‌ازای } 1 \leqslant i, j \leqslant 3$$

۴. با محاسبهٔ خمیدگی و تاب خم

$$\beta(t)=(t+\sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}\,t-\sin t)$$

ثابت کنید که این خم یك مارپیچ است. یك مارپیچ α به‌صورت $(a\cos t, a\sin t, bt)$ و یك ایزومتری F را طوری تعیین کنید که $F(\alpha)=\beta$.

۵. گیریم خمهای $\alpha, \beta: I \to \mathbf{E}^3$ قابل انطباق و با خمیدگی مثبت باشند. ثابت کنید که فقط یك ایزومتری F وجود دارد به‌طوری که $F(\alpha)=\beta$، مگر آنکه $\tau=0$، که در این حالت دو ایزومتری وجود خواهد داشت.

۶. (ادامه). مطلوب است تعیین دو ایزومتری که سهمی $\alpha(t)=(\sqrt{2}\,t, t^{2}, 0)$ را به سهمی $\beta(t)=(-t, t, t^{2})$ بدل کنند.

۷. اگر β خمی با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ باشد، در این‌صورت هر تعویض پارامتر با تندی واحد $\bar{\beta}$ از آن به‌صورت $\bar{\beta}(s)=\beta(\pm s+s_0)$ خواهد بود. اگر β و $\bar{\beta}$ قابل انطباق باشند، تعویض پارامتر مزبور معرف یك تقارن در مسیر مشترك β و $\bar{\beta}$ می‌باشد. ثابت کنید که مسیرهای مارپیچی کاملاً متقارن‌اند. یعنی صریحاً نشان دهید که مارپیچ β مذکور در مثال ۳.۳ فصل ۲ با هر تعویض پارامتر با تندی واحد $\bar{\beta}$ قابل انطباق است و برای این منظور ایزومتری $F=TC$ را صریحاً طوری تعیین کنید که $F(\beta)=\bar{\beta}$.

۸. دوخم $\alpha: I \to \mathbf{E}^3$ و $\beta: I \to \mathbf{E}^3$ هنگامی دارای مسیرهای قابل انطباق‌اند که بتوان ایزومتری F را طوری تعیین کرد که $F(\alpha)$ یك تعویض پارامتر β باشد.

الف. نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه دو خم α و β با تندی واحد دارای مسیرهای قابل انطباق باشند آن است که بتوان عدد s_0 را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $\kappa_\alpha(s)=\kappa_\beta(\epsilon s+s_0)$ و $\tau_\alpha(s)=\pm\tau_\beta(\epsilon s+s_0)$ که در آنها ϵ برابر $+1$ یا -1 می‌باشد.

ب. اگر α خم تمرین ۲ بند ۴ فصل ۲ باشد، نشان دهید که با خم $\beta=(e^{t}, e^{-t}/2, t)$ دارای مسیرهای قابل انطباق می‌باشند. ایزومتری $F=TC$ و تعویض پارامتر لازم را بیابید.

سه تمرین زیر دربارهٔ خمهای $\mathbf{E}^2$ است.

۹. تابع دیفرانسیلپذیر* κ روی فاصلهٔ I مفروض است، ثابت کنید که می‌توان در $\mathbf{E}^2$ خم α با تندی واحد را طوری تعیین کرد که تابع خمیدگی آن همان κ باشد. (راهنمایی: باعکس کردن ترتیب نتایج تمرین ۸، فصل ۲ بند ۳، فرمول انتگرالی برای α پیدا کنید.)

۱۰. خمهای مسطح زیر را به‌هرصورت پارامتری مناسبی که ممکن است بیابید
الف. $\kappa(s)=1/(1+s^2)$ ب. $\kappa(s)=1/s\ (s>0)$
که درآن s طول قوس را نشان می‌دهد.

۱۱. ثابت کنید شرط لازم وکافی برای آنکه دوخم α و β در $\mathbf{E}^2$ با تندی واحد قابل انطباق باشند آن است که $\kappa_\alpha=\pm\kappa_\beta$.

۶. خلاصه

نتیجهٔ اساسی این فصل آن است که هر ایزومتری فضای اقلیدسی را می‌توان به‌طوریکتا از ترکیب یك تبدیل متعامد و یك تقارن به‌دست آورد. نتایج مهم آن عبارت‌اند از آنکه نگاشت مشتق هرایزومتری F درهرنقطه درست همان بخش‌تعامد F می‌باشد، ودیگرآنکه تنها یك ایزومتری وجود داردکه سه‌وجهی مفروضی را به‌سه‌وجهی دیگر بدل می‌کند. بدین‌ترتیب تشخیص مفاهیمی که به‌هندسهٔ اقلیدسی تعلق دارند بسیار آسان می‌گردد، یعنی ملاك، تغییرناپذیری آنها به‌وسیلهٔ ایزومتریهای فضای اقلیدسی می‌باشد. بالاخره مشابه قضایای‌معروف انطباق مثلثها، «ض، ز، ض» و«ض، ض، ض» درهندسهٔ مسطحهٔ مقدماتی را دربارهٔ خمها اثبات کردیم، یعنی نشان دادیم که خمیدگی و تاب (وتندی) شرط‌لازم وکافی برای قابلیت‌انطباق دوخم را به‌دست می‌دهند. علاوه براین ایزومتری مزبور رانیزمی‌توان مستقیماً محاسبه کرد.

---

* حتی اگر κ فقط پیوسته باشد، خمی‌دوبار دیفرانسیلپذیر به‌دست می‌آوریم. همین نتایج را می‌توان برای خمهای $\mathbf{E}^3$ با استفاده از دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی به‌دست آورد. نگاه کنید به ویلمور [۳].

۴

حساب دیفرانسیل روی رویه‌ها

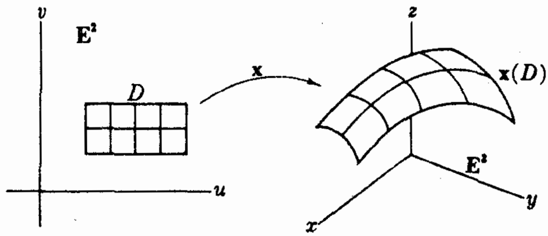
این فصل با تعریف رویه در $\mathbf{E}^3$ و روشهای متداول ساختن رویه‌ها آغاز می‌گردد. با آنکه این مفهوم را کم و بیش همه می‌شناسند، اما همه، آن گونه که شاید و باید، از وجود حساب دیفرانسیل و انتگرال برای هررویه که با حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی روی صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$ مشابه است آگاه نیستند. عناصر این حساب ــ توابع، میدانهای برداری، فرمهای دیفرانسیلی، نگاشتها ــ منحصراً به رویهٔ مزبور متعلق‌اند، نه به‌فضای اقلیدسی $\mathbf{E}^3$ که رویهٔ مزبور در آن واقع است. چنان‌که دربند آخر خواهیم دید این حساب پس از حذف $\mathbf{E}^3$ و ابقای رویهٔ تنها بدون هیچ گونه خللی باقی می‌ماند.

۱. رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$

یك رویه در $\mathbf{E}^3$، اصولاً زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{E}^3$ یعنی مجموعه‌ای است ازنقاط $\mathbf{E}^3$. البته همهٔ زیر مجموعه‌ها رویه نیستند: باید شرط هموار ی و دوبعدی بودن رویه را درنظر بگیریم، این شرایط را با عبارتهای ریاضی در دوتعریف زیر بیان می‌کنیم.

۱.۱. تعریف. نگاشت منظم یك‌به‌یك $\mathbf{x} : D \to \mathbf{E}^3$ از یك زیرمجموعهٔ باز D از $\mathbf{E}^2$ در $\mathbf{E}^3$ را قطعهٔ مختصاتی می‌نامند.

$\mathbf{x}(D)$ نگارهٔ قطعه‌مختصاتی $\mathbf{x}$، یعنی‌مجموعهٔ همهٔ مقادیر $\mathbf{x}$، زیرمجموعه‌ای دوبعدی و هموار از $\mathbf{E}^3$ می‌باشد (شکل ۱.۴).



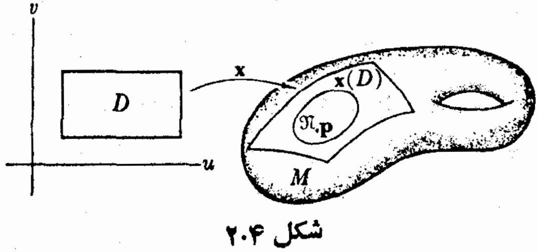
شکل ۱.۴

منظم بودن قطعهٔ $\mathbf{x}$ (تعریف ۹.۷ فصل ۱)، مانند منظم بودن خمها یک شرط اساسی همواری است، شرط یك به یك بودن برای آن است که $\mathbf{x}(D)$ خود را قطع نکند. اغلب برای رفع بعضی از دشواریها (مثال ۷.۱) از قطعه مختصاتی خاص استفاده خواهیم کرد، یعنی قطعه‌هایی که برای آنها تابع معکوس $\mathbf{x}^{-1}: \mathbf{x}(D) \rightarrow D$ پیوسته است (به‌عبارت دیگر دارای توابع مختصاتی پیوسته می‌باشد). اگر D را به‌صورت یک ورقهٔ نازك لاستیکی تصور کنیم، $\mathbf{x}(D)$ از خم کردن و کشیدن آن (نه‌چندان شدید) به‌دست می‌آید.

برای تعریف مناسب رویه، از این تصور که هر ناحیه به‌قدر کافی کوچك از یك رویهٔ M با ناحیه‌ای در صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ مشابه است، استفاده می‌کنیم. بررسی بالا نشان می‌دهد که این مطلب را می‌توان تا اندازه‌ای دقیقتر به‌صورت زیر بیان کرد: M را درمجاورت هریك از نقاطش می‌توان به‌صورت نگارهٔ یك قطعه مختصاتی خاص بیان کرد. (وقتی نگارهٔ یك قطعهٔ $\mathbf{x}$ در M باشد، گوییم $\mathbf{x}$ قطعه‌ای در M است.) برای بیان شکل نهایی این تعریف فقط کافی است برای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ در M یك همسایگی $\mathfrak{N}$ متشکل از همهٔ نقاط متعلق به M که مسافت اقلیدسی آنها تا $\mathbf{p}$ از عدد $0 < \varepsilon$ کوچکتر است را تعریف کنیم.

۲.۱. تعریف. یك رویه در $\mathbf{E}^3$ عبارت است از یك زیرمجموعهٔ M از $\mathbf{E}^3$ که به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از آن یك قطعه مختصاتی در M وجود داشته باشد که نگارهٔ آن شامل یك همسایگی نقطهٔ $\mathbf{p}$ در M باشد (شکل ۲.۴).

رویه‌های معمولی که درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مورد استفاده هستند،



شکل ۲.۴

دراین تعریف صدق می‌کنند؛ به‌عنوان مثال نشان می‌دهیم که کرهٔ یکهٔ Σ در $\mathbf{E}^3$ یك رویه است. بنابر تعریف، Σ عبارت است از همهٔ نقاطی‌که مسافت آنها تامبدأ برابر واحد است، یعنی همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ به‌طوری‌که

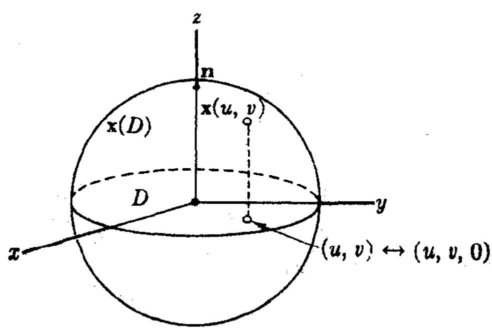
$$\|\mathbf{p}\| = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2} = 1$$

برای آنکه‌نشان دهیم که این رویه درتعریف بالا صدق می‌کند، به‌تعیین یك قطعه مختصاتی خاص در Σ که شامل یك‌همسایگی قطب‌شمال $(0, 0, 1)$ است می‌پردازیم. دیده می‌شود که اگر هرنقطهٔ (q_1, q_2, q_3) از نیمکـرهٔ شمالی را به‌نقطهٔ $(q_1, q_2, 0)$ از صفحهٔ xy تبدیل کنیم، یك تناظر یك به یك ازاین نیمکره باقرص D به‌شعاع ۱ ازصفحهٔ xy به‌دست می‌آید (شکل۳۰۴). اگراین صفحه رابه‌وسیلهٔ تناظرطبیعی $(q_1, q_2) \longleftrightarrow (q_1, q_2, 0)$ با $\mathbf{E}^2$ متحد بگیریم، درایـن صورت D یك قرص در $\mathbf{E}^2$ خواهد بود، کـه ازهمهٔ نقاط (u, v)، تشکیل‌می‌گردد به‌طوری‌که $u^2 + v^2 < 1$. اگر این تناظر رابه‌عنوان تابعی‌روی D درنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,)$$

بدین‌ترتیب $\mathbf{x}$ یك تابع یك به یك از D روی نیمکرهٔ شمالی Σ خواهد بود. نشان می‌دهیم که $\mathbf{x}$ یك‌قطعه مختصاتی خاص است. توابع‌مختصاتی $\mathbf{x}$ روی D دیفرانسیلپذیرند، بنابراین $\mathbf{x}$ یك‌نگاشت است. برای‌اثبات آنکه $\mathbf{x}$ منظم‌است ماتریس‌ژاکوبی (یا ترانهادهٔ) آن‌را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u} & \dfrac{\partial v}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial v} & \dfrac{\partial v}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$



شکل ۳۰۴

که در آن $f=\sqrt{1-u^2-v^2}$. بدیهی است که سطرهای این ماتریس همواره دارای استقلال خطی می‌باشند، بنابراین مرتبهٔ آن درهرنقطه ۲ است، و بنابر ملاك ذیل تعریف ۹.۷ فصل ۱ ، $\mathbf{x}$ منظم خواهد بود، و درنتیجه یك قطعه مختصاتی می‌باشد. علاوه‌براین $\mathbf{x}$ خاص است، زیرا تابع معکوس آن D $\mathbf{x}^{-1}:\mathbf{x}(D)\rightarrow$ عبارت است از

$$\mathbf{x}^{-1}(p_1,\ p_2,\ p_3)=(p_1,\ p_2)$$

که قطعاً پیوسته می‌باشد. بالاخره دیده می‌شود که قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ شامل یك همسایگی $\mathbf{p}=(0,\ 0,\ 1)$ در Σ ، و درواقع شامل هرنقطهٔ $\mathbf{q}$ در نیمکرهٔ شمالی است (شکل ۴.۴).

به‌همین‌طریق می‌توان برای هریك از پنج نیمکرهٔ مختصاتی دیگر پوششی ازقطعه‌های مختصاتی خاص به‌دست آورد، و تحقیق کرد که بنابر تعریف ۲.۱ ، Σ یك رویه است. دراینجا مقصود توضیح تعریف ۲.۱ بود، درآینده روش سریعتری را برای اثبات آنکه (به‌ویژه) کره‌ها رویه می‌باشند، خواهیم دید.

از بحث بالا نتیجه می‌شود که اگر f تابع دیفرانسیلپذیر دلخواهی بامقدار حقیقی روی یك مجموعهٔ باز D از $\mathbf{E}^2$ باشد، دراین‌صورت تابع $\mathbf{x}:D\rightarrow\mathbf{E}^3$ به‌طوری که

$$\mathbf{x}(u,\ v)=(u,\ v,\ f(u,\ v))$$

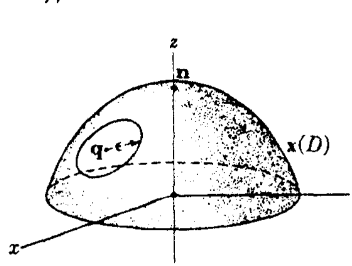
یك قطعه مختصاتی خاص خواهد بود، که آنرا قطعه مختصاتی **مونژ** می‌نامیم.

اکنون به‌توضیح روشهای متداول ساختن رویه‌ها می‌پردازیم. باید توجه داشت که نگارهٔ $M=\mathbf{x}(D)$ از قطعه مختصاتی خاص درتعریف ۲.۱ صدق می‌کند، ازاین‌رو M را رویهٔ ساده می‌نامند. (بنابراین تعریف ۲.۱ مبین آن است که هر رویه در $\mathbf{E}^3$ را می‌توان با به‌هم‌چسباندن رویه‌های ساده ساخت).

۳.۱ مثال. رویهٔ $M: z=f(x,\ y)$ هرتابع دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی f روی $\mathbf{E}^2$ یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ را معین می‌کند. زیرا نمودار f، یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاطی از $\mathbf{E}^3$ که مختصات‌آنها درمعادلهٔ $z=f(x,\ y)$ صدق می‌کنند. بدیهی است M نگارهٔ قطعه‌مختصاتی مونژ

$$\mathbf{x}(u,\ v)=(u,\ v,\ f(u,\ v))$$

می‌باشد، و بنابر توضیحات گذشته M یك رویهٔ ساده است.



شکل ۴.۴

اگر g تابعی با مقدار حقیقی روی $\mathbf{E}^3$ و c یك‌عدد باشد، مجموعهٔ همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ رابه‌طوری که $g(\mathbf{p})=c$ با $M: g=c$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر g توزیع دما درفضا رانشان دهد $M: g=c$ عبارت است ازهمهٔ نقاط با دمای c. برای آنکه چنین زیرمجموعه‌هایی از $\mathbf{E}^3$ تشکیل رویه دهند،

یك شرط ساده لازم است.

۴.۱. قضیه. گیریم g تابعی دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی E^3 و c یك عدد باشد. هنگامی زیرمجموعهٔ $M: g(x, y, z)=c$ از E^3 یك رویه است که درهیچ‌نقطه از M، دیفرانسیل آن یعنی dg صفر نباشد.

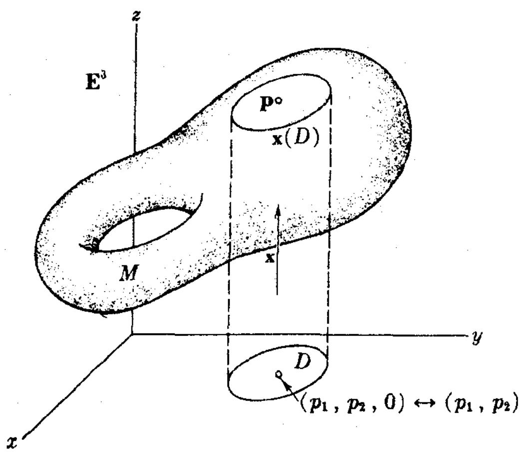
(در تعریف ۲.۱ وهمچنین دراین قضیه به‌طور ضمنی فرض برآن است که M تهی نیست، مثلاً معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=-1$ معرف یك رویه نیست.)

برهان. برای اثبات،کافی است قضیهٔ مهم تابع ضمنی آنالیز را به‌صورت هندسی تعبیر کنیم. به‌ازای نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M باید یك قطعه مختصاتی خاص به‌دست‌آورد، که یك همسایگی $\mathbf{p}$ در M را بپوشاند (شکل ۵.۴). اما

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz$$

از فرض dg مخالف صفر نتیجه می‌شود که اقلاً یکی‌ازاین مشتقهای جزئی در $\mathbf{p}$ مخالف صفر است، مثلاً $(\partial g/\partial z)(\mathbf{p})\neq 0$. دراین‌حالت بنابرقضیهٔ تابع ضمنی درمجاورت $\mathbf{p}$، معادلهٔ $g(x, y, z)=c$ را می‌توان برحسب z حل کرد. به‌عبارت دقیقتر یك تابع دیفرانسیلپذیر h بامقدار حقیقی وجود دارد که دریك همسایگی D از (p_1, p_2) معین باشد، و

(۱) به‌ازای هرنقطهٔ (u, v) از D، نقطهٔ $(u, v, h(u, v))$ در M قرار دارد، یعنی $g(u, v, h(u, v))=c$.



شکل ۵.۴

(۲) نقاط به‌صورت $(u, v, h(u, v))$ با (u, v) در D یك همسایگی نقطهٔ $\mathbf{p}$ در M را می‌پوشانند.

از اینجا نتیجه می‌شود که قطعه مختصاتی مونژ $\mathbf{x}: D \to \mathbf{E}^3$ به‌طوری که

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

در شرایط تعریف ۲.۱ صدق می‌کند، چون $\mathbf{p}$ نقطهٔ دلخواه از M است، نتیجه می‌گیریم که M یك رویه است. ∎

هنگامی که $M: g = c$ یك رویه باشد، $g = c$ را معادلهٔ ضمنی آن می‌نامند. اکنون به‌آسانی می‌توان اثبات کرد که کره‌ها رویه‌اند. کرهٔ Σ در $\mathbf{E}^3$ با شعاع $r > 0$ و مرکز $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ مجموعهٔ همهٔ نقاطی است که مسافت آنها از $\mathbf{c}$ برابر r می‌باشد. اگر قرار دهیم $g = \sum(x_i - c_i)^2$ دراین‌صورت Σ به‌طورضمنی با معادلهٔ $g = r^2$ معین می‌گردد. اما $dg = 2\sum(x_i - c_i)dx_i$، و بنابراین dg فقط در نقطهٔ $\mathbf{c}$ صفر است، و این نقطه در Σ نیست. بنابراین Σ یك رویه است.

با استفاده ازاین قضیه، ومفهوم خم که درصفحهٔ ۲۶ بیان شد، به‌تعیین دونوع رویه، که معروف هستند، می‌پردازیم.

۵.۱ مثال. استوانه‌ها. هنگامی که یك خط L عمود بر یك صفحهٔ P، متکی بریك خم C واقع در P حرکت کند، یك استوانه ایجاد می‌نماید. برای آسانی P را صفحهٔ xy می‌گیریم، و در نتیجه L همواره با محور z موازی خواهد بود (شکل ۶.۴). اگرخم C با

$$C: f(x, y) = c \qquad \text{در } \mathbf{E}^2$$

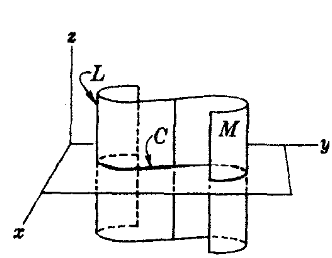
مشخص‌شده باشد، دراین‌صورت قرارمی‌دهیم $\mathcal{F}(p_1, p_2, p_3) = f(p_1, p_2)$، $\mathcal{F}$ تابعی است روی $\mathbf{E}^3$ و در نتیجه استوانهٔ حاصل با

$$M: \mathcal{F}(x, y, z) = c \qquad \text{در } \mathbf{E}^3$$

مشخص می‌گردد. تعریف خم (صفحهٔ ۲۶) مستلزم آن است که درهر نقطه‌از C، $\partial f/\partial x$ یا $\partial f/\partial y$ مخالف صفر باشد. چون

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(p_1, p_2, p_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2)$$

و به‌همین ترتیب $\partial/\partial y$، در نتیجه dg هیچ گاه در نقطه‌ای از M صفر نخواهد شد. بنابراین M یك رویه است.



شکل ۶.۴

هنگامی‌که C یك دایره باشد، استوانهٔ مستدیر $M: x^2+y^2=r^2$ در E^3 به‌دست می‌آید.

در مثال بالا ما یك رویه را اصلاً از راه انتقال یك خم ساختیم، اکنون رویه‌ای از دوران یك خم به‌دست می‌آوریم.

۶.۱. مثال. رویه‌های دورانی. گیریم C یك خم و A یك خط راست در صفحهٔ P باشند، و خط A، خم C را قطع نکند. اگر این خم نیمرخ پیرامون محور A دوران کند، یك رویهٔ دورانی M در E^3 ایجاد خواهدکرد. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۴.۱ نشان می‌دهیم که M محققاً یك رویه است. برای آسانی P را یکی از صفحات مختصات و A را یکی از محورهای مختصات فرض می‌کنیم، مثلاً صفحهٔ xy و محور x. چون C نباید A را قطع کند، می‌توان آن را در نیمصفحهٔ فوقانی $(y>0)$ صفحهٔ xy درنظر گرفت. همچنان که C دوران می‌کند، هرنقطهٔ $(q_1, q_2, 0)$ از C یك دایره ایجاد می‌نماید که مختصات یك نقطه از آن چنین است:

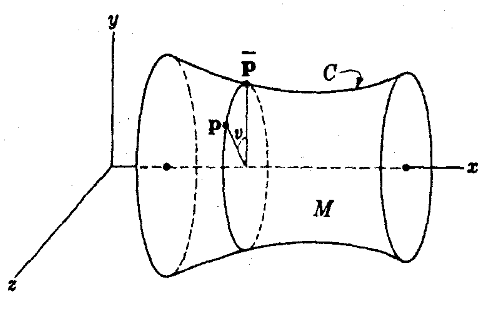
$$(q_1, q_2\cos v, q_2\sin v) \qquad \text{در } M \text{ به‌ازای } 0\leqslant v\leqslant 2\pi،$$

برعکس، یك نقطهٔ $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ را متعلق به M می‌گیریم، اگر، و فقط اگر، نقطهٔ

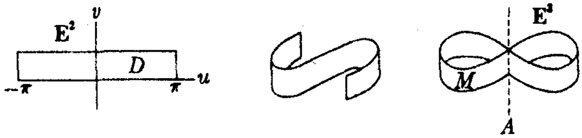
$$\bar{\mathbf{p}}=(p_1, \sqrt{p_2^2+p_3^2}, 0)$$

در C باشد (شکل ۷.۴).

اگر $C: f(x, y)=c$ خم نیمرخ مزبور را نشان دهد، با استفاده از آن تابع g روی E^3 را با $g(x, y, z)=f(x, \sqrt{y^2+z^2})$ تعریف می‌کنیم. بحث بالا نشان می‌دهد که رویهٔ دورانی حاصل عبارت است از $M: g(x, y, z)=c$. با استفاده از مشتق توابع مرکب به‌آسانی دیده می‌شود که dg هیچ‌گاه روی M صفر نخواهد شد، و بنابراین M یك رویه است.



شکل ۷.۴



شکل ۸.۴

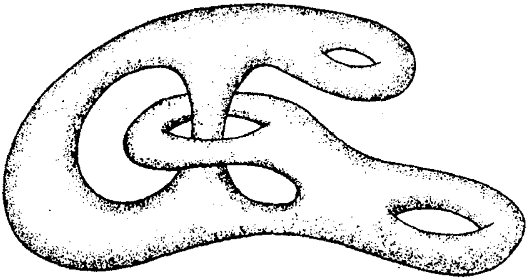
هرنقطه از C در M دایره‌ای به‌وجود می‌آورد، که آن را یك مدار M می‌نامند، و اوضاع مختلف C را هنگام دوران، نصف‌النهارهای M می‌گویند. این اصطلاحات از جغرافیای کره گرفته شده‌اند، اما کره مطابق تعریف بالا یك رویهٔ دورانی نیست، زیرا خم نیمرخ در دونقطه محور دوران را قطع می‌کند، و دو مدار به‌دونقطه تقلیل می‌یابند. برای سادگی بیان قضایای بعدی، اصطلاحات نسبتاً متفاوتی در این حالت به‌کارخواهیم برد، به‌تمرین ۱۲ رجوع شود.

درمثال زیرضرورت شرط خاص بودن قطعه مختصاتی در تعریف ۲.۱ توضیح داده می‌شود.

۷.۱ مثال. گیریم یك‌نوارقلعی‌مستطیل‌شکلی به‌شکل 8 خمیده شود (شکل ۸.۴). M شکل حاصل با تصوری‌که از رویه داریم، سازگار نیست، زیرا در طول محور A، M مشابه صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ نمی‌باشد، و به‌صورت دو صفحهٔ متقاطع است. برای بیان ریاضی این مطلب گیریم D مستطیل $0 < v < 1$ و $-\pi < u < \pi$ در $\mathbf{E}^2$ باشد، ونگاشت $\mathbf{x} : D \longrightarrow \mathbf{E}^3$ را با $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$ تعریف کنیم. به‌آسانی‌می‌توان دیدکه $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی‌است، اما نگارهٔ آن $M = \mathbf{x}(D)$ یك رویه نمی‌باشد: $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی‌خاص نیست. $\mathbf{x}^{-1} : M \longrightarrow D$ پیوسته نیست، به‌بیان ساده برای‌آنکه M را روی D بگسترانیم، $\mathbf{x}^{-1}$ باید آن را در طول محور A ببرد و از هم جداکند (محور z در $\mathbf{E}^3$).

با توجه به‌مثال ۶.۱ چنبرهٔ دورانی T یك رویه می‌باشد (شکل ۱۹.۴). با اندکی‌کار بیشتر می‌توان چنبره‌های مضاعف، به‌گونه‌های مختلف نظیرشکل ۹.۴ ساخت. اساساً با افزودن «دسته‌ها» و«لوله‌ها» به‌رویه‌های موجود، می‌توان دست‌کم رویه‌های پیچیده‌تری ساخت (شکل ۱۰.۴).

شکل ۹.۴



شکل۴.۱۰

تمرینات

۱. هیچ‌یك از زیرمجموعه‌های M از $\mathbf{E}^3$ که در ذیل آورده می‌شوند، رویه نیست. معلوم کنید که درکدام نقاط $\mathbf{p}$ نمی‌توان قطعه مختصاتی خاص برای پوشاندن یك همسایگی آن در M پیداکرد؟ (شکل M را رسم کنید ــ برهان صوری لازم نیست.)

(الف) مخروط $M: z^2 = x^2 + y^2$

(ب) قرص بستهٔ $M: x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0$

(ج) صفحهٔ تا شدهٔ $M: xy = 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

۲. هرصفحه در $\mathbf{E}^3$ یك رویهٔ $M: ax + by + cz = d$ است که در آن اعداد a، b و c همه با هم صفر نیستند. ثابت کنید که هرصفحه در $\mathbf{E}^3$ را می‌توان با معادله‌ای برداری بیان کرد.

۳. شکل کلی رویهٔ $M: z = ax^2 + by^2$ را درهریك از حالتهای زیر نشان دهید:

(الف) $a > b > 0$ (ج) $a > b = 0$

(ب) $a > 0 > b$ (د) $a = b = 0$

۴. درکدام‌یك از حالتهای زیر نگاشت $\mathbf{x}: \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^3$ یك قطعه مختصاتی است:

(الف) $\mathbf{x}(u, v) = (u, uv, v)$ (ج) $\mathbf{x}(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

(ب) $\mathbf{x}(u, v) = (u^2, u^3, v)$ (د) $\mathbf{x}(u, v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$

(یادآوری می‌کنیم که $\mathbf{x}$ یك به‌یك است اگر، وفقط اگر، $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u_1, v_1)$ مستلزم $(u, v) = (u_1, v_1)$ باشد.)

۵. (الف) ثابت کنید که $M: (x^2 + y^2)^2 + 3z^2 = 1$ یك رویه است.

(ب) به‌ازای چه مقادیر c، $M: z(z-2) + xy = c$ یك رویه است؟

۶. مقطع صفحهٔ $z=0$ و زین میمون

$$M: z=f(x, y), \qquad f=y^3-3yx^2$$

را بیابید، در کدام نواحی از صفحه، $f>0$؟ و در کدام نواحی $f<0$؟ وجه تسمیهٔ این رویه را بیان کنید.

۷. گیریم $\mathbf{x}: D \to \mathbf{E}^3$ نگاشتی به‌صورت زیر باشد

$$\mathbf{x}(u, v)=(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

(الف) نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ از $\mathbf{E}^3$ در نگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ باشد، آن است که معادلات زیر را بتوان برحسب u و v با (u, v) متعلق به D حل کرد

$$p_1=x_1(u, v), \qquad p_2=x_2(u, v) \qquad p_3=x_3(u, v)$$

(ب) اگر به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{x}(D)$ این معادلات دارای جواب یکتای:

$$u=f_1(p_1, p_2, p_3), \qquad v=f_2(p_1, p_2, p_3)$$

با (u, v) متعلق به D باشند، ثابت کنید که $\mathbf{x}$ یك به یك است، و $\mathbf{x}^{-1}:\mathbf{x}(D) \to D$ با فرمول زیر معین می گردد

$$\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})=(f_1(\mathbf{p}), f_2(\mathbf{p}))$$

۸. گیریم $\mathbf{x}:D \to \mathbf{E}^3$ تابعی به‌صورت زیر:

$$\mathbf{x}(u, v)=(u^2, uv, v^2)$$

$D: u>0, v>0$ باشد. نشان دهید که $\mathbf{x}$ یك به‌یك است و فرمولی برای تابع معکوس آن $\mathbf{x}^{-1}:\mathbf{x}(D) \to D$ بیابید و ثابت کنید که $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی خاص است.

۹. گیریم $\mathbf{x}:\mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^3$ نگاشت

$$\mathbf{x}(u, v)=(u+v, u-v, uv)$$

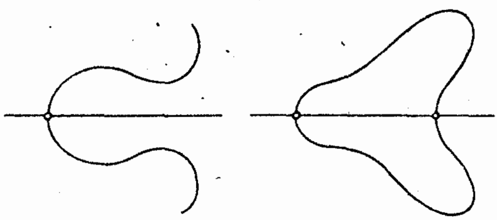
باشد، نشان دهید که $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی خاص است و نگارهٔ آن رویهٔ $M: z=(x^2-y^2)/4$ می باشد.

۱۰. اگر F یك ایزومتری از $\mathbf{E}^3$ و M رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ باشد، ثابت کنید که $F(M)$ نیز رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ است. (راهنمایی: اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی در M باشد، آنگاه تابع مرکب $F(\mathbf{x})$ منظم است، زیرا بنابر تمرین ۱۲، فصل اول بند ۷ داریم $F(\mathbf{x})_* = F_* \mathbf{x}_*$.)

۱۱. اگر در تمرین ۱۰، F را فقط دیفئومرفیسم فرض کنیم حکم مزبور همچنان صادق است. این مطلب را اثبات کنید: اگر F یك دیفئومرفیسم از $\mathbf{E}^3$ و $M: g=c$ یك

رویه باشد، نگارهٔ آن به‌وسیلهٔ F یعنی $\bar{M}: \bar{g} = c$ که در آن $\bar{g} = g(F^{-1})$ است نیز یك رویه می‌باشد. (راهنمایی: اگر در نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M داشته باشیم $dg(\mathbf{v}) \neq 0$، با استفاده از تمرین ۹ فصل اول بند ۷ نشان دهیدکه $dg(F_*\mathbf{v}) \neq 0$.)

۱۲. اگر f تابع دیفرانسیلپذیر باشد، و $f(x, y^2) = c$ معرف یك خم C در صفحهٔ xy باشد، دراین صورت C نسبت به‌محور x متقارن است، و محور x را دریك نقطه (اگر C یك قوس باشد)، یا در دو نقطه (اگر C بسته باشد) قطع می‌کند. ثابت کنید که از دوران C پیرامون محور x یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ حاصل می‌شود. (M را رویهٔ دورانی زایده‌دار می‌نامند: اگر نقاط روی محور از آن حذف شود یك رویهٔ دورانی معمولی خواهد بود (شکل ۱۱.۴).



شکل ۱۱.۴

۲. محاسبه‌های قطعه مختصاتی

در بند ۱ از قطعه‌های مختصاتی برای تعریف رویه استفاده شد، دراینجا به‌بررسی خواصی چند از قطعه‌های مختصاتی که در بررسی رویه‌ها مفیدند می‌پردازیم.

گیریم $\mathbf{x}: D \to \mathbf{E}^3$ یك قطعه مختصاتی باشد. چون u یا v را ثابت بگیریم تابع $(u, v) \to \mathbf{x}(u, v)$ خمهایی را نشان می‌دهند. توضیح آنکه به‌ازای هرنقطهٔ (u_0, v_0) در D خم

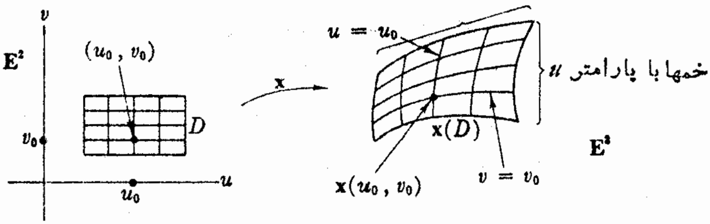
$$u \longrightarrow \mathbf{x}(u, v_0)$$

را خمی با پارامتر u و $v = v_0$ از $\mathbf{x}$ می‌نامند؛ و خم

$$v \longrightarrow \mathbf{x}(u_0, v)$$

را خمی با پارامتر v و $u = u_0$ می‌گویند (شکل ۱۲.۴).

نگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ به‌وسیلهٔ این دو خانوادهٔ خم که نگارهٔ خطوط افقی و قائم در D به‌وسیلهٔ $\mathbf{x}$ می‌باشند، پوشیده می‌شود، واز هرنقطهٔ متعلق به $\mathbf{x}(D)$ یك خم از هر خانواده می‌گذرد.



شکل ۱۲۰۴

۱۰۲. تعریف. اگر $\mathbf{x}: D \to \mathbf{E}^3$ یك قطعه مختصاتی باشد، به‌ازای هر نقطهٔ $(u_\circ, v_\circ)$ در D:
(۱) بردار سرعت در $u_\circ$ ازخم با پارامتر u و $v = v_\circ$ را با $\mathbf{x}_u(u_\circ, v_\circ)$ نشان می‌دهند.
(۲) بردار سرعت در $v_\circ$ ازخم با پارامتر v و $u = u_\circ$ با $\mathbf{x}_v(u_\circ, v_\circ)$ نشان داده می‌شود.
بردارهای $\mathbf{x}_u(u_\circ, v_\circ)$ و $\mathbf{x}_v(u_\circ, v_\circ)$ را سرعتهای جزئی $\mathbf{x}$ در $(u_\circ, v_\circ)$ می‌نامند (شکل ۱۳۰۴).

بدین ترتیب $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ توابع روی D می‌باشند، که مقادیر آنها درهر نقطهٔ $(u_\circ, v_\circ)$ بردارهای مماس بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{x}(u_\circ, v_\circ)$ می‌باشند. اندیسهای u و v به‌منظور نشان‌دادن محاسبهٔ مشتق جزئی به‌کار رفته‌اند. اگر قطعه مختصاتی برحسب توابع مختصاتی اقلیدسی به‌صورت

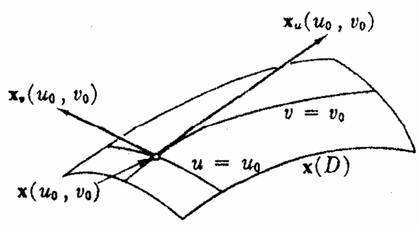
$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v))$$

باشد، بنا بر تعریف بالا توابع سرعت جزئی عبارت‌اند از

$$\mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right)_{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}\right)_{\mathbf{x}}$$

اندیس $\mathbf{x}$ (که اکثراً حذف می‌شود) یادآور این مطلب است که $\mathbf{x}_u(u, v)$ و $\mathbf{x}_v(u, v)$ نقطهٔ اثرشان $\mathbf{x}(u, v)$ است.



شکل ۱۳۰۴

۲.۲ مثال. قطعه مختصاتی جغرافیایی در کره. گیریم Σ کره‌ای باشعاع $r > 0$ و به‌مرکز مبدأ $\mathbf{E}^3$ باشد. با استفاده از مفهوم طول وعرض جغرافیایی کرهٔ زمین، می‌توان روی Σ قطعه مختصاتی دیگری بغیراز قطعه مختصاتی مونژ که در بند ۱ بیان شد، ساخت. نقطهٔ $\mathbf{x}(u, v)$ از Σ با طول جغرافیایی u $(-\pi < u < \pi)$ و عرض جغرافیایی v $(-\pi/2 < v < \pi/2)$ دارای مختصات اقلیدسی زیر می‌باشد (شکل ۱۴.۴).

$$\mathbf{x}(u, v) = (r\cos v \cos u,\ r\cos v \sin u,\ r\sin v)$$

ناحیهٔ D از حوزهٔ $\mathbf{x}$ که با نامساویهای بالا معین می‌گردد، نگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ از $\mathbf{x}$ همهٔ Σ خواهد بود، بجز یك نیمدایره که از قطب شمال به قطب جنوب کشیده شده است. خم با پارامتر u و $v = v_0$ یك دایره است، که مدار باعرض v_0 می‌باشد. خم با پارامتر v و $u = u_0$ یك نیمدایره است که *نصف‌النهار* باطول u_0 می‌باشد.

سرعتهای جزئی $\mathbf{x}$ از راه محاسبه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{x}_u(u, v) = r(-\cos v \sin u,\ \cos v \cos u,\ 0)$$

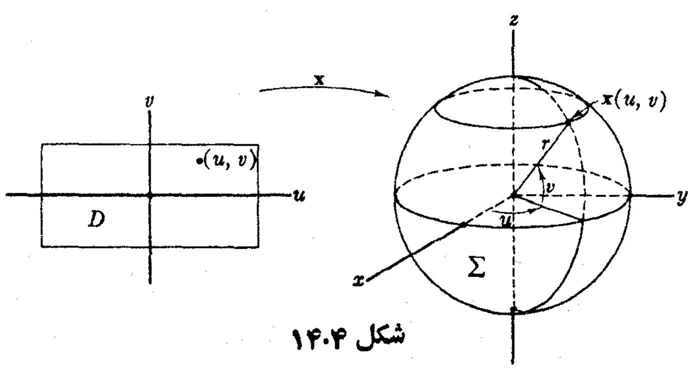
$$\mathbf{x}_v(u, v) = r(-\sin v \cos u,\ -\sin v \sin u,\ \cos v)$$

که در آن r یك ضریب اسکالر است. روشن است که $\mathbf{x}_u$ همواره به‌شرق و $\mathbf{x}_v$ به‌شمال متوجه‌است. ذیلاً ثابت‌خواهیم کرد که $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی روی Σ می‌باشد (شکل ۱۵.۴).

برای تشخیص آنکه زیرمجموعهٔ M از $\mathbf{E}^3$ یك رویه است، در تعریف ۲.۱ به‌قطعه‌های مختصاتی خاص احتیاج داریم (تمرین ۷.۱ علت آن‌را نشان می‌دهد). اما همین که بدانیم M یك رویه‌است، شرط خاص بودن را دیگر لازم نداریم (تمرین ۱۴، بند ۳). علاوه براین دربسیاری از حالتها می‌توان شرط یك به یك بودن را نیز کنارگذاشت.

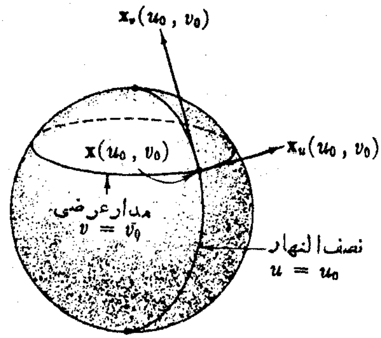
۳.۲ تعریف. نگاشت منظم $\mathbf{x}: D \to \mathbf{E}^3$ را که نگارهٔ آن روی رویهٔ M باشد، *نمایش پارامتری* ناحیهٔ $\mathbf{x}(D)$ در M می‌نامند.

(بدین ترتیب قطعه مختصاتی فقط یك نمایش پارامتری یك به‌یك است.) در بعضی‌از



شکل ۱۴.۴

حالتهای مساعدامکان دارد که این نگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ تمام‌رویهٔ M باشد، ودراین صورت مشابه مفاهیم نمایش پارامتری خم (صفحهٔ ۲۶) را داریم. نمایشهای پارامتری در محاسبات عملی رویه‌ها دارای اهمیت قدر اولند. ازاین‌رو به‌بررسی روشهای تشخیص آنکه یك‌نگاشت $\mathbf{x}:D \to \mathbf{E}^3$ یك نمایش پارامتری رویهٔ M (یا قسمتی‌از آن) است می‌پردازیم.



شکل ۱۵.۴

نگارهٔ $\mathbf{x}$ طبعاً باید در M واقع باشد. اگر رویه به‌صورت ضمنی $M:g=c$ باشد، مفهوم شرط بالا آن است که باید تابع مرکب $g(\mathbf{x})$ مقدار ثابت c را دارا باشد.

برای آزمون منظم بودن $\mathbf{x}$ نخست باید دید که آیا خمهای پارامتر و سرعتهای جزئی $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ به‌ازای یك نگاشت دیفرانسیلپذیر دلخواه $\mathbf{x}:D \to \mathbf{E}^3$ کاملاً معین هستند یا نیستند. دیده می‌شود که دوسطر آخر حاصل‌ضرب خارجی

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

(ترانهادهٔ) ماتریس ژاکوبی $\mathbf{x}$ را در هرنقطه به‌دست می‌دهد. بنابراین شرط منظم بودن $\mathbf{x}$ معادل است با آنکه $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ همواره مخالف صفر باشد، و به عبارت دیگر درهر نقطهٔ (u, v) از D سرعتهای جزئی $\mathbf{x}$ دارای استقلال خطی باشند.

این روشهارا درمورد نگاشت $\mathbf{x}$ مثال ۲.۲ به‌کار می‌بریم. چون کره با معادلهٔ ضمنی $g = x^2+y^2+z^2=r^2$ تعریف شده است، باید نشان دهیم که $g(\mathbf{x}) = r^2$. چون به‌جای x، y و z توابع مختصاتی $\mathbf{x}$ را قرار دهیم به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} r^{-2}g(\mathbf{x}) &= (\cos v \cos u)^2 + (\cos v \sin u)^2 + \sin^2 v \\ &= \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \end{aligned}$$

پس‌از محاسبهٔ $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ از تمرین ۲.۲ خواهیم داشت

$$r^{-2}\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \cos u \cos^2 v\, U_1 + \sin u \cos^2 v\, U_2 + \cos v \sin v\, U_3$$

وچون برای حوزهٔ D از $\mathbf{x}$ همواره $-\pi/2 < v < \pi/2$، $\cos v$ هیچ گاه صفر نمی‌شود، اما $\sin u$ و $\cos u$ توأماً هیچ گاه صفر نمی‌شوند، بنابراین $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ همواره

روی D مخالف صفر است، یعنی $\mathbf{x}$ منظم، ویك نمایش پارامتری است.

برای اثبات آنکه $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی است، نشان می‌دهیم که یك به‌یك است، یعنی از $\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{x}(u_1, v_1)$ نتیجه‌می‌شود $(u, v)=(u_1, v_1)$. اگر $\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{x}(u_1, v_1)$، با استفاده از تعریف $\mathbf{x}$ تساوی بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$r\cos v\cos u=r\cos v_1\cos u_1$$

$$r\cos v\sin u=r\cos v_1\sin u_1$$

$$r\sin v=r\sin v_1$$

بعلاوه چون به‌ازای همهٔ نقاط D داریم $-\pi/2<v<\pi/2$، معادلهٔ سوم نشان می‌دهد، $v=v_1$. بدین ترتیب $r\cos v=r\cos v_1>0$ را می‌توان ازدوطرف دومعادلهٔ دیگر حذف کرد، ونتیجهٔ $u=u_1$ را به‌دست آورد.

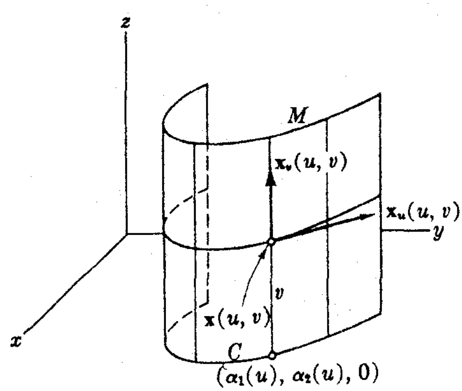
در مورد این تابع به‌خصوص $\mathbf{x}$ روی Σ، نتایج بالا را می‌توان ازآنچه در مثال ۲.۲ بیان شد به‌آسانی به‌دست آورد، ولی روشهای بالا در حالتهای دشوارتر مفیدند.

اکنون به‌تعیین نمایشهای پارامتری طبیعی در استوانه‌ها و رویه‌های دورانی می‌پردازیم.

۴.۲. مثال. نمایش پارامتری‌استوانهٔ M. گیریم M مانند مثال ۵.۱ استوانه‌ای روی‌خم $C:f(x, y)=a$ در صفحهٔ xy باشد (شکل ۱۶.۴). اگر $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ یك نمایش پارامتری C باشد، ادعا می‌کنیم که

$$\mathbf{x}(u, v)=(\alpha_1(u),\ \alpha_2(u),\ v)$$

یك نمایش پارامتری M است. بدیهی است که $\mathbf{x}$ در M است، وتمام M را می‌پوشاند،



شکل ۱۶.۴

و نیز دیفرانسیلپذیر می‌باشد. علاوه براین $\mathbf{x}$ منظم است، زیرا در هر نقطهٔ (u, v)، سرعتهای جزئی

$$\mathbf{x}_u = \left(\frac{d\alpha_1}{du}, \frac{d\alpha_2}{du}, 0\right)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$$

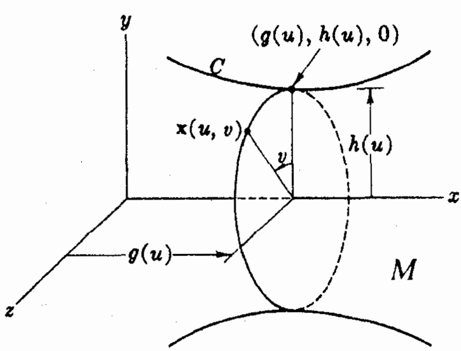
استقلال خطی دارند ($\mathbf{x}_u$ هیچ‌گاه صفر نیست، زیرا α بنابر تعریف منظم است). اگر خم α روی فاصلهٔ I تعریف شده باشد، حوزهٔ $\mathbf{x}$ نوار قائم D است که در آن v دلخواه و u در I می‌باشد. (بدین ترتیب اگر I تمام خط حقیقی باشد، D خود $\mathbf{E}^2$ خواهد بود.) خمهای مربوط به‌پارامتر u از $\mathbf{x}$ فقط با انتقال خم C به‌دست می‌آیند، و آنهارا خمهای مقاطع عرضی استوانه می‌نامند. خمهای مربوط به‌پارامتر v که خطوطی راست‌اند مولدها (یا عناصر) استوانه نامیده می‌شوند. اگر خم C بسته نباشد، α و در نتیجه $\mathbf{x}$ یك به‌یك است، و $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی خواهد بود. اما اگر C بسته باشد $\mathbf{x}$، D را بینهایت بار به‌دور C می‌پیچاند.

۵.۲ مثال. نمایش پارامتری رویه‌های دورانی. گیریم M مانند مثال ۶.۱ از دوران خم C در نیمصفحهٔ فوقانی صفحهٔ xy پیرامون محور x حاصل شده باشد. گیریم

$$\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$$

یك نمایش پارامتری C باشد (توجه شود که $h > 0$). چنان‌که در مثال ۶.۱ دیدیم، نقطهٔ $(g(u), h(u), 0)$ که روی خم نیمرخ C به‌اندازهٔ زاویهٔ v دوران کرده و به‌نقطهٔ $\mathbf{x}(u, v)$ رسیده است، مختص x آن همان $g(u)$ است، ولی مختصات y و z جدید آن به‌ترتیب عبارت‌اند از $h(u)\cos v$ و $h(u)\sin v$ (شکل ۱۷.۴). بنابراین:

$$\mathbf{x}(u, v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$$



شکل ۱۷.۴

روشن است که فرمول بالا نگاشتی را در M تعریف می‌کند، که نگارهٔ آن تمام M است. محاسبهٔ کوتاهی نشان می‌دهد که $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ همواره دارای استقلال خطی‌اند، بنابراین $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری M می‌باشد. مانند مثال ۴.۲، D حوزهٔ $\mathbf{x}$ از همهٔ نقاط (u, v) تشکیل شده است، که به‌ازای آنها u در حوزهٔ α است. خمهای مربوط به پارامتر u از $\mathbf{x}$ نصف‌النهارهای M را نشان می‌دهند. خمهای مربوط به‌پارامتر v مدارها هستند. (بنابراین نمایش پارامتری $\mathbf{x}: D \to M$ هیچ‌گاه یك به‌یك نیست.)

بدیهی است الزامی ندارد، خمها را پیرامون محور $\mathbf{x}$ دوران دهیم. اما با انتخاب مناسب دستگاه مختصات همواره همین تعبیر هندسی را برای توابع g و h خواهیم‌داشت: g مسافت درطول محور دوران و h مسافت از محور دوران را نشان می‌دهد.

قطعه مختصاتی جغرافیایی کره یك نمونه برای مثال ۵.۲ (با تعویض u و v) می‌باشد. اکنون یك مثال دیگر.

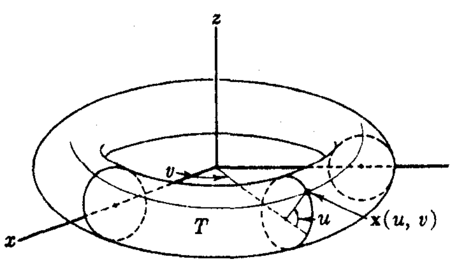
۶.۲ مثال. چنبرهٔ دورانی T. چنبره رویه‌ای است دورانی که خم نیمرخ آن C یك دایره است. گیریم C دایره‌ای درصفحهٔ xz با شعاع $r > 0$ و به‌مرکز $(R, 0, 0)$ باشد. آن‌را پیرامون محور z دوران می‌دهیم، و بنابراین باید فرض کنیم $R > r$ تا آنکه C محور دوران را قطع نکند. نمایش پارامتری طبیعی C (شکل ۱۸.۴) عبارت است‌از

$$\alpha(u) = (R + r\cos u,\ r\sin u)$$

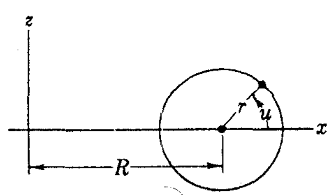
بنابر توضیحات بالا باید $g(u) = r\sin u$، مسافت در طول محور z و $h(u) = R + r\cos u$ مسافت از محور z باشد. با توجه به‌بحث کلی مثال ۵.۲ وجابجایی محورها، نمایش پارامتری زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= (h(u)\cos v,\ h(u)\sin v,\ g(u))\\ &= ((R + r\cos u)\cos v,\ (R + r\cos u)\sin v,\ r\sin u)\end{aligned}$$

حوزهٔ $\mathbf{x}$ تمام صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ است، و (مانند تمام مواردی که خم نیمرخ خم بسته‌ای باشد) $\mathbf{x}$ برحسب u و v متناوب است. در اینجا



شکل ۱۹.۴



شکل ۱۸.۴

$$\mathbf{x}(u+۲\pi, v+۲\pi)=\mathbf{x}(u, v) \qquad (u, v)\ \text{به‌ازای هر}$$

برای هر رویه بینهایت نمایشهای پارامتری گوناگون (و قطعه مختصاتی) وجود دارد. آنچه راکه بررسی کردیم از لحاظ تناسب طبیعی با رویه‌های مزبور ممتازند.

تمرینات

۱. مطلوب است تعیین یك نمایش پارامتری برای تمام رویهٔ حاصل از دوران:
(الف) کاتنوئید: $C: y=\cosh x$ پیرامون محور x
(ب) چنبره: $C:(z-۲)^۲+y^۲=۱$ پیرامون محور y
(ج) سهمیگون دوار: $C: z=x^۲$ پیرامون محور z

۲. اگر $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ سرعتهای جزئی برای نگاشت $\mathbf{x}: D\to \mathbf{E}^۳$ باشد، توابع بامقدارحقیقی زیر را روی D درنظر می گیریم

$$E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u \qquad F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v \qquad G=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v$$

ثابت کنید

$$\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|^۲=EG-F^۲$$

ونتیجه بگیریدکه، شرط لازم وکافی برای اینکه $\mathbf{x}$ منظم باشد، آن است که $EG-F^۲$ هیچ گاه صفر نشود.(بررسی منظم بودن اغلب با این روش بسیار آسانتر است. تعبیر هندسی این توابع درفصل ۵ بند ۴ خواهد آمد.)

۳. نشان دهیدکه

$$M:(\sqrt{x^۲+y^۲}-۴)^۲+z^۲=۴$$

یك چنبرهٔ دورانی است، دایرهٔ نیمرخ و محور دوران آن را بیابید.

رویه‌های خطکشی. رویهٔ خطکشی رویه‌ای است که از حرکت یك‌خط L، متکی بر خم β، ایجاد می‌شود. اوضاع مختلف خط L را مولدهای رویه می‌نامند. این گونه رویه‌ها همواره دارای نمایش پارامتری خطکشی زیر می‌باشند

$$\mathbf{x}(u, v)=\beta(u)+v\,\delta(u) \qquad \text{یا} \qquad \beta(v)+u\,\delta(v)$$

β را خم پایه و δ را خم هادی می‌نامند. همچنین می‌توان δ را به‌صورت یك میدان برداری روی β تصورکرد. اغلب لازم است v را دریك فاصله محدودکرد، و بدین‌ترتیب مولدها ممکن است تمامی یك خط مستقیم نباشند.

۴. نشان دهیدکه رویهٔ زینی $M: z=xy$ رویهٔ خطکشی مضاعف‌است: دونمایش پارامتری با مولدهای مختلف برای آن بیابید.

۵. مخروط رویه‌ای است خطکشی با نمایش پارامتری به‌صورت زیر:

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + v\,\delta(u)$$

بدین ترتیب همهٔ مولدها از رأس $\mathbf{p}$ می‌گذرند (شکل ۲۰.۴). نشان دهید، منظم بودن $\mathbf{x}$ هم‌ارز است با آنکه v و $\delta \times \delta'$ هیچ‌گاه صفر نباشند. (بدین ترتیب رأس هیچ‌گاه جزو مخروط نیست.)

۶. استوانه رویه‌ای است خطکشی با نمایش پارامتری به‌صورت زیر

$$\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + v\mathbf{q}$$

بدین ترتیب مولدها همه‌متوازی‌اند (شکل ۲۱.۴). ثابت کنید که منظم بودن $\mathbf{x}$ هم‌ارز آن است که $\beta' \times \mathbf{q}$ هیچ‌گاه صفر نباشد. نشان دهید که این تعریف، تعمیم مثال ۴.۲ است.

۷. خط L که همواره بر محور A متکی و متعامد است (شکل ۲۲.۴)، در امتداد آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند و درهمان حال باسرعت ثابت به‌دور آن می‌چرخد، و بدین ترتیب یك هلیکوئید H ایجاد می‌کند.

اگر A محور z باشد، دراین صورت H نگارهٔ نگاشت $\mathbf{x}:\mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^3$ است که

$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ bv) \qquad b \neq 0$$

(الف) ثابت کنید که $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی است.

(ب) خمهای پارامتری آن را بیان کنید.

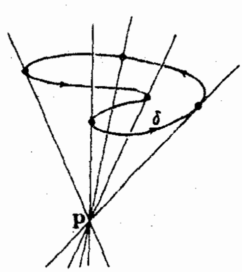
(ج) معادلهٔ ضمنی هلیکوئید را به‌صورت $g = c$ بیابید.

۸. (الف) نشان دهید که $\mathbf{x}:D \to \mathbf{E}^3$ که در آن

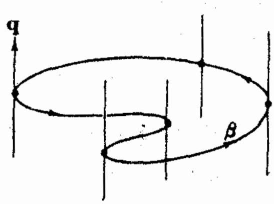
$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v,\ u,\ \sin v)$$

روی $D: u > 0$ یك نگاشت منظم است.

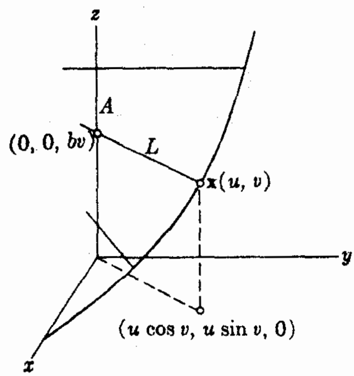
(ب) تابع $g(x, y, z)$ را طوری تعیین کنید که نگارهٔ $\mathbf{x}$، رویهٔ $M: g = 0$ باشد.



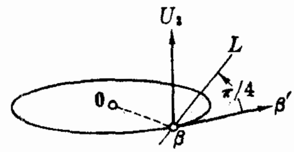
شکل ۲۰.۴



شکل ۲۱.۴



شکل ۲۲.۴



شکل ۲۳.۴

(ج) نشان دهید که M رویه‌ای است خطکشی وشکل آن را مجسم کنید. (راهنمایی: خم حاصل از مقطع رویهٔ M و صفحهٔ $y=۱$ را درنظر بگیرید.)

۹. گیریم β نمایش پارامتری با تندی واحد دایرهٔ یکه در صفحهٔ xy باشد. رویه‌ای خطکشی به ترتیب زیر بسازید: یك خط L درطول β طوری حرکت کند، که بر شعاع متناظر دایره عمود باشد، و زاویهٔ ثابت $\pi/۴$ را با β' بسازد (شکل ۲۳.۴).

(الف) نشان دهید که M، رویهٔ خطکشی حاصل، دارای نمایش پارامتری زیر است:

$$\mathbf{x}(u, v)=\beta(u)+v(\beta'(u)+U_۳)$$

(ب) $\mathbf{x}$ را صریحاً برحسب v و توابع مختصاتی β بیان کنید.

(ج) نشان دهید که رویهٔ M با معادلهٔ ضمنی زیر معین می‌گردد:

$$x^۲+y^۲-z^۲=۱$$

(د) نشان دهید که اگر به جای زاویهٔ $\pi/۴$ زاویهٔ $-\pi/۴$ اختیار کنیم، همان رویهٔ M حاصل می‌گردد، و بدین‌ترتیب M یك رویهٔ خطکشی مضاعف است.

(ه) شکل رویهٔ M را رسم کنید ودومولد ماربر هریك ازنقاط (۱, ۰, ۰) و (۲, ۱, ۲) را نشان دهید.

رویهٔ درجهٔ دوم، رویه‌ای است مانند $M: g=۰$ که در آن g حداکثر دارای جمله‌های درجهٔ دوم برحسب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ باشد، یعنی

$$g=\sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j+\sum_i b_i x_i+c$$

به‌استثنای حالتهای بسیار ساده فقط پنج نوع رویهٔ درجهٔ دوم وجود دارد، که در سه مثال زیر نمونهٔ آنها آورده شده است (قضیهٔ ۲.۲، صفحهٔ ۲۸۰، کتاب بیرکهوف و مك‌لین را ببینید).

۱۰. در هریك از حالتهای زیر (۱) ثابت کنید M یك رویه است وشکل کلی آن رامجسم کنید، (۲) نشان دهید که $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری است، و نگارهٔ آن را در M بیابید.

(الف) بیضیگون، $M: \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\cos u \cos v,\ b\cos u \sin v,\ c\sin u)$$

روی $D: -\frac{\pi}{۲} < u < \frac{\pi}{۲}$

(ب) هذلولیگون بیضوی، $M: \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$

روی $\mathbf{E}^۲$ $\mathbf{x}(u, v) = (a\cosh u \cos v,\ b\cosh u \sin v,\ c\sinh u)$

(ج) هذلولیگون بیضوی (دوپارچه)، $M: \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = -۱$

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\sinh u \cos v,\ b\sinh u \sin v,\ c\cosh u)$$

روی $D: u \neq ۰$

۱۱. سهمیگون بیضوی، $M: z = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}$

(الف) نشان دهید که M یك رویه است، و

$$\mathbf{x}(u, v) = (au\cos v,\ bu\sin v,\ u^۲) \qquad u > ۰$$

یك نمایش پارامتری آن است، که فقط یك نقطه از M را حذف می‌کند.
(ب) خمهای پارامتری $\mathbf{x}$ را به‌طور کلی مشخص کنید، و به‌ازای $a = ۱$ و $b = ۲$ رویه را با ترسیم برخی از خمهای پارامتری مجسم کنید.

۱۲. سهمیگون هذلولوی، $M: z = \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}$ مفروض است.

(الف) نشان دهید، $\mathbf{x}: \mathbf{E}^۲ \to \mathbf{E}^۳$ که در آن

$$\mathbf{x}(u, v) = (a(u+v),\ b(u-v),\ ۴uv)$$

یك قطعه مختصاتی خاص است، که M را می‌پوشاند.
(ب) با نوشتن $\mathbf{x}$ به‌صورت رویهٔ خطکشی به‌دو طریق مختلف، نشان دهید که M رویهٔ خطکشی مضاعف است.
(ج) به‌ازای $a = ۱$ و $b = ۴$ رویه را با ترسیم خمهای پارامتری مجسم کنید.

۱۳. گیریم M رویه‌ای است دورانی، که از دوران خم

$$t \longrightarrow (g(t), h(t), ۰) \qquad h > ۰$$

پیرامون محور x حاصل می‌شود. ثابت کنید که

(الف) اگر g' هیچ‌گاه صفر نشود، M دارای نمایش پارامتری زیر است

$$\mathbf{x}(u, v) = (u,\ f(u)\cos v,\ f(u)\sin v)$$

(ب) اگر h' هیچ‌گاه صفر نشود، M دارای نمایش پارامتری زیر است

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u),\ u\cos v,\ u\sin v)$$

۳. توابع دیفرانسیلپذیر و بردارهای مماس

اکنون به‌شرح حساب دیفرانسیل روی یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ می‌پردازیم. فضای $\mathbf{E}^3$ را به‌تدریج از بحث خارج می‌کنیم، زیرا هدف اصلی، حساب دیفرانسیل برای خود رویهٔ M است. به‌طورکلی همان ترتیب مباحث فصل اول را پیروی می‌کنیم، و فقط تغییرات لازم برای تطبیق حساب دیفرانسیل $\mathbf{E}^2$ بارویهٔ M را انجام خواهیم داد.

گیریم f تابعی با مقدار حقیقی باشد، که روی رویهٔ M تعریف شده است. اگر $\mathbf{x} : D \to M$ یك قطعه مختصاتی در M باشد، در این‌صورت تابع مرکب $f(\mathbf{x})$ را عبارت مختصاتی متناظر به f می‌نامند و آن یك تابع با مقدارحقیقی‌معمولی $(u,v) \to f(\mathbf{x}(u,v))$ می‌باشد. f را هنگامی دیفرانسیلپذیر نامند که همهٔ عبارتهای مختصاتی آن به‌مفهوم اقلیدسی معمولی دیفرانسیلپذیر باشد (تعریف ۳.۱ فصل اول).

به‌ازای هرتابع $F : \mathbf{E}^n \to M$ هرقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M یك عبارت مختصاتی $\mathbf{x}^{-1}(F)$ متناظر به F به‌دست می‌دهد. بدیهی است که این تابع مرکب فقط روی مجموعهٔ $\mathcal{O}$، متشکل ازهمهٔ نقاط $\mathbf{p}$ متعلق به $\mathbf{E}^n$ به‌طوری‌که $F(\mathbf{p})$ متعلق به $\mathbf{x}(D)$ باشد، معین‌است. همچنین تابع F را دیفرانسیلپذیرگوییم اگر همهٔ عبارتهای مختصاتی آن به‌مفهوم اقلیدسی معمولی دیفرانسیلپذیر باشند. (باید توجه داشت که این‌شرط مستلزم آن است که $\mathcal{O}$ مجموعه‌ای باز از $\mathbf{E}^n$ باشد، تا دیفرانسیلپذیری $\mathbf{x}^{-1}(F) : \mathcal{O} \to \mathbf{E}^2$، چنان‌که در بند ۷ فصل اول بیان شد، تأمین گردد.)

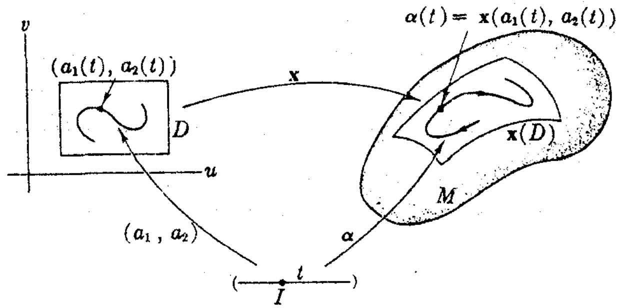
درحالت خاص‌یك خم $\alpha : I \to M$ در رویهٔ M، مانند پیش، تابعی دیفرانسیلپذیر از یك فاصلهٔ باز I در M خواهد بود.

برای اینکه نشان دهیم این تعریف درعمل‌چگونه مورد استفاده قرارمی‌گیرد، حالت خاص مهمی را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ لم. اگر $\alpha : I \to M$ خمی باشد، که مسیر آن درنگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ ازیك قطعهٔ مختصاتی $\mathbf{x}$ واقع باشد، در این‌صورت توابع دیفرانسیلپذیر یکتای a_1 و a_2 روی I را می‌توان چنان تعیین کرد که به‌ازای هر t داشته باشیم

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(a_1(t),\ a_2(t))$$

و یا با قرارداد تابعی $\alpha = \mathbf{x}(a_1,\ a_2)$ (شکل ۲۴.۴).



شکل۴-۲۴

برهان. بنا بر تعریف، عبارت مختصاتی $\mathbf{x}^{-1}\alpha : I \to D$ دیفرانسیلپذیر است، زیرا خمی است در $\mathbf{E}^2$، که مسیرش در D، حوزهٔ $\mathbf{x}$، واقع می‌باشد. اگر a_1 و a_2 توابع مختصاتی اقلیدسی $\mathbf{x}^{-1}\alpha$ باشند، در این‌صورت

$$\alpha = \mathbf{x}\mathbf{x}^{-1}\alpha = \mathbf{x}(a_1, a_2)$$

یکتایی این توابع بدان دلیل است که اگر داشته باشیم $\alpha = \mathbf{x}(b_1, b_2)$، در این صورت

$$(a_1, a_2) = \mathbf{x}^{-1}\alpha = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{x}(b_1, b_2) = (b_1, b_2) \quad \blacksquare$$

توابع a_1 و a_2 را توابع مختصاتی خم α برحسب قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ می‌نامند. مثلاً خم α در (۳) مثال ۴.۲ فصل اول، درقسمتی از کرهٔ Σ با شعاع ۲ که به‌وسیلهٔ قطعه‌مختصاتی $\mathbf{x}$ مثال۲.۲ پوشیده می‌شود واقع است. توجه شود که حرکت این خم طوری است که در هرنقطه طول وعرض جغرافیایی آن برابر می‌باشد. در واقع توابع مختصاتی آن برحسب $\mathbf{x}$ عبارت‌اند از $a_1(t) = a_2(t) = t$ زیرا بنا برفرمول مربوط به $\mathbf{x}$ داریم

$$\mathbf{x}(a_1(t), a_2(t)) = \mathbf{x}(t, t) = 2(\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t) = \alpha(t)$$

به‌ازای قطعه مختصاتی دلخواه $\mathbf{x} : D \to M$ طبیعی است که می‌توان حوزهٔ D را به‌عنوان نقشه‌ای از ناحیهٔ $\mathbf{x}(D)$ در M درنظر گرفت. توابع $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}^{-1}$ تناظری یك به‌یك بین اشیاء متعلق به $\mathbf{x}(D)$ و اشیاء متعلق به D برقرار می‌کنند. اگر خم α در $\mathbf{x}(D)$ نمایشگر مسیر یك کشتی باشد، خم مختصاتی (a_1, a_2) موقعیت آن را روی نقشهٔ D ترسیم می‌نماید.

از اثبات قضیهٔ زیر که مبتنی برشیوه‌های آنالیز پیشرفته است صرفنظر می‌کنیم.

۳.۲ قضیه. گیریم M رویه‌ای در$\mathbf{E}^3$ است. اگر$F : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^3$ نگاشتی(دیفرانسیلپذیر) باشد، به‌طوری که نگارهٔ آن در M واقع باشد، در این‌صورت F به‌عنوان تابعی در M یعنی $F : \mathbf{E}^n \to M$ نیز دیفرانسیلپذیر است (همان گونه که در صفحهٔ ۱۶۲ گفته شد).

این قضیه حساب دیفرانسیل روی M را به‌حساب دیفرانسیل در $\mathbf{E}^3$ پیوند می‌دهد. مثلاً این نتیجهٔ «بدیهی» از آن به‌دست می‌آید، که هرخم از $\mathbf{E}^3$ که در M واقع باشد، یك خم از M است.

چون یك قطعه مختصاتی تابعی است دیفرانسیلپذیر از (یك مجموعهٔ باز) $\mathbf{E}^2$ در $\mathbf{E}^3$، بنابراین هرقطعه مختصاتی تابع دیفرانسیلپذیری در M می‌باشد، وعبارتهای مختصاتی آن همه دیفرانسیلپذیرند، و در نتیجه قطعه‌های مختصاتی به‌طور هموار همپوش‌اند.

۳.۳ فرع. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ قطعه‌های مختصاتی در یك رویهٔ M از $\mathbf{E}^3$، با نگاره‌های همپوش باشند، آنگاه توابع مرکب $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}$ نگاشتهایی (دیفرانسیلپذیر) روی مجموعه‌های باز $\mathbf{E}^2$ می‌باشند.

(مثلاً تابع $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}$ فقط در نقاطی مانند (u, v) از D معین است، که به‌ازای آنها $\mathbf{x}(u, v)$ در نگارهٔ $\mathbf{y}$ یعنی $\mathbf{y}(E)$ واقع باشد (شکل ۲۵.۴)).

با استدلالی مشابه به استدلال لم ۱.۳ فرع ۳.۳ را می‌توان چنین نوشت.

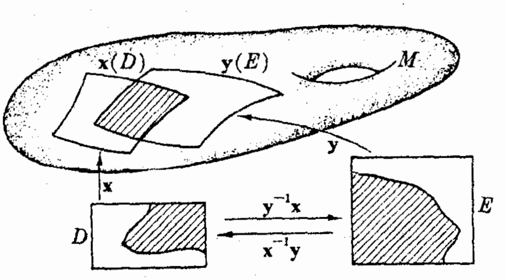
۴.۳ فرع. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ قطعه‌هـای مختصاتی همپوش در M باشند، در این‌صورت توابع دیفرانسیلپذیر یکتای $\bar{u}$ و $\bar{v}$ را می‌توان طوری تعیین کرد که

$$\mathbf{y}(u, v)=\mathbf{x}(\bar{u}(u, v),\ \bar{v}(u, v))$$

به‌ازای همهٔ مقادیر (u, v) متعلق به‌حوزهٔ $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$. باعلامت تابعی: $\mathbf{y}=\mathbf{x}(\bar{u}, \bar{v})$.

طبعاً با معادلات مشابهی $\mathbf{x}$ برحسب $\mathbf{y}$ نیز بیان می‌گردد.

فرع ۳.۳ اثبات دیفرانسیلپذیری را آسان مـی‌کند. مثلاً اگر f تابعی بـا مقدار حقیقی‌روی M باشد، به‌جای آنکه همهٔ عبارتهای مختصاتی $f(\mathbf{x})$ از لحاظ دیفرانسیلپذیری اقلیدسی بررسی شوند، کافی است این مطلب را فقط به‌ازای چندقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ که M را بپوشانند بررسی کرد (واغلب یك قطعه مختصاتی کفایت می‌کند). اثبات به‌آسانی از بررسی حوزه‌های‌توابع مرکب نتیجه می‌گردد: به‌ازای قطعه مختصاتی دلخواه $\mathbf{y}$ اگر $f\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ دیفرانسیلپذیر باشند، $f\mathbf{x}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ نیز دیفرانسیلپذیر است. ایـن تابع معمولاً $f\mathbf{y}$



شکل ۲۵.۴

نیست، زیرا حوزهٔ آن کوچکتراست. اما چون برای پوشاندن M به‌قدرکافی $\mathbf{x}$ وجود دارد، این توابع همهٔ $f\mathbf{y}$ را تشکیل می‌دهند، و بدین ترتیب دیفرانسیلپذیری آن اثبات می‌گردد.

مفهوم بردار مماس بر رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ کاملاً روشن است. برای این مفهوم می‌توان تعریفی مبتنی بر این تصور، که اگر خمی بر M واقع باشد، همهٔ بردارهای سرعت آن باید بر M مماس باشند، بیان کرد.

۵.۳ تعریف. گیریم $\mathbf{p}$ نقطه‌ای از رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ باشد، بردار مماس $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ هنگامی بر M در $\mathbf{p}$ مماس نامیده می‌شود، که $\mathbf{v}$ بردار سرعت خمی در M باشد (شکل ۲۶.۴).

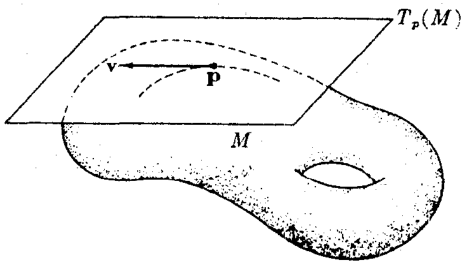
مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس بر M در $\mathbf{p}$ صفحهٔ مماس M در $\mathbf{p}$ نامیده می‌شود، و با $T_p(M)$ نشان داده می‌شود. لم زیر نشان می‌دهد که درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M، صفحهٔ مماس $T_p(M)$ یك زیرفضای برداری دوبعدی از فضای مماس $T_p(\mathbf{E}^3)$ می‌باشد.

۶.۳ لم. گیریم $\mathbf{p}$ نقطه‌ای از رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ باشد، و $\mathbf{x}$ قطعه مختصاتی در M به‌طوری که $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$. شرط لازم وکافی برای آنکه بردار مماس $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ بر رویهٔ M مماس باشد، آن است که بتوان $\mathbf{v}$ را به‌صورت ترکیب خطی از $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ و $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ نوشت.

چون سرعتهای جزئی همواره دارای استقلال خطی‌اند، بنابراین یك پایه برای صفحهٔ مماس بر M درهر نقطهٔ $\mathbf{x}(D)$ تشکیل می‌دهند.

برهان. ازآنجاکه خمهای پارامتر $\mathbf{x}$ روی رویهٔ M واقع‌اند، سرعتهای جزئی آنها نیز بر M در $\mathbf{p}$ مماس‌اند.

نخست گیریم $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ مماس باشد، بنابراین یك خم α بر M وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha(0) = \mathbf{p}$ و $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ وبنابر لم ۱.۳، خم α را می‌توان به‌صورت $\alpha = \mathbf{x}(a_1, a_2)$ نوشت. بنابر دستور مشتق توابع مرکب داریم



شکل ۲۶.۴

$$\alpha' = \mathbf{x}_u(a_1, a_2)\frac{da_1}{dt} + \mathbf{x}_v(a_1, a_2)\frac{da_2}{dt}$$

اما چون $\alpha(0) = \mathbf{p} = \mathbf{x}(u_0, v_0)$، خواهیم داشت $a_1(0) = u_0$, $a_2(0) = v_0$. از آنجا با محاسبه در $t = 0$ به‌دست می‌آید

$$\mathbf{v} = \alpha'(0) = \frac{da_1}{dt}(0)\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \frac{da_2}{dt}(0)\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

برعکس اگر بردار مماس بر $\mathbf{E}^3$ به‌صورت

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + c_2\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

نوشته شود، دراین‌صورت بامحاسبه‌ای مانند بالا ثابت می‌شودکه $\mathbf{v}$ بردارسرعت در $t = 0$ مربوط به خم

$$t \to \mathbf{x}(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2)$$

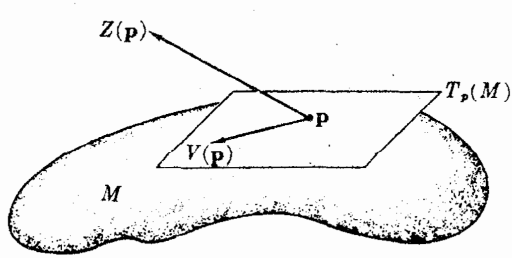
است، و بنابراین $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ مماس می‌باشد. ∎

یك استنتاج معقول براساس خواص کلی مشتقها این است که صفحهٔ مماس $T_p(M)$ تقریب خطی رویهٔ M درمجاورت $\mathbf{p}$ است.

۷.۳. تعریف. میدان برداری اقلیدسی Z روی رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ تابعی است که به‌هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M بردار مماس $Z(\mathbf{p})$ بر $\mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ را تخصیص می‌دهد.

میدان برداری اقلیدسی V که هر بردار $V(\mathbf{p})$ آن بر M در $\mathbf{p}$ مماس باشد، میدان برداری مماس بر M نامیده می‌شود (شکل ۲۷.۴). اغلب این میدانهای برداری روی تمام M معین نیستند، وفقط روی ناحیه‌ای از آن تعریف شده‌اند، و مانند معمول همواره آنهارا دیفرانسیلپذیر فرض می‌کنیم (تمرین ۱۲).

اگر بردار اقلیدسی $\mathbf{z}$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M بر M قائم باشد، برصفحهٔ مماس $T_p(M)$ عموداست، یعنی بر هربردار مماس بر M در $\mathbf{p}$ عمود می‌باشد. یك‌میدان برداری اقلیدسی



شکل ۲۷.۴

Z که هر بردار $Z(\mathbf{p})$ آن بر M قائم باشد میدان برداری قائم بر M نامیده می‌شود.

چون $T_p(M)$ یك‌زیرفضای دوبعدی از $T_p(\mathbf{E}^3)$ است، در $\mathbf{p}$ فقط یك راستای قائم بر M وجود دارد، زیرا همهٔ بردارهای قائم $\mathbf{z}$ در $\mathbf{p}$ بریك خط می‌باشند. بنابراین اگر $\mathbf{z}$ صفر نباشد $T_p(M)$ درست از بردارهای متعلق به $T_p(\mathbf{E}^3)$ که بر $\mathbf{z}$ عمودند تشکیل می‌گردد.

بررسی میدانهای برداری قائم و مماس روی رویه‌ای که به‌صورت ضمنی داده شده است، نیز بسیار آسان است.

۸.۳. لم. اگر $M: g = c$ رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ باشد، دراین‌صورت میدان برداری گرادیان $\nabla g = \sum (\partial g/\partial x_i) U_i$ (که فقط روی نقاط متعلق به M درنظر گرفته می‌شود) یك میدان برداری قائم روی تمام رویهٔ M می‌باشد.

برهان. گرادیان روی M همواره مخالف صفراست، زیرا بنابرقضیهٔ ۴.۱ مشتقهای جزئی $\partial g/\partial x_i$ نمی‌توانند همزمان دریك‌نقطه از M صفر شوند.

بایدنشان دهیم که به‌ازای هربردار مماس $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ داریم $(\nabla g)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = 0$. برای این منظور توجه شود که اگر α خمی روی M باشد، دراین صورت $g(\alpha) = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ دارای مقدار ثابت c است، و بنابر دستور مشتق تابع مرکب داریم

$$\sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(\alpha)\frac{d\alpha_i}{dt} = 0$$

اکنون α را طوری انتخاب می‌کنیم که سرعت آغازی آن درنقطهٔ $\mathbf{p} = \alpha(0)$ معین باشد

$$\alpha'(0) = \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

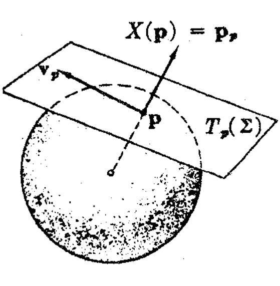
دراین‌صورت

$$0 = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(\alpha(0))\frac{d\alpha_i}{dt}(0) = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p}) v_i = (\nabla g)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \blacksquare$$

۹.۳. مثال. میدانهای برداری روی کرهٔ $\Sigma: g = \sum x_i^2 = r^2$. لم بالا نشان می‌دهد که

$$X = \frac{1}{2}\nabla g = \sum x_i U_i$$

یك‌میدان برداری‌قائم بر Σ است (شکل ۲۸.۴). این نکته از لحاظ هندسی بدیهی است؛ زیرا $X(\mathbf{p}) = \sum p_i U_i(\mathbf{p})$ همان بردار $\mathbf{p}$ با نقطهٔ آغازی $\mathbf{p}$ می‌باشد. شرط لازم وکافی برای آنکه



شکل ۲۸.۴

$\mathbf{v}_p$ مماس بر Σ باشد آن است که حاصلضرب داخلی $\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{p}_p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ صفر باشد. همچنین میدان برداری V روی Σ یك میدان برداری مماس است، اگر و فقط اگر $V \cdot X = 0$، مثلاً $V(\mathbf{p}) = (-p_2, p_1, 0)$ یك میدان برداری مماس روی Σ را تعریف می‌کند، که متوجه به «مشرق» است، و درقطبهای شمال وجنوب $(0, 0, \pm r)$ صفر می‌شود.

باید تأکید کرد که فقط میدانهای برداری مماس روی M به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال خود M تعلق دارند، زیرا اساساً از خمهای واقع بر M به‌دست می‌آیند (تعریف ۳.۵). اما میدانهای برداری قائم قطعاً چنین نیستند، و چنانکه درفصول آینده خواهیم‌دید، میدانهای برداری قائم، برای بررسی M ازلحاظ ناظری که در $\mathbf{E}^3$ قرار دارد بسیار مفیدند.

بالاخره مفهوم مشتق امتدادی را برای رویه‌ها تعمیم می‌دهیم. درتعریف ۱.۳ فصل اول، از خطوط راست در $\mathbf{E}^3$ استفاده شد، از این‌رو باید از دستور کلیتری که مبتنی بر لم ۶.۴ فصل اول است استفاده کنیم.

۱۰.۳. تعریف. گیریم $\mathbf{v}$ یك بردار مماس بر M در $\mathbf{p}$، و f تابعی دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی M باشد. $\mathbf{v}[f]$، مشتق f نسبت به $\mathbf{v}$ مقدارمشترك $(d/dt)(f\alpha)(0)$ به‌ازای همهٔ خمهای α بر M است که دارای سرعت آغازی $\mathbf{v}$ می‌باشند.

مشتقهای امتدادی روی یك رویه درست دارای همان خواص خطی ولایبنیتزی حالت اقلیدسی (قضیهٔ ۳.۳، فصل اول) می‌باشند.

تمرینات

۱- گیریم $\mathbf{x}$ قطعه مختصاتی جغرافیایی روی کرهٔ Σ (مثال ۲.۲) باشد. مطلوب است تعیین عبارت مختصاتی $f(\mathbf{x})$ به‌ازای توابع زیر روی Σ:

(الف) $f(\mathbf{p}) = p_1^2 + p_2^2$ (ب) $f(\mathbf{p}) = (p_1 - p_2)^2 + p_3^2$

۲. گیریم $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری چنبرهٔ مثال ۶.۲ باشد.
(الف) مختصات اقلیدسی α_1، α_2، α_3 ازخم $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, t)$ را بیابید.
(ب) نشان دهید که α متناوب است، و دورهٔ تناوب آن‌را بیابید (صفحهٔ ۲۶ راببینید).

۳. (الف) فرع ۴.۳ را ثابت کنید.
(ب) دستورهای «مشتق مرکب»

$$\mathbf{y}_u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\mathbf{x}_v, \quad \mathbf{y}_v = \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\mathbf{x}_u + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\mathbf{x}_v$$

راکه درآنها $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ روی $(\bar{u}, \bar{v})$ محاسبه شده‌اند، اثبات کنید.
(ج) ازآنجا نتیجه بگیرید که $\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v = J\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ که درآن J دترمینان ژاکوبی

نگاشت $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}=(\bar{u},\bar{v}):D\to\mathbf{E}^2$ است.

۴. گیریم $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی در M باشد.
(الف) اگر $\mathbf{x}_*$ نگاشت مشتق $\mathbf{x}$ (فصل ۱ بند ۲.۷). باشد، نشان‌دهید که

$$\mathbf{x}_*(U_1)=\mathbf{x}_u\,,\qquad \mathbf{x}_*(U_2)=\mathbf{x}_v$$

U_1 و U_2 میدان سه‌وجهی طبیعی در $\mathbf{E}^2$ است.
(ب) اگر f تابع دیفرانسیلپذیری روی M باشد، ثابت‌کنید که

$$\mathbf{x}_u[f]=\frac{\partial}{\partial u}(f(\mathbf{x})),\qquad \mathbf{x}_v[f]=\frac{\partial}{\partial v}(f(\mathbf{x}))$$

۵. ثابت کنید که:
(الف) شرط لازم وکافی برای آنکه $\mathbf{v}$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ بر $M:z=f(x,y)$ مماس باشد آن است‌که

$$v_3=\frac{\partial f}{\partial x}(p_1,p_2)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(p_1,p_2)v_2$$

(ب) اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی روی رویهٔ دلخواه M باشد، آنگاه $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{x}(u,v)$ مماس است، اگر وفقط اگر،

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)=0$$

۶. گیریم $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ قطعه‌های مختصاتی روی کرهٔ یکهٔ Σ باشند که روی قرص یکهٔ $D:u^2+v^2<1$ به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\mathbf{x}(u,v)=(u,v,f(u,v)),\qquad \mathbf{y}(u,v)=(v,f(u,v),u)$$

که در آن $f=\sqrt{1-u^2-v^2}$.
(الف) برطرحی از Σ نگاره‌های $\mathbf{x}(D)$ و $\mathbf{y}(D)$ وناحیهٔ همپوش آنهارا مجسم کنید.
(ب) درچه نقاطی از D، $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}$ معین است؟ فرمول این تابع را بیابید.
(ج) درچه نقاطی از D ، $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ معین است؟ فرمول این تابع را بیابید.

۷. روی $M:z=xy$ یك میدان برداری قائم بیابید، که همواره مخالف صفر باشد، و دومیدان برداری مماس مستقل خطی درهرنقطه پیدا کنید.

۸. گیریم C مخروط مستدیر قائم

$$\mathbf{x}(u,v)=v(\cos u,\sin u,1)$$

و α خم $\alpha(t)=\mathbf{x}(\sqrt{2}t,e^t)$ باشد.

(الف) α' را برحسب $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ بیان کنید.
(ب) نشان دهید که درهرنقطه از α سرعت α' نیمساز زاویهٔ بین $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ می‌باشد.
(راهنمایی: تحقیق کنید که $\alpha' \cdot \mathbf{x}_u/\|\mathbf{x}_u\| = \alpha' \cdot \mathbf{x}_v/\|\mathbf{x}_v\|$)
(ج) مخروط C و خم α را روی آن مجسم کنید.

۹. اگر $\mathbf{z}$ یك بردار غیرصفر قائم بر M در $\mathbf{p}$ باشد، و $\bar{T}_p(M)$ صفحهٔ مار بر $\mathbf{p}$ و عمود بر $\mathbf{z}$ را نشان دهد (صفحهٔ ۷۵ را ببینید)، ثابت کنید:
(الف) اگر به‌جای هر بردار $\mathbf{v}_p$ مماس بر M در $\mathbf{p}$، بردار $\mathbf{p}+\mathbf{v}$ را قرار دهیم، دراین صورت $T_p(M)$ به $\bar{T}_p(M)$ بدل می‌گردد (بدینسان $\bar{T}_p(M)$ به‌طور واقعی $T_p(M)$ را در $\mathbf{E}^3$ نمایش می‌دهد.)
(ب) اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی در M باشد، دراین‌صورت $\bar{T}_{\mathbf{x}(u,v)}(M)$ ازهمهٔ نقاط $\mathbf{r}$ متعلق به $\mathbf{E}^3$ تشکیل می‌گردد که به‌ازای آنها

$$(\mathbf{r}-\mathbf{x}(u,v)) \cdot \mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) = 0$$

(ج) اگر M به‌صورت ضمنی با $g=c$ معین شده باشد، دراین‌صورت $\bar{T}_p(M)$ از همهٔ نقاط $\mathbf{r}$ متعلق به $\mathbf{E}^3$ تشکیل می‌گردد که به‌ازای آنها $(\mathbf{r}-\mathbf{p}) \cdot (\nabla g)(\mathbf{p}) = 0$.

۱۰. در هریك از حالتهای زیر معادله‌ای به‌صورت $ax+by+cz=d$ برای صفحهٔ $\bar{T}_p(M)$ بیابید.
(الف) $\mathbf{p}=(0,0,0)$ و M کرهٔ

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

(ب) $\mathbf{p}=(1,-2,3)$ و M بیضیگون

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{18}=1$$

(ج) $\mathbf{p}=\mathbf{x}(2,\pi/4)$ که در آن M هلیکوئید با نمایش پارامتری زیر است

$$\mathbf{x}(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ 2v)$$

۱۱. (ادامهٔ تمرین ۲)
(الف) اگر m و n دو عدد صحیح باشند که ب.م.م آنها ۱ باشد، ثابت کنید که $\alpha(t)=\mathbf{x}(mt,nt)$ یك خم بستهٔ ساده روی چنبره است و دورهٔ تناوب آن‌را بیابید[1].

---

۱. یعنی، نشان‌دهید که $\alpha(t')=\alpha(t)$، اگر، وفقط اگر، $t'-t$ مضربی از دورهٔ تناوب p باشد. به‌بیان اجمالی، این بدان‌معنی است که راه α به‌جای اینکه مثلاً به‌شکل 8 باشد، به‌شکل O می‌باشد.

(ب) اگر q یك عدد گنگ باشد، نشان دهید که خم $\alpha: \mathbf{R} \to T$ بەطوری که $\alpha(t) = \mathbf{x}(t,\ qt)$، یك به یك است.

این خم را خط چرخش روی چنبرهٔ T می‌نامند و در T متراکم است، یعنی بەازای هر عدد $\varepsilon > 0$، α بەهرنقطه از T بەاندازهٔ ε نزدیك می‌گردد.

۱۲. یك میدان برداری اقلیدسی $Z = \sum z_i U_i$ روی M دیفرانسیلپذیر است اگر توابع مختصاتی آن z_1، z_2، z_3 (روی M) دیفرانسیلپذیر باشند. گیریم V یك میدان برداری مماس است، ثابت کنید که

(الف) بەازای هرقطعه مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ می‌توان V را بەصورت زیر نوشت

$$V(\mathbf{x}(u,\ v)) = f(u,\ v)\mathbf{x}_u(u,\ v) + g(u,\ v)\mathbf{x}_v(u,\ v)$$

(ب) برای آنکه V دیفرانسیلپذیر باشد لازم و کافی است که f و g (روی D) دیفرانسیلپذیر باشند.

تمرینات زیر مستلزم اطلاعاتی از توپولوژی است و دربارهٔ مجموعەهای باز در رویهٔ M از $\mathbf{E}^3$، یعنی مجموعەهایی مانند $\mathcal{U}$ در M که شامل یك همسایگی در M برای هریك ازنقاط خود باشند بحث می‌کند.

۱۳. ثابت کنیدکه اگر $\mathbf{y}: \mathbf{E} \to M$ یك قطعه مختصاتی خاص باشد، دراین صورت $\mathbf{y}$ هرمجموعهٔ باز از $\mathbf{E}$ را بەمجموعەای باز از M بدل می‌کند. نشان دهید که اگر $\mathbf{x}: D \to M$ یك قطعه‌مختصاتی دلخواه باشد دراین‌صورت $\mathbf{x}(D)$ در M مجموعەای باز است. (راهنمایی: برای اثبات حکم اخیر از فرع ۳.۳ استفاده کنید.)

۱۴. نشان دهید که هر قطعه مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ در رویهٔ M از $\mathbf{E}^3$ قطعەای خاص است. (راهنمایی: از تمرین ۱۳ استفاده کنید. توجه شود که $(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y})\mathbf{y}^{-1}$ پیوسته بوده و با $\mathbf{x}^{-1}$ روی یك مجموعهٔ باز از $\mathbf{x}(D)$ سازگار است.)

۱۵. اگر $\mathcal{U}$ زیرمجموعەای از رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ باشد، ثابت کنیدکه $\mathcal{U}$ خود نیز رویەای در $\mathbf{E}^3$ است اگر، وفقط اگر، $\mathcal{U}$ زیرمجموعەای باز از M باشد.

۴. فرمهای دیفرانسیلی روی یك رویه

درفصل اول دربارهٔ فرمهای دیفرانسیلی روی $\mathbf{E}^3$، تاحدی که برای معادلات ساختاری کارتان لازم بود، بررسی کردیم (قضیهٔ ۳.۸ فصل ۲). درسه بند آینده به تفصیل دربارهٔ فرمهای واقع روی یك رویه بحث خواهد شد.

فرمها درست همان چیزهایی هستند که برای بیان هندسهٔ رویەها بەآنها احتیاج داریم (فصلهای ۶ و ۷). البته این، فقط یکی از فواید آنهاست. رویەها و فضاهای اقلیدسی حالتهای خاصی از مفهوم کلی خمینه هستند (بند ۸). هرخمینه دارای یك حساب

دیفرانسیل و انتگرال است، که برحسب فرمها بیان می‌شود، و تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی روی خط حقیقی می‌باشد. بدین‌ترتیب ملاحظه می‌شود که فرمها درتمام ریاضیات و کاربردهای آن، که بـرحساب دیفرانسیل وانتگرال مبتنی هستند دارای نقشی بنیادی می‌باشند. درحالت خاص رویه‌ها، حساب دیفرانسیل و انتگـرال فرمها نسبتاً آسان است و درعین‌حال تصویر خیلی دقیقی از حالت‌کلی را مجسم می‌کند.

مانند آنچه دربارهٔ $\mathbf{E}^3$ گفتیم، یك ۰ ـ فرمی f روی یك رویه عبارت است از یك تابع (دیفرانسیلپذیر) روی M بامقدار حقیقی و ۱ـ فرمی ϕ روی رویـهٔ M تابعی است با مقدار حقیقی روی بردارهای مماس بر M به‌طوری‌که درهـرنقطه خطی باشد (تعریف ۱.۵ فصل اول). درفصل اول، تعـریف دقیقی از ۲ـ فـرمیها داده نشد. دراینجا بـه‌بحث دراین‌باره می‌پردازیم. ۲ـ فرمیها نظایر دوبعدی ۱ـ فرمیهایند: یك ۲ـ فرمی تابعی است با مقدار حقیقی روی زوج بردارهای مماس، نه روی تك بردارهای مماس. (درایـن کتاب، منظور ما از اصطلاح «زوج» همواره آن است‌که نقطهٔ اثر بردارهای مماس یکی است.)

۱.۴. تعریف. یك ۲ـ فرمی η روی رویهٔ M عبارت است از تابعی با مقدار حقیقی روی تمام زوجهای مرتب از بردارهای مماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بر M به‌طوری‌که

(۱) $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ برحسب $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ خطی باشد.

(۲) $\eta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\eta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

ازآنجاکه رویه دوبعدی است همهٔ pـ فـرمیها با $p > 2$ صفرند (بنابـر تعریف) واین‌نکته به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای نظریهٔ فرمهای دیفرانسیلی روی رویه‌ها را ساده می‌کند.

درپایان این بند خواهیم دیدکه تعریف بالا باطرحی کـه درفصل اول بند ۶ بیان کردیم سازگار است.

جمع فرمها مانند معمول به روش نقطه‌ای انجام مـی‌گیرد؛ فقط فـرمهای همدرجه $p = 0, 1, 2$ راباهم جمع می‌کنیم. همان‌طور کـه یك ۱ـ فرمی ϕ را روی یـك میدان برداری V محاسبه می‌کـردیم، دراینجا به محاسبهٔ یـك ۲ـ فرمی η روی یك زوج میدان برداری V و W می‌پردازیم تا تابع حقیقی $\eta(V, W)$ روی رویهٔ M به دست آید. البته همواره فرض می‌کنیم‌که فرمهایی‌که باآنها سروکار داریم دیفرانسیلپذیرند، یعنی میدانهای برداری (دیفرانسیلپذیر) را به توابع دیفرانسیلپذیر بدل می‌کنند.

از دستور تناوبی (۲) درتعریف ۱.۴ به‌آسانی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$

$$\eta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

این دستور نیز نشان می‌دهدکه ۲ـ فرمیها با دترمینانها بستگی دارند.

۲.۴. لم. گیریم η یك ۲ـ فرمی روی رویهٔ M و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بـردارهای مماس (با استقلال خطی) درنقطهٔ M باشند. دراین‌صورت

$$\eta(a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\ c\mathbf{v}+d\mathbf{w})=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\eta(\mathbf{v},\ \mathbf{w})$$

برهان. چون η برحسب متغیر اول خود خطی است، مقدار آن روی زوج بردارهای مماس $a\mathbf{v}+b\mathbf{w}$ و $c\mathbf{v}+d\mathbf{w}$ عبارت است از $a\eta(\mathbf{v},\ c\mathbf{v}+d\mathbf{w})+b\eta(\mathbf{w},\ c\mathbf{v}+d\mathbf{w})$. با استفاده از خطی بودن η برحسب متغیر دوم، طرف اول رابطهٔ بالا چنین نوشته می‌شود

$$ac\,\eta(\mathbf{v},\ \mathbf{v})+ad\,\eta(\mathbf{v},\ \mathbf{w})+bc\,\eta(\mathbf{w},\ \mathbf{v})+bd\,\eta(\mathbf{w},\ \mathbf{w})$$

و با توجه به دستور تناوبی (۲) خواهیم داشت

$$\eta(a\mathbf{v}+b\mathbf{w},\ c\mathbf{v}+d\mathbf{w})=(ad-bc)\,\eta(\mathbf{v},\ \mathbf{w}) \quad \blacksquare$$

بنابراین مقادیر یك ۲- فرمی روی تمام زوجهای بردارهای مماس در یك نقطه به‌وسیلهٔ مقدار آن روی یك زوج مستقل خطی دلخواه کاملاً مشخص می‌گردد. از این نکته درمباحث بعد کراراً استفاده خواهیم کرد.

فرمهای دیفرانسیلی همواره از خواص کلی که درفصل اول برای فرمهای روی $\mathbf{E}^3$ بیان شد (لااقل به‌طور جزئی) برخوردارند. از آن جمله: حاصل‌ضرب گوه‌ای یك p- فرمی دریك q- فرمی، یك $(p+q)$- فرمی خواهد بود. روی رویه‌ها این حاصل همواره صفر است، اگر $p+q>2$. و اگر p یا q صفر باشد، حاصل‌ضرب مزبور درست ضرب معمولی یك فرم دریك تابع است. بنابراین فقط لازم است تعریف را درحالت $p=q=1$ بیان کنیم.

۳.۴. تعریف. اگر ϕ و ψ دو ۱- فرمی روی رویهٔ M باشند، حاصل‌ضرب گوه‌ای آنها $\phi\wedge\psi$، عبارت است از یك ۲- فرمی روی M به‌طوری که به‌ازای هرزوج بردارمماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بر M داشته باشیم

$$(\phi\wedge\psi)(\mathbf{v},\ \mathbf{w})=\phi(\mathbf{v})\psi(\mathbf{w})-\phi(\mathbf{w})\psi(\mathbf{v})$$

باید توجه داشت که $\phi\wedge\psi$ درست یك ۲- فرمی روی M است، زیرا تابعی است بامقدار حقیقی روی همهٔ زوجهای بردارهای مماس و درشرایط تعریف ۱.۴ صدق می‌کند. حاصل‌ضرب گوه‌ای دارای همهٔ خواص جبری معمولی بجزخاصیت تعویض‌پذیری می‌باشد. اگر ξ یك p- فرمی و η یك q- فرمی باشد، آنگاه

$$\xi\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\xi$$

درمورد رویه‌ها، علامت منها فقط درضرب ۱- فرمیها ظاهر می‌شود، بنابراین چنان که درفصل اول نیز دیدیم، داریم $\phi\wedge\psi=-\psi\wedge\phi$.

حساب دیفرانسیل فرمها برمشتق خارجی d مبتنی است. درمورد یك ۰- فرمی (یعنی

تابع) f مشتق خارجی، مانند پیش، عبارت‌است از ۱-فرمی df به‌طوری‌که داشته باشیم $df(\mathbf{v})=\mathbf{v}[f]$. به‌طورکلی مشتق‌خارجی هر p-فرمی یك $(p+1)$-فرمی است. بنابراین درمورد رویه‌ها فقط لازم است مشتق خارجی $d\phi$ یك ۱-فرمی ϕ را تعریف کنیم.

۴.۴. تعریف. گیریم ϕ یك ۱-فرمی روی رویهٔ M باشد. $d\phi$، مشتق خارجی ϕ، عبارت است ازیك ۲-فرمی به‌طوری‌که به‌ازای هر قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M داشته باشیم

$$d\phi(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=\frac{\partial}{\partial u}(\phi(\mathbf{x}_v))-\frac{\partial}{\partial v}(\phi(\mathbf{x}_u))$$

اما این هنوز یك تعریف معتبر نیست ومسألهٔ سازگاری باقی‌است، زیرا آنچه تعریف شد، یك فرم $d_{\mathbf{x}}\phi$ روی نگارهٔ هر یك ازقطعه‌های مختصاتی $\mathbf{x}$ در M است. این است‌که باید ثابت کرد که روی ناحیه‌ای که دو قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ همپوش‌اند، فرمهای $d_{\mathbf{x}}\phi$ و $d_{\mathbf{y}}\phi$ باهم متساوی‌اند وفقط دراین صورت‌از ϕ یك‌فرم $d\phi$ روی M به‌دست خواهد آمد.

۵.۴. لم. اگر ϕ یك ۱-فرمی روی M باشد، دراین صورت به‌ازای هردوقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از M تساوی $d_{\mathbf{x}}\phi=d_{\mathbf{y}}\phi$ روی ناحیهٔ همپوش $\mathbf{x}(D)$ و $\mathbf{y}(D)$ برقرار است.

برهان. چون $\mathbf{y}_u$ و $\mathbf{y}_v$ درهر نقطه دارای استقلال خطی‌اند کافی است، با استفاده از لم ۲.۴، ثابت کنیم که

$$(d_{\mathbf{y}}\phi)(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)=(d_{\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)$$

اکنون قرار می‌دهیم $\mathbf{y}=\mathbf{x}(\bar{u}, \bar{v})$ (مانند فرع ۳.۴) و با استفاده از دستور مشتق توابع مرکب به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_u&=\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\mathbf{x}_u+\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\mathbf{x}_v\\ \mathbf{y}_v&=\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\mathbf{x}_u+\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\mathbf{x}_v\end{aligned}\tag{1}$$

که درآن $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ روی $(\bar{u}, \bar{v})$ محاسبه می‌شوند، وبنابر لم ۲.۴ داریم

$$(d_{\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)=J(d_{\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\tag{2}$$

که درآن J عبارت است از ژاکوبی $(\partial\bar{u}/\partial u)(\partial\bar{v}/\partial v)-(\partial\bar{u}/\partial v)(\partial\bar{v}/\partial u)$. پس با توجه به‌تعریف ۴.۴ روشن است‌که برای اثبات تساوی:

$$(d_{\mathbf{y}}\phi)(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)=(d_{\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)$$

فقط باید تساوی

$$\frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{y}_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\phi \mathbf{y}_u)=J\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\phi \mathbf{x}_v)-\frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\phi \mathbf{x}_u)\right\} \tag{۳}$$

را ثابت کنیم.

برای این منظور کافی است فقط عملیات مربوط به $(\partial/\partial u)(\phi \mathbf{y}_v)$ را انجام دهیم، زیرا با تعویض u و v با یکدیگر جملهٔ $(\partial/\partial v)(\phi \mathbf{y}_u)$ به‌دست می‌آید. چون در (۳) تفاضل این دو عبارت به‌کار رفته است می‌توانیم از جمله‌هایی که پس از این تعویض حذف می‌شوند صرفنظر کنیم.

ϕ را برمعادلهٔ دوم (۱) اثر می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\phi(\mathbf{y}_v)=\phi(\mathbf{x}_u)\frac{\partial \bar{u}}{\partial v}+\phi(\mathbf{x}_v)\frac{\partial \bar{v}}{\partial v}$$

از آنجا

$$\frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{y}_v)=\frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{x}_u)\frac{\partial \bar{u}}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{x}_v)\frac{\partial \bar{v}}{\partial v}+\cdots \tag{۴}$$

که با توجه به‌توضیحی که گذشت در اینجا از دوجملهٔ متقارن صرفنظر شده است. با ادامهٔ عملیات داریم

$$\frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{y}_v)=\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\phi \mathbf{x}_u)\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}+\cdots\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial v}+\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\phi \mathbf{x}_v)\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}+\cdots\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \tag{۵}$$

در (۵) u و v (وهمچنین $\bar{u}$ و $\bar{v}$) را بایکدیگر تعویض کرده و نتیجه را ازهم تفریق می‌کنیم، حاصل دقیقاً همان معادلهٔ (۳) است. ▮

در اهمیت مشتق خارجی هرچه بگوییم، کم گفته‌ایم. درفصل اول دیدیم که مشتق خارجی تعمیم همان مفهوم مشتق توابع است و واجد سه خاصیت اساسی عملیات مشتق که در آنالیز برداری کلاسیك مطرح است می‌باشد (تمرین ۸ بند ۶، فصل اول). درفصل دوم دیدیم که مشتق خارجی برای معادلات ساختاری کارتان (قضیهٔ ۳.۸) دارای نقش بنیادی است. شاید روشنترین بیان برای تعبیر آن در فرمول استوکس (۵.۶) آمده باشد که می‌توان عملاً از آن به‌تعریف مشتق خارجی ۱-فرمی رسید.

در روی یك رویه، مشتق خارجی حاصلضرب گوه‌ای دارای همان خواص خطی ولایبنیتزی $\mathbf{E}^3$ (قضیهٔ ۴.۶ فصل اول) می‌باشد (تمرین ۳ را ببینید). برای محاسبات عملی، این خواص از تعریف مستقیم مفیدترند، درحالت اقلیدسی، بحث صفحهٔ ۳۱ را ببینید. مثالهای این **شیوه‌ها** در تمرینهای بعدی خواهند آمد.

خصوصیت برجستهٔ این مفهوم مشتق آن است که مشتق خارجی دوم وجود ندارد: در مورد فرمها هرگاه مشتق خارجی دوبار اعمال شود نتیجه همواره صفراست. دربارهٔ

رویه‌ها باید این مطلب را فقط برای ۰-فرمیها اثبات کرد، زیرا حتی دربارهٔ ۱-فرمیها $d(d\phi)$ یك ۳-فرمی است که خود به‌خود صفر است.

۶.۴. قضیه. اگر f تابعی بامقدار حقیقی (دیفرانسیلپذیر) روی M باشد، دراین صورت $d(df)=0$.

برهان. گیریم $df=\psi$، باید نشان دهیم که $d\psi=0$. بنا بر لم ۲.۴ کافی است، به‌ازای قطعهٔ مختصاتی $\mathbf{x}$ در M نشان دهیم که $(d\psi)(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=0$. اما با توجه به‌تمرین ۴ بند ۳ داریم

$$\psi(\mathbf{x}_u)=df(\mathbf{x}_u)=\mathbf{x}_u[f]=\frac{\partial}{\partial u}(f\mathbf{x})$$

و به‌طریق مشابه

$$\psi(\mathbf{x}_v)=\frac{\partial}{\partial v}(f\mathbf{x})$$

از آنجا

$$d\psi(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=\frac{\partial}{\partial u}(\psi\mathbf{x}_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\psi\mathbf{x}_u)=\frac{\partial^2(f\mathbf{x})}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2(f\mathbf{x})}{\partial v\,\partial u}=0 \quad \blacksquare$$

بسیاری از محاسبات و براهین به‌مسألهٔ تساوی دوفرم منجر می‌شود. چنان‌که دیدیم برای این کار لازم نیست که تساوی فرمها روی تمام بردارهای مماس تحقیق شود. به‌ویژه، اگر $\mathbf{x}$ یك قطعهٔ مختصاتی باشد، دراین صورت

(۱) به‌ازای ۱-فرمیهای روی $\mathbf{x}(D)$ برای آنکه تساوی $\psi=\phi$ برقرار باشد، لازم و کافی است که $\phi(\mathbf{x}_u)=\psi(\mathbf{x}_u)$ و $\phi(\mathbf{x}_v)=\psi(\mathbf{x}_v)$.

(۲) به‌ازای ۲-فرمیهای روی $\mathbf{x}(D)$ برای آنکه $\nu=\mu$، لازم وکافی است که $\mu(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=\nu(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$.

(برای اثبات این ملاك بردارهای مماس دلخواه را به‌صورت ترکیب خطی $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ بیان کنید.) به‌طور کلیترمی‌توان $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ را دومیدان برداری که درهرنقطه دارای استقلال خطی‌هستند انتخاب کرد.

اکنون نشان می‌دهیم، نتایجی که دراین بند اثبات شد، بادستورهای فصل اول بند ۶ سازگارند.

۷.۴. مثال. فرمهای دیفرانسیلی روی صفحهٔ $\mathbf{E}^2$. گیریم $u_1=u$ و $u_2=v$ توابع مختصاتی طبیعی و U_1 و U_2 میدان سه وجهی طبیعی روی $\mathbf{E}^2$ باشند. حساب دیفرانسیل فرمها روی $\mathbf{E}^2$ به‌صورت زیر برحسب u_1 و u_2 بیان می‌شود:

اگر f یك تابع، ϕ یك ۱-فرمی و η یك ۲-فرمی باشد، دراین صورت

(۱) $\phi = f_1\, du_1 + f_2\, du_2$ که در آن $f_i = \phi(U_i)$

(۲) $\eta = g\, du_1\, du_2$ که در آن $g = \eta(U_1, U_2)$

(۳) به‌ازای $\psi = g_1\, du_1 + g_2\, du_2$ و ϕ مانند بالا

$$\phi \wedge \psi = (f_1 g_2 - f_2 g_1) du_1\, du_2$$

(۴)
$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2$$

(۵)
$$d\phi = \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right) du_1\, du_2$$
(ϕ مانند بالا)

برای اثبات این فرمولها، تمرین ۴ را ببینید.

تعاریف و عبارتهای مختصاتی مشابه را می‌توان برای هر فضای اقلیدسی بیان کرد. در حالت خط حقیقی $\mathbf{E}^1$، میدان سه وجهی طبیعی (تعریف ۴.۲ فصل اول) به‌صورت یك میدان برداری تنهای یکهٔ U_1 درمی‌آید. که به‌ازای آن $U_1[f] = df/dt$. همهٔ p-فرمیها به‌ازای $p > 1$ صفرند، و اگر ϕ یك ۱-فرمی باشد، در این صورت $\phi = \phi(U_1)\, dt$.

در تمرینات زیر مثالهایی از فرمها خواهد آمد، اما در فصلهای ۶ و ۷ که تعبیر هندسی خواص آنها را می‌بینیم، مثالهای گوناگونی خواهیم داشت.

تمرینات

۱. اگر ϕ و ψ دو ۱-فرمی روی یك رویه باشند، ثابت کنید که $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$ و نتیجه بگیرید که $\phi \wedge \phi = 0$.

۲. فرم ϕ را هنگامی که $d\phi = 0$، بسته می‌نامند. فرم ϕ را که به‌ازای یك فرم ξ بتوان به‌صورت $\phi = d\xi$ نوشت، کامل می‌نامند. (بدین ترتیب اگر ϕ یك p-فرمی باشد، ξ لزوماً یك $(p-1)$-فرمی است.) ثابت کنید که:

(الف) هر فرم کامل بسته است.

(ب) هیچ ۰-فرمی کامل نیست، و روی یك رویه هر ۲-فرمی بسته است.

(ج) توابع ثابت، ۰-فرمیهای بسته‌اند.

۳. فرمولهای لایبنیتزی زیر را ثابت کنید:

$$d(fg) = df\, g + f\, dg \qquad d(f\phi) = df \wedge \phi + f\, d\phi$$

که در آن f و g توابعی روی M هستند و ϕ یك ۱-فرمی است (راهنمایی: به‌موجب تعریف $(f\phi)(\mathbf{v}_p) = f(\mathbf{p})\phi(\mathbf{v}_p)$؛ بنابراین وقتی $f\phi$ را روی $\mathbf{x}_u$ حساب کنیم خواهد شد $f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}_u)$.)

۴. (الف) فرمولهای (۱) و (۲) در مثال ۷.۴ را با استفاده از تبصرهٔ قبل از مثال مزبور اثبات کنید. (راهنمایی: نشان دهید $(du_1\, du_2)(U_1, U_2) = 1$.)
(ب) سایر فرمولها را با استفاده از خاصیت d و ضرب گوه‌ای به‌دست آورید.

۵. اگر f تابعی با مقدار حقیقی روی یك رویه و g تابعی روی خط حقیقی باشد، ثابت کنید که

$$\mathbf{v}_p[g(f)] = g'(f)\mathbf{v}_p[f]$$

و از آنجا

$$d(g(f)) = g'(f)df$$

۶. اگر f، g و h توابعی روی رویهٔ M و ϕ یك ۱- فرمی باشد، ثابت کنید که:

(الف) $d(fgh) = gh\,df + fh\,dg + fg\,dh$.

(ب) $d(\phi f) = f d\phi - \phi \wedge df \qquad (\phi f = f\phi)$

(ج) $(df \wedge dg)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}[f]\mathbf{w}[g] - \mathbf{v}[g]\mathbf{w}[f]$

۷. گیریم زیرمجموعه‌های باز $\mathcal{U}_1$، . . .، $\mathcal{U}_k$، M را بپوشانند و روی هریك از $\mathcal{U}_i$ها تابع f_i طوری تعریف شده باشد که $f_i - f_j$ روی ناحیهٔ همپوش $\mathcal{U}_i$ و $\mathcal{U}_j$ ثابت باشد. نشان دهید که می‌توان یك ۱-فرمی ϕ روی M طوری تعیین کرد که $\phi = df_i$ روی هر $\mathcal{U}_i$ باشد. این مطلب را دربارهٔ ۱- فرمیهای ϕ_i به‌طوری که $\phi_i - \phi_j$ بسته باشد، تعمیم دهید.

۸. گیریم $\mathbf{y} : \mathbf{E} \to M$ نگاشتی دلخواه از یك مجموعهٔ باز $\mathbf{E}^2$ در روی M باشد. نشان دهید که فرمول زیر به‌ازای یك ۱- فرمی ϕ روی M برقرار است، ولو آنکه $\mathbf{y}$ منظم یا یك به‌یك نباشد

$$d\phi(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v) = \frac{\partial}{\partial u}(\phi \mathbf{y}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\phi \mathbf{y}_u)$$

(راهنمایی: در برهان لم ۵.۴ تحقیق کنید که معادلهٔ (۳) بازهم در این حالت معتبر است.)

قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M یك تناظر یك‌به‌یك بین زیرمجموعهٔ باز D از $\mathbf{E}^2$ و یك مجموعهٔ باز $\mathbf{x}(D)$ از M برقرار می‌کند. گرچه توجه و تأکید ما روی تابع $\mathbf{x} : D \to \mathbf{x}(D)$ است، اما مزایا و محسنات تابع معکوس $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(D) \to D$ موجب گردیده است که آن را مورد تأکید و توجه قرار دهند.

۹. اگر $\mathbf{x} : D \to M$ یك قطعه مختصاتی در M باشد، و $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ توابع مختصاتی $\mathbf{x}^{-1}$ باشند، به‌طوری که به‌ازای هر $\mathbf{p}$ در $\mathbf{x}(D)$، $\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}) = (\tilde{u}(\mathbf{p}), \tilde{v}(\mathbf{p}))$. نشان دهید که
(الف) $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ توابعی دیفرانسیلپذیر روی $\mathbf{x}(D)$ می‌باشند به‌طوری که

$$\tilde{u}(\mathbf{x}(u, v)) = u, \qquad \tilde{v}(\mathbf{x}(u, v)) = v$$

این توابع دستگاه مختصات وابسته به $\mathbf{x}$ را تشکیل می‌دهند

(ب) $d\tilde{u}(\mathbf{x}_v)=0 \qquad d\tilde{u}(\mathbf{x}_u)=1$

$d\tilde{v}(\mathbf{x}_v)=1 \qquad d\tilde{v}(\mathbf{x}_u)=0$

(ج) اگر ϕ یك ۱- فرمی و η یك ۲- فرمی باشد، آنگاه

$$\phi=f\,d\tilde{u}+g\,d\tilde{v} \text{ که در آن } f(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{x}_u),\ g(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{x}_v)$$

$$\eta=h\,d\tilde{u}\,d\tilde{v} \text{ که در آن } h(\mathbf{x})=\eta(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)$$

(راهنمایی: برای اثبات (ب) از تمرین ۴ (ب) فصل ۴، بند ۳ استفاده کنید.)

۱۰. دستگاه مختصات $\tilde{u}$، $\tilde{v}$ وابسته به‌هریك از حالتهای زیر را بیابید:

(الف) قطعه مختصاتی، مختصات قطبی $\mathbf{x}(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v)$ روی D، $u>0$ و $0<v<2\pi$.

(ب) قطعه مختصاتی همانی $\mathbf{x}(u,\ v)=(u,\ v)$ در $\mathbf{E}^2$.

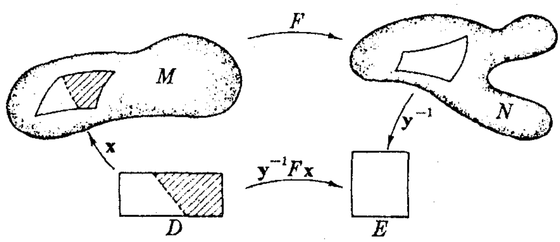
(ج) قطعه مختصاتی جغرافیایی $\mathbf{x}$ درکره.

۵. نگاشت رویه‌ها

برای تعریف دیفرانسیلپذیری یك تابع ازیك رویه به رویهٔ دیگر همان طرح بند۳ را به‌کار می‌بریم و همهٔ عبارتهای مختصاتی آن را دیفرانسیلپذیر فرض می‌کنیم.

۱.۵. **تعریف.** تابع $F: M \to N$ از یك رویه به رویهٔ دیگر را هنگامی دیفرانسیلپذیر نامند، که به‌ازای هرقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ از M و $\mathbf{y}$ از N تابع مرکب $\mathbf{y}^{-1}F\mathbf{x}$ دیفرانسیلپذیر (اقلیدسی) باشد (و روی زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbf{E}^2$ معین باشد). F را در این‌صورت یك **نگاشت رویه‌ها** می‌نامند.

روشن‌است که تابع $\mathbf{y}^{-1}F\mathbf{x}$ درهمهٔ نقاط $(u,\ v)$ از D که به‌ازای آنها $F(\mathbf{x}(u,\ v))$ در نگارهٔ $\mathbf{y}$ قرارداد، معین است (شکل ۲۹.۴). مانند بند ۳، از فرع ۳.۳ نتیجه می‌شود



شکل ۲۹.۴

که برای استفاده از این تعریف کافی است آن را در مورد قطعه‌های مختصاتی کافی، که M و N را می‌پوشانند، تحقیق کنیم.

۲.۵. مثال. (۱) گیریم Σ کرهٔ یکه در $\mathbf{E}^3$ (به‌مرکز o) باشد، که از آن قطبهای شمال و جنوب ±۱ حذف کرده‌ایم، و C استوانه‌ای باشد، کــه قاعدهٔ آن دایرهٔ یکه‌ای در صفحهٔ xy است. بدین ترتیب C با کره در طول استوا تماس دارد. نگاشت $F: \Sigma \to C$ را به‌ترتیب زیر تعریف می کنیم: از هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از Σ خطی مرور می‌دهیم که محور z را به‌طور متعامد قطع کند، نخستین نقطهٔ تقاطع آن را با C، بــه $F(\mathbf{p})$ نشان می‌دهیم (شکل ۳۰.۴). برای اثبات آنکه F یك نگاشت است، از قطعه مختصاتی جغرافیایی $\mathbf{x}$ در Σ (مثال ۲.۲) استفاده می کنیم و برای C قطعه مختصاتی $\mathbf{y}(u, v)=(\cos u, \sin u, v)$ را در نظر می گیریم. داریم

$$\mathbf{x}(u, v)=(\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

و از تعریف F، خواهیم داشت

$$F(\mathbf{x}(u, v))=(\cos u, \sin u, \sin v)$$

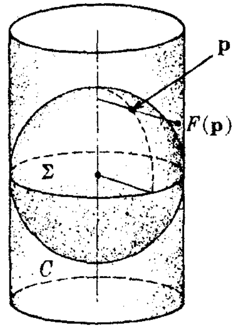
اما این نقطه از C عبارت است از $\mathbf{y}(u, \sin v)$، بنابراین

$$F(\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{y}(u, \sin v)$$

چون $\mathbf{y}^{-1}$ را برهردو طرف این معادله اثردهیم، خواهیم داشت

$$(\mathbf{y}^{-1} F \mathbf{x})(u, v)=(u, \sin v)$$

و بدین ترتیب دیده می‌شود که $\mathbf{y}^{-1}F\mathbf{x}$ دیفرانسیلپذیر است. (البته $\mathbf{x}$ کاملاً Σ را نمی‌پوشاند، اما نیمدایره‌های حذف شده را می‌توان با قطعه‌ای مانند $\mathbf{x}$ پوشاند.) از آنجا به‌این نتیجه می‌رسیم که F یك نگاشت است.



شکل ۳۰.۴

(۲) تصویر منظری کرهٔ Σ (با حذف قطب شمال) برروی صفحه. گیریم Σ کره‌ای یکه باشد، که روی صفحهٔ xy درمبــدأ قرار گرفته است، و بنابراین مرکز آن در (۰, ۰, ۱) قراردارد. قطب شمال $\mathbf{n}=(0, 0, 2)$ از Σ حذف شـــده است، اکنون تصور کنیم کــه منبع نوری درقطب شمال قراردارد، و به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از Σ $P(\mathbf{p})$ سایهٔ $\mathbf{p}$ درصفحهٔ xy رامتناظر قرار دهیم (شکل ۳۱.۴) مطابــق معمول، صفحهٔ xy را بــا $\mathbf{E}^2$ به وسیلهٔ $(p_1, p_2, 0) \leftrightarrow (p_1, p_2)$ متحــد می کنیــم. بدین ترتیب P بــه‌صورت تابعی از Σ روی $\mathbf{E}^2$

در می‌آید، و به‌صورت زیر است

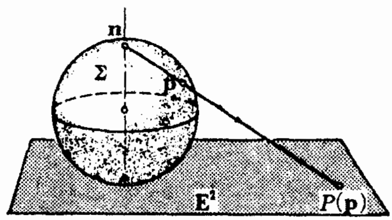
$$P(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{Rp_1}{r}, \frac{Rp_2}{r}\right)$$

که در آن r و R به‌ترتیب مسافتهای $\mathbf{p}$ و $P(\mathbf{p})$ از محور z می‌باشند. از تشابه مثلثها در شکل ۳۲.۴ نتیجه می‌شود که $R/2 = r/(2-p_3)$ و بنابراین

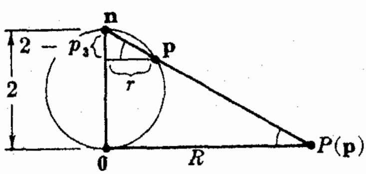
$$P(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{2p_1}{2-p_3}, \frac{2p_2}{2-p_3}\right)$$

اکنون دیده می‌شود که اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی در Σ باشد، تابع مرکب $P\mathbf{x}$ دیفرانسیلپذیر (اقلیدسی) است، و بنابراین $P : \Sigma \to \mathbf{E}^2$ یك نگاشت است.

نگاشت رویه‌ها نیز مانند نگاشتهای فضای اقلیدسی دارای نگاشت مشتق است.



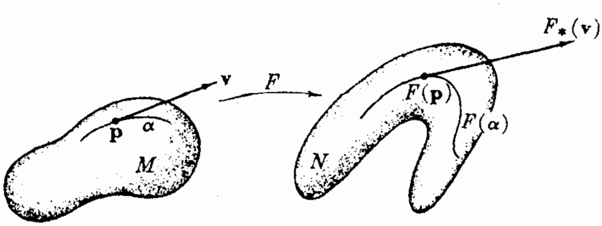
شکل ۳۱.۴



شکل ۳۲.۴

۳.۵ تعریف. گیریم $F : M \to N$ یك نگاشت رویه‌ها باشد. F_*، نگاشت مشتق F، به‌هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر M بردار مماس $F_*(\mathbf{v})$ به N را طوری متناظر قرار می‌دهد که: اگر $\mathbf{v}$ سرعت آغازی یك خم α در M باشد، آنگاه $F_*(\mathbf{v})$ سرعت آغازی خم نگارهٔ $F(\alpha)$ در N است (شکل ۳۳.۴).

علاوه براین در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ نگاشت مشتق F_* تبدیلی خطی از صفحهٔ مماس $T_\mathbf{p}(M)$ به‌صفحهٔ مماس $T_{F(\mathbf{p})}(N)$ می‌باشد (تمرین ۱۳ را ببینید). مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود که F_* سرعتهای خمها را حفظ می‌کند: اگر $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ در N نگارهٔ خم α از M را



شکل ۳۳.۴

نشان دهد، آنگاه داریم $F_*(\alpha') = \bar{\alpha}'$. مانند حالت اقلیدسی خصوصیت جالب زیر به اثبات می‌رسد:

نگاشت مشتق یك نگاشت مرکب، با ترکیب نگاشتهای مشتق آنها برابر است (تمرین ۱۴).

نگاشت مشتق یك نگاشت $F : M \to N$ را می‌توان برحسب سرعتهای جزئی به‌صورت زیر محاسبه کرد. اگر $\mathbf{x} : D \to M$ نمایش پارامتری M، و $\mathbf{y}$ نگاشت مرکب $F(\mathbf{x}) : D \to N$ باشد ($\mathbf{y}$ لزومی ندارد که یك نمایش پارامتری باشد)، بدیهی است که F خمهای پارامتر $\mathbf{x}$ را به‌خمهای پارامتر متناظر $\mathbf{y}$ بدل می‌کند. چون F_* سرعتهای خمها را حفظ می‌کند، خواهیم داشت

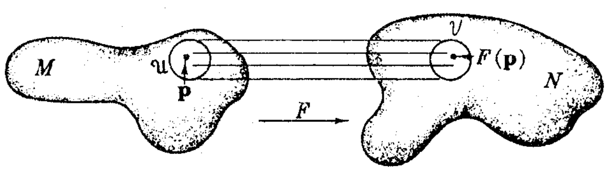
$$F_*(\mathbf{x}_u) = \mathbf{y}_u, \quad F_*(\mathbf{x}_v) = \mathbf{y}_v$$

از آنجا که $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ یك پایه از فضای مماس M در هرنقطهٔ $\mathbf{x}(D)$ را تشکیل می‌دهند، با استفاده از این دستورها F_* کاملاً معین می‌گردد.

بحث نگاشتهای منظم، که دربند ۷ فصل اول مطرح گردید، به‌آسانی دربارهٔ نگاشت رویه‌ها تعبیر می‌گردد. F را منظم نامند اگر همهٔ نگاشتهای مشتق $F_{*p} : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ یك به‌یك باشد. چون صفحه‌های مماس همه دارای بعد یکسانند، این‌شرط با توجه به‌نتایج جبرخطی معادل است با آنکه F_* یك ایزومرفیسم خطی باشد. نگاشت $F : M \to N$ که دارای نگاشت معکوس $F^{-1} : N \to M$ باشد، دیفئومرفیسم نام دارد. دیفئومرفیسم F را می‌توان به‌صورت تغییرات هموار‌ی که M را به N بدل می‌کند تصور کرد. با استفاده از بیان اقلیدسی قضیهٔ تابع معکوس دربارهٔ عبارت مختصاتی $\mathbf{y}^{-1}F\mathbf{x}$ از F، می‌توانیم تعمیم زیر از قضیهٔ تابع معکوس (۱۰.۷ فصل‌اول) را بیابیم.

۴.۵ قضیه. گیریم $F : M \to N$ یك نگاشت رویه‌ها باشد، و فرض می‌کنیم $F_{*p} : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$ یك ایزومرفیسم خطی‌درنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M باشد. دراین‌صورت یك همسایگی $\mathcal{U}$ از $\mathbf{p}$ در M وجود دارد، به‌طوری که تخصیص F به $\mathcal{U}$ دیفئومرفیسمی روی همسایگی $\mathcal{V}$ از $F(\mathbf{p})$ در N باشد (شکل ۳۴.۴).

ازاینجا نتیجه می‌شود که هرنگاشت منظم یك به‌یك F از M روی N یك دیفئومرفیسم است. زیرا F یك به‌یك و پوششی می‌باشد، در نتیجه دارای تابع معکوس یکتای F^{-1}



شکل ۳۴.۴

می‌باشد، که یك نگاشت (دیفرانسیلپذیر) است. زیرا مانند بالا، روی هر همسایگی $\mathcal{V}$ برمعکوس دیفئومرفیسم $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ منطبق می گردد.

۵.۵.مثال. تصویر منظری $P: \Sigma_0 \rightarrow \mathbf{E}^2$ یك دیفئومرفیسم است. در مثال ۲.۵ دیدیم که P نگاشت یك به یك از کرهٔ Σ_0 (باحذف قطب شمال) روی صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ می باشد. بنابراین فقط کافی است که نشان دهیم P_* درهر نقطه یك به یك است. بااستفاده ازقطعه مختصاتی جغرافیایی مثال ۲.۲، نمایش پارامتری

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, 1 + \sin v)$$

برای همهٔ Σ_0 بجز قطب جنوب آن، که در مبدأ قرار دارد، به‌دست می‌آید.

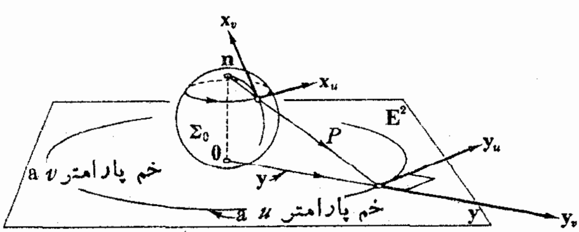
باتوجه به‌تعریف هندسی P دیده می‌شود که P خمهای پارامتر u از $\mathbf{x}$ (مدارات) را به‌دایره‌های صفحه، به مرکز مبدأ بدل می کند، و خمهای پارامتر v (نصف‌النهارها) را به‌خطهای راست‌که از مبدأ می‌گذرند تبدیل می‌نماید (شکل ۳۵.۴).

این دوخانواده خمهای نگارهٔ همان خمهای پارامتر $\mathbf{y} = P(\mathbf{x})$ می‌باشند. بااستفاده از فرمول P درمثال ۲.۵ خواهیم داشت

$$\mathbf{y}(u, v) = P(\mathbf{x}(u, v)) = \left(\frac{2 \cos v \cos u}{1 - \sin v}, \frac{2 \cos v \sin u}{1 - \sin v}\right)$$

وچون داریم $P_*(\mathbf{x}_u) = \mathbf{y}_u$ و $P_*(\mathbf{x}_v) = \mathbf{y}_v$ منظم بودن P_* را می‌توان بامحاسبهٔ $\mathbf{y}_u$ و $\mathbf{y}_v$ ثابت کرد. این دو بردارمتعامد ومخالف صفر، و درنتیجه دارای استقلال خطی‌اند. (درقطب جنوب ۰، اثبات دیگری لازم است، زیرا درآنجا $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری *نیست* (تمرین ۱۵ را ببینید).) ونتیجه می گیریم که P یك دیفئومرفیسم است.

فرمهای دیفرانسیلی دارای این خصوصیت جالب‌اند که می‌توان آنها را به‌وسیلهٔ نگاشت‌دلخواه از رویه‌ای به‌رویهٔ دیگرمنتقل کرد (میدانهای برداری‌دارای این خصوصیت نیستند). این مطلب را نخست دربارهٔ ۰-فرمیها یعنی توابع بامقدار حقیقی f بررسی می‌کنیم. اگر $F: M \rightarrow N$ یك نگاشت رویه‌ها و f تابعی روی M باشد، راه‌کلی برای



شکل ۳۵.۴

آنکه f را به‌صورت تابعی روی N بدل کنیم وجود ندارد، اما در عوض اگر f تابعی روی N باشد مسأله بسیار آسان است، و f را به‌وسیلهٔ تابع مرکب $f(F)$ به‌روی M برگشت می‌دهیم. برگشت ۱- فرمیها و ۲- فرمیها به‌طریق زیر انجام می‌گیرد.

۶.۵. تعریف. گیریم $F: M \to N$ یك نگاشت رویه‌ها باشد.

(۱) اگر ϕ یك ۱- فرمی روی N باشد، $F^*\phi$ را یك ۱- فرمی روی M می‌گیریم چنان‌که به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}$ بر M داشته باشیم

$$(F^*\phi)(\mathbf{v}) = \phi(F_*\mathbf{v})$$

(۲) اگر η یك ۲- فرمی روی N باشد، $F^*\eta$ را یك ۲- فرمی روی M می‌گیریم چنان‌که به‌ازای همهٔ زوج بردارهای مماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بر M داشته باشیم (شکل ۳۶.۴):

$$(F^*\eta)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \eta(F_*\mathbf{v}, F_*\mathbf{w})$$

هنگامی‌که تابع f را به‌عنوان ٠- فرمی درنظر می‌گیریم، گاهی با توجه به قرارداد برگشت ۱- فرمیها و ۲- فرمیهای بالا، به‌جای $f(F)$ خواهیم نوشت F^*f.

اعمال اصلی روی فرمها عبارت‌اند از جمع، ضرب گوه‌ای و مشتق خارجی که همه به‌وسیلهٔ نگاشتها حفظ می‌شوند.

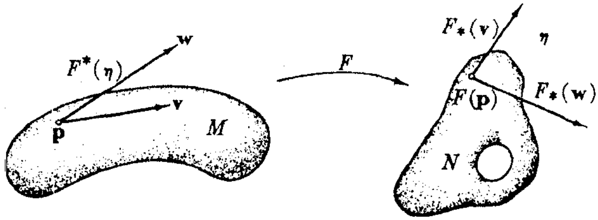
۷.۵. قضیه. گیریم $F: M \to N$ یك نگاشت رویه‌ها و ξ و η فرمهایی روی N باشند، دراین‌صورت

$$F^*(\xi + \eta) = F^*\xi + F^*\eta \qquad (۱)$$

$$F^*(\xi \wedge \eta) = F^*\xi \wedge F^*\eta \qquad (۲)$$

$$F^*(d\xi) = d(F^*\xi) \qquad (۳)$$

برهان. در (۱)، ξ و η را p- فرمی فرض کرده‌ایم ($p = ٠, ۱, ۲$) واثبات آن محاسبه‌ای ساده است. در (۲)، ξ و η می‌توانند درجه‌های مختلف داشته باشند. مثلاً، اگر ξ یك



شکل ۳۶.۴

تابع f باشد، فرمول مزبور به‌صورت سادهٔ $F^*(f\eta)=f(F)F^*(\eta)$ درمی‌آید. در هرصورت اثبات (۲) نیز یك محاسبهٔ ساده است. اما (۳) جالبتر است. حالتی راکه درآن ξ یك تابع باشد به‌عنوان تمرین می‌گذاریم (تمرین ۸)، و حالت دشوارتری راکه درآن ξ یك ۱ـ فرمی است بررسی می‌کنیم.

کافی است که نشان دهیم به‌ازای هرقطعه مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ داریم

$$(d(F^*\xi))(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=(F^*(d\xi))(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

گیریم $\mathbf{y}=F(\mathbf{x})$، داریم: $F_*(\mathbf{x}_u)=\mathbf{y}_u$ و $F_*(\mathbf{x}_v)=\mathbf{y}_v$. بااستفاده ازتعریف d و F^*، خواهیم داشت

$$d(F^*\xi)(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=\frac{\partial}{\partial u}\{(F^*\xi)(\mathbf{x}_v)\}-\frac{\partial}{\partial v}\{(F^*\xi)(\mathbf{x}_u)\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\{\xi(F_*\mathbf{x}_v)\}-\frac{\partial}{\partial v}\{\xi(F_*\mathbf{x}_u)\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\{\xi(\mathbf{y}_v)\}-\frac{\partial}{\partial v}(\xi(\mathbf{y}_u))$$

حتی اگر $\mathbf{y}$ قطعه مختصاتی‌هم نباشد، تمرین ۸ بند ۴ نشان می‌دهدکه عبارت اخیرهمچنان با $d\xi(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)$ برابر است، اما داریم

$$d\xi(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v)=d\xi(F_*\mathbf{x}_u, F_*\mathbf{x}_v)=(F^*(d\xi))(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

بدین‌ترتیب دیده می‌شود که $d(F^*\xi)$ و $F^*(d\xi)$ به‌ازای $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ دارای مقادیر متساوی‌اند. ∎

فرمولهای جالب قضیهٔ ۷.۵ کلید بررسیهای عمیقتر نگاشتها می‌باشند. در فصل ۶ از آنها دربارهٔ فرمهای همبندی میدانهای سه‌وجهی استفاده می‌کنیم تا اطلاعاتی بنیادی دربارهٔ هندسهٔ نگاشتهای رویه‌ها به‌دست آوریم.

تمرینات

۱. گیریم M و N دو رویه در $\mathbf{E}^3$ باشند، اگر $F:\mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ نگاشتی باشد چنان‌که نگارهٔ $F(M)$ آن در N واقع باشد، دراین صورت تخصیص F به M یك تابع $F|M : M \to N$ است. ثابت‌کنیدکه $F|M$ یك‌نگاشت رویه‌ها می‌باشد. (راهنمایی: ازقضیهٔ ۲.۳ استفاده کنید.)

۲. گیریم Σ کره‌ای به‌شعاع r و به‌مرکز مبدأ $\mathbf{E}^3$ باشد. تأثیر نگاشتهای $F:\Sigma \to \Sigma$ روی مدارها ونصف‌النهارهای Σ را درحالتهای زیر بررسی کنید.

(الف) $F(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$ (ب) $F(p_1, p_2, p_3)=(p_3, p_1, p_2)$

(ج) $F(p_1, p_2, p_3)=\left(\dfrac{p_1+p_2}{\sqrt{2}},\ \dfrac{p_1-p_2}{\sqrt{2}},\ -p_3\right)$

۰۳ گیریم M رویه‌ای ساده، یعنی نگارهٔ یك قطعه مختصاتی خاص $\mathbf{x}: D \longrightarrow \mathbf{E}^3$ باشد. اگر $\mathbf{y}: D \longrightarrow N$ نگاشتی در رویهٔ N باشد، ثابت کنید که تابع $F: M \longrightarrow N$ به‌طوری‌که به‌ازای هر (u, v) متعلق به D داشته باشیم

$$F(\mathbf{x}(u, v))=\mathbf{y}(u, v)$$

یك نگاشت رویه‌هاست (راهنمایی: بنویسید $F=\mathbf{y}\mathbf{x}^{-1}$، واز فرع ۳.۳ استفاده کنید.)

۰۴ با استفاده از تمرین ۳ نگاشتی از هلیکوئید H (مثال ۷ بند ۲ فصل ۴) روی چنبرهٔ T (مثال ۶.۲) طوری بسازید که مولدهای H به‌نصف‌النهارهای T بدل شوند.

۰۵ اگر Σ کرهٔ $\|\mathbf{p}\|=r$ باشد، تابع $A: \Sigma \longrightarrow \Sigma$ را به‌طوری‌که $A(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$، نگاشت نقاط متقاطر Σ می‌نامند. ثابت کنید A یك دیفئومرفیسم است، و داریم $A_*(\mathbf{v}_p)=(-\mathbf{v})_{-p}$.

۰۶ گیریم $\mathbf{x}: D \longrightarrow M$ یك قطعه مختصاتی در روی M باشد. به‌ازای هر فرم ψ روی M، فرم $\mathbf{x}^*(\psi)$ روی D را عبارت مختصاتی ψ می‌نامند. (هنگامی که ψ یك ۰- فرمی، یعنی یك تابع باشد، آنگاه $\mathbf{x}^*(\psi)=\psi(\mathbf{x})$، بنابراین این اصطلاح با اصطلاح فصل ۴ بند ۳ سازگار است.)

اگر ϕ یك ۱- فرمی و ν یك ۲- فرمی باشد، ثابت کنید که

(الف) $\mathbf{x}^*(\phi)=\phi(\mathbf{x}_u)du+\phi(\mathbf{x}_v)dv$

(ب) $\mathbf{x}^*(\nu)=\nu(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)du\,dv$

(ج) $\mathbf{x}^*(d\phi)=\left(\dfrac{\partial}{\partial u}(\phi\mathbf{x}_v)-\dfrac{\partial}{\partial v}(\phi\,\mathbf{x}_u)\right)du\,dv$

(درعمل، به‌جای قرار دادن درفرمول (ج)، آسانتر است که مشتق خارجی را برای فرمول (الف) به‌کار بریم.)

۰۷ (ادامه). گیریم $\mathbf{x}$ قطعه مختصاتی جغرافیایی در کرهٔ Σ باشد.
(الف) اگر ϕ یك ۱- فرمی روی Σ باشد، به‌طوری که $\phi(\mathbf{v}_p)=p_1v_2-p_2v_1$، ثابت کنید که $\phi(\mathbf{x}_u)=r^2\cos^2 v$ و $\phi(\mathbf{x}_v)=0$ و عبارتهای مختصاتی ϕ و $d\phi$ رابیابید.
(ب) ثابت کنید که فرمول $\nu(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p)=p_3(v_1w_2-v_2w_1)$ یك ۲- فرمی روی Σ را تعریف می‌کند وعبارت مختصاتی آن‌را بیابید.

۸. گیریم $F: M \to N$ یك نگاشت و g یك تابع روی N باشد.
(الف) ثابت کنید که F مشتقهای امتدادی را حفظ می‌کند، یعنی اگر $\mathbf{v}$ یك بردارمماس بر M باشد، در این‌صورت $\mathbf{v}[g(F)] = (F_*\mathbf{v})[g]$
(ب) نتیجه بگیرید که $F^*(dg) = d(F^*(g))$

۹. اگر $\mathbf{x}: D \to M$ یك نمایش پارامتری باشد، ثابت‌کنید که تخصیص $\mathbf{x}$ به یك همسایگی به‌قدرکافی کوچك نقطهٔ (u_0, v_0) متعلق به D، یك قطعه مختصاتی در M می‌باشد. (از این‌رو یك نمایش پارامتری ممکن است به‌دو قطعه مختصاتی تجزیه شود.)

۱۰. اگر $G: P \to M$ یك نگاشت منظم روی M و $H: P \to N$ یك نگاشت دلخواه باشد، دراین‌صورت فرمول $F(G(\mathbf{p})) = H(\mathbf{p})$ هنگامی سازگار است که به‌ازای هر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ متعلق به P از $G(\mathbf{p}) = G(\mathbf{q})$ نتیجهٔ $H(\mathbf{p}) = H(\mathbf{q})$ به‌دست آید. ثابت کنید در این حالت F یك نگاشت (دیفرانسیلپذیر) معین می‌باشد.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ & {}_{G}\nwarrow \quad \nearrow_{H} & \\ & P & \end{array}$$

در مواردی‌که G یك نمایش پارامتری M باشد، این نتیجه بسیار به‌کار می‌رود.

۱۱. گیریم $\mathbf{x}: \mathbf{E}^2 \to T$ نمایش پارامتری چنبره‌ای باشد که در مثال ۶.۲ بیان شد. در هریك از حالتهای زیر نشان دهید که فرمول

$$F(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{x}(f(u, v), g(u, v))$$

سازگاراست (تمرین ۱۰)، ونگاشت $F: T \to T$ حاصل را بیابید (مثلاً اثرآن را روی مدارها و نصف‌النهارهای T مشخص کنید.)

(الف) $f = 2u,\ g = v$ (ب) $f = u + \pi,\ g = v + 2\pi$
(ج) $f = v,\ g = u$ (د) $f = u + v,\ g = u - v$

کدام‌یك از این نگاشتها دیفئومرفیسم است؟

۱۲. نگاشت $F: M \to N$ وقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M را درنظر می‌گیریم و قرارمی‌دهیم $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$. (توجه شود که $\mathbf{y}$ در N است ولی لزومی ندارد که یك قطعه مختصاتی باشد.) ثابت کنید که در N، نگارهٔ خم $\bar{\alpha} = F(\alpha)$

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(a_1(t), a_2(t))$$

در M دارای سرعت زیر می‌باشد:

$$\overline{\alpha}'=\frac{da_1}{dt}\,\mathbf{y}_u(a_1\ ,a_2)+\frac{da_2}{dt}\,\mathbf{y}_v\ (a_1,\ a_2)$$

۱۳. از تمرین ۱۲ نتیجه بگیرید:
(الف) خصوصیت تغییرناپذیری لازم برای تحقق تعریف (۳.۵) از F_* را
(ب) خطی بودن تبدیلات نگاشتهای مشتق $F_*:T_p(M)\rightarrow T_{F(p)}(N)$ را.

۱۴. نگاشتهای $M\xrightarrow{F}N\xrightarrow{G}P$ وتابع مرکب $GF:M\rightarrow P$ را درنظرمی‌گیریم. ثابت کنیدکه
(الف) GF یك نگاشت است (ب) $(GF)_*=G_*F_*$
(ج) $(GF)^*=F^*G^*$، یعنی به‌ازای هرفرم ξ روی N، داریم $(GF)^*(\xi)=F^*(G^*\xi)$.
(توجه شودکه تغییرترتیب عوامل در $(GF)^*$ موجب می‌شودکه فرمها درجهت عکس از نقاط به‌بردارهای مماس بروند.)

۱۵. نشان دهیدکه درتصویرمنظری $P:\Sigma_0\rightarrow\mathbf{E}^2$، نگاشت مشتق درمبدأ $\mathbf{o}$ همان نگاشت همانی است. (راهنمایی: P را در مجاورت $\mathbf{o}$ برحسب یك قطعه مختصاتی موثر بیان کنید.)

۱۶. (الف) ثابت‌کنیدکه نگاشت عکس تصویر منظری $P:\Sigma_0\rightarrow\mathbf{E}^2$ به‌وسیلهٔ فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$P^{-1}(u,\ v)=\frac{(4u,\ 4v,\ 2f)}{f+4}$$

که در آن $f=u^2+v^2$. (نشان دهیدکه PP^{-1} و $P^{-1}P$ نگاشتهای همانی‌اند.)
(ب) نتیجه بگیریدکه تمام‌کرهٔ Σ را می‌توان فقط با دوقطعه مختصاتی‌پوشاند. (طرح فصل ۴، بند ۱ به‌شش قطعه مختصاتی نیاز دارد.)

۶. انتگرالگیری فرمها

فرمهای دیفرانسیلی نقش دیگری نیز در حساب دیفرانسیل و انتگرال دارند،که خواننده محتملاً درفصل اول به‌آن توجه‌کرده است. مثلاً دریك انتگرال مضاعف $\iint f(u,v)du\,dv$ در زیر علامتهای انتگرال یك ۲- فرمی روی $\mathbf{E}^2$ وجود دارد. تا اینجا انتگرال فرمها را، به‌تعبیری، فقط روی فضای اقلیدسی محاسبه‌کردیم. اما می‌توان به‌آسانی این مفهوم انتگرالگیری را در مورد فرمها روی رویهٔ دلخواه نیز تعمیم داد، برای این‌کار آنها را به‌فضای اقلیدسی برمی‌گردانیم و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

نخست حالت یك‌بعدی را درنظر می‌گیریم. منظور از یك پاره خم (یا «۱-کمانی») در رویهٔ M یك «خم» $\alpha:[a,\ b]\rightarrow M$ است‌که روی یك فاصلهٔ بسته از خط حقیقی $\mathbf{E}^1$ تعریف شده باشد. (دیفرانسیلپذیری برای α، همان‌گونه که در تعریف ۱.۴ فصل اول

موردنیاز بود، بدین‌معنی است که می‌توان آن‌را برای یك‌خم واقعی روی فاصلهٔ باز بزرگتری بسط داد.)

اکنون ۱- فرمی ϕ روی M را درنظرمی‌گیریم، وآن‌را با $\alpha^*\phi$ به‌فاصلهٔ $[a, b]$ برمی‌گردانیم، تاعبارتی به‌صورت $f(t)\,dt$ به‌دست آید، که درآن باتوجه به‌تبصره‌های ذیل مثال ۷.۴ داریم

$$f(t)=(\alpha^*\phi)(U_1(t))=\phi(\alpha^*(U_1(t)))=\phi(\alpha'(t))$$

لذا ازاین توضیحات تعریف زیر حاصل می‌شود.

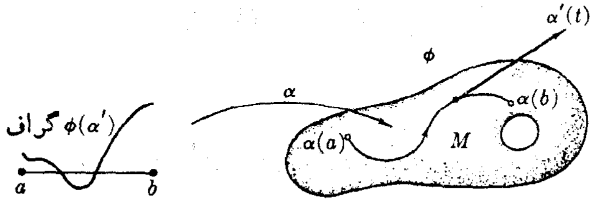
۱.۶. تعریف. گیریم ϕ یك ۱- فرمی روی M و $\alpha : [a, b] \to M$ یك «۱- کمانی» (شکل ۳۷.۴) باشد. دراین‌صورت انتگرال ϕ روی α عبارت است‌از

$$\int_\alpha \phi=\int_{[a,\, b]}\alpha^*\phi=\int_a^b \phi(\alpha'(t))\,dt$$

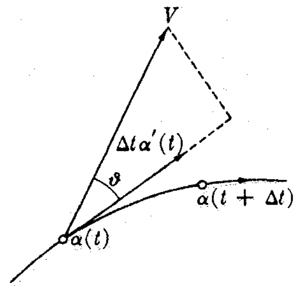
درفیزیك ومکانیك انتگرال $\int_\alpha \phi$ را انتگرال منحنی‌الخط می‌نامند، ودارای کاربردهای گوناگون بسیاری است. مثلاً، گیریم‌میدان برداری V روی یك رویه یك میدان نیرو باشد، بدین‌ترتیب به‌هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M نیروی $V(\mathbf{p})$ اثرمی‌کند. باتوجه به‌تصور اولیه دربارهٔ خم، و تعبیر $\alpha : [a, b] \to \mathbf{M}$ به‌صورت حرکت یك نقطهٔ مادی، (که $\alpha(t)$ موضع آن‌را درلحظهٔ t مشخص می‌کند.) این مسأله مطرح می‌گردد: مقدارکل کار لازم W برای‌آنکه α از $\mathbf{p}=\alpha(a)$ تا $\mathbf{q}=\alpha(b)$ حرکت کند چیست؟ ازبحثی‌که دربارهٔ سرعت درفصل اول بند۴ داشتیم، نتیجه می‌شودکه به‌ازای‌مقدارکوچك Δt مسیرخم α از $\alpha(t)$ تا $\alpha(t+\Delta t)$ تقریباً یك پاره‌خط راست است‌که با $\Delta t\,\alpha'(t)$ مشخص می‌گردد. اما نقطهٔ متحرك تنها درمقابل یك‌نیروکه همان مؤلفهٔ مماسی‌نیروی مزبوراست قرار دارد، وآن (شکل ۳۸.۴):

$$V(\alpha)\cdot\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}=\|V(\alpha)\|\cos\vartheta$$

است، وبنابراین کاری‌که درمدت Δt درمقابل این نیرو انجام می‌گیرد، تقریباً برابراست باحاصل‌ضرب نیروی $V(\alpha(t))\cdot[\alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|]$ — درمسافت $\|\alpha'(t)\|\Delta t$. چون این



شکل ۳۷.۴



شکل ۳۸.۴

کارهای جزئی را درتمام فاصلهٔ زمانی $[a, b]$ جمع کنیم، ومطابق معمول حد بگیریم، خواهیم داشت

$$W = -\int_a^b V(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

برای آنکه این مفهوم راساده‌تر بیان کنیم، دوگان ۱- فرمی ϕ را طوری تعریف می‌کنیم که بـه ازای هر بردار مماس $\mathbf{w}$ در $\mathbf{p}$ داشته باشیم $\phi(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot V(\mathbf{p})$. دراین‌صورت، بنا بر تعریف ۱.۶ کل‌کار لازم درست برابر است با

$$W = -\int_\alpha \phi$$

باید توجه داشت که دراین مفهوم انتگرال منحنی‌الخط، مانند سایر اعمالی که روی فرمها انجام می‌گیرد، می‌تـوان به‌جای رویه، فضای اقلیدسی یا به‌طور کلی هـر خمینه‌ای (بند ۸) را قرار داد.

هنگامی که ۱- فرمی ϕ به‌صورت یك مشتق خارجی df باشد، انتگرال منحنی‌الخط $\int_\alpha \phi$ دارای‌خاصیت‌جالبی است، که‌همان تعمیم قضیهٔ اساسی حساب‌دیفرانسیل وانتگرال می‌باشد.

۲.۶. قضیه. گیریم f تـابعی روی M و $\alpha : [a, b] \to M$ یك «۱- کمانی» در M از $\mathbf{p} = \alpha(a)$ تا $\mathbf{q} = \alpha(b)$ باشد، دراین‌صورت

$$\int_\alpha df = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$$

برهان. بنا بر تعریف

$$\int_\alpha df = \int_a^b df(\alpha')dt$$

اما

$$df(\alpha') = \alpha'[f] = \frac{d}{dt}(f\alpha)$$

و بنا بر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال خواهیم داشت

$$\int_\alpha df = \int_a^b \frac{d}{dt}(f\alpha)dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) \quad \blacksquare$$

ازاین‌رو گفته می‌شود که انتگرال $\int_\alpha df$ مستقل از مسیر است، وتعبیر آن بـه‌بیانی که گذشت چنین است، اگر میدان نیروی V دارای دوگان ۱- فرمی df باشد، کار انجام یافته بستگی به‌محل حرکت نقطهٔ $\alpha(t)$ ندارد، وفقط بـه‌نقطه‌های آغاز وانجام آن وابسته است. به‌ویژه اگر مسیر، خم بسته $\mathbf{p} = \alpha(a) = \alpha(b) = \mathbf{q}$ باشد، درایـن صورت کل کار لازم برابر صفراست.

ازلحاظ ریاضی، قضیهٔ بالا را چنین درنظر مـی‌گیرند: «مرز» کمان α از $\mathbf{p}$ تا $\mathbf{q}$ عبارت است از $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ که‌در آن علامت صوری منها مبین آن‌است که α از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ می‌رود. پس‌انتگرال df روی α برابراست با «انتگرال» f روی مرز $\mathbf{q} - \mathbf{p}$، یعنی $f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})$. در قضیهٔ (۵.۶) کـه تعمیم قضیهٔ بـالا در فضای دوبعدی است، تـوجیه ایـن تعبیر را خواهیم دید.

اما یك‌فاصلهٔ دوبعدی درست عبارت است ازیك مستطیل بسته در $\mathbf{E}^2$: $c \leqslant v \leqslant d$، $R: a \leqslant u \leqslant b$ ویك «۲-کمانی» در M یـك نگاشت دیفرانسیلپذیر $\mathbf{x}: R \to M$ ازمستطیل بستهٔ R است در M (شکل ۳۹.۴). (مانند پیش مقصود از دیفرانسیلپذیری آن است‌که می‌توان $\mathbf{x}$ را به‌طور دیفرانسیلپذیر به‌مجموعهٔ بازی‌که شامل R باشد تعمیم داد.)

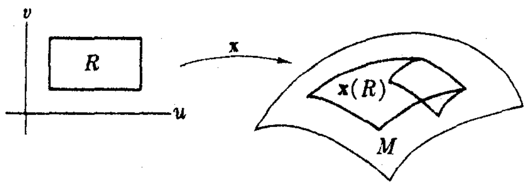
باآنکه علامت قطعه‌مختصاتی $\mathbf{x}$ به‌کار رفته است، دراین تعریف هیچ فرضی دربارهٔ منظم بودن یا یك‌به‌یك بودن $\mathbf{x}$ لازم نیست. سرعتهای جزئی $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ را ولو اینکه $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی هم نباشد می‌توان به‌دست آورد.

اگر η یك ۲- فرمی روی M باشد، آنگاه $\mathbf{x}^*\eta$، یعنی برگشت η، بااستفاده ازمثال ۷.۴، دارای عبارت مختصاتی $h\,du\,dv$ خواهد بود، که در آن:

$$h = (\mathbf{x}^*\eta)(U_1, U_2) = \eta(\mathbf{x}_*U_1, \mathbf{x}_*U_2) = \eta(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$$

بدین ترتیب متناظر باتعریف ۱.۶ تعریف زیر حاصل می‌شود.

۳.۶. تعریف. گیریم η یك ۲- فرمی روی M، و $\mathbf{x}: R \to M$ یك «۲- کمانی» بـاشد. دراین‌صورت انتگرال η روی $\mathbf{x}$ عبارت است از

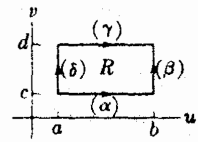


شکل ۳۹.۴

$$\iint_{\mathbf{x}} \eta = \iint_R \mathbf{x}^* \eta = \int_a^b \int_c^d \eta(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\, du\, dv$$

کاربردهای‌فیزیکی این‌مفهوم انتگرال به‌مراتب ازکاربردهای تعریف ۱.۶ زیادترند، اما بی‌درنگ باید نظیر قضیهٔ ۲.۶ را درحالت دوبعدی اثبات‌کرد.

۴.۶ تعریف. گیریم $\mathbf{x}: R \rightarrow M$ یك «۲-کمانی» در M باشدکه درآن R مستطیل بستهٔ $a \leqslant u \leqslant b$ ، $c \leqslant v \leqslant d$ است(شکل ۴۰.۴). خمهای کناری (یا یالهای) $\mathbf{x}$ عبارت‌انـد از «۱-کمانی»های α ، β ، γ و δ به‌طوری که :



شکل ۴۰.۴

$$\alpha(u) = \mathbf{x}(u, c)$$
$$\beta(v) = \mathbf{x}(b, v)$$
$$\gamma(u) = \mathbf{x}(u, d)$$
$$\delta(v) = \mathbf{x}(a, v)$$

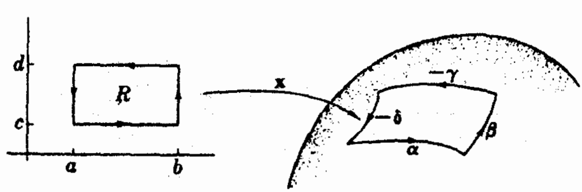
دراین‌صورت $\partial\mathbf{x}$ مرز «۲- کمانی» $\mathbf{x}$ عبارت صوری زیر می باشد

$$\partial\mathbf{x} = \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

این چهار کمان از تخصیص تابع $\mathbf{x}: R \rightarrow M$ به‌چهار قطعه خط مرزی‌مستطیل R به‌دست می‌آیند. علامت‌صوری منها که مقدم بر γ و δ در $\partial\mathbf{x}$ قرار دارد، یادآور این‌نکته است‌که برای پیمودن‌کنارهٔ $\mathbf{x}$ ، γ و δ را در جهت عکس برگردانده‌ایم (شکل ۴۱.۴). پس اگر ϕ یك ۱- فرمی روی M باشد، انتگرال ϕ روی مرز $\mathbf{x}$ بـه‌صورت زیـر تعریف می‌شود

$$\int_{\partial\mathbf{x}} \phi = \int_\alpha \phi + \int_\beta \phi - \int_\gamma \phi - \int_\delta \phi$$

لذا قضیهٔ مشابه ۲.۶ برای فضای دوبعدی چنین است



شکل ۴۱.۴

۵.۶ قضیهٔ استوکس. اگر ϕ یك ۱ـ فرمی روی M، و $\mathbf{x}: R \to M$ یك ۲ـ کمانی باشد، دراین‌صورت داریم

$$\iint_{\mathbf{x}} d\phi = \int_{\partial \mathbf{x}} \phi$$

برهان. این انتگرال مضاعف را محاسبه می‌کنیم، ونشان می‌دهیم کـه با انتگرال ϕ روی مرز $\mathbf{x}$ برابر است. بااستفاده از تعاریف ۳.۶ و ۴.۴ داریم

$$\iint_{\mathbf{x}} d\phi = \iint_R (d\phi)(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)\, du\, dv = \iint_R \Big(\frac{\partial}{\partial u}(\phi\mathbf{x}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\phi\mathbf{x}_u)\Big) du\, dv$$

گیریم $f = \phi(\mathbf{x}_u)$ و $g = \phi(\mathbf{x}_v)$، دراین‌صورت معادلهٔ بالا چنین نوشته می‌شود:

$$\iint_{\mathbf{x}} d\phi = \iint_R \frac{\partial g}{\partial u}\, du\, dv - \iint_R \frac{\partial f}{\partial v}\, du\, dv \tag{1}$$

اما، ما به‌این انتگرالهای‌مضاعف مانندانتگرالهای بارسته می‌نگریم. گیریم مستطیل R بانامساویهای $a \leqslant u \leqslant b,\ c \leqslant v \leqslant d$ تعریف‌شده‌باشد. دراین‌صورت‌از انتگرالگیری عبارت اول نسبت به u خواهیم داشت

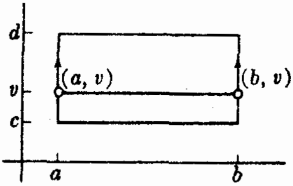
$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial u}\, du\, dv = \int_c^d I(v)\, dv \quad \text{که در آن} \quad I(v) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial u}(u,\ v)\, du$$

درانتگرال جزئی معرف $I(v)$، v ثابت است و لذا عامل زیرعلامت انتگرال همان مشتق معمولی نسبت به u خواهد بود. ازاین‌رو $I(v)$ بنابرقضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$I(v) = g(b,\ v) - g(a,\ v)$$

(شکل ۴۲.۴). ازآنجا

$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial u}\, du\, dv = \int_c^d g(b,\ v)\, dv - \int_c^d g(a,\ v)\, dv \tag{2}$$



شکل ۴۲.۴

مجدداً به محاسبهٔ روی انتگرال اول می‌پردازیم، بنا برتعریف داریم

$$g(b,\ v) = \phi(\mathbf{x}_v(b,\ v))$$

اما $\mathbf{x}_v(b,\ v)$ دقیقاً سرعت $\beta'(v)$ روی خم β است که در «سمت راست» $\partial\mathbf{x}$ قرار دارد. لذا بنابر تعریف ۱.۶ خواهیم داشت

$$\int_c^d g(b, v)\, dv = \int_c^d \phi(\beta'(v))\, dv = \int_\beta \phi$$

بااستدلال مشابه ثابت می‌شود که انتگرال دوم در (۲) برابر است با $\int_\delta \phi$. بنابراین

$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial u}\, du\, dv = \int_\beta \phi - \int_\delta \phi \qquad (۳)$$

به‌همین‌طریق، از انتگرالگیری نسبت به v درمرحلهٔ اول، خواهیم داشت

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial v}\, du\, dv = \int_\gamma \phi - \int_\alpha \phi \qquad (۴)$$

بادرنظرگرفتن (۱) ، (۳) و (۴) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود

$$\iint_x d\phi = \left\{\int_\beta \phi - \int_\delta \phi\right\} - \left\{\int_\gamma \phi - \int_\alpha \phi\right\} = \int_{\partial x} \phi \qquad \blacksquare$$

قضیهٔ استوکس را می‌توان به‌عنوان بیان قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال درفضای دوبعدی درنظر گرفت، ویکی از سودمندترین قضایای ریاضیات به‌شمار می‌آید. صورتهای دیگر این قضیه و کاربردهای فراوان آن‌را می‌توانید درکتابهای آنالیز پیشرفته یا ریاضیات عملی ببینید، ما از آن برای بررسی هندسهٔ رویه‌ها استفاده خواهیم‌کرد.

انتگرال منحنی‌الخط $\int_\alpha \phi$ نسبت به نمایش پارامتری α تغییرناپذیر است، وفقط جهت پیمودن α درآن مؤثر است. درلم زیر از نمادگذاریهای تمرین۱۰ بند ۲ فصل ۲ استفاده می‌شود.

۶.۶ لم. گیریم $\alpha(h):[a, b] \to M$ یك نمایش پارامتری کمان $\alpha:[c, d] \to M$ باشد. به‌ازای هر ۱- فرمی روی M داریم

$$\int_{\alpha(h)} \phi = \begin{cases} \int_\alpha \phi & \text{اگر } h \text{ سونگهدار باشد} \\ -\int_\alpha \phi & \text{اگر } h \text{ سوبرگردان باشد} \end{cases}$$

برهان. چون $\alpha(h)$ دارای سرعت

$$\alpha(h)' = \frac{dh}{dt}\alpha'(h)$$

است، داریم

$$\int_{\alpha(h)}\phi=\int_a^b\phi(\alpha(h)')\,du=\int_a^b\phi(\alpha'(h))\frac{dh}{du}\,du$$

اکنون از قضیهٔ تعویض متغیر درانتگرال استفاده می‌کنیم. اگر h سونگهدار باشد، دراین‌صورت داریم $h(a)=c$ و $h(b)=d$، وانتگرال بالا چنین نوشته می‌شود

$$\int_c^d\phi(\alpha')\,du=\int_\alpha\phi$$

واگر سوبرگردان باشد خواهیم داشت $h(a)=d$ و $h(b)=c$ وازآنجا

$$\int_d^c\phi(\alpha')\,du=-\int_c^d\phi(\alpha')\,du=-\int_\alpha\phi \qquad ▮$$

با استفاده از اینکه می‌توان تعبیر روشنی برای علامتهای منها در مرز $\partial\mathbf{x}=\alpha+\beta-\gamma-\delta$ از ۲-کمانی $\mathbf{x}$ به‌دست آورد. به‌ازای هرخم $\xi:[t_0, t_1]\to M$ یك نمایش پارامتری سونگهدار ξ را با $-\xi$ نمایش می‌دهیم، مثلاً

$$(-\xi)(t)=\xi(t_0+t_1-t)$$

وبنابر لم بالا داریم

$$\int_{-\xi}\phi=-\int_\xi\phi$$

واگر $\mathbf{x}$ یك «۲-کمانی» باشد دراین‌صورت داریم

$$\int_{\partial x}\phi=\int_\alpha\phi+\int_\beta\phi-\int_\gamma\phi-\int_\delta\phi=\int_\alpha\phi+\int_\beta\phi+\int_{-\gamma}\phi+\int_{-\delta}\phi$$

تمرینات

۱. اگر $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ خمی در $\mathbf{E}^2$ و ϕ یك ۱- فرمی باشد، دستور زیررا برای محاسبهٔ $\phi(\alpha')\,dt$ ثابت‌کنید: درعبارت مختصاتی

$$\phi=f(u, v)\,du+g(u, v)\,dv$$

قرار می‌دهیم $u=\alpha_1(t)$ و $v=\alpha_2(t)$.

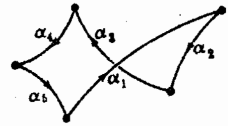
۲. کمان $\alpha:[-1, 1]\to\mathbf{E}^2$ راکه درآن $\alpha(t)=(t, t^2)$، درنظرمی گیریم.

(الف) اگر $\phi=v^2\,du+2uv\,dv$، آنگاه $\int_\alpha\phi$ را محاسبه‌کنید.

(ب) تابع f را طوری تعیین‌کنید‌که داشته باشیم $df=\phi$ وقضیهٔ ۲.۶ را دراین حالت بررسی کنید.

۳. گیریم ϕ یك ۱-فرمی روی رویهٔ M باشد.
(الف) نشان دهید که اگر ϕ بسته باشد، دراین صورت به‌ازای هر ۲-کمانی در M داریم

$$\int_{\partial x} \phi = 0$$



شکل ۴۳.۴

(ب) اگر ϕ کامل باشد، نشان دهید (به طور کلیتر) که به‌ازای هر دورهٔ α_1، . . . ، α_k $(\alpha_{k+1} = \alpha_1)$ به‌طوری که انجام هر نقطهٔ α_i آغاز α_{i+1} است (شکل ۴۳.۴) داریم

$$\sum_i \int_{\alpha_i} \phi = 0$$

(بسته، بـه معنی $d\phi = 0$، و کامل بـه معنی $\phi = df$؛ تمرین ۲، بند ۴، فصل ۴ را ببینید.)

۴. ۱-فرمی

$$\psi = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2}$$

روی تمام صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ که از آن نقطهٔ $(0, 0)$ حذف شده است معین می‌باشد. نشان دهید که:
(الف) ψ بسته است ولی کامل نیست. (راهنمایی: پیرامون دایرهٔ واحد انتگرال بگیرید و ازتمرین ۳ استفاده کنید.)
(ب) اگر ψ را مثلاً به‌نیمصفحهٔ راست $u > 0$ تخصیص دهیم دراین صورت ψ کامل خواهد بود.

۵. (ادامه). از تمرین ۱۲ بند ۱ فصل ۲ نتیجه می‌شود که هر خم α در $\mathbf{E}^2$ راکه از مبدأ نگذرد، می توان به‌صورت قطبی

$$\alpha(t) = (r(t)\cos\vartheta(t),\ r(t)\sin\vartheta(t))$$

نوشت. ثابت کنید که به ازای هرخم بستهٔ α حاصل $(1/2\pi)\int_\alpha \psi$ یك عـدد صحیح است. این عدد صحیح را عدد چرخش α می‌نامند، ومجموع جبری تعداد دفعاتی راکه α دور مبدأ درجهت مثلثاتی چرخیده است نشان می‌دهد.

۶. گیریم $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی در رویهٔ M باشد. به‌ازای هرکمان

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(a_1(t),\ a_2(t)), \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

نشان دهید که

$$\int_{\alpha}\phi=\int_{a}^{b}\left(\phi(\mathbf{x}_u)\frac{da_1}{dt}+\phi(\mathbf{x}_v)\frac{da_2}{dt}\right)dt$$

کــه در آن $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ روی $(a_1\ ,\ a_2)$ محاسبه شده‌انــد. (این تمرین تعمیم تمرین ۱ می‌باشد، زیرا می‌توان قطعه مختصاتی واحد $\mathbf{x}(u\ ,\ v)=(u\ ,\ v)$ روی $\mathbf{E}^2$ را درنظر گرفت.)

۷. گیریم α خم بستهٔ

$$\alpha(t)=\mathbf{x}(mt,\ nt),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

روی چنبرهٔ T بــاشد (تمریــن ۱۱ بند ۳ فصل ۴ را ببینید.) مطلــوب است محاسبهٔ

(الف) $\int_{\alpha}\xi$ که در آن ξ یك ۱-فرمی روی T است بــه طوری‌که $\xi(\mathbf{x}_u)=1$ و $\xi(\mathbf{x}_v)=0$.

(ب) $\int_{\alpha}\eta$ کــه درآن η یك ۱-فرمی است، به‌طوری‌که $\eta(\mathbf{x}_u)=0$ و $\eta(\mathbf{x}_v)=1$.

اگر γ خم بستهٔ دلخواهی باشد، $\int_{\gamma}\xi/2\pi$ تعداد کل دفعاتی را که γ پیرامون چنبره درجهت کلی مدارهــا دور زده است نشان می‌دهد، و $\int_{\gamma}\eta/2\pi$ انــدازهٔ مشابهی در جهت نصف‌النهارهــا را نشان می‌دهد. بــه همین دلیل است کــه معمولاً قراردادهای $\xi=d\vartheta$ و $\eta=d\varphi$ را به‌کار می‌برند کــه درآن ϑ و φ توابع (چند مقداری!) طول وعرض جغرافیایی روی T می‌باشند. تمرین ۱۳ را ببینید.

۸. گیریم $F: M \to N$ یك نگاشت باشد. ثابت کنید که:

(الف) اگر α یك کمان در M و ϕ یك ۱-فرمی روی N باشد، آنگاه

$$\int_{\alpha}F^{*}\phi=\int_{F(\alpha)}\phi$$

(ب) اگر $\mathbf{x}$ یك ۲-کمانی روی M و ν یك ۲-فرمی روی N باشد، آنگاه

$$\int_{\mathbf{x}}F^{*}\nu=\int_{F(\mathbf{x})}\nu$$

۹. گیریم $\mathbf{x}: R \to \Sigma$ یك ۲-کمانی درکرهٔ Σ بــاشد، که از تخصیص قطعه مختصاتی جغرافیایی

$$\mathbf{x}(u,\ v)=(r\cos v\cos u,\ r\cos v\sin u,\ r\sin v)$$

به‌مستطیل $R: 0\leqslant u,\ v\leqslant \pi/2$ به‌دست آمده‌است. فرمولهــای صریح خمهای کناری

α، β، γ و δ از $\mathbf{x}$ را بیابید ونگارهٔ $\mathbf{x}(R)$ وخمهای مزبور را روی طرحی از Σ مجسم کنید.

۱۰. گیریم $\mathbf{x}: R \to M$ یك ۲-کمانی روی مستطیل $R: \circ \leqslant u, v \leqslant ۱$ باشد. اگر ϕ یك ۱-فرمی روی M باشد، به‌طوری که

$$\phi(\mathbf{x}_u) = u + v \quad و \quad \phi(\mathbf{x}_v) = uv$$

مطلوب است محاسبهٔ $\iint_{\mathbf{x}} d\phi$ و $\int_{\partial \mathbf{x}} \phi$ و تحقیق صحت نتیجهٔ حاصل از قضیهٔ استوکس. (راهنمایی: $\mathbf{x}^*(d\phi) = d(\mathbf{x}^*\phi) = (v - ۱)du\, dv$.)

۱۱. تمرین ۱۰ را درحالت $R: \circ \leqslant u \leqslant \pi/۲$ ، $\circ \leqslant v \leqslant \pi$ و

$$\phi(\mathbf{x}_u) = u \cos v,\ \phi(\mathbf{x}_v) = v \sin u$$

حل کنید.

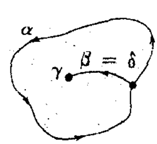
۱۲. خم بستهٔ α در M را هنگامی هوموتوپ بـا یك مقدار ثابت می‌نامند، که بتوان یك ۲-کمانی $\mathbf{x}: R \to M$ را طوری تعیین کرد، که (الف) α یك‌خم کناری $\mathbf{x}$ (ب) $\beta = \delta$ و (ج) γ خم ثابت باشد (شکل ۴۴.۴). (فرض کنیم، $R: a \leqslant u \leqslant b\ ,\ c \leqslant v \leqslant d$. آنگاه وقتی $v_\circ$ از c تا d تغییر می‌کند، خم بستهٔ مربوط به‌پارامتر u ، $v = v_\circ$، از $\mathbf{x}$ به‌طور هموار از α تا یك خم ثابت γ تغییر می‌نماید.) ثابت کنید که هر خم بسته در $\mathbf{E}^۲$ هوموتوپ با یك مقدار ثابت است.

۱۳. گیریم ϕ یك ۱-فرمی بسته و α یك خم بسته باشد. ثابت کنید درحالتهای زیر داریم

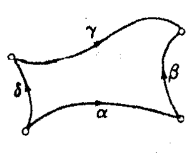
$$\int_\alpha \phi = \circ$$

(الف) اگر ϕ کامل باشد. (ب) اگر α با یك مقدار ثابت هوموتوپ باشد.

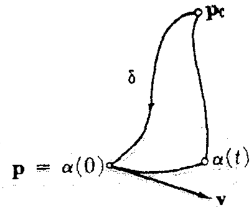
ازآنجا نتیجه بگیرید که مدارهـا ونصف‌النهارهای چنبرهٔ T بـا مقادیر ثابت هوموتوپ نیستند، وفرمهای بستهٔ ξ و η (تمرین ۷) کامل نیستند.



شکل ۴۴.۴



شکل ۴۵.۴



شکل ۴.۴۶

یك رویهٔ M را که هر خم بستهٔ آن با یك مقدار ثابت هوموتوپ باشد، همبند ساده می‌نامند. مثلاً صفحه همبند ساده است (تمرین ۱۲) اما چنبره و یا صفحه‌ای که از آن حتی یك نقطه حذف شده باشد، همبند ساده نیست (تمرینات ۷ و ۵). می‌توان چنین تصور کرد که یك رویهٔ همبند ساده دارای روزنه نیست و هرچهار خم α، β، γ و δ که به‌هم متوالیاً متصل‌شده باشند، مانند شکل ۴.۴۵ خمهای مرزی یك ۲-کمانی می‌باشند. با استفاده ازاین حکم ثابت کنید:

۱۴. روی یك رویهٔ همبند ساده، انتگرال یك ۱-فرمی بستهٔ ϕ ازمسیر مستقل است. (یعنی $\int_\alpha \phi$ به‌ازای همهٔ αها که آغاز و انجام آنها به ترتیب یکی می‌باشد، مقداری ثابت است.)

۱۵. ثابت کنیدکه روی هر رویهٔ همبند ساده هر ۱-فرمی بستهٔ کامل است. (راهنمایی: نقطهٔ ثابت $\mathbf{p}_0$ را در M اختیارکنید و به‌ازای هرکمان از $\mathbf{p}_0$ تا $\mathbf{p}$ (شکل۴.۴۶) قرار دهید $f(\mathbf{p}) = \int_\delta \phi$. بدین ترتیب برای اثبات آنکه به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ داریم $df(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v})$، نشان دهیدکه به‌ازای خم α با سرعت آغازی $\mathbf{v}$ تساوی

$$f(\alpha(t)) = f(\mathbf{p}) + \int_0^t \phi(\alpha'(u))\, du$$

برقرار است.)

۷. خواص توپولوژیایی رویه‌ها

اکنون به‌بحث دربارهٔ بعضی ازخواص اساسی رویه‌ها می‌پردازیم.

۱.۷. **تعریف.** رویهٔ M را هنگامی همبند نامند، که به‌ازای هردونقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ ازآن کمانی از $\mathbf{p}$ تا $\mathbf{q}$ در M وجود داشته باشد.

بدین ترتیب یك رویهٔ همبند M تماماً یك پارچه است، زیرا از هرنقطهٔ آن به‌نقطهٔ دیگر آن می‌توان بدون خارج‌شدن از M حرکت کرد. بسیاری از رویه‌ها که تا اینجا بررسی کردیم، همبند می‌باشند، رویهٔ $M: z^2 - x^2 - y^2 = 1$ (هذلولیگون دوپارچهٔ) همبند نیست. همبندی یك شرط روشن و موجهی است، و می‌توان درتعریف رویه‌ها آن را مورد توجه قرار داد.

۲.۷. **تعریف.** رویهٔ M را هنگامی فشرده نامند، که بتوان آن را با نگارهٔ تعداد متناهی از

۲-کمانی‌ها (در M) پوشانند.

بدین ترتیب فشردگی بدان معنی است کـه رویهٔ M دارای قطع و اندازهٔ متناهی است. مثلاً کره رویه‌ای است فشرده، زیرا اگر برای $\mathbf{x}(u, v)$ عبارت مذکور درمثال ۲.۲ را روی مستطیل بستهٔ

$$R: -\pi \leqslant u \leqslant \pi \quad , \quad -\frac{\pi}{۲} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

درنظر بگیریم، دراین‌صورت Σ نگارهٔ این ۲-کمانی تنها می‌باشد. همچنین چنبرهٔ دورانی (مثال ۶.۲) یا هر رویهٔ دورانی بسته، فشرده است.

اثبات لم زیر براین‌نکتهٔ اساسی مبتنی است: اگر f تابعی با مقدار حقیقی وپیوسته روی مستطیل:

$$R: a \leqslant u \leqslant b\,, \quad c \leqslant v \leqslant d$$

تعریف شده باشد، دراین صورت ماکسیمم f درنقطه‌ای از خود R می‌باشد.

۳.۷. لم. اگر f تابعی پیوسته روی رویهٔ فشردهٔ M باشد دراین صورت ماکسیمم f در نقطه‌ای از خود M می‌باشد. (بدیهی است که می‌توان به‌جای ماکسیمم، مینیمم را در نظر گرفت.)

برهان. بنا بر تعریف، یك تعداد متناهی از ۲-کمانیهای:

$$\mathbf{x}_i: R_i \to M \quad (۱ \leqslant i \leqslant k)$$

وجود دارند که نگاره‌های آنها تمام M را می‌پوشانند. چون هر $\mathbf{x}_i$ دیفرانسیلپذیر است پیوسته نیز می‌باشد وبنا براین توابع‌مرکب $f\mathbf{x}_i: R_i \to \mathbf{R}$ پیوسته‌اند. با توجه به‌توضیح بالا به‌ازای هر i، نقطهٔ (u_i, v_i) از R_i وجود داردکه درآن $f\mathbf{x}_i$ ماکسیمم است. گیریم مثلاً $f(\mathbf{x}_۱(u_۱, v_۱))$ بزرگترین مقدار این ماکسیمم k باشد. اکنون نشان می‌دهیم‌که f درنقطهٔ $\mathbf{m} = \mathbf{x}_۱(u_۱, v_۱)$ به‌ماکسیمم می‌رسد. برای این منظور ثابت می‌کنیم‌که به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M داریم $f(\mathbf{m}) \geqslant f(\mathbf{p})$. ازآنجاکه ۲-کمانیهای $\mathbf{x}_۱, \ldots, \mathbf{x}_k$، M را می‌پوشانند پس می‌توان i را طوری تعیین‌کرد کـه $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i(u, v)$، و با توجه به تعریف $\mathbf{m}$ داریم

$$f(\mathbf{m}) = f(\mathbf{x}_۱(u_۱, v_۱)) \geqslant f(\mathbf{x}_i(u_i, v_i)) \geqslant f(\mathbf{x}_i(u, v)) = f(\mathbf{p}) \qquad \blacksquare$$

ازاین قضیهٔ بسیار مفید می‌توان برای اثبات نافشردگی نیز استفاده کرد. مثلاً هیچ استوانهٔ C (مانند مثال ۵.۱) فشرده نیست، زیرا تابع مختصاتی z روی C کـه ارتفاع $z(\mathbf{p})$ درهرنقطهٔ بالای صفحهٔ xy را مشخص می‌کند روی C دارای ماکسیمم نیست.

باید توجه داشت که تعریف ۲.۷، آن‌طورهم که به‌نظرمی‌رسد، ساده نیست. به‌عنوان مثال قرص یکهٔ باز $D: x^2+y^2<1$ را درصفحهٔ xy درنظرمی‌گیریم. D رویه‌ای است با مساحت متناهی π اما فشرده نیست: کافی است ملاحظه شود که تابع پیوستهٔ $f=(1-x^2-y^2)^{-1}$ روی D دارای ماکسیمم نیست. به‌طورکلی یك رویهٔ فشرده نمی‌تواند مانند D دارای کناره‌های باز باشد. باید از هرطرف به‌طور هموار بسته، و دارای قطع واندازهٔ متناهی باشد، مانندکره یا چنبره.

رویهٔ جهتپذیر را می‌توان به صورت رویه‌ای‌که دارای پیچ‌وتاب نیست تجسم کرد. ازتعریفهای هم‌ارزی‌که برای جهتپذیری وجود دارد تعریف زیر شاید ازهمه ساده‌تر باشد:

۴.۷. تعریف. رویهٔ M را هنگامی جهتپذیر نامندکه یك ۲-فرمی μ روی M وجود داشته باشد به‌طوری‌که درهیچ نقطهٔ M صفر نباشد.

(یك ۲-فرمی هنگامی در یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ صفر است‌که روی هرزوج بردار مماس در $\mathbf{p}$ صفر باشد.) بدین ترتیب $\mathbf{E}^2$ جهتپذیر است زیرا $du\,dv$ یك ۲-فرمی است که هیچ‌گاه روی آن صفر نمی‌شود. تعریف بالا با آنکه ساده است اما تجسم‌آن دشوار است ازاین‌رو ملاك زیر راکه دارای تعبیر روشنتری است بیان می‌کنیم.

۵.۷. قضیه. برای آنکه رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ جهتپذیر باشد لازم و کافی است‌که یك میدان برداری قائم Z روی M وجود داشته باشد به‌طوری‌که در هیچ‌نقطه از M صفر نباشد.

برهان. برای آنکه میدانهای برداری‌قائم و ۲-فرمیها را به‌یکدیگرتبدیل‌کنیم ازحاصل‌ضرب خارجی در $\mathbf{E}^3$ استفاده خواهیم کرد. گیریم Z یك میدان برداری قائم باشد، اکنون ۲-فرمی μ را روی M به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم:

به‌ازای هرزوج $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ از بردارهای مماس بر M در $\mathbf{p}$ قرار می‌دهیم

$$\mu(\mathbf{v},\mathbf{w})=Z(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$

با استفاده از خواص حاصل‌ضرب خارجی به‌آسانی دیده می‌شود که μ یك ۲-فرمی است که هیچ‌گاه روی M صفر نمی‌شود، بنابراین M جهتپذیر است.

برعکس، گیریم M جهتپذیر باشد و μ یك ۲-فرمی که روی M هیچ‌گاه صفر نشود. در $\mathbf{p}$ زوج بردارهای مماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را که دارای استقلال خطی باشند در نظر می‌گیریم، دراین صورت داریم

$$\mu(\mathbf{v},\mathbf{w})\neq 0$$

زیرا در غیراین صورت μ در $\mathbf{p}$ صفر خواهد بود. اکنون Z را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

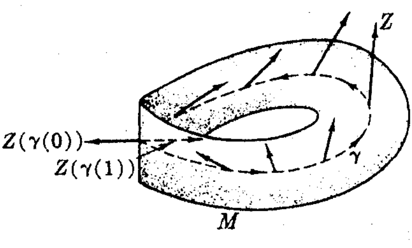
$$Z(\mathbf{p})=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{\mu(\mathbf{v},\mathbf{w})}$$

نکتهٔ جالب آنکه این عبارت از انتخاب $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در $\mathbf{p}$ مستقل است. یعنی اگـر $\bar{\mathbf{v}}$ و $\bar{\mathbf{w}}$ دو بردار مستقل دیگر در این نقطه باشند، بـا استفاده از لـم ۲.۴ و فرمول مشابه دربارهٔ ضرب خارجی داریم

$$\frac{\bar{\mathbf{v}}\times\bar{\mathbf{w}}}{\mu(\bar{\mathbf{v}},\ \bar{\mathbf{w}})}=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{\mu(\mathbf{v},\ \mathbf{w})}$$

بدین‌ترتیب یك‌میدان برداری اقلیدسی روی‌تمام M معین می‌گردد وخواص حاصل‌ضرب خارجی نشان می‌دهندکه Z همه جا بر M قائم است و هیچ‌گاه صفر نیست. ▌

بدین‌ترتیب از لم ۸.۳ نتیجه می‌شودکه هر رویه‌ای‌که در $\mathbf{E}^3$ به‌طورضمنی تعریف گـردد جهت‌پذیر است. مثلاً همه استوانه‌ها، رویه‌های دورانی و کره‌ها (و همه رویه‌های درجه دوم) جهت‌پذیرند. اما در $\mathbf{E}^3$ رویه‌های جهت‌ناپذیر نیز وجود دارند. ساده‌ترین مثال، نوار مشهور موبیوس M است‌که می‌توان آن را با استفاده ازیك نوارکاغذ به‌طریق زیر ساخت: یك‌طرف نوار را نیمدور تاب می‌دهیم و سپس آن را به‌طرف دیگر می‌چسبانیم. (تمرین۷ دربارهٔ ساختن یك‌نوار موبیوس خاص است) M جهت‌پذیرنیست، زیرا هرمیدان برداری قائم Z روی M باید در نقطه‌ای صفر شود. برای توضیح،خم بستهٔ γ را مطابق شکل ۴۷.۴ درنظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\gamma(0)=\gamma(1)=\mathbf{p}$. اکنون اگر فرض‌کنیم کـه Z همواره مخالف صفر است به تناقض $Z(\gamma(1))=-Z(\gamma(0))$ خواهیم رسید. زیـرا تابع $t\rightarrow Z(\gamma(t))$ دیفرانسیلپذیر است (یعنی، Z بـا تغییر هموار درطـول γ حرکت می‌کند).



شکل ۴۷.۴

سه‌خصوصیتی که دراین بند موردبحث قرار گرفت: همبندی، فشردگی وجهت‌پذیری خواص توپولوژیایی‌اند: می‌تـوان آنها را فقط با استفاده از مجموعه‌های بـاز و توابع پیوسته و بدون در نظرگرفتن دیفرانسیلپذیری تعریف‌کرد. با استفاده از این تعاریف کلیتر می‌توان قضیهٔ زیر را با استدلالی روشنتر اثبات کرد.

۶.۷ قضیه. گیریم M و N دو رویه از $\mathbf{E}^3$ باشند به‌طوری که N شامل M باشد.اگر

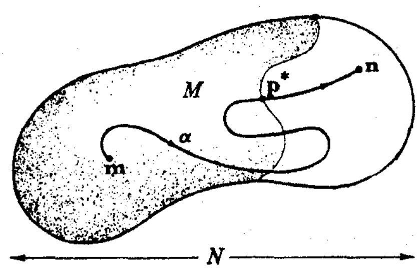
M فشرده و N همبند باشد دراین صورت داریم $M=N$.

(اگر N همبند نباشد امکان داردکه دوپارچه‌ای باشد و M یکی از آنها باشد. همچنین درموردی که M فشرده نباشد، نتیجه درست درنمی‌آید. حالتی را درنظر بگیرید که N صفحهٔ xy و M یك قرص باز درآن است.)

برهان. تمرین ۱۵ بند ۳ نشان می‌دهدکه M یك زیرمجموعهٔ باز از N می‌باشد. اکنون فرض می‌کنیم‌که M تمام N را نمی‌پوشاند و ازآنجا تناقضی به‌دست‌می‌آوریم. بنابراین فرض، می‌توان نقطه‌ای مانند $\mathbf{n}$ از N یافت‌که به M متعلق نباشد. نقطهٔ دلخواه $\mathbf{m}$ از M را در نظر می‌گیریم. چون N همبند است درآن می‌توان‌کمان α از $\alpha(0)=\mathbf{m}$ به $\alpha(1)=\mathbf{n}$ را انتخاب‌کرد. اکنون گیریم t^* کوچکترین‌کران بالای اعداد t باشد، که به‌ازای آنها $\alpha(t)$ به M متعلق است. نشان می‌دهیم که نقطهٔ $\mathbf{p}^*=\alpha(t^*)$ نیز به M متعلق است (شکل ۴۸.۴).

برای اثبات، تابع f با مقدار حقیقی روی M را درنظر می‌گیریم که به‌هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M، $f(\mathbf{p})$ مسافت اقلیدسی از $\mathbf{p}^*$ تا $\mathbf{p}$ یعنی $d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p})$ را متناظر قرار می‌دهد. دیده می‌شود که $f\geqslant 0$ و f نیز پیوسته است بدین معنی که به‌ازای هرقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M تابع مرکب $f(\mathbf{x})$ پیوسته است. با استفاده از لم ۳.۷ و با توجه به‌فشردگی M، ثابت می‌شود که f در نقطه‌ای از M به مینیمم می‌رسد. از جهت دیگر بنا برتعریف کوچکترین‌کران بالا، اعداد $t<t^*$ را می‌توان به‌قدرکافی نزدیك به t^* طوری انتخاب کردکه $\alpha(t)$ به M متعلق باشد، وچون α پیوسته است(زیرا دیفرانسیلپذیر است)،مسافت متناظر به‌آن یعنی $d(\mathbf{p}^*, \alpha(t))$ نیز به‌قدر کافی کوچك خواهد بود، یعنی مینیمم f فقط می‌تواند صفرباشد واین بدان معنی است‌که f در $\mathbf{p}^*$ مینیمم است و درنتیجه $\mathbf{p}^*$ به M، حوزهٔ f، متعلق است.

اما M زیرمجموعه‌ای باز از N است وهرنقطه از N که به‌قدرکافی به $\mathbf{p}^*$ نزدیك باشد، به M تعلق خواهد داشت. بنابراین اگر $t>t^*$ به‌قدرکافی به t^* نزدیك باشد، $\alpha(t)$ نیز به M متعلق است و این با تعریف t^* متناقض است. ∎



شکل ۴۸.۴

تمرینات

۱. معلوم کنید که از رویه‌های زیر کدام فشرده و کدام همبند است:
(الف) کره‌ای که از آن یك نقطه حذف شده است.
(ب) ناحیهٔ $z > 0$ در $M : z = xy$
(ج) رویه‌ای که در شکل ۱۰.۴ دیده می‌شود.
(د) $M : x^2 + y^4 + z^6 = 1$
(ه) چنبره‌ای که از آن خم $\alpha(t) = \mathbf{x}(t, t)$ را حذف کرده‌اند. (تمرین ۲، بند ۳ فصل ۴ را ببینید.)

۲. گیریم F نگاشتی از رویهٔ M روی رویهٔ N باشد. ثابت کنید که:
(الف) اگر M همبند باشد N نیز همبند است.
(ب) اگر M فشرده باشد N نیز فشرده است.

۳. گیریم $F : M \to N$ نگاشتی منظم است. ثابت کنید که اگر N جهت‌پذیر باشد M نیز جهت‌پذیر است.

۴. گیریم f تابعی دیفرانسیل‌پذیر با مقدار حقیقی روی رویهٔ همبند M باشد. ثابت کنید که:
(الف) اگر $df = 0$، آنگاه f ثابت است.
(ب) اگر f هیچ‌گاه صفر نشود، آنگاه همواره $f > 0$ یا $f < 0$.

۵. (الف) ثابت کنید که هر رویهٔ همبند و جهت‌پذیر تنها دارای دو میدان برداری قائم یکانی است که از لحاظ علامت مخالف یکدیگرند. این دو میدان را بـا $\pm U$ نشان می‌دهیم. (راهنمایی: از تمرین ۴ استفاده کنید.)
(ب) ثابت کنید که اگر M جهت‌پذیر نباشد، هر نقطهٔ آن به ناحیه‌ای جهت‌پذیر و همبند تعلق دارد. (بدین ترتیب حتی رویه‌های جهت‌ناپذیر به طور موضعی دارای میدانهای برداری قائم یکانی می‌باشند.)

۶. گیریم $F : M \to N$ یك نگاشت منظم باشد. این تعمیم قضیهٔ ۶.۷ را ثابت کنید. اگر M فشرده و N همبند باشد در این صورت F پوشاست (M را بر روی N می‌برد).

۷. نوار موبیوس (شکل ۴۷.۴) را می‌توان به‌عنوان رویهٔ خطکشی به‌صورت

$$\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + v\delta(u), \qquad -\frac{1}{2} \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$$

ساخت که در آن

$$\beta(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\delta(u) = \left(\cos\frac{u}{2}\right)\beta(u) + \left(\sin\frac{u}{2}\right)U_3$$

(مولد L درهر دورکه دایرهٔ β را طی کند، نیمدور می‌چرخد.)
(الف) مطلوب است محاسبهٔ

$$E=\frac{v^{2}}{4}+\left[1+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]^{2},\qquad F=0,\qquad G=1$$

ومانند تمرین ۲ بند ۲ نشان دهیدکه $\mathbf{x}$ منظم است.
(ب) روی طرحی از M خم مربوط به‌پارامتر u و $v=1/4$ را نشان دهید. ثابت کنیدکه خمهای مربوط بـه پارامتر u بسته‌اند و (بجز β) دارای دورهٔ تناوب 4π می‌باشند.

۰۸ رویهٔ M^{*} حاصل ازنوار موبیوس درتمرین بالا را با حذف دایرهٔ β از آن، درنظر می‌گیریم. جهتپذیری و همبندی M^{*} را بررسی کنید.

۰۹ (مثال نقض). با ذکر مثالهایی بطلان احکام زیر را ثابت‌کنید:
(الف) عکس (الف) و (ب) درتمرین ۲.
(ب) تمرین ۳ که در آن F منظم فرض نشود.
(ج) عکس تمرین ۳.

۱۰۰ رویهٔ M در $\mathbf{E}^{3}$ هنگامی در $\mathbf{E}^{3}$ بسته است‌کـه مجموعهٔ نقاط $\mathbf{E}^{3}$ کـه به M متعلق نیستند یك مجموعهٔ باز از $\mathbf{E}^{3}$ باشد (اگر $\mathbf{p}$ به M متعلق نباشد یك εـ‌همسایگی برای $\mathbf{p}$ بتوان یافت‌که با M متقاطع نباشد) نشان دهیدکه:
(الف) هر رویه‌ای در $\mathbf{E}^{3}$ که به‌صورت ضمنی $M: g=c$ نمایش یابد در $\mathbf{E}^{3}$ بسته است.
(ب) هر رویهٔ فشرده در $\mathbf{E}^{3}$، در $\mathbf{E}^{3}$ بسته است.

۱۱۰ (کرانداری). رویهٔ M در $\mathbf{E}^{3}$ را هنگامی کراندار نامندکه عددی مانند R وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $\mathbf{p}$ از M داشته باشیم $\|\mathbf{p}\|\leqslant R$. (بدین‌ترتیب M در داخل یك‌کره واقع است.) ثابت‌کنیدکه هر رویهٔ فشرده در $\mathbf{E}^{3}$ کراندار است.

با دو تمرین اخیر ثابت شدکه هر رویهٔ فشرده در $\mathbf{E}^{3}$ بسته وکراندار است، عکس این مطلب ازیك قضیهٔ اساسی درتوپولوژی نتیجه می‌گردد.

۱۲۰ قضیهٔ ۶.۷ را فقط با فرض آنکه M در $\mathbf{E}^{3}$ بسته باشد (به جـای فرض فشردگی) ثابت‌کنید.

۱۳۰ فشردگی وهمبندی رویهٔ $M: g=1$ را درهریك ازحالتهای زیر بررسی کنید:

(الف) $g=x^{2}-y^{3}+z^{4}$ (ج) $g=z^{2}+x^{2}y^{2}$

(ب) $g=x^{4}-y+z$ (د) $g=(x^{2}+y^{2}-4)^{2}+(z-4)^{2}$

۱۴. ثابت کنید که هر رویهٔ دورانی M همبند و جهتپذیر است، وشرط لازم وکافی برای فشردگی آن، آن است که خم مولد C بسته باشد.

۸. خمینه‌ها

درمشاهدات وتجربه‌های روزمرهٔ خود همواره با رویه‌های $\mathbf{E}^3$ سروکار داریم ومنطق ایجاب می‌کند که آنها را ازلحاظ ریاضی مورد پژوهش و تفحص قرار دهیم. اما هنگامی که این مفهوم را از دید انتقادی بررسی می‌کنیم این سؤال مطرح می‌گردد که آیا در $\mathbf{E}^4$ . . . یا $\mathbf{E}^n$ . . . نیز می‌توان رویه‌هایی تصور کرد؟ وهمچنین آیا رویه‌هایی می‌توان یافت که اصلاً درهیچ فضای اقلیدسی واقع نباشند؟ برای این منظور در تعریف کلی رویه‌ها نباید به‌مشاهدات مستقیم خود ازجهان خارج تکیه کنیم، بلکه باید از تجربیات ریاضی که دربارهٔ رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ داریم استفاده نماییم. بدین ترتیب ازتعریف اساسی (۲.۱) هرچه را به‌طریقی به $\mathbf{E}^3$ مربوط است حذف می‌کنیم وآنچه باقی می‌ماند درست یك رویه خواهد بود.

اولاً گوییم،رویه عبارت است از یك مجموعهٔ M: گردایه‌ای‌است از اشیاء و هیچ لزومی ندارد که نقاط $\mathbf{E}^3$ باشند. قطعه مختصاتی مجرد در M نیز تابعی یك به یك $\mathbf{x}: D \to M$ ازیك مجموعهٔ باز D از $\mathbf{E}^2$ درمجموعهٔ M خواهد بود. اما تا اینجا هیچ وسیله‌ای برای تعبیر دیفرانسیلپذیری این تابع در دست نیست. ازجهت دیگر، برای تعریف مناسب رویه فقط به‌شرط همپوشی هموار (فرع ۳.۳) احتیاج داریم. اثبات این مطلب نیز از لحاظ منطقی غیرممکن است. ازاین رو مطابق روش معمول ریاضیدانان آن را به‌عنوان یك اصل موضوع درنظر می‌گیریم.

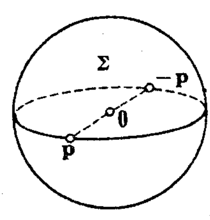
۱.۸. تعریف. رویه عبارت است ازیك مجموعهٔ M ویك گردایهٔ قطعه‌های مختصاتی مجرد $\mathcal{P}$ در M به‌طوری که:

(۱) نگاره‌های قطعه‌های مختصاتی متعلق به $\mathcal{P}$ مجموعهٔ M را بپوشانند.

(۲) به‌ازای هر دوقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از $\mathcal{P}$ توابع مرکب $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ و $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}$ دیفرانسیلپذیر (اقلیدسی) باشند (و روی زیرمجموعه‌های بازی از $\mathbf{E}^2$ معین باشند).

این تعریف تعمیم تعریف ۲.۱ می‌باشد: رویه‌های $\mathbf{E}^3$ بدین‌مفهوم نیز رویه‌اند. اما رویه‌های بسیاری وجود دارند که هیچ‌گاه در $\mathbf{E}^3$ نیستند.

۲.۸. مثال. صفحهٔ تصویری $\bar{\Sigma}$. در $\mathbf{E}^3$ کرهٔ یکهٔ Σ را درنظر می‌گیریم وبا متحدکردن نقاط متقاطر آن صفحهٔ تصویری $\bar{\Sigma}$ را می‌سازیم، بدین طریق که نقاط $\mathbf{p}$ و $-\mathbf{p}$ را به‌عنوان یك نقطه درنظرمی‌گیریم (شکل ۴۹.۴). یعنی $\bar{\Sigma}$ ازهمهٔ زوجهای نقاط متقاطر $\{\mathbf{p}, -\mathbf{p}\}$ کره تشکیل شده است. (ترتیب نقشی ندارد $\{\mathbf{p}, -\mathbf{p}\} = \{-\mathbf{p}, \mathbf{p}\}$.)



شکل ۴۹.۴

برای آنکه از $\bar{\Sigma}$ یك رویه بسازیم، و بعداً آن را بررسی کنیم، از دو تابع استفاده خواهیم کرد: یکی نگاشت $A(\mathbf{p})=-\mathbf{p}$ از کرهٔ Σ و دیگری تصویر Σ روی $\bar{\Sigma}$، $P\{\mathbf{p}\}=\{\mathbf{p},-\mathbf{p}\}$. توجه شود که دراینجا داریم $PA=P$ وتساوی $P(\mathbf{p})=P(\mathbf{q})$: ※ فقط وفقط یا بدازای $\mathbf{q}=\mathbf{p}$ یا بدازای $\mathbf{q}=-\mathbf{p}$ برقرار است.

اکنون در Σ قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ را «کوچك» نامیم هرگاه مسافت اقلیدسی هر دو نقطهٔ آن از ۱ کوچکتر باشد. اگر $\mathbf{x}: D\to\Sigma$ یك قطعه مختصاتی کوچك باشد، دراین صورت تابع مرکب $P(\mathbf{x}): D\to\bar{\Sigma}$ یك به‌یك است و درنتیجه یك قطعه مختصاتی مجرد در $\bar{\Sigma}$ خواهد بود. گردایهٔ همهٔ این نوع قطعه‌های مختصاتی، $\bar{\Sigma}$ را به‌صورت رویه در می‌آورد، شرط اول درتعریف ۱.۸ واضح است وطرز اثبات شرط دوم به‌اختصار از این قرار است:

گیریم $P(\mathbf{x})$ و $P(\mathbf{y})$ در $\bar{\Sigma}$ همپوش باشند؛ یعنی نگاره‌هایشان یك نقطهٔ مشترك داشته باشند. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در Σ همپوش باشند، می‌توان ثابت‌کرد که داریم $(P\mathbf{y})^{-1}(P\mathbf{x})=\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}$، که بنابر فرع ۳.۳ دیفرانسیلپذیر است و روی زیرمجموعهٔ بازی معین است (توجه: از کوچکی قطعه‌های مختصاتی و رابطهٔ ※ استفاده‌کنید). از جهت دیگر اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ همپوش نباشند به‌جای $\mathbf{y}$ از $A(\mathbf{y})$ استفاده می‌کنیم و $\mathbf{x}$ و $A(\mathbf{y})$ حتماً همپوش‌اند وباز استدلال پیش به‌کار می‌رود.

نتیجه: صفحهٔ تصویری $\bar{\Sigma}$ یك رویه است.[1]

برای تأکید در وجه تمایز رویه‌های $\mathbf{E}^3$ و مفهوم کلی رویه که دربالا تعریف شد گاهی آن را رویهٔ مجرد می‌نامند. توجه شود که $\mathbf{E}^2$ هنگامی‌که با یك قطعه مختصاتی تنهای $\mathbf{x}(u,v)=(u,v)$ مجهز باشد، یك رویهٔ مجرد است.

برای آنکه در رویهٔ مجرد M تا حد امکان قطعه‌های مختصاتی فراوان داشته باشیم، معمولاً گردایهٔ $\mathscr{P}$ را توسعه می‌دهند به‌طوری که همه قطعه‌های مختصاتی در M را که با عناصر $\mathscr{P}$ به‌طور هموار همپوش‌اند شامل باشد. در بررسی رویهٔ M فقط از این قطعه‌های مختصاتی می‌توانیم استفاده‌کنیم. تأکید می‌شود که دو رویهٔ مجرد M_1 و M_2 که مجموعهٔ نقاط آنها یکی باشد، اگر گردایه‌های (توسعه یافته) قطعه‌های مختصاتی $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_2$ متفاوت باشد، دو رویه مختلف‌اند.

برای واردکردن حساب دیفرانسیل و انتگرال روی یك رویهٔ مجرد M فقط یك مسأله را باید حل‌کنیم، وآن تعریف سرعت یك خم در M است. زیرا هرچیز دیگر ازقبیل توابع دیفرانسیلپذیر، خمها، بردارهای مماس، میدانهای برداری مماس، فرمهای دیفرانسیلی وغیره همان تعاریف و قضایایی که دربارهٔ رویه‌های $\mathbf{E}^3$ بیان شده‌اند بدون تغییری به‌کار خواهند رفت. (برای‌اینکه ناظر به‌تعریف جدید ۳.۸ باشیم، لازم‌است چند برهان را به‌هم پیوندیم،

---

۱. این اصطلاح دراین مثال، ازهندسهٔ تصویری گرفته شده است. ولی، تمرین ۲ نشان می‌دهد که مناسبتر است $\bar{\Sigma}$ به‌صورت یك کرهٔ پیچانده شده توصیف شود.

ولی این امر مشکل چندانی پیش نمی‌آورد.) اما درحالت مجرد فاقد سرعت خم می‌باشیم، زیرا درآنجا سرعت از بردارهای مماس $\mathbf{E}^۳$ تشکیل می‌شد، ولی در اینجا $\mathbf{E}^۳$ را حذف کرده‌ایم.

در تعریف سرعت $\alpha'(t)$، تنها نکته‌ای که باید رعایت کرد آن است که از این تعریف نیز همان خواص اساسی پیش به‌دست آید. خصوصیت مشتق امتدادی (لم ۴.۶ فصل اول) برای این منظور کاملاً مناسب است.

۳.۸ تعریف. گیریم $\alpha : I \longrightarrow M$ خمی در رویهٔ مجرد M باشد. بدازای هر t متعلق به I بردار سرعت $\alpha'(t)$ عبارت است از تابعی که به‌ازای هر تابع با مقدار حقیقی و دیفرانسیلپذیر f روی M داشته باشیم

$$\alpha'(t)[f]=\frac{d(f\alpha)}{dt}(t)$$

بدین ترتیب $\alpha'(t)$ تابعی است با مقدار حقیقی که حوزهٔ آن مجموعهٔ تمام توابع دیفرانسیلپذیر روی M می‌باشد. این تنها چیزی است که برای تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال رویه‌های $\mathbf{E}^۳$ به‌حالت رویه‌های مجرد مورد نیاز است.

خواننده ممکن است احساس کند که در راه تجرید بـه‌قدرکافی پیش رفته است، اما با یك گام دیگر راه به‌پایان می‌رسد.

ما اینك یك حساب دیفرانسیل وانتگرال برای $\mathbf{E}^n$ (فصل اول) ویك حساب دیفرانسیل و انتگرال برای رویه‌ها داریم. این دومبحث کاملاً مشابه‌اند، البته این شباهت فقط ازلحاظ ریاضی است، و بعـدأ تـولید اشکال خواهدکـرد. آنچه بدان نیازمندیم تنها یك حساب دیفرانسیل و انتگرال است که این دو، حالتهای خاص آن بـاشند. عامترین شیئی که روی آن می‌توان حساب دیفرانسیل و انتگرال را اجرا کرد، خمینه نـام دارد، وآن رویـه‌ای است مجرد با بعد دلخواه n.

۴.۸ تعریف. خمینهٔ n بعدی M عبارت است از یك مجموعـهٔ مجهز به‌یك گردایهٔ $\mathcal{P}$ از قطعه‌های مختصاتی مجرد (توابع یك به‌یك $\mathbf{x} : D \longrightarrow M$، D مجموعهٔ بـازی در $\mathbf{E}^n$) به‌طوری که

(۱) نگاره‌های قطعه‌های مختصاتی متعلق به‌گردایهٔ $\mathcal{P}$، M را بپوشانند.

(۲) به‌ازای هردوقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به‌گردایهٔ $\mathcal{P}$، توابع مرکب $\mathbf{y}^{-۱}\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}^{-۱}\mathbf{y}$ دیفرانسیلپذیر اقلیدسی (و روی مجموعه‌های بازی از $\mathbf{E}^n$ معین) باشند.

بدین ترتیب یك رویه (تعریف ۱.۸) درست یك خمینهٔ دوبعدی است. فضای اقلیدسی $\mathbf{E}^n$ یك خمینهٔ n بعدی ویژه‌ای است، گردایهٔ قطعه مختصاتی آن فقط از تابع همانی تشکیل یافته است.

برای آنکه این تعریف را تا آنجا که ممکن است به‌تعریف رویـه‌های $\mathbf{E}^۳$ نزدیك

نگاه داریم، اندکی از تعریف معمولی خمینه به‌دور افتاده‌ایم، زیرا معمولاً در تعریف خمینه، توابع معکوس $\mathbf{x}^{-1}:\mathbf{x}(D) \to D$ را اساس قرار می‌دهند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال دربارهٔ یك خمینهٔ nبعدی دلخواه M مطابق همان حالت خاص $n=2$ متناظر به‌رویهٔ مجرد تعریف می‌گردد. توابع دیفرانسیلپذیر، بردارهای مماس، میدانهای برداری و نگاشتها درست مانند پیش بیان می‌شوند: فقط باید به‌جای $i=1, 2$ قرار دهیم $i=1, 2, \dots, n$. فرمهای دیفرانسیلی روی یك خمینهٔ M دارای همان خواص عمومی‌اند که درحالت $n=2$ در بندهای ۴، ۵ و ۶ بررسی کردیم. اما در این حالت به‌ازای $0 \leqslant p \leqslant n$، p-فرمیها وجود دارند، بنابراین هنگامی که n، بعد M، بزرگ باشد، وضع از حالت $n=2$ پیچیده‌تر خواهد بود و شیوه‌های محاسباتی دیگری مورد نیاز است.

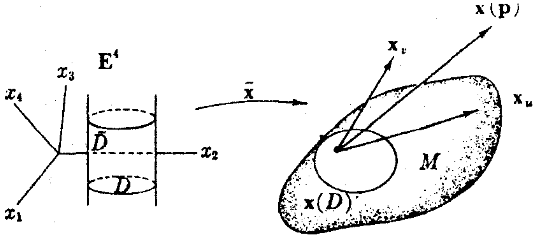
هرجاکه در ریاضیات به‌حساب دیفرانسیل وانتگرال وکاربردهای آن برخورد می‌کنیم، خمینه‌ها را نیز می‌بینیم، و خمینه‌های با ابعاد بالاتر در مسائلی (نظری و عملی) که در ابتدا فقط ۲ یا ۳ بعدی به‌نظر می‌رسند واجد اهمیت می‌باشند. به‌عنوان مثال به‌بررسی یك خمینهٔ چهار بعدی که در همین فصل، حداقل به‌طور ضمنی آمده است می‌پردازیم.

۵.۸ مثال. کلاف مماس بر یك رویه. رویهٔ M را درنظر می‌گیریم، و مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس بر M درهمهٔ نقاط آن را با $T(M)$ نشان می‌دهیم. (از لحاظ آسانی تصور، M را به‌عنوان یك رویه در $\mathbf{E}^3$ درنظر می‌گیریم، ولی در واقع می‌توان به‌جای آن یك رویهٔ مجرد یا یك خمینه با ابعاد دلخواه قرار داد.) M، ۲ بعدی است و هرصفحهٔ مماس $T_p(M)$ نیز ۲ بعدی است، بدین ترتیب $T(M)$، ۴ بعدی خواهد بود. برای آنکه مجموعهٔ $T(M)$ را به‌صورت یك خمینه درآوریم، باید یك گردایهٔ $\tilde{\mathfrak{P}}$ ازقطعه‌های‌مختصاتی فراهم کنیم، برای این منظور از هر قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M یك قطعه مختصاتی $\tilde{\mathbf{x}}$ در $T(M)$ می‌سازیم. گیریم $\mathbf{x}:D \to M$، و فرض‌کنیم $\tilde{\mathbf{D}}$ مجموعهٔ بازی از $\mathbf{E}^4$ باشد، که از همهٔ نقاط (p_1, p_2, p_3, p_4) تشکیل شده‌است که به‌ازای آنها (p_1, p_2) به $\mathbf{D}$ متعلق است. اکنون تابع $\tilde{\mathbf{x}}:\tilde{\mathbf{D}} \to T(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\mathbf{x}}(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_3\mathbf{x}_u(p_1, p_2) + p_4\mathbf{x}_v(p_1, p_2)$$

(در شکل ۵۰.۴ $\mathbf{E}^2$ را همان صفحهٔ x_1x_2 از $\mathbf{E}^4$ گرفته‌ایم.)

با استفاده از تمرین ۳ بند ۳ و برهان لم ۶.۳ به آسانی می‌توان نشان دادکه (۱) هریك از توابع $\tilde{\mathbf{x}}$ یك به‌یك است وبنابراین یك قطعه مختصاتی در $T(M)$، به‌مفهومی که در تعریف ۴.۸ آمد، می‌باشد. (۲) گردایهٔ $\tilde{\mathfrak{P}}$ متشکل ازاین قطعه‌های مختصاتی در دو



شکل ۵۰.۴

شرط مذکور در تعریف ۴.۸ صدق می‌کند. بدین ترتیب $T(M)$ یك خمینهٔ چهار بعدی است که کلاف مماس M نام دارد.

تمرینات

۱. نشان دهید برای آنکه رویهٔ M جهتناپذیر باشد کافی است بتوان خم بستهٔ $\alpha:[\circ, 1] \to M$ و میدان برداری Y را روی α طوری تعیین کرد که
(الف) Y و α' در هر نقطه استقلال خطی داشته باشند.
(ب) تساوی $Y(1) = -Y(\circ)$ برقرار باشد.

۲. خواص زیر را دربارهٔ صفحهٔ تصویری $\bar{\Sigma}$ اثبات کنید:
(الف) اگر $P:\Sigma \to \bar{\Sigma}$ تابع تصویر باشد، آنگاه هر بردار مماس بر $\bar{\Sigma}$ نگارهٔ دو بردار مماس بر Σ به‌وسیلهٔ P_* خواهد بود. این دو بردار به‌صورت $\mathbf{v}_p$ و $(-\mathbf{v})_{-p}$ می‌باشند.
(ب) $\bar{\Sigma}$ فشرده، همبند و جهتناپذیر است.
(راهنمایی: برای (الف) از تمرین ۵، فصل ۴، بند ۵ استفاده کنید.) ثابت می‌شود که هر رویهٔ فشرده در $\mathbf{E}^3$ جهتپذیر است، بنابراین $\bar{\Sigma}$ دیفئومرف با هیچ رویه در $\mathbf{E}^3$ نمی‌باشد.

۳. ثابت کنید که کلاف مماس (۵.۸) یك خمینه است. (اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ قطعه‌های مختصاتی همپوش در M باشند، فرمول صریحی برای $\tilde{\mathbf{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$ پیدا کنید.)

۴. ثابت کنید که اگر M نگارهٔ تنها یك قطعه مختصاتی $\mathbf{x}:\mathbf{E}^2 \to M$ باشد، دراین صورت کلاف مماس $T(M)$ با $\mathbf{E}^4$ دیفئومرف است.

۵. (صفحه با دو مبدأ). گیریم M از همهٔ زوجهای مرتب اعداد حقیقی (u, v) و نقطهٔ

اضافی $\mathbf{o}^*$ تشکیل شده است. توابع $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از $\mathbf{E}^2$ به M را به‌صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathbf{x}(u, v)=\mathbf{y}(u, v)=(u, v) \qquad \text{به‌ازای } (u, v)\neq(0, 0)$$

و

$$\mathbf{x}(0, 0)=\mathbf{o}=(0, 0) \quad \text{و} \quad \mathbf{y}(0, 0)=\mathbf{o}^*$$

ثابت کنید که:

(الف) قطعه‌های مختصاتی مجرد $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از M یك رویه می‌سازند.

(ب) M همبند است.

(ج) تابع $F:M\to M$ نگاشتی است که در آن $F(\mathbf{o})=\mathbf{o}^*$ و $F(\mathbf{o}^*)=\mathbf{o}$، اما به‌ازای هر نقطهٔ دیگر از M، $F(\mathbf{p})=\mathbf{p}$.

بررسی رویه‌هایی از این نوع با دشواریهایی همراه است، و برای حذف آنها فرض دیگری به‌تعریف ۱.۸ اضافه می‌کنیم: به‌ازای نقاط $\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$ از M بتوان قطعه‌های مختصاتی مجرد $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به $\mathcal{P}$ را طوری تعیین کرد که $\mathbf{p}$ به $\mathbf{x}(D)$ و $\mathbf{q}$ به $\mathbf{y}(E)$ متعلق باشند، و $\mathbf{x}(D)$ و $\mathbf{y}(E)$ همدیگر را قطع نکنند (اصل موضوع هاوسدورف).

۶. میدان برداری V روی رویهٔ M را درنظر می گیریم. یك خم α در M را هنگامی خم انتگرال V می‌نامند که به‌ازای هر t داشته باشیم $\alpha'(t)=V(\alpha(t))$. بدین ترتیب خم انتگرال در هرنقطه دارای سرعتی است که به‌وسیلهٔ V معین می گردد. اگر $\alpha(0)=\mathbf{p}$، گوییم α از $\mathbf{p}$ آغاز می‌شود.

(الف) درحالت خاص $M=\mathbf{E}^2$ ثابت کنید که خم $t\to(a_1(t), a_2(t))$ یك خم انتگرال برای میدان برداری $\mathbf{v}=f_1U_1+f_2U_2$ با آغاز (a, b) خواهدبود، اگر و فقط اگر

$$\begin{cases}\dfrac{da_1}{dt}=f_1(a_1, a_2)\\[2ex] \dfrac{da_2}{dt}=f_2(a_1, a_2)\end{cases} \qquad \text{و} \qquad \begin{cases}a_1(0)=a\\[2ex] a_2(0)=b\end{cases}$$

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جواب یکتایی‌را برای این نوع دستگاهها پیشبینی می‌نماید.

(ب) خم انتگرال

$$\mathbf{v}=-u^2U_1+uv\,U_2 \qquad \text{روی } \mathbf{E}^2$$

را که از نقطهٔ $(1, -1)$ آغاز می‌شود بیابید. (راهنمایی: معادلات دیفرانسیل دراین مورد با روشهای مقدماتی حل می‌شوند. از ثابتهای اختیاری استفاده کنید تا نقطهٔ

$(-1, 1)$ به‌نقطهٔ آغاز بدل شود.)

۷. ثابت کنید که هرمیدان برداری V روی یك رویهٔ M دارای یك خم انتگرال می‌باشد، که از نقطهٔ مفروضی آغاز می‌شود. (راهنمایی: یك قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M، با $\mathbf{x}(a, b)=\mathbf{p}$، بگیرید و فرض کنید $\mathbf{v}$ میدان برداری در $\mathbf{E}^2$ چنان باشد که $\mathbf{x}_*(\mathbf{v})=V$.)

۸. ثابت کنید که هر رویهٔ دورانی یا با یك چنبره یا با یك استوانه دیفئومرف است. (به‌طریق مشابه هر رویهٔ دورانی زایده‌دار یا با یك صفحه یا با یك کره دیفئومرف است. به‌تمرین ۱۲، فصل ۴، بند ۱ مراجعه کنید.)

۹. (حاصل‌ضرب دکارتی). رویه‌های M و N را درنظر می‌گیریم، مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ را که در آن $\mathbf{p}$ به M و $\mathbf{q}$ به N تعلق دارد با $M \times N$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathbf{x}:D \to M$ و $\mathbf{y}:E \to N$ دو قطعه مختصاتی باشند، ناحیه‌ای از $\mathbf{E}^4$ را که از همهٔ نقاط (u, v, u_1, v_1)، با (u, v) در D، و (u_1, v_1) در E تشکیل شده است، با $D \times E$ نشان می‌دهیم. سپس تابع $\mathbf{x} \times \mathbf{y}:D \times E \to M \times N$ را با

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(u, v, u_1, v_1)=(\mathbf{x}(u, v), \mathbf{y}(u_1, v_1))$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که گردایهٔ $\mathcal{P}$ متشکل از این نگاشتهای مجرد، $M \times N$ را به‌صورت یك خمینهٔ (۴ بعدی) درمی‌آورد. $M \times N$ حاصل ضرب دکارتی M و N نام دارد.

همین طرح دربارهٔ هر دو خمینهٔ دلخواه قابل اجراست، مثلاً $\mathbf{E}^1 \times \mathbf{E}^1$ دقیقاً همان $\mathbf{E}^2$ است.

۱۰. گیریم M یك رویهٔ مجرد باشد. یك نشانیدن خاص M در $\mathbf{E}^3$ عبارت است از نگاشت منظم یك‌به‌یك $F:M \to \mathbf{E}^3$ به‌طوری که تابع معکوس $F^{-1}:F(M) \to M$ پیوسته باشد. ثابت کنید که $F(M)$ نگارهٔ حاصل از یك نشانیدن خاص یك رویه در $\mathbf{E}^3$ است (تعریف ۲.۱) و با M دیفئومرف است.

اگر $F:M \to \mathbf{E}^3$ فقط منظم باشد، آنگاه F را یك فروبری M در $\mathbf{E}^3$، و نگارهٔ $F(M)$ را اغلب «رویهٔ فرو برده شده» می‌نامند ولو اینکه در تعریف ۲.۱ صدق نکند.

۹. خلاصه

دراین فصل به‌تدریج ازمفهوم بدیهی رویه در $\mathbf{E}^3$ به‌مفهوم کلی خمینه رسیدیم. اکنون این خط سیر را درجهت عکس برمی‌گردیم: یك خمینهٔ nبعدی M عبارت است از فضایی که در مجاورت هرنقطهٔ آن با فضای اقلیدسی $\mathbf{E}^n$ شباهت دارد. هرخمینه دارای یك حساب

دیفرانسیل وانتگرال می‌باشد که از توابع دیفرانسیلپذیر، بردارهای مماس، میدانهای برداری، نگاشتها و بالاتر از همه فرمهای دیفرانسیلی تشکیل شده است. ساده‌ترین خمینهٔ nبعدی همان خود $\mathbf{E}^n$ است. هر خمینهٔ دوبعدی را یك رویه می‌نامند، بعضی از رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ وجود دارند، و بعضی در $\mathbf{E}^3$ نیستند. تمام این مبحث از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی معمولی روی آشناترین خمینه‌ها، خط حقیقی، به دست آمده است، و روش کلی حساب دیفرانسیل و انتگرال همهٔ خمینه‌ها یکی است.

۵

عملگرهای شکلی

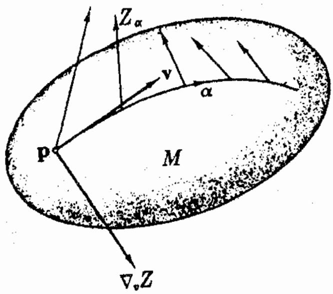
در فصل ۲ شکل یك خم در $\mathbf{E}^3$ را به‌وسیلهٔ توابع خمیدگی و تاب اندازه‌گیری کردیم. در اینجا مسألهٔ اندازه‌گیری مشابه آن را دربارهٔ رویه‌ها بررسی می‌کنیم، و به این نتیجه می‌رسیم که شکل یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ به وسیلهٔ یك عملگر خطی به‌خصوصی مانند S که روی هریك ازصفحات مماس M تعریف می‌گردد به‌طور بینهایت کوچك مشخص می‌شود. همانند خمها، دو رویه در $\mathbf{E}^3$ را هنگامی همشکل نامند که قابل انطباق باشند. همچنین صحت اندازه‌گیریهای بینهایت‌کوچك خود را با اثبات انطباق‌پذیری دورویه باعملگرهای شکلی«یکسان» مدلل می‌داریم. بدینسان تغییرناپذیرهای جبری عملگرهای شکلی(دترمینان، اثر، ...) دارای تعبیر هندسی برای رویهٔ M می‌شوند. این موضوع را به‌تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد، و روشهای مؤثری برای‌محاسبهٔ این تغییرناپذیرها پیدا می‌کنیم و در روی چند رویه‌که ازلحاظ هندسی جالب توجه‌اند آزمون می‌کنیم.

از این به بعد نماد $M \subset \mathbf{E}^3$ به معنای یك رویهٔ همبند M در $\mathbf{E}^3$، چنان که در فصل ۴ تعریف شد، به‌کار می‌رود.

۱. عملگر شکلی $M \subset \mathbf{E}^3$

گیریم Z یك میدان برداری اقلیدسی (تعریف ۷.۳ فصل ۴) روی یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ باشد. گرچه Z فقط در نقاط M معین است، امـا مشتق‌کوواریانی آن $\nabla_v Z$ (فصل ۲،

بند ۵)، مادامی که $\mathbf{v}$ مماس بر M باشد، دارای معنی است. مطابق معمول $\nabla_v Z$ میزان تغییر Z درامتداد $\mathbf{v}$ است، و بەدو روش می‌توان آن را محاسبه کرد.



شکل ۱۰۵

روش ۱. گیریم α خمی در M با سرعت اولیهٔ $\alpha'(0)=\mathbf{v}$ باشد. تحدید Z به α یعنی میدان برداری $t\to Z(\alpha(t))$ روی α را با Z_α نشان می‌دهیم (شکل ۱۰۵). آنگاه:

$$\nabla_v Z=(Z_\alpha)'(0)$$

این مشتقگیری درفصل ۲، بند ۲ آمده است.

روش ۲. Z را برحسب میدان سه وجهی طبیعی $\mathbf{E}^3$ بیان می‌کنیم:

$$Z=\sum z_i U_i$$

آنگاه

$$\nabla_v Z=\sum \mathbf{v}[z_i]U_i$$

این مشتق امتدادی درفصل ۴، بند ۳ آمده است.

به‌آسانی می‌توان سازگاری نتایج این دو روش‌را تحقیق کرد. توجه شودکه حتی اگر Z یك میدان برداری مماس باشد، مشتق کوواریانی آن $\nabla_v Z$ می‌تواند بر M مماس نباشد.

از قضیهٔ ۵.۷ فصل ۴، نتیجه می‌شود که اگر M رویه‌ای جهتپذیر در $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه یك میدان برداری قائم یکهٔ U روی M وجود دارد. زیرا اگر Z یك میدان برداری قائم باشد که هیچ‌گاه صفر نشود، آنگاه $U=Z/\|Z\|$ همچنان قائم است و دارای طول واحد می‌باشد. چون M را همبند فرض کرده‌ایم، دقیقاً دومیدان برداری قائم یکهٔ U و $-U$ روی همهٔ رویهٔ M وجود دارد. حتی در حالتی هم که M جهتپذیر نیست، قائمهای یکهٔ U و $-U$ را در یك همسایگی هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M می‌توان به‌دست آورد (تمرینهای فصل ۴، بند ۷ را ببینید).

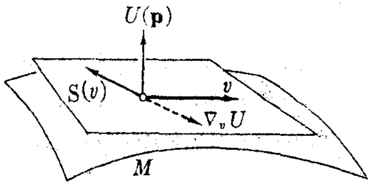
اکنون می‌توانیم به‌اندازه‌گیری ریاضی شکل یك رویه در $\mathbf{E}^3$ بپردازیم.

۱.۱. تعریف. اگر $\mathbf{p}$ نقطه‌ای از M باشد، آنگاه به‌ازای هربردار مماس $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$، قرار می‌دهیم:

$$S_p(\mathbf{v})=-\nabla_v U$$

که در آن U یك‌میدان برداری قائم یکه دریك همسایگی $\mathbf{p}$ در M است. S_p را عملگر

شکلی M در $\mathbf{p}$ (که از U مشتق شده است) می‌نامند.* (شکل ۲.۵)



شکل ۲.۵

صفحهٔ مماس M در هر نقطهٔ $\mathbf{q}$ از همهٔ بردارهای اقلیدسی عمود بر $U(\mathbf{q})$ تشکیل می‌شود. بنابراین $\nabla_{\mathbf{v}} U$ میزان تغییر U در امتداد $\mathbf{v}$ معرف چگونگی تغییر صفحات مماس M در امتداد $\mathbf{v}$ می‌باشد، و این خود چگونگی خمیدگی M را به‌طور بینهایت کوچك در $\mathbf{E}^3$ بیان می‌کند.

توجه شود که اگر U را به $-U$ بدل کنیم، آنگاه S_p به $-S_p$ بدل می‌شود.

۲.۱ لم. به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $M \subset \mathbf{E}^3$، عملگر شکلی

$$S_p : T_p(M) \to T_p(M)$$

یك عملگر خطی روی صفحهٔ مماس M در $\mathbf{p}$ است.

برهان. چون در تعریف ۱.۰، U یك میدان برداری یکه است، بنابراین $U \cdot U = 1$، و بنابرخاصیت لایبنیتز مشتقهای کوواریانی داریم:

$$0 = \mathbf{v}[U \cdot U] = 2\nabla_v U \cdot U(\mathbf{p}) = -2S_p(\mathbf{v}) \cdot U(\mathbf{p})$$

کـه درآن $\mathbf{v}$ مماس بر M در $\mathbf{p}$ است. چون به علاوه U یك میدان برداری قائم است، $S_p(\mathbf{v})$ بر M در $\mathbf{p}$ مماس می‌باشد. بنابراین S_p تابعی است از $T_p(M)$ به $T_p(M)$. (تأکید می‌شود که ما اصطلاح «عملگر» را به‌جای «تبدیل» به‌کار می‌بریم.)

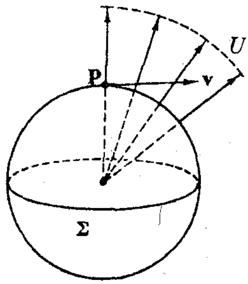
خطی بودن S_p نتیجه‌ای از خاصیت خطی بودن مشتقهای کوواریانی است.

$$\begin{aligned} S_p(a\mathbf{v}+b\mathbf{w}) &= -\nabla_{av+bw} U = -(a\nabla_v U + b\nabla_w U) \\ &= aS_p(\mathbf{v}) + bS_p(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

▮

در واقع در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $M \subset \mathbf{E}^3$ دو عملگر شکلی $\pm S_p$ وجود دارد، که از دو قائم یکهٔ $\pm U$ در مجاورت $\mathbf{p}$ به‌دست می‌آید. همهٔ اینها را جمعاً با S، عملگر شکلی M، نشان می‌دهیم. بدینسان اگر بردار قائم یکه مشخص نشود، ابهامی (کـه چندان مهم نیست) در علامت وجود خواهد داشت.

* علامت منفی که به‌طور قراردادی انتخاب شده است، موجب می‌شود کـه تعداد کل علامتهای منفی که بعداً مورد نیاز است بسیار کاهش یابد.



شکل ۳.۵

۳.۱. مثال. عملگرهای شکلی چند رویه در E^3. (۱) گیریم Σ کره‌ای است به شعاع r متشکل از همهٔ نقاط p از E^3 با $\|p\| = r$. گیریم U «قائم برون‌سوی» Σ باشد. هنگامی که U از هر نقطهٔ p درامتداد v حرکت کند، بدیهی است که در همین امتداد v به‌جلو متمایل می‌شود (شکل ۳.۵). بنابراین $S(v)$ باید به‌صورت $-cv$ باشد.

با استفاده از گرادیان (مانند مثال ۹.۳، فصل ۴) خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{r} \sum x_i U_i$$

آنگاه،

$$\nabla_v U = \frac{1}{r} \sum v[x_i] U_i(p) = \frac{v}{r}$$

بنابراین به ازای هر v داریم $S(v) = -v/r$. بنابراین‌دراینجا عملگر شکلی S فقط ضرب دراسکالر $-1/r$ است. این یکنواختی S مبین گردی کره است: یعنی درهمهٔ نقاط و در تمام امتدادها به‌یك طریق خمیده می‌شود.

(۲) گیریم P صفحه‌ای در E^3 باشد. روشن است که هرمیدان برداری قائم یکهٔ U روی P در E^3 متوازی است (مختصات اقلیدسی آن ثابت است) (شکل ۴.۵). بنابراین به‌ازای همهٔ بردارهای مماس v بر P داریم:

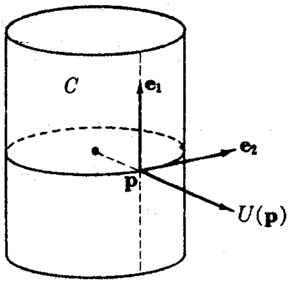
$$S(v) = -\nabla_v U = 0$$

بدینسان عملگر شکلی همان‌گونه که انتظار می‌رفت متحد با صفر است، زیرا صفحه اصلاً دارای خمیدگی نیست.

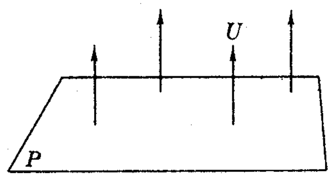
(۳) گیریم C استوانهٔ دوار $x^2 + y^2 = r^2$ در E^3 باشد. در هرنقطهٔ p از C، بردارهای مماس یکهٔ e_1 و e_2 را درنظر می‌گیریم، e_2 را مماس بردایرهٔ مقطع عرضی و e_1 را مماس برمولد استوانه درنقطهٔ p اختیار می‌کنیم.

قائم برون‌سوی U را مطابق شکل ۵.۵ درنظر می‌گیریم.

اکنون هنگامی که U از p در امتداد e_1 حرکت کند، مانند حالت صفحه، موازی با خود باقی می‌ماند، بنابراین $S(e_1) = 0$. هنگامی که U در امتداد e_2 حرکت کند، درست مانند حالت کرهٔ به‌شعاع r، به‌جلو متمایل می‌شود، بنابراین $S(e_2) = -e_2/r$.



شکل ۵.۵



شکل ۴.۵

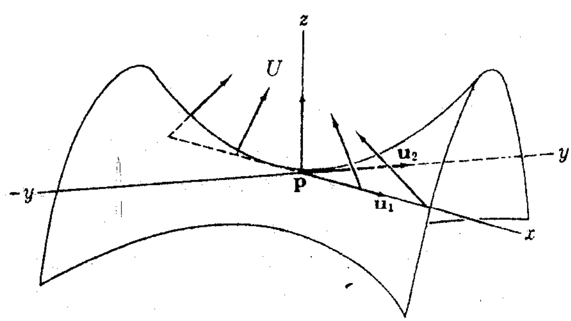
بدین طریق S، شکل «نیم مسطح، و نیمگرد» استوانه را بیان می کند.

(۴) رویهٔ زینی M به معادلهٔ $z=xy$. در اینجا S را فقط در $\mathbf{p}=(\circ,\circ,\circ)$ روی M بررسی می‌کنیم. چون x و y محورهای $\mathbf{E}^3$ در M واقع‌اند، بردارهای $\mathbf{u}_1=(1,\circ,\circ)$ و $\mathbf{u}_2=(\circ,1,\circ)$ در $\mathbf{p}$ بر M مماس‌اند. قائم یکهٔ U را به‌جهت «بالا» اختیار می‌کنیم، در نقطهٔ $\mathbf{p}$ داریم $(\circ,\circ,1)$. در طول محور xها، U همواره براین‌محور عمود می‌ماند، وچون درامتداد $\mathbf{u}_1$ حرکت‌کنیم، U ازچپ به‌راست می‌چرخد (شکل ۶.۵)، و محاسبهٔ ساده‌ای (تمرین ۳) نشان می‌دهد که $\nabla_{u_1}U=-\mathbf{u}_2$. به همین طریق داریم $\nabla_{u_2}U=-\mathbf{u}_1$.

بدینسان عملگرشکلی M در $\mathbf{p}$ ازفرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$S(a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2)=b\mathbf{u}_1+a\mathbf{u}_2$$

این مثالها تناظر بین عملگر شکلی یك رویه، و خمیدگی و تاب یك خم را روشن می‌سازد. درحالت خمها، فقط یك‌امتداد حرکت وجود دارد، و κ و τ میزان‌تغییرمیدانهای برداری یکهٔ T و B (در نتیجه N) را اندازه می‌گیرند. در مورد رویه‌ها تنها یك میدان برداری یکه به‌طور ذاتی معین می‌گردد، و آن قائم یکهٔ U است. وانگهی دراین حالت،



شکل ۶.۵

در هر نقطه برای حرکت U یك صفحهٔ کامل از امتدادها وجـود دارد، و در نتیجه به‌جای اندازه‌گیری عددی میزان تغییر U ازعملگرهای خطی S استفاده می‌شود.

۴۰۱ لم. به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $M\subset\mathbf{E}^3$ عملگر شکلی:

$$S:T_pM\to T_pM$$

یك عملگر خطی متقارن است، یعنی به‌ازای هر زوج‌ازبردارهای مماس بر M در $\mathbf{p}$ داریم

$$S(\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=S(\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}$$

اثبات این نکتهٔ مهم را در بند ۴ درضمن محاسبات کلی بیان خواهیم کرد.

از دیدگاه جبر خطی یـك عملگر خطی متقارن بر یك فضای برداری دوبعدی شیء بسیار ساده‌ای است. و نتیجه می‌شود کـه، بـرای رویهٔ $M\subset\mathbf{E}^3$ مقادیر و بردارهـای مشخصه، اثر و دترمینان یك عملگر شکلی دارای معنی هندسی است که برای رویه در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد.

تمرینات

۰۱ گیریم α خمی در $M\subset\mathbf{E}^3$ باشد. اگر U تحدید قائم یکهٔ M بر خم α باشد، نشان دهید که $S(\alpha')=-U'$.

۰۲ رویهٔ $M:z=f(x,y)$ راکه درآن

$$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

است درنظر می‌گیریم (اندیسها معرف مشتقهای جزئی‌اند). نشان دهیدکه

(الف) بردارهای $\mathbf{u}_1=U_1(0)$ و $\mathbf{u}_2=U_2(0)$ درمبدأ $\mathbf{0}$ بر M مماس‌اند، و

$$U=\frac{-f_xU_1-f_yU_2+U_3}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

یك میدان برداری قائم یکه روی M است.

(ب)
$$S(\mathbf{u}_1)=f_{xx}(0,0)\mathbf{u}_1+f_{xy}(0,0)\mathbf{u}_2$$
$$S(\mathbf{u}_2)=f_{yx}(0,0)\mathbf{u}_1+f_{yy}(0,0)\mathbf{u}_2$$

(توجه: دراینجا، ریشهٔ دوم‌که درمخرج آمده، به‌علت نهاد مشخص f درنقطهٔ $(0,0)$، حقیقی نیست. به‌طورکلی، محاسبهٔ مستقیم S دشوار است و در بند ۴ راههای غیرمستقیم رسیدن به‌آن را ثابت خواهیم‌کرد.)

۰۳ (ادامه). درهریك ازحالتهای زیر، $S(a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2)$ را برحسب $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ بیان کنید، و

رتبهٔ S را در $\mathbf{0}$ بیابید (رتبهٔ S عبارت است از بعد نگارهٔ S: ۰، ۱ یا ۲).

(الف) $z = xy$ (ب) $z = 2x^2 + y^2$

(ج) $z = (x+y)^2$ (د) $z = xy^2$

۴. گیریم M یك رویه در $\mathbf{E}^3$ است که با میدان برداری قائم یکهٔ

$$U = g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_3 U_3$$

جهتدار شده است. نگاشت گاوس $G: M \to \Sigma$ هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M را به نقطهٔ $(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), g_3(\mathbf{p}))$ از کرهٔ یکهٔ Σ بدل می‌کند. ازلحاظ تجسم $U(\mathbf{p})$ را به‌موازات خود به مبدأ منتقل می‌کنیم، و انتهای آن $G(\mathbf{p})$ خواهد بود (شکل ۷.۵). بدینسان هنگامی که U، رویهٔ M را می‌پیماید G چرخش آن را کاملاً مشخص می‌کند.

برای هر یك از رویه‌های زیر نگارهٔ $G(M)$ را در کرهٔ Σ بیابید (جهت قائم انتخابی است):

(الف) استوانه، $x^2 + y^2 = r^2$

(ب) مخروط، $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

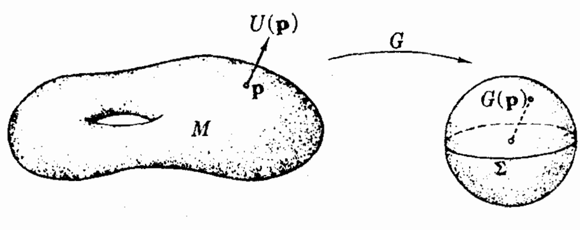
(ج) صفحه، $x + y + z = 0$

(د) کره، $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$

۵. گیریم $G: T \to \Sigma$ نگاشت گاوس متناظر به‌قائم برون سوی یکهٔ U از چنبرهٔ T (فصل ۴، بند ۶.۲) باشد. خمهای نگارهٔ نصف‌النهارها و مدارهای T را براثر G بیابید. چه نقاطی از Σ دقیقاً نگارهٔ دونقطه از T می‌باشند؟

۶. گیریم $G: M \to \Sigma$ نگاشت گاوس از رویهٔ زینی $M: z = xy$ متناظر به‌قائم یکهٔ U که درمسألهٔ ۲ به‌دست‌آمده است، باشد. نگارهٔ یکی ازخطوط مستقیم $y = \text{cte}$ را در M بیابید. تمام نگارهٔ $G(M)$ چه بخشی از کره را می‌پوشاند؟

۷. نشان دهید که عملگر شکلی رویهٔ M برابر مشتق نگاشت گاوس آن با علامت منفی است: اگر S و $G: M \to \Sigma$ هر دومتناظر به U باشند، آنگاه $S(\mathbf{v})$ و $-G_*(\mathbf{v})$



شکل ۷.۵

به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر M متوازی‌اند.

۸. هر رویهٔ جهت‌پذیر دارای دو نگاشت گاوس است، که دو قائم یکهٔ آن متناظرند. ثابت کنید که این دو نگاشت تنها در یک نگاشت دو نقطهٔ متقاطر Σ (تمرین ۵ از فصل ۴، بند ۵) با هم اختلاف دارند. برای یک رویهٔ جهت‌ناپذیر در $\mathbf{E}^3$ این نوع نگاشت را بررسی کنید.

۹. اگر V یک میدان برداری مماس روی M (با قائم یکهٔ U) باشد، آنگاه بنا بر اصل نقطه‌ای، $S(V)$ نیز یک میدان برداری مماس روی M خواهد بود، که مقدارش در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ برابر است با $S_p(V(\mathbf{p}))$. نشان دهید که:

$$S(V) \cdot W = \nabla_V W \cdot U$$

و از آن نتیجه بگیرید که قرینهٔ S با گزارهٔ زیر هم‌ارز است: کروشهٔ دو میدان برداری مماس، یعنی

$$[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$$

نیز یک میدان برداری مماس است.

۲. خمیدگی قائم

درسراسر این بند، ناحیه‌ای از $M \subset \mathbf{E}^3$ را که با انتخاب یک میدان برداری قائم یکهٔ U، جهتدار شده است درنظر می‌گیریم، و از عملگر شکلی S متناظر به U استفاده می‌کنیم.

شکل یک رویه در $\mathbf{E}^3$، برشکل خمهای واقع بر M تأثیر می‌کند.

۱.۲ لم. اگر α خمی در $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه:

$$\alpha'' \cdot U = S(\alpha') \cdot \alpha'$$

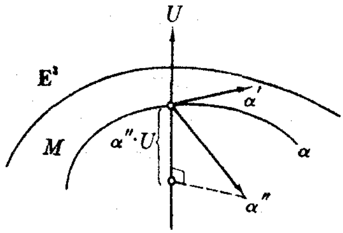
برهان. چون خم α بر رویهٔ M واقع است، سرعت آن α' همواره بر M مماس است. بدین ترتیب $\alpha' \cdot U = 0$، که در آن مانند بند ۱، U را به خم α تخصیص داده‌ایم. با مشتقگیری داریم:

$$\alpha'' \cdot U + \alpha' \cdot U' = 0$$

اما می‌دانیم که (بند ۱)، $S(\alpha') = -U'$. بنابراین:

$$\alpha'' \cdot U = -U' \cdot \alpha' = S(\alpha') \cdot \alpha' \qquad \blacksquare$$

تعبیر هندسی: $\alpha'' \cdot U$ درهر نقطه مؤلفهٔ شتاب α'' درامتداد قائم بر رویهٔ M است (شکل ۸.۵). این لم نشان می‌دهد که مؤلفهٔ مزبور فقط بـه سرعت α' و عملگر شکلی M بستگی دارد. بدینسان همهٔ خمهای واقع بر M با سرعت مفروض $\mathbf{v}$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ دارای یک



شکل ۸.۵

مؤلفهٔ قائم شتاب در $\mathbf{p}$، یعنی $S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ می‌باشند. این، مؤلفهٔ شتاب آنها براثر خمیدگی M در $\mathbf{E}^3$ است.

بدین‌ترتیب اگر $\mathbf{v}$ را با تحویل آن به‌یك بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ استانداردکنیم میزانی برای خمیدگی M درامتداد $\mathbf{u}$ به‌دست می‌آوریم.

۲.۲. تعریف. گیریم $\mathbf{u}$ یك بردار مماس یکه بر $M \subset \mathbf{E}^3$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$ باشد. آنگاه عدد $k(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$ را خمیدگی قائم M در امتداد $\mathbf{u}$ می‌نامند.

برای اینکه اصطلاح امتداد در اینجا دقیقاً مشخص شود، امتداد مماس بر M در $\mathbf{p}$ را به‌صورت یك زیرفضای یك‌بعدی L از $T_p(M)$ تعریف می‌کنیم، وآن خطی است‌که از بردار صفر می‌گذرد (برای آسانی تجسم این بردار در نقطهٔ $\mathbf{p}$ جا داده شده است) (شکل ۹.۵). هر بردار غیرصفر مماس در $\mathbf{p}$ معرف یك امتداد L است، اما ما ترجیح می‌دهیم که یکی از دوبردار یکهٔ $\pm \mathbf{u}$ در L را به‌کار ببریم. توجه شودکه

$$k(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = S(-\mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{u}) = k(-\mathbf{u})$$

بدین‌ترتیب، گرچه ما k را به‌ازای بردارهای یکه محاسبه می‌کنیم، اما در واقع k تابعی است با مقدار حقیقی روی مجموعهٔ همهٔ امتدادهای مماس بر M.

بردار یکهٔ مماس $\mathbf{u}$ بر M در $\mathbf{p}$ را درنظر می‌گیریم. اگر α خمی (با تندی واحد) بر M با سرعت آغازی $\mathbf{u} = \alpha'(0)$ باشد، با استفاده از دستگاه فرنه برای α، از لم بالا نتیجه می‌شود:

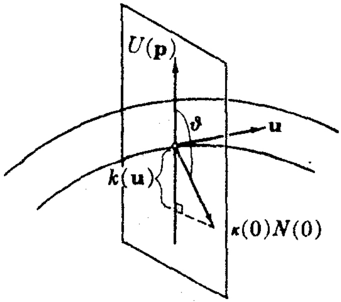
$$\begin{aligned} k(\mathbf{u}) &= S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \alpha''(0) \cdot U(\mathbf{p}) = \kappa(0)N(0) \cdot U(\mathbf{p}) \\ &= \kappa(0)\cos\vartheta \end{aligned}$$

بدینسان خمیدگی قائم M درامتداد $\mathbf{u}$ برابر است با $\kappa(0)\cos\vartheta$، که درآن $\kappa(0)$ خمیدگی α در $\mathbf{p} = \alpha(0)$، و ϑ زاویهٔ بین قائم‌اصلی $N(0)$ وقائم رویه، $U(\mathbf{p})$، می‌باشد، چنان‌که درشکل ۱۰.۵ دیده می‌شود.

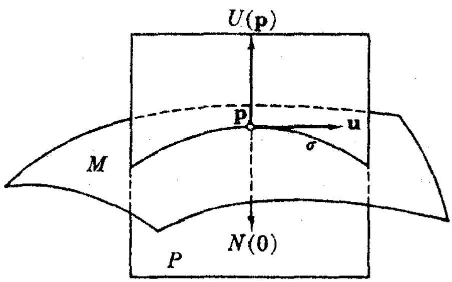
به‌ازای هر $\mathbf{u}$، می‌توان خم را طوری انتخاب‌کردکه ϑ برابر 0 یا π گردد. زیرا اگر P صفحه‌ای باشدکه با $\mathbf{u}$ و $U(\mathbf{p})$ مشخص گردد، دراین‌صورت ازتقاطع P و رویهٔ M (درمجاورت $\mathbf{p}$) یك خم σ حاصل می‌شودکه مقطع قائم M درامتداد $\mathbf{u}$ نام دارد. اگر برای σ مختصات پارامتری با تندی واحد، و $\mathbf{u} = \sigma'(0)$ را انتخاب‌کنیم، به‌آسانی دیده می‌شودکه $N(0) = \pm U(\mathbf{p})$. ($\sigma''(0) = \kappa(0)N(0)$ بر $\mathbf{u} = \sigma'(0)$ عمود و بر P مماس است.) بدینسان برای یك مقطع قائم درامتداد $\mathbf{u}$ داریم (شکل ۱۱.۵)،

$$k(\mathbf{u}) = \kappa_\sigma(0)N(0) \cdot U(\mathbf{p}) = \pm\,\kappa_\sigma(0)$$

شکل۹.۵



شکل۱۰.۵



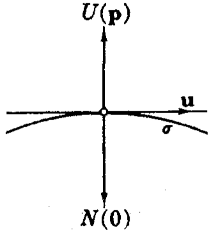
شکل ۱۱.۵

بدین ترتیب با درنظر گرفتن شکل مقاطع قائم می‌توان برآورد معقولی ازخمیدگی قائم درامتدادهای مختلف بر رویهٔ $M\subset \mathbf{E}^3$ به‌دست داد. می‌دانیم که قائم اصلی خم مبین امتداد چرخش آن است. بدینسان از بحث پیش تعبیر هندسی علامت خمیدگی $k(\mathbf{u})$ (نسبت به انتخاب معین U) حاصل می‌شود.

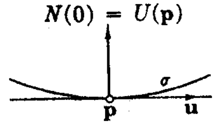
(۱) اگر $k(\mathbf{u})>0$، آنگاه $N(0)=U(\mathbf{p})$، وخمیدگی مقطع قائم σ در $\mathbf{p}$ به‌سمت $U(\mathbf{p})$ است (شکل ۱۲.۵). بنابراین خمیدگی رویهٔ M در امتداد $\mathbf{u}$ به سمت $U(\mathbf{p})$ خواهد بود.

(۲) اگر $k(\mathbf{u})<0$، آنگاه $N(0)=-U(\mathbf{p})$، وخمیدگی مقطع قائم σ در $\mathbf{p}$ به سمت $U(\mathbf{p})$ است. بدینسان خمیدگی M در امتداد $\mathbf{u}$ درجهت عکس $U(\mathbf{p})$ می‌باشد (شکل ۱۳.۵).

(۳) اگر $k(\mathbf{u})=0$، آنگاه $\kappa_\sigma(0)=0$ ($N(0)$ نامعین است). دراین حالت مقطع قائم σ در $\mathbf{p}=\sigma(0)$ دارای چرخش نیست، ونمی‌توان نتیجه گرفت که M درامتداد $\mathbf{u}$ دارای هیچ خمیدگی نیست، زیرا κ می‌تواند فقط در $\mathbf{p}=\sigma(0)$ صفر باشد، اما می‌توانیم نتیجه بگیریم که میزان خمیدگی آن فوق‌العاده کوچك است.



شکل ۱۳.۵

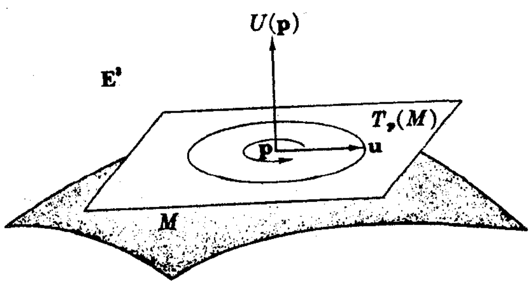


شکل ۱۲.۵

درامتدادهای مختلف در یك نقطهٔ ثابت $\mathbf{p}$، رویه می‌تواند دارای خمیدگیهای متفاوت باشد، مثلاً رویهٔ زینی $z = xy$ درمثال ۳.۱ را درنظر بگیرید. اگر صفحهٔ مماس M در $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ را باصفحهٔ xy از $\mathbf{E}^3$ یکی بگیریم، آنگاه روشن است که خمیدگی قائم درامتداد محورهای x و y صفر است، زیرا مقاطع قائم، خط مستقیم‌اند. اما، شکل ۶.۵ نشان می‌دهد که خمیدگی قائم در امتداد مماس $x = y$ مثبت است، زیرا مقطع قائم یك سهمی است که خمیدگی آن به‌جهت بالامی باشد. ($U(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)$ متوجه «به بالا» است) اما درامتداد خط $x = -y$ خمیدگی قائم منفی است، زیرا خمیدگی این سهمی به‌طرف پایین است.

اکنون یك نقطهٔ ثابت $\mathbf{p}$ از $M \subset \mathbf{E}^3$ را درنظر می گیریم، وفرض می کنیم هنگامی که بردار مماس $\mathbf{u}$ در $\mathbf{p}$ می‌چرخد، دایرهٔ یکه در صفحهٔ مماس $T_p(M)$ را رسم کند. از مقاطع قائم متناظر، تصویر متحرکی ازنحوهٔ خمیدگی M در همهٔ امتدادها در $\mathbf{p}$ به دست می آوریم (شکل ۱۴.۵).

۲.۳ تعریف. نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $M \subset \mathbf{E}^3$ را در نظر می گیریم. مقادیر $k(\mathbf{u})$ یعنی ماکسیمم و مینیمم خمیدگی قائم $k(\mathbf{u})$ رویهٔ M در $\mathbf{p}$ را خمیدگیهای اصلی M در $\mathbf{p}$ می نامند، و آنها را با k_1 و k_2 نشان می‌دهند. امتدادهایی که با این مقادیر فرین متناظرند امتدادهای



شکل ۱۴.۵

اصلی رویهٔ M در $\mathbf{p}$ نامیده می‌شوند. بردارهای یکهٔ این امتدادها، بردارهای اصلی M در $\mathbf{p}$ نام دارند.

با استفاده از طرح مقطع قائمی که در بالا بحث شد، به‌آسانی می‌توان امتدادهای خمیدگی‌ماکسیمم ومینیمم را مشخص کرد. مثلاً اگر قائم برون سوی (U) براستوانهٔ دوار C را درنظر بگیریم آنگاه مقاطع قائم همه دارای خمیدگی به جهت U می‌باشند، بنابراین $k(\mathbf{u}) \leqslant ۰$. علاوه‌براین روشن‌است که مقدارماکسیمم $k_۱ = ۰$ فقط درامتدادمولد به‌وجود خواهد آمد و مقدار مینیمم $k_۲ < ۰$ فقط درامتداد مماس برمقطع عرضی، چنان‌که درشکل ۱۵.۵ دیده می‌شود.

حالت خاص جالبی درنقاط $\mathbf{p}$ که به‌ازای آنها $k_۱ = k_۲$ است پدیدار می‌شود. چون خمیدگی قائم ماکسیمم ومینیمم برابرند، $k(\mathbf{u})$ ثابت خواهد بود: خمیدگی رویهٔ M درنقطهٔ $\mathbf{p}$ به‌ازای همهٔ امتدادها یکسان است (وهمهٔ امتدادها اصلی‌اند).

۴.۲ تعریف. نقطهٔ $\mathbf{p}$ از رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^۳$ را نافی گویند، هرگاه خمیدگی قائم $k(\mathbf{u})$ به‌ازای همهٔ بردارهای مماس یکهٔ $\mathbf{u}$ در $\mathbf{p}$ ثابت باشد.

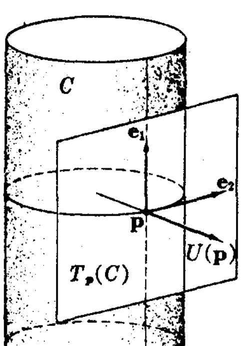
مثلاً، آنچه در (۱) مثال ۳.۱ یافتیم این بود که هر نقطهٔ کرهٔ Σ نافی است و $k_۱ = k_۲ = -۱/r$.

۵.۲ قضیه. (۱) اگر $\mathbf{p}$ یك نقطهٔ نافی رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^۳$ باشد، آنگاه عملگر شکلی S در $\mathbf{p}$، همان ضرب دراسکالر $k = k_۱ = k_۲$ است.

(۲) اگر $\mathbf{p}$ نقطهٔ نافی نباشد، $k_۱ \neq k_۲$، آنگاه دقیقاً دو امتداد اصلی یافت می‌شود، که متعامدند، وعلاوه براین اگر $\mathbf{e}_۱$ و $\mathbf{e}_۲$ بردارهای اصلی این امتدادها باشند، داریم:

$$S(\mathbf{e}_۱) = k_۱\mathbf{e}_۱ \qquad S(\mathbf{e}_۲) = k_۲\mathbf{e}_۲$$

خلاصه، آنکه خمیدگیهای اصلی M در $\mathbf{p}$ مقادیرخاص S وبردارهای اصلی M در $\mathbf{p}$ همان بردارهای خاص S می‌باشند.



شکل ۱۵.۵

برهان. فرض کنیم که k مقدار ماکسیمم $k_۱$ را در $\mathbf{e}_۱$ اختیار می‌کند، بنابراین:

$$k_۱ = k(\mathbf{e}_۱) = S(\mathbf{e}_۱) \cdot \mathbf{e}_۱$$

گیریم $\mathbf{e}_۲$ فقط یك بردار یکهٔ مماس عمود بر $\mathbf{e}_۱$ باشد (می‌خواهیم نشان دهیم که بردار اصلی نیز هست.)

اگر $\mathbf{u}$ بردار یکهٔ مماس دلخواهی در $\mathbf{p}$ باشد، می‌نویسیم:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(\vartheta)=c\mathbf{e}_1+s\mathbf{e}_2$$

کـه در آن $c=\cos\vartheta$ و $s=\sin\vartheta$ (شکل ۱۶.۵). بدین‌ترتیب خمیدگی قائم k در نقطهٔ $\mathbf{p}$ به‌صورت تابعی روی خط حقیقی درمی‌آید: $k(\vartheta)=k(\mathbf{u}(\vartheta))$.

عدد $S(\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j$ را به‌ازای $1\leqslant i,\ j\leqslant 2$ با S_{ij} نشان می‌دهیم. دیـده می‌شود کـه $S_{11}=k_1$ و بنا بر تقارن عملگر شکلی داریم $S_{12}=S_{21}$ و

$$k(\vartheta)=S(c\mathbf{e}_1+s\mathbf{e}_2)\cdot(c\mathbf{e}_1+s\mathbf{e}_2)$$

$$=c^2S_{11}+2scS_{12}+s^2S_{22} \tag{1}$$

بنابراین:

$$\frac{dk}{d\vartheta}(\vartheta)=2sc(S_{22}-S_{11})+2(c^2-s^2)S_{12} \tag{2}$$

اگر $\vartheta=0$، آنگاه $c=1$ و $s=0$، در نتیجه $\mathbf{u}(0)=\mathbf{e}_1$، وچون $k(\vartheta)$ بنا برفرض در $\vartheta=0$ ماکسیمم است، پس $(dk/d\vartheta)(0)=0$. از (۲) بلافاصله نتیجه‌می‌شود که $S_{12}=0$.

از آنجا که $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ یك پایهٔ متعامد یکانی از $T_p(M)$ است، با استفاده از بسط متعامد خواهیم داشت:

$$S(\mathbf{e}_1)=S_{11}\mathbf{e}_1 \qquad S(\mathbf{e}_2)=S_{22}\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

حال اگر $\mathbf{p}$ نافی باشد، آنگاه $S_{22}=k(\mathbf{e}_2)$ با $S_{11}=k(\mathbf{e}_1)=k_1$ یکی است و (۳) نشان می‌دهد که S ضرب در اسکالر $k_1=k_2$ است.

اگر $\mathbf{p}$ نافی نباشد، با توجه به $S_{12}=0$ رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$k(\vartheta)=c^2k_1+s^2S_{22} \tag{4}$$

چون k_1 مقـدار ماکسیمم $k(\vartheta)$ است، و $k(\vartheta)$ ثـابت نیست نتیجه می‌شود کـه $k_1>S_{22}$. اما (۴) نشان می‌دهد که: (الف) مقدار ماکسیمم k_1 فقط به ازای $c=\pm 1$ و $s=0$، یعنی درامتداد $\mathbf{e}_1$ به دست می‌آیـد. (ب) مقدار مینیمم k_2 همان S_{22} است، و فقط به‌ازای $c=0$ و $s=\pm 1$، یعنی امتداد $\mathbf{e}_2$ حاصل می‌شود. وبدینسان حکم دوم قضیه ثابت می‌شود، زیرا (۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$S(\mathbf{e}_1)=k_1\mathbf{e}_1, \qquad S(\mathbf{e}_2)=k_2\mathbf{e}_2 \qquad \blacksquare$$

برهان قبلی، همان برهان فرمول اویلر برای خمیدگی قائم M، در همهٔ امتدادها در $\mathbf{p}$ است.

۶.۲. فرع. گیریم k_1 ، k_2 و $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ خمیدگیها و بردارهای اصلی رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ در $\mathbf{p}$ باشند. آنگاه خمیدگی قائم رویهٔ M درامتداد

$$\mathbf{u} = \cos\vartheta \mathbf{e}_1 + \sin\vartheta \mathbf{e}_2$$

(شکل ۱۶.۵) برابر است با:

$$k(\mathbf{u}) = k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta$$

این، راه دیگری است برای آنکه نشان دهیم که چگونه شکل M درمجاورت یك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{p}$ به‌خمیدگیهای اصلی k_1 و k_2 بستگی دارد. چون موقعیت M در $\mathbf{E}^3$ مهم نیست،می‌توان فرض کرد که (۱) $\mathbf{p}$ مبدأ $\mathbf{E}^3$؛ (۲) صفحهٔ مماس $T_p(M)$ همان صفحهٔ xy از $\mathbf{E}^3$؛ و (۳) محورهای x و y امتدادهای اصلی باشند. M را می‌توان در مجاورت نقطهٔ $\mathbf{p}$ به‌صورت $M: z = f(x, y)$ بیان کرد (شکل ۱۷.۵)، ومنظور این‌است که درمجاورت نقطهٔ $\mathbf{p}$ فقط با استفاده ازجمله‌های درجهٔ دوم تابع f دربسط تیلر، تقریبی از M به‌دست آوریم. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $f^\circ = f^\circ_x = f^\circ_y = 0$. در اینجا اندیسهای پایین نمایشگر مشتقهای‌جزئی، و اندیسهای بالا نشان‌دهندهٔ محاسبه در $x = 0$ و $y = 0$ هستند. بدینسان تقریب درجهٔ دوم f درمجاورت $(0, 0)$ به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$f(x, y) \sim \frac{1}{2}(f^\circ_{xx}x^2 + 2f^\circ_{xy}xy + f^\circ_{yy}y^2)$$

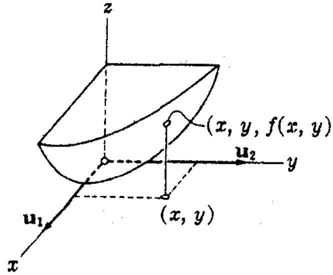
درتمرین ۲، بند ۱ دیدیم که به‌ازای بردارهای مماس

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0) \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$$

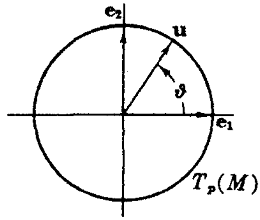
در $\mathbf{p} = 0$ داریم:

$$S(\mathbf{u}_1) = -\nabla_{u_1} U = f^\circ_{xx}\mathbf{u}_1 + f^\circ_{xy}\mathbf{u}_2$$
$$S(\mathbf{u}_2) = -\nabla_{u_2} U = f^\circ_{xy}\mathbf{u}_1 + f^\circ_{yy}\mathbf{u}_2$$

شرط (۳) در بالا، مبین آن است که $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ بردارهای اصلی‌اند، از اینجا



شکل ۱۷.۵



شکل ۱۶.۵

بنا بر قضیهٔ ۵.۲ نتیجه می‌شود که $k_1 = f^\circ_{xx}$، $k_2 = f^\circ_{yy}$ و $f^\circ_{xy} = 0$.

چون این مقادیر را درتقریب درجهٔ دوم f، قرار دهیم شکل رویهٔ M درمجاورت $\mathbf{p}$ تقریباً با رویهٔ:

$$\hat{M}:\ z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$$

در مجاورت 0 یکی می‌شود. $\hat{M}$ را تقریب درجهٔ دوم M در مجاورت $\mathbf{p}$ می‌نامند، و این تقریب دربارهٔ رویه‌ها نظیر تقریب فرنه دربارهٔ خمهاست.

از تعریف ۲.۲ تا فرع ۶.۲ با هندسهٔ رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ درمجاورت یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از آن سروکار داشتیم. این نتایج را می‌توان همزمان دربارهٔ همهٔ نقاط ناحیهٔ جهتدار $\mathcal{O}$ که برروی آن، بنا برفرض آغازی، قائم یکهٔ U معین است به‌کار برد. به ویژه ما توابع خمیدگیهای اصلی k_1 و k_2 را روی $\mathcal{O}$ عملاً معین کرده‌ایم. در هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathcal{O}$ مقادیر $k_1(\mathbf{p})$ و $k_2(\mathbf{p})$ خمیدگیهای اصلی M در $\mathbf{p}$ می‌باشند. باید توجه داشت، که این توابع «با تقریب علامت» معین می‌شوند: اگر به‌جای U بردار $-U$ را قرار دهیم، توابع مزبور به $-k_1$ و $-k_2$ بدل می‌شوند.

تمرینات

۱. با استفاده از نتایج مثال ۳.۱، خمیدگیهای اصلی و بردارهای اصلی رویه‌های زیر را بیابید:

(الف) استوانه، درهرنقطهٔ آن.

(ب) رویهٔ زینی، درمبدأ.

۲. اگر $\mathbf{v}$ یك بردار مماس غیرصفر (که لزوماً یکه نیست) باشد، نشان دهید که خمیدگی قائم M درامتداد $\mathbf{v}$ برابر است با $k(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} / \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

۳. به ازای هرعدد صحیح $n \geqslant 2$، خم $t \to (r\cos t,\ r\sin t,\ \pm t^n)$ بر استوانهٔ $M:\ x^2 + y^2 = r^2$ را با α_n نشان می‌دهیم. همهٔ این خمها در $t = 0$ دارای یك سرعت‌اند. مطلوب است تحقیق لم ۱.۲ با اثبات اینکه همهٔ این‌خمها در $t = 0$ دارای یك مؤلفهٔ قائم شتاب می‌باشند.

۴. مطلوب است تعیین تقریب درجهٔ دوم، هریك از رویه‌های زیر درمجاورت مبدأ:

(الف) $z = \exp(x^2 + y^2) - 1$

(ب) $z = \log\cos x - \log\cos y$

(ج) $z = (x + 3y)^3$

۵. دلیل جملهٔ اول در برهان قضیهٔ ۵.۲ را بیان کنید: نشان دهید که k دارای یك مقدار ماکسیمم است.

۳. خمیدگی گاوسی

در بند پیش تعبیر هندسی بردارها و مقادیر خاص عملگر شکلی را بیان کردیم. در اینجا دترمینان و اثر S را بررسی می‌کنیم.

۱.۳. تعریف. خمیدگی گاوسی $M \subset \mathbf{E}^3$ عبارت است از تابع بامقدار حقیقی $K = \det S$ روی M. یعنی درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M خمیدگی گاوسی $K(\mathbf{p})$ از رویهٔ M در نقطهٔ $\mathbf{p}$ برابر است با دترمینان عملگرشکلی S رویهٔ M در $\mathbf{p}$.

خمیدگی متوسط رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ عبارت است از تابع $H = \mathrm{trace}/2\, S$. خمیدگی گاوسی و متوسط را برحسب خمیدگیهای اصلی به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

۲.۳. لم. $K = k_1 k_2, \; H = (k_1 + k_2)/2$

برهان. دترمینان (و اثر) یك عملگرخطی را می‌توان به‌عنوان مقدار مشترك دترمینان (و اثر) همهٔ ماتریسهای آن تعریف کرد. اگـر $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بردارهای اصلی در نقطهٔ $\mathbf{p}$ باشند، آنگاه بنا برقضیهٔ ۵.۲، داریـم $S(\mathbf{e}_1) = k_1(\mathbf{p})\mathbf{e}_1$ و $S(\mathbf{e}_2) = k_2(\mathbf{p})\mathbf{e}_2$، و بنابراین ماتریس S در $\mathbf{p}$ نسبت به $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ چنین است:

$$\begin{pmatrix} k_1(\mathbf{p}) & 0 \\ 0 & k_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

ازاینجا نتیجهٔ مطلوب فوراً حاصل می‌شود. ∎

یك نکتهٔ مهم دربارهٔ خمیدگی گاوسی: خمیدگی گاوسی از انتخاب قائم یکهٔ U مستقل است. اگر U را به $-U$ بدل کنیم، آنگاه k_1 و k_2 هر دو تغییر علامت می‌دهند و در نتیجه $K = k_1 k_2$ تغییر نمی‌کند. اما خمیدگی متوسط $H = (k_1 + k_2)/2$ دارای این‌خصوصیت نیست، و ابهام علامت برای آن مانند خود خمیدگیهای اصلی‌موجود است.

روش مقطع قائم که در بند ۲ بیان شد، به ما امکان می‌دهد که از راه مشاهده در هر نقطهٔ رویهٔ M، به‌گونه‌ای تقریبی خمیدگیهای اصلی را معین کنیم و درنتیجه تصورمعقولی ازخمیدگی گاوسی $K = k_1 k_2$ درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$، تنها با نگاه‌کردن به‌رویهٔ M به‌دست آوریم. به ویژه، می‌تـوان علامت $K(\mathbf{p})$ را تشخیص داد. این علامت دارای تعبیر هندسی مهمی است که دراینجا به‌بیان آن می‌پردازیم.

۳.۳. تبصره. علامت خمیدگی گاوسی در یك نقطهٔ $\mathbf{p}$.

(۱) **مثبت است.** اگر $K(\mathbf{p}) > 0$، آنگاه بنابر لم ۲.۳، خمیدگیهای اصلی $k_1(\mathbf{p})$ و $k_2(\mathbf{p})$ هم‌علامت‌اند. بنابرفرع ۶.۲، به‌ازای همهٔ بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}$ در $\mathbf{p}$، داریم یـا

$k(\mathbf{u}) > \circ$ و یا $k(\mathbf{u}) < \circ$. بدینسان خمیدگی رویهٔ M چنان است کـه M در همهٔ امتدادهای مماس در $\mathbf{p}$ ازصفحهٔ مماس $T_p(M)$ دور می‌شود (شکل ۱۸.۵).

تقریب درجهٔ دوم M درمجاورت $\mathbf{p}$ سهمیگون زیر است:

$$۲z = k_۱(\mathbf{p})x^۲ + k_۲(\mathbf{p})y^۲$$

(۲) **منفی است.** اگر $K(\mathbf{p}) < \circ$، آنگاه بنا برلم ۲.۳، خمیدگیهای‌اصلی $k_۱(\mathbf{p})$ و $k_۲(\mathbf{p})$ مختلف‌العلامه‌اند. بدین‌ترتیب تقریب درجهٔ دوم M درمجاورت $\mathbf{p}$ هذلولیگون است، و M درمجاورت $\mathbf{p}$ زینی شکل است (شکل ۱۹.۵).

(۳) **صفر است.** اگر $K(\mathbf{p}) = \circ$، آنگاه بنا بر لم ۲.۳ دوحالت پیش می‌آید:

(الف) فقط یکی ازخمیدگیهای اصلی صفر است، مثلاً:

$$k_۱(\mathbf{p}) \neq \circ \qquad k_۲(\mathbf{p}) = \circ$$

(ب) هردو خمیدگی اصلی صفرند:

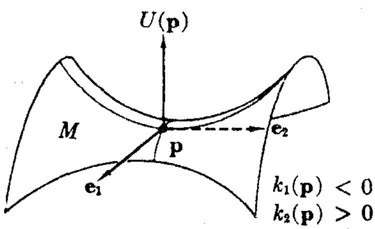
$$k_۱(\mathbf{p}) = k_۲(\mathbf{p}) = \circ$$

درحالت(الف) تقریب درجهٔ دوم، استوانهٔ $۲z = k_۱(\mathbf{p})x^۲$ است، M درمجاورت $\mathbf{p}$ به‌شکل ناودانی است (شکل ۲۰.۵).

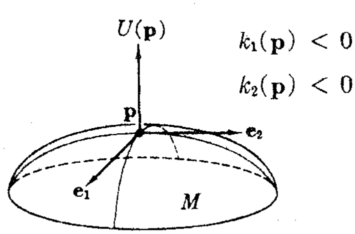
درحالت(ب) تقریب درجهٔ دوم به‌صورت سادهٔ صفحهٔ $z = \circ$ درمی‌آید، وبنا براین دربارهٔ شکل M درمجاورت $\mathbf{p}$ اطلاعی به‌دست نمی‌آوریم.

چنبرهٔ دوار T مثال‌خوبی برای این‌حالتهای گوناگون می‌باشد. درنقاط نیمهٔ بیرونی آنکه با $\mathcal{O}$ نمایش داده‌ایم، خمیدگی چنبره به‌گونه‌ای است که چنبره از صفحهٔ مماس آن دور می‌شود (شکل ۲۱.۵). بنابراین روی $\mathcal{O}$ داریم $K > \circ$. امـا در مجاورت هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از نیمهٔ داخلی آن، $\mathcal{J}$، چنبره زینی شکل است، و از $T_p(M)$ عبور می‌کند. بنابراین روی $\mathcal{J}$ داریم $K < \circ$.

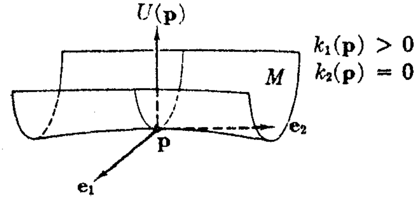
درمجاورت هرنقطه از دو دایره‌ای (فوقانی و تحتانی) که $\mathcal{O}$ و $\mathcal{J}$ را جدا می‌کنند،



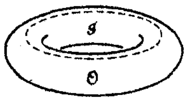
شکل ۱۹.۵



شکل ۱۸.۵



شکل ۲۰.۵



شکل ۲۱.۵

چنبره ناودانی شکل است، و از آنجا $K = ۰$. (این نتایج کیفی را در بند ۶ به صورت کمی بررسی خواهیم کرد.)

درحالت ۳ (ب) که درآن هردو خمیدگی اصلی صفر می‌شوند، **p** را نقطهٔ هامنی M می‌نامند. (چنبره دارای نقطهٔ هامنی نیست.) به عنوان مثال نقطهٔ مرکزی **p** از یك زین میمون، مانند:

$$M:\ z = x(x+\sqrt{۳}y)(x-\sqrt{۳}y)$$

مسطح است. دراینجا سه‌تپه و سه‌دره چنان‌که درشکل ۲۲.۵ نشان داده شده است، برخورد می‌کنند. پس **p** باید یك نقطهٔ هامنی باشد و بدینسان شکل رویهٔ M در مجاورت نقطهٔ هامنی **p** از سه‌حالت دیگری که درتبصرهٔ ۳.۳ بیان شد بسیار پیچیده‌تر است.

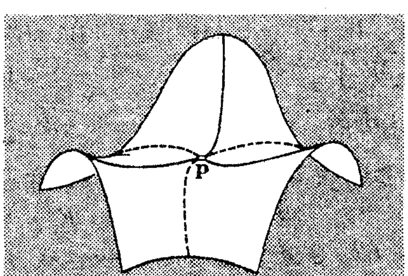
اکنون چند روش برای محاسبهٔ خمیدگی گاوسی و خمیدگی متوسط بیان می‌شود.

۴.۳ لم. اگر دوبردار مماس **v** و **w** درنقطهٔ **p** از $M \subset \mathbf{E}^۳$ مستقل‌خطی باشند، آنگاه:

$$S(\mathbf{v}) \times S(\mathbf{w}) = K(\mathbf{p})\mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

$$S(\mathbf{v}) \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times S(\mathbf{w}) = ۲H(\mathbf{p})\mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

برهان. چون **v** و **w** یك پایه برای صفحهٔ مماس $T_p(M)$ می‌باشند، می‌توان نوشت:



شکل ۲۲.۵

$$S(\mathbf{v}) = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$$
$$S(\mathbf{w}) = c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$$

که در آن

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ماتریس نمایشگر S نسبت به پایهٔ $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ است. ازاینجا:

$$K(\mathbf{p}) = \det S = ad - bc \qquad H(\mathbf{p}) = \frac{۱}{۲} \operatorname{trace} S = \frac{۱}{۲}(a+d)$$

با استفاده ازخواص ضرب برداری، داریم:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}) \times S(\mathbf{w}) &= (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) \times (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) \\ &= (ad - bc)\mathbf{v} \times \mathbf{w} = K(\mathbf{p})\mathbf{v} \times \mathbf{w} \end{aligned}$$

و محاسبهٔ مشابهی فرمول مربوط به $H(\mathbf{p})$ را به‌دست می‌دهد. ∎

بدین ترتیب اگر میدانهای برداری مماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در هرنقطه ازیك ناحیهٔ جهتدار مستقل خطی باشند، معادلات میدان برداری زیر را داریم:

$$S(V) \times S(W) = KV \times W$$
$$S(V) \times W + V \times S(W) = ۲HV \times W$$

که می‌توان آنها را نسبت به K و H حل کرد. برای این‌کار هرطرف را درمیدان برداری قائم $V \times W$ به طور داخلی ضرب می‌کنیم، و اتحاد لاگرانژ (تمرین ۶) را به‌کار می‌بریم:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} SV \cdot V & SV \cdot W \\ SW \cdot V & SW \cdot W \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V \cdot V & V \cdot W \\ W \cdot V & W \cdot W \end{vmatrix}} \qquad H = \frac{\begin{vmatrix} SV \cdot V & SV \cdot W \\ W \cdot V & W \cdot W \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V \cdot V & V \cdot W \\ SW \cdot V & SW \cdot W \end{vmatrix}}{۲\begin{vmatrix} V \cdot V & V \cdot W \\ W \cdot V & W \cdot W \end{vmatrix}}$$

(مخرجها هیچ‌گاه صفر نیستند، زیــرا استقلال V و W با $(V \times W) \cdot (V \times W) > ۰$ هم‌ارز است.) به‌ویژه توابع K و H دیفرانسیلپذیرند.

هنگامی‌که K و H معین شدند، به‌آسانی می‌توان $k_۱$ و $k_۲$ را به‌دست آورد.

۳.۵. فرع. دریك ناحیهٔ جهتدار $\mathscr{O}$ از M، توابع خمیدگی اصلی عبارت‌اند از:

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

برهان. برای تحقیق صحت این فرمول کافی است در آن قرار دهیم

$$K = k_1 k_2 \quad \text{و} \quad H = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$$

و توجه کنیم که:

$$H^2 - K = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} - k_1 k_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}$$ ∎

با استفاده از چند جمله‌ای مشخصهٔ S، نتایج روشنتری به‌دست می‌آید (تمرین ۴).

ازاین فرمول فقط نتیجه می‌شود که k_1 و k_2 روی $\mathcal{U}$ توابعی پیوسته‌اند، ضرورتی ندارد که دیفرانسیلپذیر باشند، زیرا تابع جذر درمجاورت صفر تولید اشکال می‌کند. اما اتحاد بالا نشان می‌دهد که $H^2 - K$ فقط در نقاط نافی صفر است، ازاین‌رو k_1 و k_2 در هر ناحیهٔ جهتدار فاقد نقاط نافی دیفرانسیلپذیر خواهند بود.

با قیودی که برخمیدگی گاوسی و خمیدگی متوسط تحمیل می‌شود، می‌توان به‌طور طبیعی انواع خاصی از رویه‌های $\mathbf{E}^3$ را مشخص کرد.

۶.۳. تعریف. رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ را هنگامی هموار نامندکه خمیدگی گاوسی آن صفر باشد، و رویه‌ای راکه خمیدگی متوسط آن صفر باشد، مینیمال گویند.

همان طور که می‌توان حدس زد صفحه یك رویهٔ هموار است، زیرا بنابر مثال ۳.۱ عملگرهای‌شکلی آن همه‌صفرند، و $K = \det S = 0$. درمورد استوانهٔ دوار از (۳)، مثال ۳.۱ نتیجه می‌شود که S درهر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از آن غیر عادی است، یعنی رتبهٔ آن از بعد صفحهٔ مماس $T_p(M)$ کمتر است. بدینسان، با آنکه S هیچ گاه صفر نیست، دترمینان آن همواره صفر است، و بنابراین، استوانه نیز رویه‌ای هموار است. این اصطلاح در نظر اول برای چنین رویهٔ خمیده‌ای عجیب‌می‌نماید، اما دربررسیهای آینده مفصلاً توجیه خواهد شد.

در مورد خمیدگی گاوسی رویه‌های مینیمال داریم $K \leqslant 0$، زیرا اگر $H = (k_1 + k_2)/2 = 0$، آنگاه $k_1 = -k_2$ و $K = k_1 k_2 \leqslant 0$.

طبقهٔ مهم دیگری از رویه‌ها، رویه‌هایی هستندکه خمیدگی گاوسی آنها ثابت است. چنانکه دیدیم، (مثال ۳.۱) در مورد هر کره به‌شعاع r داریم $k_1 = k_2 = -1/r$ (به‌ازای قائم برون سوی U). بدینسان کرهٔ Σ دارای خمیدگی گاوسی مثبت ثابت $K = 1/r^2$ است: هر قدرکره کوچکتر باشد، خمیدگی آن بزرگتر است.

در این فصل متدرجاً با مثالهای زیادی از انواع خاص گوناگون این رویه‌ها آشنا خواهیم شد.

تمرینات

۱. نشان دهید که یك رویه با $K<0$ دارای نقطهٔ نافی نیست و اگر $K\leqslant 0$، آنگاه نقاط نافی آن هامنی‌اند.

۲. گیریم بردارهای مماس $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M، متعامد یکانی باشند. از هریك از شرایط زیر مربوط به S در $\mathbf{p}$، چه اطلاع هندسی می‌توان به‌دست آورد؟

(الف) $S(\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{u}_2=0$ (ج) $S(\mathbf{u}_1)\times S(\mathbf{u}_2)=0$

(ب) $S(\mathbf{u}_1)+S(\mathbf{u}_2)=0$ (د) $S(\mathbf{u}_1)\cdot S(\mathbf{u}_2)=0$

۳. (خمیدگی متوسط). ثابت کنید که:

(الف) مقدار میانگین خمیدگی قائم در هر دو امتداد متعامد در $\mathbf{p}$ برابر با $H(\mathbf{p})$ است. (نظیر این حکم دربارهٔ K نادرست است.)

(ب)
$$H(\mathbf{p})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}k(\vartheta)\,d\vartheta$$

که در آن $k(\vartheta)$ خمیدگی قائم است، مانند فرع ۶.۲.

۴. چند جمله‌ای مشخصهٔ عملگر خطی دلخواه S عبارت است از

$$p(k)=\det(A-kI)$$

که در آن A نمایش ماتریسی S است.

(الف) نشان دهید که چند جمله‌ای مشخصهٔ عملگر شکلی عبارت است از $k^2-2Hk+K$.

(ب) هر عملگر خطی در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند، یعنی $p(S)$ که از جایگزین کردن صوری S در $p(k)$ به‌دست می‌آید در حکم عملگر صفر است. این مطلب را دربارهٔ عملگر شکلی ثابت کنید، و برای این کار نشان دهید که به‌ازای هر زوج از بردارهای مماس بر M داریم:

$$S\mathbf{v}\cdot S\mathbf{w}-2HS\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+K\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$$

توابع با مقادیر حقیقی:

$$\mathrm{I}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w},\ \mathrm{II}(\mathbf{v},\mathbf{w})=S\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

و

$$\mathrm{III}(\mathbf{v},\mathbf{w})=S^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=S\mathbf{v}\cdot S\mathbf{w}$$

را که به‌ازای هر زوج بردارهای مماس بر رویهٔ جهتدار M معین‌اند به‌طور سنتی فرمهای اساسی اول، دوم و سوم می‌نامند. این فرمها، فرم دیفرانسیلی نیستند، زیرا

متقارن بوده و برحسب $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متناوب نمی‌باشند. در روش کلاسیك، بحث این موضوع عملگر شکلی، به طور صریح وارد نمی‌شود، و به جای آن از فرم اساسی دوم استفاده می‌شود.

۵. (خمهای دوپن). در مجاورت نقطهٔ $\mathbf{p}$ ازیك ناحیهٔ جهتدار رویـهٔ M، فصل مشترك M با صفحهٔ مماس $\bar{T}_p(M)$ را با $C_\circ$ نشان می‌دهیم،روشن است که $C_\circ$ از نقاطی از M درمجاورت $\mathbf{p}$ تشکیل شده‌است که درصفحهٔ مار بر $\mathbf{p}$ وعمود بر $U(\mathbf{p})$ واقع‌اند. تقریب $C_\circ$ را می‌توان با قراردادن تقریب درجـهٔ دوم $\hat{M}$ به‌جای M به‌دست آورد، بدینسان خم $\hat{C}_\circ$، تقریب $C_\circ$، به‌صورت زیر است:

$$\hat{C}_\circ : k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0 \qquad \text{در مجاورت } (0,0)$$

(الف) $\hat{C}_\circ$ را در هـر یـك از سه حالت $K(\mathbf{p}) > 0$، $K(\mathbf{p}) < 0$ و $K(\mathbf{p}) = 0$ (غیر هامنی) بررسی کنید.

(ب) بررسی (الف) برای $C_\circ$ را در مورد C_ε و $C_{-\varepsilon}$ که درآن به‌جای صفحهٔ مماس دو صفحهٔ موازی با آن با فواصل $\pm\varepsilon$ قرار داده‌ایم تکرار کنید.

(ج) این طرح دربارهٔ نقاط هامنی بی‌نتیجه است، زیـرا تقریب درجـهٔ دوم به‌صورت $\hat{M}: z = 0$ درمی‌آید. شکلهای $C_\circ$، C_ε و $C_{-\varepsilon}$ را درمورد زین میمون بررسی کنید.

۶. مطلوب است اثبات اتحاد لاگرانژ:

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{b} \end{vmatrix}$$

که درآن $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهایی از $\mathbf{E}^3$ می‌باشند.

۷. (رویه‌های متوازی). رویهٔ M راکه با U جهتدار شده است، درنظر می‌گیریم. به‌ازای عـدد ثابت ε (مثبت یـا منفی) نگاشت $F: M \to \mathbf{E}^3$ را بـا $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \varepsilon U(\mathbf{p})$ تعریف می‌کنیم.

(الف) اگر $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ بر M مماس باشد، نشان دهید که $\bar{\mathbf{v}} = F_*(\mathbf{v})$ بـرابـراست با $\mathbf{v} - \varepsilon S(\mathbf{v})$، و از آنجا نتیجه بگیریدکه:

$$\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{w}} = J(\mathbf{p})\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$

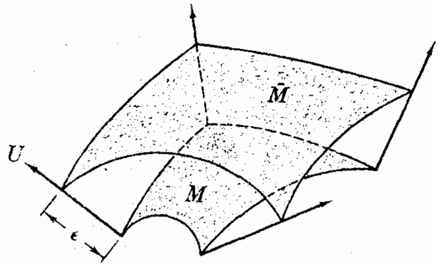
که درآن:

$$J = 1 - 2\varepsilon H + \varepsilon^2 K = (1 - \varepsilon k_1)(1 - \varepsilon k_2)$$

اگـر تابع J روی M صفر نشود (M فشرده و $|\varepsilon|$ کـوچك است)، F نگاشتی‌منظم است، و نگارهٔ:

$$\bar{M} = F(M)$$

لااقل یك رویهٔ فرو رفته در $\mathbf{E}^3$ است (تمرین ۱۰، فصل ۴، بند ۸). $\bar{M}$ را موازی با M به‌فاصلهٔ ε می‌نامند (شکل ۲۳.۵).



شکل ۲۳.۵

(ب) نشان دهیدکه ایزومرفیسم متعارف $\mathbf{E}^3$ بردار U را به‌یك قائم یکه روی $\bar{M}$ بدل می‌کند و به ازای آن داریم $\bar{S}(\bar{\mathbf{v}}) = S(\mathbf{v})$.

(ج) فرمولهای زیر را درمورد خمیدگیهای گاوسی ومتوسط $\bar{M}$ به‌دست آورید:

$$\bar{K}(F) = \frac{K}{J} \qquad ; \qquad \bar{H}(F) = \frac{(H - \varepsilon K)}{J}$$

۸. (ادامه)

(الف) نتایج (ج) را در مورد کره‌ای به شعاع r کــه با قائم برون سوی U جهتدار شده است، بــررسی کنید. نگاشت $F = F_\varepsilon$ را هنگامی کــه ε برابر ۰، $-r$ و $-2r$ باشد تشریح کنید.

(ب) ازیك رویهٔ جهتپذیربا، خمیدگی گاوسی مثبت ثابت آغاز کنیـد و یك رویــهٔ با خمیدگی متوسط ثابت بسازید.

۴. روشهای محاسباتی

تااینجا عملگر شکلی S ازرویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ را تعریف کردیم ومعنی هندسی تغییرناپذیرهای جبری اصلی آن: خمیدگی گاوسی K، خمیدگی متوسط H، خمیدگیهای اصلی k_1 و k_2 و بردارهای اصلی $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را (در هر نقطه) به‌دست آوردیم. اکنون می‌خــواهیم ببینیم چگونه این تغییرناپذیرها را برحسب قطعه‌های مختصاتی M می‌توان بیان کرد.

گیریــم $\mathbf{x}: D \to M$ یك قطعه مختصاتی در $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، دربالا سه تابـع با مقادیر حقیقی:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \qquad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u, \qquad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

را روی D به‌کار بردیم. در اینجا $E > 0$ و $G > 0$ مربعات تندیهای خمهای متناظر به‌پارامترهای u و v از $\mathbf{x}$ می‌باشند، و F اندازهٔ زاویهٔ مختصاتی ϑ، بین $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ را به‌دست می‌دهد، زیرا:

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \|\mathbf{x}_u\| \, \|\mathbf{x}_v\| \cos\vartheta = \sqrt{EG} \cos\vartheta$$

(شکل ۲۴.۵). E، F و G «توابع پیچان» قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ می‌باشند: این توابع تعیین می‌کنند که $\mathbf{x}$ چگونه ناحیهٔ هموار D از $\mathbf{E}^2$ را می‌پیچانند تا بر ناحیهٔ خمیدهٔ $\mathbf{x}(D)$ از M قرار دهد. این توابع ضرب داخلی بردارهای مماس در هر نقطه از $\mathbf{x}(D)$ را کاملاً معین می‌کنند، زیرا اگر:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{x}_u + v_2 \mathbf{x}_v \quad \text{و} \quad \mathbf{w} = w_1 \mathbf{x}_u + w_2 \mathbf{x}_v$$

آنگاه:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = E v_1 w_1 + F(v_1 w_2 + v_2 w_1) + G v_2 w_2$$

(در این‌گونه معادلات مقادیر $\mathbf{x}_u$، $\mathbf{x}_v$، E، F و G در (u, v) منظور می‌گردد، که در آن $\mathbf{x}(u, v)$ نقطهٔ اثر بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ می‌باشد.)

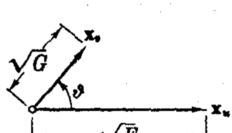
از طرف دیگر $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ تابعی روی D می‌باشد که مقدار آن درهر نقطهٔ (u, v) از D برداری است عمود بر هر دو بردار $\mathbf{x}_u(u, v)$ و $\mathbf{x}_v(u, v)$ و بنابراین قائم بر M در $\mathbf{x}(u, v)$ است به‌علاوه بنابر لم ۸.۱ فصل ۲ داریم:

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2$$

و چون $\mathbf{x}$ بنابر تعریف منظم است، این تابع بامقدار حقیقی روی D هیچ‌گاه صفر نیست. بدینسان می‌توان روی D تابع قائم یکهٔ:

$$U = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

را ساخت، که به‌هر نقطهٔ (u, v) از D یك بردار قائم یکه در $\mathbf{x}(u, v)$ نسبت می‌دهد. تأکید می‌شود که U در اینجا مانند $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ یك میدان برداری روی $\mathbf{x}(D)$ نیست، بلکه فقط یك تابع با مقدار برداری روی D می‌باشد. با وجود این، می‌توان دستگاه $\mathbf{x}_u$، $\mathbf{x}_v$ و U را به‌عنوان یك نوع میدان سه وجهی ناقص در نظر گرفت. لااقل بردار U دارای طول واحد می‌باشد، و بر هردو بردار $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ عمود است، اگرچه $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ عموماً متعامد و یکانی نیستند.



شکل ۲۴.۵

در اینجا، معمولاً مشتقهای کوواریان را درامتداد خمهای پارامتر $\mathbf{x}$ محاسبه می‌کنند. این مشتقها بنابر بحثی که در بند ۱ آمد، به‌صورت

مشتقهای جزئی نسبت به u و v درمی‌آیند. همانند $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ این مشتقهای جزئـی را نیز با اندیسهای u و v نشان می‌دهیم. اگر:

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

آنگاه عیناً نظیر $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$، درصفحهٔ ۱۵۲ داریم

$$\mathbf{x}_{uu} = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2}\right)_{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}_{vu} = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v}\right)_{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2}\right)_{\mathbf{x}}$$

روشن است که $\mathbf{x}_{uu}$ و $\mathbf{x}_{vv}$ شتابهای خمهای بـه‌پارامتر u و v را به‌دست مـی‌دهند. چون ترتیب مشتقگیری فاقد اهمیت است، داریم $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$، که هم مشتق‌کوواریان $\mathbf{x}_u$ را در امتداد $\mathbf{x}_v$ و هم مشتق‌کوواریان $\mathbf{x}_v$ را درامتداد $\mathbf{x}_u$ به‌دست می‌دهد.

حال اگر S، عملگر شکلی متناظر به U باشد، روی D سه تابع دیگـر را با مقادیر حقیقی تعریف می‌کنیم:

$$l = S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u$$

$$m = S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u$$

$$n = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v$$

چون $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ در هرنقطه $\mathbf{x}(D)$ یك پایه برای فضای مماس M است، روشن‌است که عملگرشکلی به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ این توابع معین می‌شود. به‌علت آنکه این پایه عموماً متعامد یکانی نیست، توابع l، m و n نمی‌توانند عبارت ساده‌ای برای $S(\mathbf{x}_u)$ و $S(\mathbf{x}_v)$ برحسب $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ بـه‌دست دهند. اما در فرمولهای قبل‌از فـرع ۵.۳، این توابـع محققاً عبارتهای ساده‌ای برای خمیدگیهای گاوسی و متوسط به‌دست می‌دهند.

۱.۴. فرع. اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی از $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه:

$$K(\mathbf{x}) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \qquad H(\mathbf{x}) = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

برهان. فرمولهای لم ۴.۳ ازهمین فصل، در هـر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $\mathbf{x}(D)$، $K(\mathbf{p})$ و $H(\mathbf{p})$ را برحسب بـردارهای مماس $V(\mathbf{p})$ و $W(\mathbf{p})$ در $\mathbf{p}$ بیان مـی‌کنند. اگـر به‌جای $V(\mathbf{p})$ و

$W(\mathbf{p})$ بردارهای مماس $\mathbf{x}_u(u, v)$ و $\mathbf{x}_v(u, v)$ متناظر به $\mathbf{x}(u, v)$ را قرار دهیم، فرمولهای مطلوب برای $K(\mathbf{x}(u, v))$ و $H(\mathbf{x}(u, v))$ حاصل می‌شوند. ▌

هنگامی‌که قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ از قراین واضح باشد، توابع مرکب $K(\mathbf{x})$ و $H(\mathbf{x})$ را فقط با K و H نشان می‌دهیم.

با شگردی مانند آنچه درلم ۱.۲ به‌کار رفت، می‌توان روش ساده‌ای برای محاسبهٔ l، m و n، ودرنتیجه K و H پیداکرد. به‌عنوان مثال‌هنگامی‌که $U \cdot \mathbf{x}_u = 0$، با مشتقگیری جزئی نسبت به v، یعنی مشتقگیری معمولی در امتداد خمهای پارامتر v خواهیم داشت:

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}(U \cdot \mathbf{x}_u) = U_v \cdot \mathbf{x}_u + U \cdot \mathbf{x}_{uv}$$

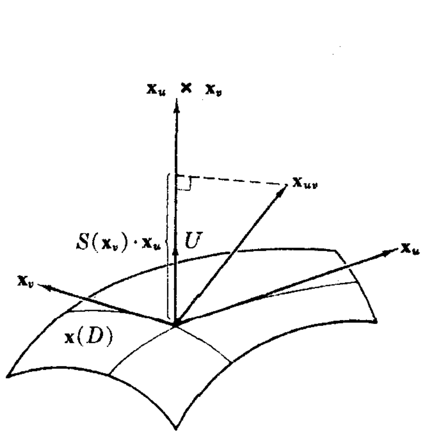
(یادآوری می‌شودکه U_v مشتق‌کوواریان میدان برداری $v \to U(u_0, v)$ روی هر خم با پارامتر v، $u = u_0$، می‌باشد.) از آنجاکه $\mathbf{x}_v$ بردارهای سرعت این‌گونه خمها را به‌دست می‌دهد، بنابر تمرین ۱، بند ۱، داریم $U_v = -S(\mathbf{x}_v)$، و معادلهٔ بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = U \cdot \mathbf{x}_{uv}$$

(شکل ۲۵.۵). باقرار دادن u و v به‌ترتیب به‌جای v و u سه معادلهٔ مشابه به‌دست می‌آید، به‌ویژه داریم:

$$S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = U \cdot \mathbf{x}_{vu} = U \cdot \mathbf{x}_{uv} = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u$$

چون $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ در هر نقطه یك پایه از فضای مماس است، این نکته برای اثبات تقارن S کافی است (لم ۴.۱).



شکل ۲۵.۵

۲.۴. لم. اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی از $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه:

$$l = S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u = U \cdot \mathbf{x}_{uu}$$
$$m = S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v = U \cdot \mathbf{x}_{uv}$$
$$n = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v = U \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

درهریك ازحالتهای بالا معادلهٔ اول همان تعریف است، درفرمول m می‌توان ترتیب u و v را وارون نمود.

۳.۴. مثال. محاسبهٔ خمیدگیهای گاوسی و متوسط

(۱) **هلیکوئید** (تمرین ۷، بند ۲، فصل ۴). رویهٔ H که درشکل ۲۶.۵ نشان داده شده است، به‌وسیلهٔ تك قطعه مختصاتی:

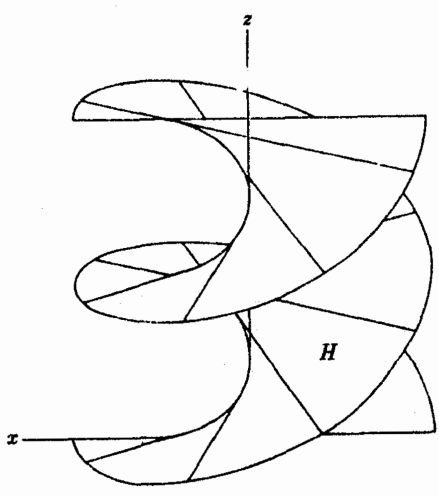
$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, bv), \quad b \neq 0$$

پوشیده می‌شود، که به‌ازای آن داریم:

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0) \qquad E = 1$$
$$\mathbf{x}_v = (-u\sin v, u\cos v, b) \qquad F = 0$$
$$G = b^2 + u^2$$

بنا براین

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (b\sin v, -b\cos v, u)$$



شکل ۲۶.۵

برای تعیین K به‌تنهایی محاسبهٔ E، F و G لزومی ندارد، اما بهتر است درهرحال این محاسبه انجام شود، زیرا اتحاد:

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

برای طول $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ آزمونی به‌دست می‌دهد. (امتداد آن را نیز می‌توان بررسی کرد، زیرا باید بر هردو بردار $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ عمود باشد.) اگر $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$ را با W نشان دهیم، آنگاه درمورد هلیکوئید داریم $W = \sqrt{b^2 + u^2}$، و تابع قائم یکه چنین نوشته می‌شود

$$U = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{W} = \frac{(b \sin v, -b \cos v, u)}{\sqrt{b^2 + u^2}}$$

ازطرف دیگر داریم

$$\mathbf{x}_{uu} = 0$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

رابطهٔ اول بدیهی است، زیرا خمهای پارامتر u خط مستقیم‌اند. خمهای پارامتر v مارپیچ‌اند، و این فرمول شتاب $\mathbf{x}_{vv}$ را در فصل ۲ به‌دست آوردیم. اکنون بنابر لم ۲.۴ داریم

$$l = \mathbf{x}_{uu} \cdot \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)}{W} = 0$$

$$m = \mathbf{x}_{uv} \cdot \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)}{W} = -\frac{b}{W}$$

$$n = \mathbf{x}_{vv} \cdot \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)}{W} = 0$$

ازاینجا بنابرفرع ۱.۴ و نتایج بالا، داریم

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{-(b/W)^2}{W^2} = \frac{-b^2}{W^4} = \frac{-b^2}{(b^2 + u^2)^2}$$

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)} = 0$$

بدینسان دیده می‌شود که هلیکوئید یك رویهٔ مینیمال با خمیدگیهای

$$-1 \leqslant K < 0$$

است. مقدار مینیمم $K = -1$ روی محور مرکزی هلیکوئید $(u = 0)$ به دست می‌آید، و هنگامی که دوری $|u|$ ازمحور به بینهایت می‌گراید، داریم $K \to 0$.

(۲) رویهٔ زینی $M: z = xy$ (مثال ۳.۱). این بار از قطعه مختصاتی مونژ $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv)$ استفاده می‌کنیم، و با محاسباتی نظیر آنچه که گذشت، خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, v) \qquad E = 1 + v^2$$
$$\mathbf{x}_v = (0, 1, u) \qquad F = uv$$
$$G = 1 + u^2$$
$$U = (-v, -u, 1)/W \qquad W = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$$
$$\mathbf{x}_{uu} = 0 \qquad l = 0$$
$$\mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 1) \qquad m = 1/W$$
$$\mathbf{x}_{vv} = 0 \qquad n = 0$$

از آنجا:

$$K = \frac{-1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \quad , \quad H = \frac{-uv}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}$$

به‌بیان دقیقتر، این توابع $K(\mathbf{x})$ و $H(\mathbf{x})$ هستند که حوزهٔ تعریف آنها $\mathbf{E}^2$است. اما به آسانی می‌توان K و H را مستقیماً به‌صورت توابعی روی M بیان کرد، برای این‌کار ازتوابع مختصاتی استوانه‌ای $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و z استفاده می‌کنیم. ازشکل ۲۷.۵ دیده می‌شود که

$$r(\mathbf{x}(u, v)) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

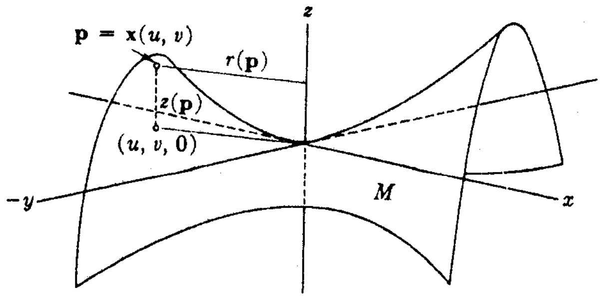
و

$$z(\mathbf{x}(u, v)) = uv$$

بنابراین روی M داریم:

$$K = \frac{-1}{(1 + r^2)^2} \quad , \quad H = \frac{-z}{(1 + r^2)^{3/2}}$$

بدینسان خمیدگی گاوسی رویهٔ M فقط به‌دوری نقطه از محور z بستگی دارد، و هنگامی که r به سمت بینهایت می‌گراید، K از -1 (در مبدأ) تا صفر افزایش می‌یابد، درحالی که مقدار H اساساً تغییر می‌کند.



شکل ۲۷.۵

مانند همهٔ رویه‌های ساده (که از یك قطعه مختصاتی تشکیل می‌شوند) هلیکوئید و رویهٔ زینی نیز جهتپذیرند، زیرا ازمحاسبات بالا برای هرنقطه از رویه قائم یکه به‌دست می‌آید. بدینسان توابع خمیدگی اصلی $k_۱$ و $k_۲$ بدون ابهام روی هریك از این رویه‌ها معین می‌گردند و این مقادیر را همواره می‌توان از K و H، به‌موجب فرع ۵.۳ به‌دست‌آورد. چون هلیکوئید یك رویهٔ مینیمال است، نتیجه به‌صورت سادهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$k_۱,\ k_۲ = \frac{\pm b}{(b^۲ + u^۲)}$$

درمورد رویهٔ زینی:

$$k_۱,\ k_۲ = \frac{-z \pm \sqrt{۱ + r^۲ + z^۲}}{(۱ + r^۲)^{۳/۲}}$$

طرز محاسبهٔ بردارهای اصلی را به‌صورت تمرین آورده‌ایم.

روش محاسباتی دیگری وجود داردکه مبتنی است برشناخت فرمول صریح یك‌میدان برداری قائم $Z = \sum z_i U_i$ روی رویهٔ M که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. دراین باره مهمترین حالت رویه‌ای است که به‌صورت $M : g = c$ داده شده باشد، زیرا در این صورت بنا برآنچه دربند ۳، فصل ۴ آمد، می‌دانیم که‌گرادیان

$$\nabla g = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} U_i$$

نیز یك میدان برداری از این نوع است. بدینسان می‌توان به‌جای Z هرمضرب اسکالر مناسب ∇g را به‌کار برد. اگر S عملگر شکلی متناظر با قائم یکه

$$U = \frac{Z}{\|Z\|}$$

و V یك میدان برداری مماس روی‌رویهٔ M باشد، آنگاه با استفاده از روش ۲، بند ۱، خواهیم داشت

$$\nabla_V Z = \sum V[z_i]U_i$$

با توجه برخصوصیت لایبنیتزی این مشتقها داریم:

$$\nabla_V U = \nabla_V \frac{Z}{||Z||} = \frac{(\nabla_V Z)}{||Z||} + V\left[\frac{۱}{||Z||}\right]Z$$

(شکل ۲۸.۵). نکتهٔ مهم دراینجا آن است که $V[۱/||Z||]Z$ یك میدان برداری قائم می‌باشد، و بی‌آنکه توجه‌کنیم که‌کدام است، آن را با N_V — نشان می‌دهیم. بدینسان

$$S(V) = -\nabla_V U = \frac{-(\nabla_V Z)}{||Z||} + N_V$$

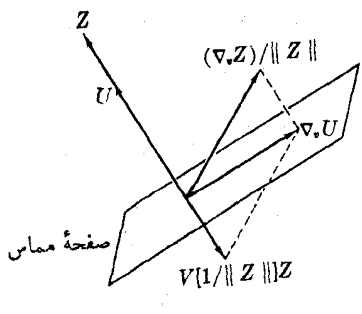
دیده می‌شود که اگر W یك میدان برداری مماس دیگر روی M باشد، آنگاه $N_V \times N_W = ۰$، درحالی‌که به‌ازای هر میدان برداری‌اقلیدسی Y روی M حاصل‌ضربهایی ازقبیل $N_V \times Y$ بر M مماس‌اند. بدینسان با محاسبات ساده‌ای می‌توان لم زیر را از لم ۴.۳ استنباط کرد.

۴.۴ لم. گیریم Z یك میدان برداری قائم روی M باشد، که هیچ‌گاه صفر نشود. اگر V و W دومیدان برداری مماس باشند، به‌طوری‌که $V \times W = Z$، آنگاه

$$K = \frac{(Z \cdot \nabla_V Z \times \nabla_W Z)}{||Z||^۴}$$

$$H = -Z \cdot \frac{(\nabla_V Z \times W + V \times \nabla_W Z)}{۲||Z||^۳}$$

برای محاسبه، مثلاً خمیدگی گاوسی یك رویهٔ $M : g = c$ با استفاده از قطعه‌های



شکل ۲۸.۵

مختصاتی، نخست باید صریحاً تعداد کافی از آنها به دست آورد تا همهٔ رویهٔ M را بپوشانند، و بدینسان محاسبهٔ کامل K حتی هنگامی که g تابع نسبتاً ساده‌ای باشد پیچیده ودشوار خواهد بود. مثال زیر مزیت روشی را که دربالا بیان کردیم نشان می‌دهد.

۵.۴ مثال. خمیدگی بیضیگون

$$M : g = \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

می‌نویسیم $g = \sum x_i^۲ / a_i^۲$، و ازمیدان برداری قائم

$$Z = \frac{۱}{۲} \nabla g = \sum \frac{x_i}{a_i^۲} U_i$$

که هیچ گاه صفر نمی‌شود، استفاده می‌کنیم.

اگر $V = \sum v_i U_i$ یك میدان برداری مماس رویهٔ M باشد، داریم:

$$\nabla_V Z = \sum \frac{V[x_i]}{a_i^۲} U_i = \sum \frac{v_i}{a_i^۲} U_i$$

زیرا

$$V[x_i] = dx_i(V) = v_i$$

با درنظرگرفتن همین نتایج به‌ازای یك میدان برداری مماس دیگر W خواهیم داشت:

$$Z \cdot \nabla_V Z \times \nabla_W Z = \begin{vmatrix} \frac{x_۱}{a_۱^۲} & \frac{x_۲}{a_۲^۲} & \frac{x_۳}{a_۳^۲} \\ \frac{v_۱}{a_۱^۲} & \frac{v_۲}{a_۲^۲} & \frac{v_۳}{a_۳^۲} \\ \frac{w_۱}{a_۱^۲} & \frac{w_۲}{a_۲^۲} & \frac{w_۳}{a_۳^۲} \end{vmatrix} = \frac{۱}{a_۱^۲ a_۲^۲ a_۳^۲} X \cdot V \times W$$

که در آن X همان میدان برداری ویژه $\sum x_i U_i$ است که درمثال ۹.۳، فصل ۴، به‌کار رفت.

همواره می‌توان V و W را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم $V \times W = Z$.

و دراین صورت داریم:

$$X \cdot V \times W = X \cdot Z = \sum \frac{x_i^۲}{a_i^۲} = ۱$$

بدینسان بنابر لم ۴.۴ داریم:

$$K = \frac{۱}{a_۱^۲ a_۲^۲ a_۳^۲ \|Z\|^۴}$$

که در آن

$$\|Z\|^4 = \left(\sum \frac{x_i^2}{a_i^4}\right)^2$$

به‌ازای هر رویهٔ جهتدار در $\mathbf{E}^3$، تابع محملی h به هرنقطهٔ $\mathbf{p}$، دوری قائم $h(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot U(\mathbf{p})$ از مبدأ تا صفحهٔ مماس $T_p(M)$ را نسبت می‌دهد، شکل ۲۹.۵ این تابع را درمورد بیضیگون نشان می‌دهد. با استفاده ازمیدان برداری X (که مقدار آن در $\mathbf{p}$ عبارت است از بردار مماسی $\mathbf{p}_p$) برای بیضیگون خواهیم داشت

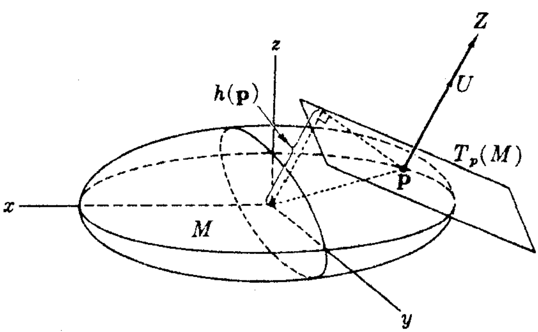
$$h = X \cdot U = X \cdot \frac{Z}{\|Z\|} = \frac{1}{\|Z\|}$$

بدینسان برای خمیدگی گاوسی بیضیگون عبارت ملموستر

$$K = \frac{h^4}{a^2 b^2 c^2}$$

به‌دست می‌آید. دیده می‌شود که به‌ازای $a = b = c = r$، بیضیگون به‌یک کره بدل می‌شود، و این فرمول به‌صورت $K = 1/r^2$ درمی‌آید.

نتایج محاسباتی این بند، با آنکه دربارهٔ رویه‌ها بیان شد، اما دربارهٔ رویه‌های فرو برده شده (تمرین ۱۰، فصل ۴، بند ۸) نیز به‌کار می‌روند. به‌ویژه فرمولی‌که درفرع ۱.۴، آمده‌است درمورد هرنگاشت منظم دلخواه $\mathbf{x} : D \to \mathbf{E}^3$ دارای معنی است. توجیه نظری این عمومیت اضافی را درفصل ۷، بند ۷، مطرح کرده‌ایم.



شکل ۲۹.۵

تمرینات

۱. روشهای این بند را دربارهٔ قطعه مختصاتی جغرافیایی

$$\mathbf{x}(u,\ v) = (r\cos v\cos u,\ r\cos v\sin u,\ r\sin v)$$

به‌کار ببرید ونشان دهید که خمیدگی گاوسی کره‌ای به‌شعاع r برابر است با $K=1/r^{2}$.

۲. نشان دهید که درمورد قطعه مختصاتی مونژ $\mathbf{x}(u, v)=(u, v, f(u, v))$ داریم:

$$E=1+f_u^2 \qquad l=f_{uu}/W$$
$$F=f_u f_v \qquad m=f_{uv}/W$$
$$G=1+f_v^2 \qquad n=f_{vv}/W$$

که درآن

$$W=(1+f_u^2+f_v^2)^{1/2}$$

و ازآنجا فرمولهایی برای K و H بیابید.

۳. (ادامه). نشان دهید که شرط لازم وکافی برای آنکه نگارهٔ $\mathbf{x}$ هموار باشد آن است که

$$f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2=0$$

وبرای آنکه مینیمال باشد

$$(1+f_u^2)f_{vv}+(1+f_v^2)f_{uu}-2f_u f_v f_{uv}=0$$

۴. نشان دهید که نگارهٔ قطعه مختصاتی

$$\mathbf{x}(u, v)=(u, v, \log\cos v-\log\cos u)$$

یك رویهٔ مینیمال است وخمیدگی گاوسی آن برابر است با

$$K=\frac{-\sec^{2}u\sec^{2}v}{W^{4}}$$

که درآن

$$W^{2}=1+\tan^{2}u+\tan^{2}v$$

۵. برای زین میمون $M: z=x^{3}-3xy^{2}$ (شکل ۲۲.۵) خمیدگی K را برحسب $r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ بیان کنید. آیا این یك رویهٔ مینیمال است؟

۶. خمیدگی گاوسی سهمیگون هذلولوی وبیضوی زیر را بیابید

$$M: z=\frac{x^{2}}{a^{2}}+\varepsilon\frac{y^{2}}{b^{2}}, \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

۷. نشان دهید که قطعه خم

$$\alpha(t)=\mathbf{x}(a_1(t), a_2(t)), \qquad a\leqslant t\leqslant b$$

دارای طول

$$L(\alpha)=\int_a^b (Ea_1'^2+2Fa_1'a_2'+Ga_2'^2)^{1/2}\,dt$$

می‌باشد، که در آن E، F و G برحسب a_1 و a_2 محاسبه شده‌اند.

۸. ثابت کنید که زاویهٔ مختصاتی ϑ در قطعه مختصاتی $\mathbf{x}:D\to M$، $0<\vartheta<\pi$ یك تابع دیفرانسیلپذیر روی D است (راهنمایی: از نامساوی شوارتس فصل ۲، بند ۱ استفاده کنید).

۹. (الف) قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در M را هنگامی که F مساوی صفر باشد متعامد نامند (بنا براین در هرنقطه $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ متعامدند). نشان دهید که دراین حالت داریم

$$S(\mathbf{x}_u)=\frac{l}{E}\mathbf{x}_u+\frac{m}{G}\mathbf{x}_v$$

$$S(\mathbf{x}_v)=\frac{m}{E}\mathbf{x}_u+\frac{n}{G}\mathbf{x}_v$$

(ب) قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ را هنگامی اصلی گویند که $F=m=0$. ثابت کنید که دراین حالت $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ درهر نقطه بردارهای اصلی‌اند، وخمیدگیهای اصلی متناظر به‌آنها l/E و n/G است.

۱۰. ثابت کنید که بردار مماس

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{x}_u+v_2\mathbf{x}_v$$

یك بردار اصلی است، اگر، وفقط اگر

$$\begin{vmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

(راهنمایی: شرط لازم وکافی برای آنکه $\mathbf{v}$ اصلی باشد، آن است که بردار قائم $S(\mathbf{v})\times\mathbf{v}$ صفر باشد.)

۱۱. نشان دهید که روی رویهٔ زینی M (۳.۴) دومیدان برداری

$$(\sqrt{1+u^2},\ \pm\sqrt{1+v^2},\ v\sqrt{1+u^2}\pm u\sqrt{1+v^2})$$

درهرنقطه، اصلی‌اند. بررسی کنید که این دومیدان متعامد و بر M مماس‌اند.

۱۲. (رویهٔ مینیمال انپر[1]). رویهٔ فرو برده شدهٔ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2,\ v-\frac{v^3}{3}+u^2v,\ u^2-v^2\right)$$

رویهٔ مینیمال انپر نام دارد. ثابت کنید که این رویهٔ فرو برده شده مینیمال است و $\mathbf{x}$ یك به‌یك نیست. (راهنمایی: برای اثبات $H=0$ کافی است ثابت کنید

$$E=G,\ F=0,\ \text{و}\quad \mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}=0.)$$

۱۳. (ملاك قطعه مختصاتی نقاط نافی). نشان دهید برای آنکه نقطهٔ $\mathbf{x}(u,v)$ نافی باشد، لازم و کافی است که عددی مانند k بتوان یافت به‌طوری که در (u,v) داشته باشیم $l=kE$، $m=kF$ و $n=kG$ (دراین صورت k خمیدگی اصلی $k_1=k_2$ است).

۱۴. اگر $\mathbf{v}=v_1\mathbf{x}_u+v_2\mathbf{x}_v$ در $\mathbf{x}(u,v)$ بر M مماس باشد، خمیدگی قائم در امتداد $\mathbf{v}$ برابر است با:

$$k(\mathbf{v})=\frac{lv_1^2+2mv_1v_2+nv_2^2}{Ev_1^2+2Fv_1v_2+Gv_2^2}$$

که در آن توابع مختلف در نقطهٔ (u,v) محاسبه شده‌اند.

۱۵. مطلوب است تعیین نقاط نافی (درصورت وجود) رویه‌های زیر:

(الف) زینی (مثال ۳.۴).

(ب) زین میمون (تمرین ۵).

(ج) سهمیگون بیضوی (تمرین ۶).

۱۶. (لوله). اگر β خمی با تندی واحد در $\mathbf{E}^3$ با $\kappa>0$ باشد، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{x}(u,v)=\beta(u)+\varepsilon(\cos v\,N(u)+\sin v\,B(u))$$

بدینسان خمهای پارامتر v دوایری به شعاع (ثابت) ε می‌باشند که درصفحات عمود بر β واقع‌اند. نشان دهید که

(الف) اگر ε به‌قدرکافی کوچك باشد، $\mathbf{x}$ منظم است، وبنابراین یك رویهٔ فرو برده شده خواهد بود که آن را یك لوله به‌شعاع ε حول β می‌نامند.

(ب) $U=\cos v\,N(u)+\sin v\,B(u)$ یك تابع قائم یکه روی لولهٔ مزبور است.

(ج)
$$K=\frac{-\kappa(u)\cos v}{\varepsilon(1-\kappa(u)\varepsilon\cos v)}$$

(راهنمایی: از $S(\mathbf{x}_u)\times S(\mathbf{x}_v)=K\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v$ استفاده کنید.)

---

1. Enneper

۱۷. نشان دهید که هذلولیگونهای بیضوی یکپارچه و دوپارچه (تمرین ۱۰ فصل ۴، بند ۲) بـه ترتیب دارای خمیدگی گاوسی $K=-h^۴/a^۲b^۲c^۲$ و $K=h^۴/a^۲b^۲c^۲$ می‌باشند، و هر دوتابع محملی h بـا همان فرمولی کـه برای بیضیگون (مثال ۵.۴) به‌دست آمد معین می‌شوند.

۱۸. اگر h تابع محملی رویهٔ جهتدار $M\subset\mathbf{E}^۳$ باشد، نشان‌دهید که (الف) نقطهٔ $\mathbf{p}$ از رویهٔ M، نقطهٔ بحرانی h است، اگر، وفقط اگر، به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ داشته باشیم $\mathbf{p}\cdot S(\mathbf{v})=۰$ (راهنمایی: h را به‌صورت $X\cdot U$ بنویسید، که‌در آن $X=\sum x_iU_i$).

(ب) هنگامی کـه $K(\mathbf{p})\neq ۰$، $\mathbf{p}$ نقطهٔ بحرانی h خواهـد بود، اگر، وفقط اگر، $\mathbf{p}$ (به‌عنوان یك بردار گرفته شود) عمود بر M در $\mathbf{p}$ باشد.

۱۹. با استفاده از تمرینات بـالا، دامنهٔ تغییرات خمیدگی گاوسی بیضیگون و هذلولیگون بیضوی یکپارچه و دوپارچه (تمرین ۱۰، فصل ۴، بند ۲) را بیابید، فرض می کنیم $a\geqslant b\geqslant c$.

۲۰. K و H را برای رویهٔ زینی (مثال ۳.۴) با استفاده از روشی که درپایان همین بند آمد محاسبه کنید. (راهنمایی: V و W را مماس بردومجموعهٔ مولدهای M بگیرید.)

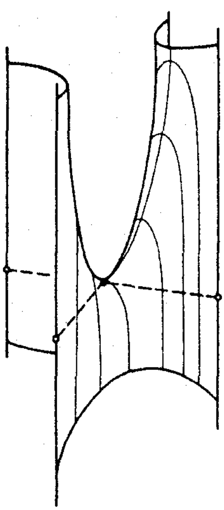
۲۱. رویهٔ مینیمال شرك[1]، $M: e^z\cos x=\cos y$. گیریم $\mathcal{R}$ ناحیه‌ای ازصفحهٔ xy باشد که روی آن $\cos x\cos y>۰$، $\mathcal{R}$ یك مدل شطرنجی ازمربعهای باز بـا رئوس $((\pi/۲)+\pi m, (\pi/۲)+n\pi)$ است. نشان دهید که

(الف) M یك رویه است.

(ب) به ازای هرنقطهٔ (u, v) از $\mathcal{R}$ دقیقاً یك نقطهٔ (u, v, w) از M به‌دست می آید. تنها نقاط دیگر M عبارت‌اند ازهمهٔ نقاط خطوط قائم در رئوس $\mathcal{R}$ (شکل ۳۰.۵).

(ج) M یـك رویـهٔ مینیمال است و داریم $K=-e^{۲z}/(e^{۲z}\sin^۲ x+۱)^۲$.

(راهنمایی: $V=\cos xU_۱+\sin xU_۳$ یك میدان برداری مماس است.) خواص دیگری از این رویـه در تمرین ۱۱، فصل ۶، بند ۸ خواهد آمد.


شکل ۳۰.۵

۲۲. گیریم Z یك میدان برداری قـائم روی M

1. Scherk

باشدکه هیچ‌گاه صفر نشود. نشان دهیدکه بردار مماس $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ اصلی است اگر، وفقط اگر،

$$\mathbf{v} \cdot Z(\mathbf{p}) \times \nabla_{\mathbf{v}} Z = 0$$

(راهنمایی: تمرین ۱۰ را ببینید).
امتدادهای اصلی از حل معادلهٔ بالا وشرط تماس

$$Z(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

به‌دست می‌آیند. بدینسان می‌توان نقاط نافی را بـا استفاده از این معادلات مشخص کرد: $\mathbf{p}$ نافی است اگر، وفقط اگر، هر بردار مماس $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ اصلی باشد.

۲۳. بیضیگون $M: \sum x_i^2/a_i^2 = 1$ را درنظر می‌گیریم. نشان دهیدکه
(الف) بردار مماس $\mathbf{v}$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ اصلی است اگر، وفقط اگر،

$$0 = p_1 v_2 v_3 (a_2^2 - a_3^2) + p_2 v_1 v_3 (a_3^2 - a_1^2) + p_3 v_1 v_2 (a_1^2 - a_2^2)$$

(ب) با فرض $a_1 > a_2 > a_3$، نشان دهیدکه دقیقاً چهارنقطهٔ نافی روی M وجود دارد ومختصات آنها عبارت‌اند از

$$p_1 = \pm a_1 \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}\right)^{1/2} \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = \pm a_3 \left(\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_1^2 - a_3^2}\right)^{1/2}$$

۵. خمهای مهم یك رویه

اکنون سه نوع خم ازیك رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ راکه دارای‌اهمیت هندسی‌اند به‌اختصار بررسی می‌کنیم. این بند وبند بعدی دراین نظریـه ضرورت اساسی ندارند، و هدف ازآنها تهیهٔ مثال برای کارهای آتی وتوضیح برخی ازمفاهیمی است‌که تاکنون معرفی شده‌اند.

۱.۵ تعریف. خم منظم α در $M \subset \mathbf{E}^3$ را یك خم اصلی (یا خط خمیدگی) نامند، هرگاه سرعت آن، α'، همواره درامتداد اصلی باشد.

بدینسان خمهای اصلی همواره آن امتدادهایی از رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ را می‌پیمایندکه خمیدگی رویـه درآن امتدادهـا مقادیر اکسترمم را اختیار می‌کند. صرفنظر از تعویض نمایش پـارامتری، ازهر نقطهٔ غیرنافی رویهٔ M دقیقاً دوخم اصلی می‌گذرد، و این خمها الزاماً یکدیگر را متعامداً قطع می‌کنند. (دریك‌نقطهٔ نافی $\mathbf{p}$ هر امتداد، اصلی‌است وموجب می‌شودکه طرح خمهای اصلی درمجاورت $\mathbf{p}$ بسیار پیچیده‌گردد.)

۲.۵ لم. گیریم α یك خم منظم در $M \subset \mathbf{E}^3$ و U یك میدان برداری قائم یکه باشدکه به α تخصیص یافته است. آنگاه

(۱) خم α اصلی است، اگر وفقط اگر، U' و α' درهر نقطه همخط باشند.

(۲) اگر α یك خم اصلی باشد، آنگاه خمیدگی اصلی M درامتداد α' برابر است با $\alpha'' \cdot U/\alpha' \cdot \alpha'$.

برهان. (۱) بنابر تمرین ۱ بند ۱ داریم $S(\alpha') = -U'$. از این‌رو U' و α' همخط‌اند اگر، وفقط اگر، $S(\alpha')$ و α' همخط باشند. اما بنا بر قضیهٔ ۵.۲ این نکته مبین آن است که α' همواره متوجه یك امتداد اصلی است، به‌عبارت دیگر α یك خم اصلی است.

(۲) چون α یك خم اصلی است، میدان برداری $\alpha'/\|\alpha'\|$ کلاً از بردارهای اصلی (یکه) تشکیل می‌شود، که به‌یك خمیدگی اصلی k_i متعلق‌اند. بنابراین

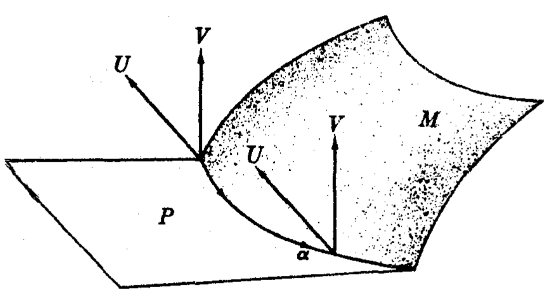
$$k_i = k\left(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}\right) = S\left(\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}\right) \cdot \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$
$$= \frac{S(\alpha') \cdot \alpha'}{\alpha' \cdot \alpha'} = \frac{\alpha'' \cdot U}{\alpha' \cdot \alpha'}$$

که در تساوی اخیر از لم ۱.۲ استفاده کرده‌ایم. ∎

دراین لم، (۱) ملاك ساده‌ای برای اصلی بودن خم است و (۲) خمیدگی اصلی را درامتداد یك خم اصلی به دست می‌دهد.

۳.۵ لم. گیریم α مقطع رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ با صفحهٔ P باشد. اگر درطول α زاویهٔ بین M و P ثابت باشد، آنگاه α یك خم اصلی رویهٔ M است.

برهان. گیریم U و V به‌ترتیب میدانهای برداری قائم یکه بر M و P درطول خم α باشند، چنان‌که درشکل ۳۱.۵ نشان داده شده است. چون P یك صفحه است، V متوازی خواهد بود، یعنی $V' = 0$. ازفرض ثابت‌بودن زاویه نتیجه می‌شود که $U \cdot V$ ثابت است، وبنابراین



شکل ۳۱.۵

یعنی U' بر V عمود است، وچون U برداریکه می باشد، U' مثل V بر U نیزعمود خواهد بود. همین نکته دربارهٔ α' نیز صادق است، زیرا α هم در M وهم در P واقع می‌باشد. درحالتی‌که U و V دارای استقلال خطی باشند (شکل ۳۱.۵)، نتیجه می‌شودکه U' و α' همخط‌اند، وبنابر لم ۲.۵، α اصلی است.

درحالتی هم‌که استقلال خطی برقرار نباشد، خواهیم داشت $U = \pm V$، و درنتیجه $U' = 0$، بنابراین (خود به‌خود واضح است) α دراین حالت نیز اصلی است. ∎

(اثبات تعمیمی‌که درتمرین ۵ آمده است، دشوارتر ازاین نخواهد بود.) با استفاده ازاین نتیجه به‌آسانی می‌توان دیدکه نصف‌النهارات ومدارات یک‌رویهٔ دورانی M خمهای اصلی آن می‌باشند. زیرا هر نصف‌النهار μ مقطع رویهٔ M با صفحه‌ای مار برمحور دوران است، وبنابراین درامتداد μ بر رویهٔ M متعامد می‌باشد، و هر مدار π مقطع M با صفحه‌ای است عمود برمحور دوران، وتقارن دورانی موجب می‌شودکه این صفحه در طول π با M زاویهٔ ثابتی بسازد.

امتدادهای مماس بر $M \subset \mathbf{E}^3$ که خمیدگی قائم متناظر به‌آنها صفر است، امتدادهای مجانبی نامیده می‌شوند. بدینسان یک بردار مماس $\mathbf{v}$ هنگامی مجانبی خواهد بودکه داشته باشیم $k(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$، بنابراین درمجاورت یک امتداد مجانبی، خمیدگی رویهٔ M چنان نیست‌که آن را (فوراً، لااقل) ازصفحهٔ مماس خود دور کند.

با استفاده ازفرع ۶.۲ می‌توان تحلیل کاملی از امتدادهای مجانبی برحسب خمیدگی گاوسی به‌دست داد.

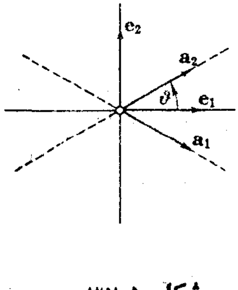
۴.۵ لم. گیریم $\mathbf{p}$ نقطه‌ای از رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد.

(۱) اگر $K(\mathbf{p}) > 0$، در $\mathbf{p}$ امتداد مجانبی وجود ندارد.

(۲) اگر $K(\mathbf{p}) < 0$، در $\mathbf{p}$ دقیقاً دوامتداد مجانبی وجود داردکه نیمسازهای آنها همان امتدادهای اصلی هستند (شکل ۳۲.۵) و ϑ، زاویهٔ بین امتداد مجانبی وامتداد اصلی، به‌گونه‌ای است که:

$$\tan^2 \vartheta = \frac{-k_1(\mathbf{p})}{k_2(\mathbf{p})}$$

(۳) اگر $K(\mathbf{p}) = 0$، دراین صورت هر امتداد، یک‌امتداد مجانبی‌خواهدبود اگر $\mathbf{p}$ نقطه‌ای هامنی باشد، درغیر این صورت دقیقاً یک امتداد مجانبی وجود داردکه امتداد اصلی نیز هست.



شکل ۳۲.۵

برهان. این حالتها همه ازفرمول اویلر:

$$k(\mathbf{u}) = k_1(\mathbf{p}) \cos^2 \vartheta + k_2(\mathbf{p}) \sin^2 \vartheta$$

که درفرع ۶.۲ آمده بود، حاصل می‌شوند.

(۱) چون $k_1(\mathbf{p})$ و $k_2(\mathbf{p})$ هم‌علامت می‌باشند، $k(\mathbf{u})$ هرگز صفر نمی‌شود.
(۲) دراینجا $k_1(\mathbf{p})$ و $k_2(\mathbf{p})$ هم‌علامت نیستند، و می‌توان معادلهٔ

$$0 = k_1(\mathbf{p})\cos^2\vartheta + k_2(\mathbf{p})\sin^2\vartheta$$

را حل کرد و دوامتداد مجانبی به‌دست آورد.
(۳) اگر $\mathbf{p}$ هامنی باشد، آنگاه

$$k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p}) = 0$$

وبنابراین $k(\mathbf{u})$ متحد با صفر است. اگر فقط داشته باشیم

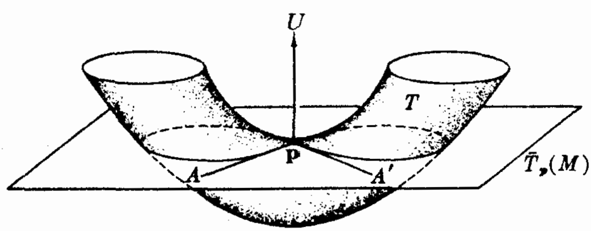
$$k_2(\mathbf{p}) = 0$$

آنگاه عبارت

$$k(\mathbf{u}) = k_1(\mathbf{p})\cos^2\vartheta$$

فقط هنگامی صفر است که $\cos\vartheta = 0$، یعنی درامتداد اصلی $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$. ∎

می‌توان به‌تقریب تصوری ازامتدادهای مجانبی دریك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از رویهٔ مفروض M با درنظر گرفتن مقطع صفحهٔ مماس $\bar{T}_p(M)$ با رویهٔ M درمجاورت $\mathbf{p}$ به‌دست آورد. هنگامی‌که $K(\mathbf{p})$ منفی است، این‌مقطع از دوخم مار بر $\mathbf{p}$ تشکیل می‌شود، که مماسهایشان (در $\mathbf{p}$) همان امتدادهای مجانبی هستند (بند ۳، تمرین ۵).
شکل ۳۳.۵ دوامتداد مجانبی A و A' درنقطهٔ $\mathbf{p}$ ازخط استوای داخلی یك چنبره را نشان می‌دهد. (دوخم مقطع به‌هم پیوند یافته ویك شکل 8 را تشکیل می‌دهند.)



شکل ۳۳.۵

۵.۵. تعریف. خم منظم α از رویهٔ $M \subset E^3$ را خم مجانبی نامند، هرگاه سرعت آن α' همواره یك امتداد مجانبی را نشان دهد.

بدینسان α مجانبی است اگر، وفقط اگر،

$$k(\alpha') = S(\alpha') \cdot \alpha' = 0$$

چون $S(\alpha') = -U'$، ازاینجا برای مجانبی بودن α ملاك $U' \cdot \alpha' = 0$ به‌دست می‌آید.

خمهای مجانبی نسبت به خمیدگـی گاوسی از خمهای اصلی حساسترانـد: لم ۳.۵ نشان می‌دهد که در ناحیه‌هایی که K مثبت است اصلاً خم مجانبی وجود ندارد، اما در هرنقطه از ناحیه‌ای که در آن K منفی باشد دو خم مجانبی متقاطع (که زاویهٔ تقاطع آنها بـه K بستگی دارد) وجود دارند.

ساده‌ترین ملاك برای آنکه خمی در M مجانبی باشد، آن است که شتاب آن α'' همواره بر M مماس باشد. زیرا با مشتقگیری از $U \cdot \alpha' = 0$ داریم

$$U' \cdot \alpha' + U \cdot \alpha'' = 0$$

بنابراین $U' \cdot \alpha' = 0$ (α مجانبی است) اگر، و فقط اگر، $U \cdot \alpha'' = 0$.

تحلیلی که در لم ۴.۵ از امتدادهای مجانبی به‌عمل آمد، نتایجی برای هر دو نوع رویهٔ‌هموار و مینیمال به‌دست می‌دهد. نخست آنکه رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ مینیمال خواهد بـود اگر، وفقط اگر، در هرنقطهٔ آن دو امتداد مجانبی متعامد وجود داشته باشد. زیرا $H(\mathbf{p}) = 0$ هم‌ارز است با $k_1(\mathbf{p}) = -k_2(\mathbf{p})$، و بررسی شرایط لم ۴.۵ نشان می‌دهد که فقط وفقط هنگامی تساوی $k_1(\mathbf{p}) = -k_2(\mathbf{p})$ برقرار است که یا (الف) $\mathbf{p}$هامنی باشد (که در این صورت ملاك به‌وضوح صدق می‌کند) و یا (ب) $K(\mathbf{p}) < 0$، $\vartheta = \pm \pi/4$، کـه معنی آن این است که دو امتداد مجانبی متعامدند.

بدینسان، یك رویه فقط وفقط هنگامی مینیمال است که ازهر نقطهٔ آن دوخم مجانبی متعامد بگذرند. این بـررسی برای محاسبات مثال ۳.۴ کـه نشان می‌دهند هلیکوئید یك رویهٔ مینیمال است، معنی هندسی فراهم می‌آورد. در واقع خمهای پارامتر u و v ازقطعه‌مختصاتی $\mathbf{x}$ متعامـدنـد، زیـرا $F = 0$، و شتابهای آنها بـر رویـهٔ مماس‌انـد، زیـرا $l = U \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0$ و $n = U \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$.

به‌طور اختصار، رویهٔ خط دار M رویه‌ای است کـه از حـرکت یك خط مستقیم در $\mathbf{E}^3$ ایجاد می‌شود، اوضاع مختلف این خط را مولدهای M می‌نامند. بدینسان M دارای یك نمایش پارامتری خط مانند

$$\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + v\delta(u), \quad \text{یا} \quad \beta(v) + u\delta(v)$$

است، که در آن β و δ خمهایی در $\mathbf{E}^3$ می‌باشند، و δ همواره مخالف صفر است (تمرین ۴ـ۹ از بند۲، فصل ۴ را ببینید). به‌عنوان مثال، هلیکوئید یك رویهٔ خط دار است، زیرا قطعه مختصاتی مثال ۳.۴ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, bv) + u(\cos v, \sin v, 0)$$

این نشان می‌دهد که هلیکوئید از دوران خطی کـه در طول محور zها بالا مـی‌رود ایجاد می‌شود. رویهٔ زینی $M: z = xy$ خطدار مضاعف است، زیرا

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv) = \begin{cases} (u, 0, 0) + v(0, 1, u) \\ (0, v, 0) + u(1, 0, v) \end{cases}$$

تصادفی نیست که این هر دو رویه دارای Kی منفی‌اند، زیرا:

۶.۵ لم. هر رویهٔ خط دار M دارای خمیدگی گاوسی $K \leqslant ۰$ است. علاوه براین، شرط لازم و کافی برای $K = ۰$ آن است که قائم یکهٔ U درطول هر مولد M متوازی باشد (ازاین‌رو همهٔ نقاط $\mathbf{p}$ واقع بریك مولد دارای یك صفحهٔ مماس $T_p(M)$ واحداند).

برهان. هر خط راست $t \to \mathbf{p}+t\mathbf{q}$ ازیك رویه قطعاً یك خم مجانبی است، زیرا شتاب آن صفر و بنابراین مماس بودن آن بر M خود به‌خود روشن است. بنا بر تعریف، از هر نقطهٔ رویهٔ خطدار خطی واقع برآن می‌گذرد. بنابراین درهر نقطهٔ آن یك امتداد مجانبی وجود دارد، و طبق لم ۴.۵، $K \leqslant ۰$.

اکنون گیریم $\alpha(t) = \mathbf{p}+t\mathbf{q}$ یك مولد دلخواه از M باشد. اگر U در طول α متوازی باشد، آنگاه $S(\alpha') = U' = ۰$. بدینسان α یك خم اصلی با خمیدگی اصلی $k(\alpha') = ۰$ می‌باشد، و در نتیجه $K = k_1 k_2 = ۰$.

برعکس، اگر $K = ۰$، ازحالت (۳) لم ۴.۵ نتیجه می‌گیریم که امتدادها وخمهای مجانبی رویهٔ M اصلی نیز هستند. بدینسان هر مولد α، هم اصلی ($S(\alpha') = k(\alpha')\alpha'$) و هم مجانبی ($k(\alpha') = ۰$) است، از آنجا $U' = -S(\alpha') = ۰$. ∎

اکنون به‌آخرین و مهمترین نوع خمها از سه نوع مورد بحث می‌رسیم.

۷.۵ تعریف. خم α از رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ را ژئودزیك M نامند اگر شتاب آن، α''، همواره بر M قائم باشد.

چون α'' بر M قائم است، ساکنین M هیچ شتابی احساس نمی‌کنند، برای آنان ژئودزیك α یك «خط راست» است. بررسی کامل ژئودزیکها درفصل ۷ آمده است، و در آنجا به‌خصوص ویژگی آنها به‌عنوان کوتاهترین راه مورد توجه و دقت قرار گرفته است. بر یك رویهٔ M ژئودزیکها بسیار فراوانتر از خمهای اصلی و مجانبی‌اند، در واقع بنا بر قضیهٔ ۲.۴ از فصل ۷، از هر نقطهٔ رویهٔ M و در هرامتداد یك ژئودزیك می‌گذرد.

چون α'' به‌ویژه برسرعت آن α' نیز عمود است، ژئودزیك α دارای تندی ثابت می‌باشد، زیرا با مشتقگیری از

$$\|\alpha'\|^2 = \alpha' \cdot \alpha' \quad \text{خواهیم داشت} \quad 2\alpha' \cdot \alpha'' = 0$$

یك خط راست $\alpha(t) = \mathbf{p}+t\mathbf{q}$ از M همواره یك ژئودزیك آن است، زیرا قائم بودن شتاب آن $\alpha'' = ۰$ بر M مطلبی بسیار ساده است. برخلاف خمهای اصلی و مجانبی، ژئودزیکها را نمی‌توان برحسب عملگر شکلی تعریف کرد؛ اما یك ژئودزیك α (با تندی واحد) که خمیدگی آن مثبت باشد با عملگر شکلی S دارای رابطهٔ جالبی براساس اجزاء دستگاه فرنهٔ α می‌باشد. چون $N = \alpha''/\kappa$ قائم اصلی α بر رویهٔ M نیز قائم است داریم

$$-N' = S(\alpha') = S(T)$$

و بنابر یکی ازمعادلات فرنه خواهیم داشت $S(T)=\kappa T-\tau B$.
این ملاحظات برای تعیین ژئودزیکهای سه رویهٔ نسبتاً خاص کفایت می‌کنند.

۸.۵ مثال. ژئودزیکهای چند رویه در $\mathbf{E}^3$.

(۱) **صفحه.** صفحهٔ P عمود بر $\mathbf{u}$ را درنظر می‌گیریم، اگر α یك ژئودزیك آن باشد، داریم $\alpha'\cdot\mathbf{u}=0$، و در نتیجه $\alpha''\cdot\mathbf{u}=0$. اما بنابر تعریف، α'' قائم بر P است، بنابراین $\alpha''=0$. بدینسان α یك خط راست است، وچون هرخط راست نیزیك ژئودزیك می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ ژئودزیکهای P همان مجموعهٔ خطوط راست واقع در آن است.

(۲) کره. اگر α یك ژئودزیك (با تندی واحد) ازکرهٔ Σ به‌شعاع r باشد، بنابر ملاحظات پیشین داریم $S(T)=\kappa T-\tau B$. (در فصل ۲، بند ۳ دیدیم که هر خم در Σ دارای خمیدگی مثبت است، بنابراین می‌توان از اجزاء دستگاه فرنه استفاده کرد.) اما با توجه به‌مثال ۳.۱، بسته به اینکه کدام یك از دو قائم یکه را انتخاب کنیم، داریم $S(T)=\pm(1/r)T$. از این دو معادلهٔ مربوط به $S(T)$ نتیجه می‌شود که $\kappa=1/r$ و $\tau=0$. از اینجا بنا برلم ۶.۳، فصل ۲، نتیجه می‌گیریم که α بر یك دایرهٔ C به‌شعاع r واقع است. چون شعاع r ماکسیمم است، C باید یك دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ Σ، یعنی مقطع Σ با یك صفحهٔ ماربر مرکز آن باشد. برعکس هرخم α با تندی ثابت که در طول یك دایرهٔ عظیمه حرکت می‌کند، دارای یك شتاب α'' است که متوجه به‌مرکزدایره یعنی همان مرکز کرهٔ Σ می‌باشد، بنابراین α'' بر Σ قائم است. نتیجه می‌گیریم که ژئودزیکهای Σ، از نمایشهای پارامتری با تندی ثابت دوایرعظیمهٔ آن تشکیل یافته‌اند (شکل ۳۴.۵).

(۳) **استوانه.** به‌عنوان مثال، ژئودزیکهای استوانهٔ مستدیر $M:x^2+y^2=r^2$ همه، خمهایی به‌صورت

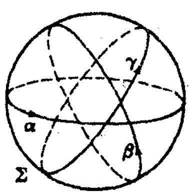
$$\alpha(t)=(r\cos(at+b),\ r\sin(at+b),\ ct+d)$$

هستند. زیرا، هر خم در M را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\alpha(t)=(r\cos\vartheta(t),\ r\sin\vartheta(t),\ h(t))$$

و مؤلفهٔ z بردار قائم بر M، صفر است. ازاین‌رو اگر α یك ژئودزیك باشد، آنگاه $h''=0$، و در نتیجه $h(t)=ct+d$. تندی $(r^2\vartheta'^2+h'^2)^{1/2}$ خم α ثابت است، پس ϑ' ثابت وبنابراین $\vartheta(t)=at+b$.

هنگامی که ثابتهای a و c هردو مخالف صفر باشند، خم α یك مارپیچ روی M است. حالت انتهایی $a=0$ مولدهای M، وحالت $c=0$ دوایرمقاطع عرضی آن‌را به‌دست می‌دهند.



شکل ۳۴.۵

خواص اساسی سه نوع خمی راکه بررسی کردیم، به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

خمهای اصلی	$k(\alpha')=k_1$ یا k_2،	$S(\alpha')$ و α' همخط	
خمهای مجانبی	$k(\alpha')=0$،	$S(\alpha')$ بر α' عمود،	α'' مماس بر M
ژئودزیکها			α'' قائم بر M

تمرینات

۱. ثابت کنید که خم α از رویهٔ $M\subset\mathbf{E}^3$ وقتی، وفقط وقتی، یك خط مستقیم است که هم ژئودزیك و هم مجانبی باشد.

۲. خمهای زیر به‌کدام یك ازسه نوع ــ اصلی، مجانبی، ژئودزیك ــ متعلق‌اند؟
(الف) α، دایرهٔ فوقانی چنبره (شکل ۳۵.۵).
(ب) β، استوای بیرونی چنبره.
(ج) محور x بر رویهٔ $M: z=xy$.
(با فرض نمایش پارامتری با تندی ثابت.)

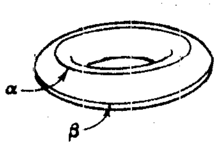
۳. نشان دهید که همهٔ نصف‌النهارات یك رویهٔ دورانی ژئودزیك‌اند، اما مدار مار بر نقطهٔ $\alpha(t)$ از خم نیمرخ وقتی، وفقط وقتی، ژئودزیك است که $\alpha'(t)$ با محور دوران موازی باشد.

۴. گیریم α یك خم مجانبی با خمیدگی $\kappa>0$ از رویهٔ $M\subset\mathbf{E}^3$ باشد.
(الف) ثابت کنید که در طول α قائم دوم B بر رویه قائم است، ونتیجه بگیرید که $S(T)=\tau N$.
(ب) نشان دهید که درطول α خمیدگی گاوسی رویه برابر است با $K=-\tau^2$.
(ج) با استفاده از (ب) خمیدگی گاوسی هلیکوئید (مثال ۳.۴) را بیابید.

۵. گیریم خم α بر دو رویهٔ M و $\bar{M}$ واقع باشد، و این دو رویه در امتداد α دارای زاویهٔ ثابتی باشند ($U\cdot\bar{U}$ ثابت). نشان دهید که α برای M اصلی است. اگر، و فقط اگر، برای $\bar{M}$ اصلی باشد.

۶. اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی در M باشد، ثابت کنید که خم $\alpha(t)=\mathbf{x}(a_1(t), a_2(t))$
(الف) اصلی است اگر، و فقط اگر،

$$\begin{vmatrix} a_2'^2 & -a_1'a_2' & a_1'^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$



شکل ۳۵.۵

(ب) مجانبی است اگر، وفقط اگر، n

$$l\,a_1'^2+2m\,a_1'a_2'+n\,a_2'^2=0$$

۰۷ گیریم α خمی با تندی واحد در $M\subset\mathbf{E}^3$ باشد. روی α به‌جای میدان سه وجهی فرنه، میدان سه وجهی T، V، U را درنظرمی گیریم، که در آن T مماس یکهٔ خم α، U قائم رویهٔ مخصوص به α، و $V=U\times T$ (شکل ۳۶.۵) است.

(الف) نشان دهید که

$$\begin{aligned}T'&= && gV+kU\\ V'&=-gT && +tU\\ U'&=-kT-tV\end{aligned}$$

که در آن T . $k=S(T)$ خمیدگی قائم $k(T)$ی رویهٔ M در امتداد T، و $t=S(T)\,.\,V$ می‌باشد.

تابع جدید g را خمیدگی ژئودزیك α می‌نامند.

(ب) نتیجه بگیرید که برای α داریم

ژئودزیك $\Longleftrightarrow g=0$

مجانبی $\Longleftrightarrow k=0$

اصلی $\Longleftrightarrow t=0$

۰۸ اگر α خمی (با تندی واحد) در M باشد، نشان دهید که

(الف) شرط لازم و کافی برای آنکه α هم اصلی وهم مجانبی باشد، آن است که در صفحه‌ای که همواره درطول α بر M عمود است واقع باشد.

(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه α هم اصلی و هم مجانبی باشد، آن است که در صفحه‌ای که همواره درطول α بر M مماس است واقع باشد.

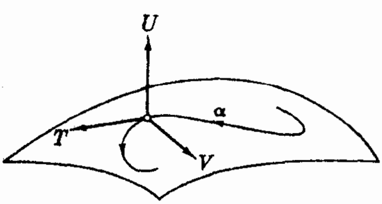
۰۹ بر رویهٔ زین میمون M (تبصره ۳.۳، فصل ۵) سه خم مجانبی و سه خم اصلی مار بر مبدأ o بیابید (این امکان فقط بدان علت است که o یك نقطهٔ نافی هامنی است.)

۱۰ نشان دهید که خمیدگی گاوسی رویهٔ خط دار $\mathbf{x}(u,v)=\beta(u)+v\delta(u)$ برابراست با

$$K=\frac{-m^2}{EG-F^2}=\frac{-(\beta'\,.\,\delta\times\delta')^2}{W^4}$$

که در آن

$$W=\|\beta'\times\delta+v\delta'\times\delta\|$$



شکل ۳۶.۵

۱۱ (رویه‌های خطدار هموار).

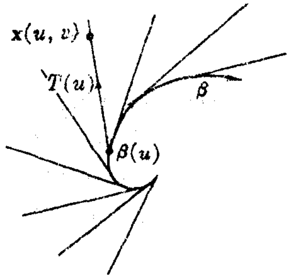
(الف) نشان دهیدکه مخروط و استوانه

رویه‌های هموارند (تمرینهای ۵ و ۶، فصل ۴، بند ۲)

(ب) اگر β خمی با تندی واحد و $\kappa > 0$ در $\mathbf{E}^3$ باشد، رویهٔ خطدار

$$\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + vT(u), \quad v > 0$$

را رویهٔ مماسی خم β نامند (شکل ۳۷.۵). ثابت کنید که $\mathbf{x}$ منظم است، و رویهٔ مماسی یك رویهٔ هموار است.



شکل ۳۷.۵

۱۲. گیریم α یك خم منظم در $M \subset \mathbf{E}^3$، و U قائم یکهٔ M در طول α باشد. نشان دهید که α یك خم اصلی رویهٔ M است اگر، و فقط اگر، رویهٔ خطدار $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + vU(u)$ هموار باشد.

۱۳. ژئودزیك بستهٔ M عبارت است از ژئودزیکی که یك تابع متناوب $\alpha : \mathbf{R} \to M$ باشد. همهٔ ژئودزیکهای بستهٔ کره، صفحه، و استوانهٔ مستدیر را بیابید.

۱۴. یك رویهٔ خطدار را هنگامی غیراستوانه‌ای نامند، که امتداد مولدهای آن همواره تغییر کنند، بدینسان برای هرخم هادی آن داریم $\delta \times \delta' \neq 0$. نشان دهید که

(الف) هر رویهٔ خطدار غیراستوانه‌ای دارای نمایش پارامتری

$$\mathbf{x}(u, v) = \sigma(u) + v\delta(u)$$

است، که در آن $\|\delta\| = 1$ و $\sigma' \cdot \delta' = 0$.

(ب) با این نمایش پارامتری داریم

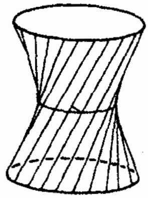
$$K = \frac{-p^2(u)}{(p^2(u) + v^2)^2} \quad \text{که در آن} \quad p = \frac{\sigma' \cdot \delta \times \delta'}{\delta' \cdot \delta'}$$

σ را خم تنجش، و تابع p را پارامتر توزیعی می‌نامند.

(راهنمایی: در (الف)، با فرض $\|\delta\| = 1$، تابع f را طوری تعیین کنید که $\sigma = \alpha + f\delta$. در (ب)، نشان دهید که $\sigma' \times \delta = p\delta'$.)

۱۵. تغییرات کیفی خمیدگی گاوسی K را روی یك مولد دلخواه از رویهٔ خطدار (غیر استوانه‌ای) بررسی کنید. نشان دهید که مسیر خم تنجش از انتخاب نمایش پارامتری مستقل است، و پارامتر توزیعی اساساً تابعی روی مجموعهٔ مولدهاست.

۱۶. نشان دهید که خم تنجش هلیکوئید، همان محور مرکزی است، و پارامتر توزیعی آن ثابت است.



شکل ۳۸.۵

۱۷. مطلوب است تعیین خم تنجش و پارامتر توزیعی برای:
(الف) هر دومجموعهٔ مولدهای رویهٔ زینی (مثال ۳.۴)
(ب) هردو مجموعهٔ مولدهای هذلولیگون دوار

$$M: \frac{x^۲+y^۲}{a^۲}-\frac{z^۲}{b^۲}=۱$$

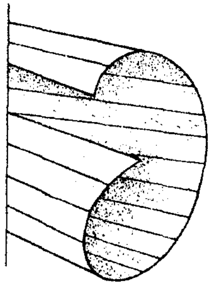
(شکل ۳۸.۵). (یك نمایش پارامتری خطدار با استفاده از تمرین ۹، فصل ۴، بند ۲ بیابید.)

۱۸. اگر $\mathbf{x}(u, v)=\alpha(u)+v\delta(u)$ نمایش پارامتری یك رویهٔ خطدار غیر استوانه‌ای و $L(u)$ مولد ماربر $\alpha(u)$ باشد، نشان دهید که
(الف) اگر ϑ_ε کوچکترین زاویهٔ مثبت $L(u+\varepsilon)$ با $L(u)$، و d_ε فاصلهٔ عمودی $L(u)$ از $L(u+\varepsilon)$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{\varepsilon\to ۰}(d_\varepsilon/\vartheta_\varepsilon)=\mathbf{p}(u)$. بدینسان پارامترتوزیعی برابر عکس میزان چرخش L است، و علامت آن مبین جهت چرخش می‌باشد.
(ب) تنها یك نقطهٔ p_ε از $L(u)$ وجود داردکه نزدیکترین نقطه به $L(u+\varepsilon)$ است، و $\lim\limits_{\varepsilon\to ۰} p_\varepsilon=\sigma(u)$. (این مبین خصوصیت دیگری از خم تنجش است.)
(ج) با ذکر مثالی نشان دهیدکه دوری از $\sigma(u)$ تا $\sigma(u+\varepsilon)$ لزومی نداردکه تقریب خوبی برای d_ε دوری $L(u)$ تا $L(u+\varepsilon)$ باشد.

۱۹. گیریم $\mathbf{x}(u, v)=\alpha+v\delta$، $\|\delta\|=۱$، نمایش‌پارامتری رویهٔ خطدارهموارM باشد. نشان دهید که:
(الف) اگر α' همواره صفر باشد، M یك مخروط است.[1]
(ب) اگر δ' همواره صفر باشد، M یك استوانه است.
(ج) اگر α' و δ' هردو همواره مخالف صفر باشند، M رویهٔ مماسی خم تنجش‌خود خواهد بود. (تمرین ۱۱ ب)

البته این چند حالت تمام امکانات را در برنمی‌گیرد، اما بـه‌نحوی این نتیجه حاصل می‌شود کـه هر رویهٔ خطدار هموار (رویـهٔ گستردنی) مخلوطی از سه نـوع مذکـور در تمرین ۱۱ می‌باشد. اگر چنین رویـه‌ای در $\mathbf{E}^۳$ بسته باشد (تمرین ۱۰، فصل ۴، بند ۸) یـك استوانه خواهد بود، زیرا شرط بسته بودن مستلزم آن است کـه هرمولد از تمام یك خط مستقیم تشکیل شده باشد.

۱. در هریك از این حالتها، جز آنچـه برای منظم بودن $\mathbf{x}$ لازم است، برای v قیدی درنظر نمی‌گیریم.



شکل ۳۹.۵

۲۰. مخروطگون قائم رویهٔ خطداری است که همهٔ مولدهای آن محور ثابتی را متعامداً قطع کنند (شکل ۳۹.۵). اگر این محور را به‌عنوان محور z در $\mathbf{E}^3$ بگیریم، نمایش پارامتری زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos\vartheta(v),\ u\sin\vartheta(v),\ h(v))$$

(الف) خمیدگی گاوسی و متوسط آن را بیابید.

(ب) نشان دهید که این رویه، هرگاه ϑ' همواره مخالف صفر باشد، غیراستوانه‌ای است؛ خم تنجش و پارامتر توزیعی آن را بیابید.

۲۱. طرحی از مخروطگون M که دارای نمایش پارامتری

$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ \cos 2v)$$

است ترسیم کنید، خمیدگی گاوسی و متوسط آن را بیابید. M را به‌صورت $z = f(x, y)$ (مبدأ حذف شده است) بیان کنید.

۲۲. ثابت کنید که هر رویهٔ خطدار و مینیمال بخشی از یك صفحه یا یك هلیکوئید است. (راهنمایی: نواحی هموار M هامنی‌اند؛ بدینسان با استدلالی همانند قضیهٔ ۲.۶ می‌توان فرض کرد $K < 0$. از نمایش پارامتریی که در تمرین ۱۴ آمده است با در نظر گرفتن این خاصیت اضافی که δ خمی با تندی واحد است، استفاده کنید. آنگاه از $H = 0$ سه معادله به‌دست می‌آید. نتیجه بگیرید که δ دایرهٔ یکه است، می‌توان فرض کرد که $\delta(u) = (\cos u,\ \sin u,\ 0)$.)

۶. رویه‌های دورانی

هندسهٔ رویهٔ دورانی نسبتاً ساده است، اما چون این رویه‌ها دارای خواص هندسی بسیار متنوع می‌باشند زمینهٔ خوبی برای کسب تجربه و مهارت فراهم می‌سازند.

برای بررسی رویهٔ دورانی دلخواه M، از روشهای بند ۴ استفاده می‌کنیم. گیریم M، همان‌گونه که در مثال ۵.۲ فصل ۴ آمد دارای نمایش پارامتری

$$\mathbf{x}(u, v) = (g(u),\ h(u)\cos v,\ h(u)\sin v)$$

باشند. همان‌گونه که در شکل ۱۷.۴ نشان داده شده است، $h(u)$ شعاع مداری از M است که دوری آن در طول محور دوران برابر $g(u)$ می‌باشد. این تعبیر هندسی g و h مبین آن است که نتایج حاصل به‌وضع خاص M نسبت به‌محورهای مختصات $\mathbf{E}^3$ بستگی ندارند.

چون g و h فقط تابع u می‌باشند، می‌توان نوشت

$$\mathbf{x}_u = (g',\, h'\cos v,\, h'\sin v) \qquad E = g'^{2} + h'^{2}$$

$$F = 0$$

$$\mathbf{x}_v = (0, -h\sin v,\, h\cos v) \qquad G = h^{2}$$

در اینجا E مجذور تندی خم نیمرخ‌ــ‌وهمهٔ نصف‌النهارات (خمهای پارامتر u) می‌باشد، و G مجذور تندی مدارات (خمهای پارامتر v) است. از آنجا

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (hh', -hg'\cos v, -hg'\sin v)$$

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^{2}} = h\sqrt{g'^{2} + h'^{2}}$$

$$U = \frac{(h', -g'\cos v, -g'\sin v)}{\sqrt{g'^{2} + h'^{2}}}$$

با محاسبهٔ مشتقهای دوم، داریم

$$\mathbf{x}_{uu} = (g'',\, h''\cos v,\, h''\sin v)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (0, -h'\sin v,\, h'\cos v)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (0, -h\cos v, -h\sin v)$$

$$l = \frac{(-g'h'' + g''h')}{\sqrt{g'^{2} + h'^{2}}}$$

$$m = 0$$

$$n = \frac{g'h}{\sqrt{g'^{2} + h'^{2}}}$$

چون $F = m = 0$، به‌آسانی می‌توان دید کـه (تمرین ۹، بند ۴) عملگرشکلی S متناظر به U چنین است

$$S(\mathbf{x}_u) = \frac{l}{E}\mathbf{x}_u \qquad S(\mathbf{x}_v) = \frac{n}{G}\mathbf{x}_v$$

(و این برهان تحلیلی آن است که نصف‌النهارات و مدارات M خمهای اصلی آن می‌باشند) ازاین‌رو اگر توابع خمیدگی‌اصلی را با k_μ و k_π (به‌جای k_1 و k_2) نشان دهیم، خواهیم داشت

$$k_\mu = \frac{l}{E} = \frac{-\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix}}{(g'^{2} + h'^{2})^{3/2}}, \qquad k_\pi = \frac{n}{G} = \frac{g'}{h(g'^{2} + h'^{2})^{1/2}} \tag{1}$$

بدینسان خمیدگی گاوسی M برابر است با

$$K = k_\mu k_\pi = \frac{-g' \begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix}}{h(g'^{۲}+h'^{۲})^{۲}} \qquad (۲)$$

ملاحظه می‌شود که این فرمول K را به‌صورت تابعی با مقدار حقیقی روی (حوزهٔ I) خم نیمرخ

$$\alpha(u) = (g(u),\ h(u),\ ۰)$$

معین می‌کند. بنا بر قراردادهای بند ۴، $K(u)$، خمیدگی گاوسی $K(\mathbf{x}(u, v))$ را در هر نقطهٔ مدار مار بر $\alpha(u)$ به‌دست می‌دهد. توابع دیگری که در بالا آمد نیز به‌همین گونه‌اند، به‌علت تقارن دورانی M، حول محور دوران؛ هندسهٔ آن «روی مدارها ثابت است» و کلاً با خم نیمرخ معین می گردد.

در حالت خاصی که خم نیمرخ حداکثر یکبار از هر نقطهٔ محور دوران بگذرد، می‌توان ترتیبی داد که تابع g به‌صورت سادهٔ $g(u) = u$ درآید (تمرین ۱۳، فصل ۴، بند ۲). آنگاه فرمولهای بالا به‌صورت زیر خلاصه می‌شوند

$$k_\mu = \frac{-h''}{(۱+h'^{۲})^{۳/۲}}$$

$$k_\pi = \frac{۱}{h(۱+h'^{۲})^{۱/۲}} \qquad (۳)$$

$$K = \frac{-h''}{h(۱+h'^{۲})^{۲}}$$

۱.۶. مثال. رویه‌های دورانی

(۱) چنبرهٔ دورانی T. با توجه به‌نمایش پارامتری $\mathbf{x}$ در مثال ۶.۲ فصل ۴ داریم

$$g(u) = r \sin u, \qquad h(u) = R + r\cos u$$

با آنکه محور دوران در اینجا محور zهاست، فرمولهای (۱) و (۲) همچنان معتبراند و داریم:

$$E = r^{۲} \qquad F = ۰ \qquad G = (R + r\cos u)^{۲}$$

$$l = r \qquad m = ۰ \qquad n = (R + r\cos u)\cos u$$

$$k_\mu = \frac{۱}{r} \qquad k_\pi = \frac{\cos u}{R + r\cos u}$$

$$K = \frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}$$

از اینجا دلیلی تحلیلی برای مثبت بودن K روی نیمهٔ بیرونی و منفی بودن آن روی نیمهٔ درونی چنبره به‌دست می‌آید. در واقع ماکسیمم K برابر است با $1/r(R+r)$ که متعلق به‌استوای بیرونی ($u=0$) می‌باشد، و مینیمم آن برابر با

$$-\frac{1}{r(R-r)}$$

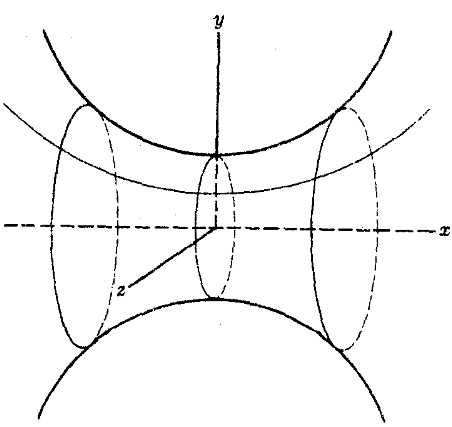
که متعلق به‌استوای درونی ($u=\pi$) است، و K روی دوایرفوقانی وتحتانی ($u=\pm\pi/2$) برابر صفر است.

(۲) کاتنوئید. خم $y=c\cosh(x/c)$ کاتناری یا زنجیری نامیده می‌شود، و وضع تعادل زنجیر وزینی را که به‌دوسر خود آویخته شده است نشان می‌دهد. رویه‌ای‌که از دوران این خم حول محور x ایجاد می‌شود، کاتنوئید نام دارد (شکل ۴۰.۵). ازفرمولهای (۳) به‌دست می‌آید

$$-k_\mu = k_\pi = \frac{1}{c\cosh^2\left(\frac{u}{c}\right)}$$

از آنجا

$$K = \frac{-1}{c^2\cosh^4\left(\frac{u}{c}\right)}$$



شکل ۴۰.۵

چون خمیدگی‌متوسط H صفراست،کاتنوئید یك رویهٔ مینیمال است. فاصلهٔ تغییرات خمیدگی گاوسی آن، $-1/c^2 \leqslant K < 0$ ومقدار مینیمم $K = -1/c^2$ روی دایرهٔ $u = 0$ می‌باشد.

نتیجهٔ زیرمبین آن است که رویه‌های دورانی کامل[1] غیرهامنی مینیمال، فقط‌کاتنوئیدها می‌باشند. (این‌مطلب ساده‌ای است که صفحه، رویه‌ای‌است مینیمال، زیرا $k_1 = k_2 = 0$.)

۲.۶. قضیه. اگر رویهٔ دورانی M مینیمال باشد، آنگاه M بخشی از یك صفحه یا یك کاتنوئید خواهد بود.

برهان. برای M از نمایش پارامتری

$$\mathbf{x}(u, v) = (g(u),\ h(u)\cos v,\ h(u)\sin v)$$

استفاده می‌کنیم، u در یك فاصلهٔ I تغییر می‌کند، و v دلخواه است.

حالت۱. g' متحداً صفر است. آنگاه g ثابت و M بخشی از صفحهٔ عمود برمحور دوران خواهد بود.

حالت۲. g' هیچ‌گاه صفر نیست. در این‌صورت بنابر یکی از تمرینات پیش، M دارای یك نمایش پارامتری به‌صورت

$$\mathbf{y}(u, v) = (u,\ f(u)\cos v,\ f(u)\sin v)$$

است. شرط مینیمال بودن یعنی $k_1 + k_2 = 0$، بنابر روابط (۳)، با

$$ff'' = 1 + f'^2$$

هم‌ارز خواهد بود. چون این‌معادلهٔ دیفرانسیل به‌طور صریح فاقد u است، با استفاده از روش متداول حل آن، جواب آن به‌صورت

$$f(u) = a\cosh\left(\frac{u}{a} + b\right)$$

به‌دست می‌آید که درآن a و b ثابتهای دلخواه‌اند. بدینسان M بخشی از یك‌کاتنوئید است.

حالت۳. g' در برخی ازنقاط صفر ودر بعضی دیگرمخالف صفراست. چنین حالتی پیش نمی‌آید. زیرا اگر فرض کنیم $g'(u_0) = 0$، و $g'(u) > 0$ به‌ازای $u < u_0$، آنگاه بنابرحالت۲، خم نیمرخ

$$\alpha(u) = (g(u),\ h(u),\ 0)$$

---

۱. این‌واژه به‌معنی لغوی‌آن به‌کار رفته است، تعریف ریاضی‌آن در بند۴، فصل۷ خواهدآمد.

به‌ازای $u_{\circ} > u$ یك کاتناری خواهد بود. اما شکل این خم نشان می‌دهد که شیب آن h'/g' نمی‌تواند ناگهان در $u = u_{\circ}$ بینهایت شود. ▮

هلیکوئید وکاتنوئید رویه‌های مینیمال «ابتدایی» هستند. در تمرینهای ۱۲ و ۲۱ بند ۴ دو نمونهٔ دیگر آمده است. با روشهایی که در کتاب کورانت و رابینس [۴] آمده است می‌توان به‌آسانی مدلهای بسیار متنوعی به‌وسیلهٔ حباب صابون برای رویه‌های مینیمال ساخت. در همان کتاب اصطلاح مینیمال توضیح داده شده است.

عبارت $\sqrt{g'^{2}+h'^{2}}$ که به وفور در فرمولهای عمومی آغاز این بند دیده می‌شود، همان تندی خم نیمرخ

$$\alpha(u) = (g(u),\ h(u),\ \circ)$$

است. بنابراین اگر به‌جای α از تعویض پارامتر با تندی واحد استفاده‌کنیم، مطالب بسیار ساده می‌شوند. رویهٔ دورانی ایجاد شدهٔ M تغییری نمی‌کند: فقط نمایش پارامتری جدیدی خواهد داشت، که آن را متعارف می‌نامند.

۳.۶ لم. اگر $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری متعارف رویهٔ دورانی M، $(g'^{2}+h'^{2}=1)$ باشد، آنگاه

$$E = 1, \qquad F = \circ, \qquad G = h^{2}$$

و

$$K = \frac{-h''}{h}$$

برهان. این مقادیر E، F و G مستقیماً از مقادیری که در آغاز این بند آمد با در نظر گرفتن $g'^{2}+h'^{2}=1$ نتیجه می‌شود، و با توجه به‌رابطهٔ (۲) داریم

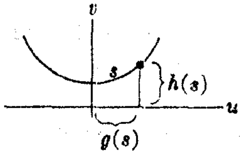
$$K = \frac{-g'}{h}\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix} = \frac{-g'^{2}h''+g'g''h'}{h}$$

با مشتقگیری از $g'^{2} = 1 - h'^{2}$ داریم $g'g'' = -h'h''$، از آنجا

$$K = \frac{-(1-h'^{2})\,h'' - h'^{2}h''}{h} = -\frac{h''}{h}$$ ▮

تأثیر نمایش پارامتری متعارف آن است که به‌نحوی تأکید را از اندازه‌گیری در فضای بیرونی M (مثلاً، در طول محور دوران) برداشته، و به‌اندازه‌گیری در خود M می‌پردازد. این موضوع در فصول ۶ و ۷ به‌طور مفصلتری خواهد آمد.

۴.۶ مثال. نمایش پارامتری متعارف کاتنوئید $(c=1)$. برای کاتناری



شکل ۴۱.۵

$$\alpha(u)=(u,\ \cosh u)$$

یك تابع طول کمان، عبارت است از $s(u)=\sinh u$؛ بنابراین یك تعویض پارامتر با تندی واحد

$$\beta(s)=(g(s),\ h(s))=(\sinh^{-1}s,\ \sqrt{1+s^2})$$

همان‌گونه که در شکل ۴۱.۵ دیده می‌شود به دست می‌آید. بر این اساس، نمایش پارامتری متعارف کاتنوئید چنین است

$$\bar{\mathbf{x}}(s,\ v)=(\sinh^{-1}s,\ \sqrt{1+s^2}\cos v,\ \sqrt{1+s^2}\sin v)$$

و بنابر لم پیش

$$K(s)=-\frac{h''(s)}{h(s)}=\frac{-1}{(1+s^2)^2}$$

این فرمول خمیدگی گاوسی برحسب $\bar{\mathbf{x}}$، با فرمول $K(u)=-1/\cosh^4 u$ که برحسب نمایش پارامتری $\mathbf{x}$ در مثال ۱.۶ به دست آمد سازگار است. در واقع، چون $s(u)=\sinh u$، داریم

$$K(s(u))=\frac{-1}{(1+s^2(u))^2}=\frac{-1}{(1+\sinh^2 u)^2}=\frac{-1}{\cosh^4 u}$$

فرمول ساده‌ای که در لم ۳.۶ برای K به‌دست آمد، روشی برای ساختن رویه‌های دورانی که خمیدگی گاوسی آنها از پیش تعیین شده است به‌دست می‌دهد. هنگامی که تابع K روی یك فاصله داده شده باشد، نخست معادلهٔ دیفرانسیل $h''+Kh=0$ را نسبت به h با درنظر گرفتن شرایط اولیهٔ $h(0)>0$ و $|h'(0)|<1$، حل می‌کنیم. برای یافتن یك نمایش پارامتری متعارف لازم است تابع g را به‌گونه‌ای تعیین کرد که داشته باشیم $g'^2+h'^2=1$. روشن است که

$$g(u)=\int_0^u \sqrt{1-h'^2(t)}\,dt$$

در این شرط صدق می‌کند. بدینسان هر فاصله درپیرامون 0 که در آن شرایط $h>0$ و $|h'|<1$ برقرار باشند، می‌توانیم

$$\alpha(u)=(g(u),\ h(u),\ 0)$$

را حول محور x دوران دهیم، و یك رویهٔ دورانی به‌دست آوریم که خمیدگی گاوسی آن بنابر لم ۳.۶ دقیقاً برابر $K=-h''/h$ است.

۵.۶. مثال. رویه‌های دورانی با خمیدگی ثابت مثبت. روش بالا را در مورد تابع ثابت $K=1/c^2$ به‌کار می‌بریم. معادلهٔ دیفرانسیل $h''+(1/c^2)h=0$ دارای جواب عمومی

$$h(u)=a\cos\left(\frac{u}{c}+b\right)$$

است، و ثابت b فقط نمایشگر یك انتقال دستگاه مختصات می‌باشد، می‌توان فرض کرد که $b=0$ و $a>0$. بدینسان توابع

$$g(u)=\int_0^u\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin^2\frac{t}{c}}\,dt$$

$$h(u)=a\cos\frac{u}{c}$$

یك رویهٔ دورانی M_a با خمیدگی گاوسی ثابت $K=1/c^2$ را ایجاد می‌کنند. شرایط لازم $h>0$ و $|h'|<1$ فاصلهٔ I را برای u مشخص می‌کنند. مقدار c درسراسر بحث ثابت است، اما برحسب مقادیر a، سه حالت درنظر می‌گیریم.

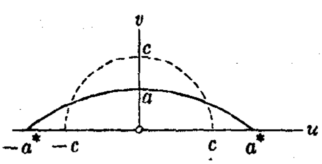
حالت ۱. $a=c$. دراینجا

$$g(u)=\int_0^u\cos\frac{t}{c}\,dt=c\sin\frac{u}{c}$$

و $h(u)=c\cos(u/c)$. بنابراین، فاصلهٔ I عبارت است از $-\pi c/2<u<\pi c/2$. چون خم نیمرخ $\alpha(u)=(g(u),\ h(u))$ یك نیمدایره است، از دوران آن حول محور x یك کرهٔ Σ به‌شعاع c — بجز دونقطهٔ آن‌که واقع برمحور xهاست، ایجاد می‌شود.

حالت ۲. $0<a<c$ (شکل ۴۲.۵). دراینجا h روی همان فاصلهٔ مذکور در حالت ۱ مثبت است، و $|h'|<1$ همواره برقرار می‌باشد، بنابراین g به‌خوبی معین می‌شود. خم نیمرخ $u\to(g(u),\ h(u))$ همچنان دارای طول $\pi c/2$ است، اما طاقی به‌گودی کمتر پدید می‌آورد که دوسر آن روی محور xها در $\pm a^*$ متکی است، و

$$a^*=g\left(\frac{\pi c}{2}\right)=\int_0^{\pi c/2}\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin^2\frac{t}{c}}\,dt.$$



شکل ۴۲.۵

مقادیر تقریبی این انتگرال بیضوی را می‌توان از جداول به‌دست آورد، اما روشن است که چون a از c به ۰ کاهش یابد، a^* از c به $\pi c/2$ افزایش خواهد یافت. رویهٔ دورانی حاصل M_a، که به‌ازای $a=c$ یك کره است،

نخست به‌یك توپ رگبی تبدیل می‌شود وسرانجام به‌ازای مقدار بسیار کوچك a به‌صورت سوزنی درمی‌آید که طول آن اندکی از $\pi c/۲$ کوچکتراست. برخلاف حالت ۱، نمی‌توان نقاط $(\pm a^*, ۰, ۰)$ را به‌رویهٔ M_a اضافه‌کرد، زیرا این رویه درهر دوسرخود نوك‌دار است. معادلهٔ دیفرانسیل $h''+(۱/c^۲)h=۰$ شکل رویـهٔ M_a را با ظرافتی تعدیل‌کرده است، که خمیدگیهای اصلی آن دیگر برابر نیستند، اما بازهم

$$K=k_\mu k_\pi=\frac{۱}{c^۲}$$

حالت ۳. $a>c$ (شکل ۴۳.۵). دراینجا فاصلهٔ I کوچکتر می‌شود، زیرا عبارتی که (در فرمول g) در زیـر رادیـکال قـرار دارد بـه‌ازای t^*ای صفر می‌شود کـه $\sin(t^*/c)=c/a<۱$.

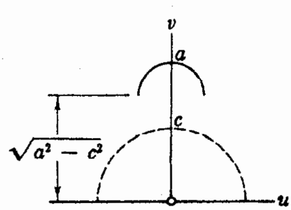
بدینسان

$$h(t^*)=a\cos\left(\frac{t^*}{c}\right)=\sqrt{a^۲-c^۲}$$

رویهٔ دورانی حاصل M_a هنگامی‌که a از $a=c$ افزایش می‌یابد تا اندازه‌ای به‌شکل نیمهٔ بیرونی چنبره است، اما وقتی a افزایش یابد، رویهٔ M_a یك نوار مستدیر بسیار بزرگ خواهدبود که خم نیمرخ آن بسیارکوتاه و دارای خمیدگی تندی است (k_μ باید بزرگ باشد، زیرا $k_\pi \sim ۱/a$ بسیارکوچك است و $k_\mu k_\pi=۱/c^۲$).

درمورد خمیدگی منفی ثابت بـا تحلیل مشابهی یك خانوادهٔ نامتناهی از رویه‌های دورانی با $K=-۱/c^۲$ به‌دست می‌آید (تمرین ۹). ساده‌ترین آنها عبارت‌اند از

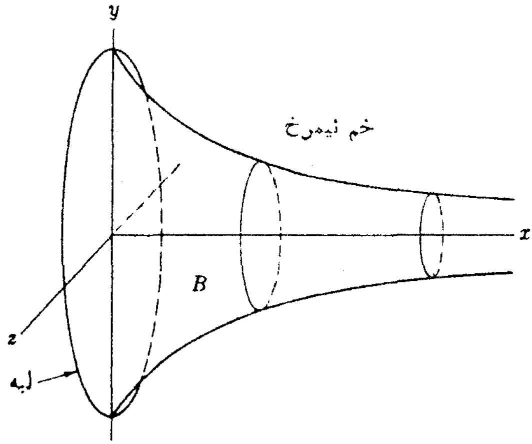
۶.۶. مثال. رویهٔ شیپوری B. خم نیمرخ B (درصفحهٔ xy) بـا این شرط هندسی مشخص می‌گردد: ازنقطهٔ $(۰, c)$ آغاز می‌گردد و چنان حـرکت می‌کندکـه درهر نقطهٔ آن، قطعهٔ مماس محصور بین خم ومحور xها دقیقاً برابر c باشد. این خم (تراکتریس) را می‌توان به‌طور تحلیلی بـا $\alpha(u)=(u, h(u))$، $u>۰$، نمایش دادکـه درآن h جواب معادلهٔ دیفرانسیل $h'=-h/\sqrt{c^۲-h^۲}$ است و $h(u)\to c$، هنگامی‌که $u\to ۰$. (رویهٔ دورانی حاصل درشکل ۴۴.۵ نشان داده شده است.)



شکل ۴۳.۵

بااستفاده ازاین‌معادلهٔ دیفرانسیل وفرمولهای (۳) صفحهٔ ۲۶۴، کـه درآغاز این بند عنوان شد، خمیدگیهای اصلی B به‌صورت زیر بـه‌دست می‌آیند:

$$k_\mu=\frac{-h'}{c} \qquad k_\pi=\frac{۱}{ch'}$$



شکل ۴۴.۵

بدینسان رویهٔ شیپوری (یا تراکتورونید) دارای خمیدگی منفی ثابت

$$K = -\frac{1}{c^2}$$

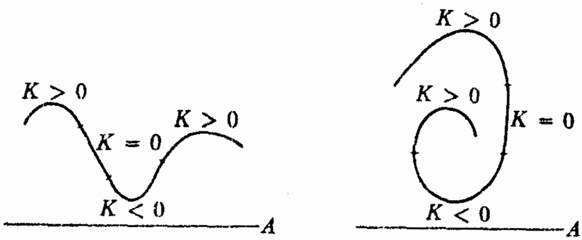
است. این رویه را نمی‌توان ازطرف لبه (که جزء B نیست) ادامه داد تا رویه‌ای وسیعتر در $\mathbf{E}^3$ به‌دست آید. زیرا $k_\mu(u) \to \infty$، هنگامی که $u \to 0$.

هنگامی که اول‌بار این رویه کشف شد، تصور کردندکه نظیری با خمیدگی منفی ثابت K برای کره پیدا کرده‌اند، از این‌رو آن را شبه کره نامیدند. اما چنان‌که درفصل ۷ خواهیم دید مشابه واقعی کره، رویه‌ای کاملاً متفاوت است و در $\mathbf{E}^3$ یافت نمی‌شود.

تمرینات

۱. مطلوب است تعیین خمیدگی گاوسی رویه‌ای که از دوران خم $y = e^{-x^2/2}$ حول محور x ایجاد می‌شود. طرح اجمالی این رویه را ترسیم کنید ونواحی متناظر به $K > 0$ و $K < 0$ آن را بیابید.

۲. (علامت خمیدگی گاوسی). اگر K برحسب x خمیدگی گاوسی رویهٔ حاصل از دوران $y = f(x)$ حول محور x باشد، نشان دهیدکه به‌ازای هر مقدار x علامت K، $(+, 0, -)$، و $-f''$ یکی است. بدینسان K روی مدارهای‌متناظر به‌فواصل تحدب خم نیمرخ مثبت و درفواصل تقعر آن منفی است، چنان‌که درشکل ۴۵.۵ دیده می‌شود. (همین نتیجه دربارهٔ هر رویهٔ دورانی برقرار است، تحدب و تقعر را نسبت به محور دوران A درنظر می گیریم.)



شکل ۴۵.۵

۳. (اندازهٔ خمیدگی گاوسی). نشان دهید که

خمیدگی $\kappa(u)$ از خم نیمرخ α در $|k_\mu(u)|=\alpha(u)$

$$|k_\pi(u)|=h(u)|\cos\varphi(u)|$$

که در آن $\varphi(u)$ زاویهٔ شیب خم نیمرخ در $\alpha(u)$ است. از آنجا

$$|K|=\kappa h|\cos\varphi|$$

۴. چنبرهٔ بیضیوار M از دوران بیضی

$$\frac{(x-R)^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

حول محور y $(R>a)$ ایجاد می‌شود. مطلوب است تعیین یک نمایش پارامتری برای M و محاسبهٔ خمیدگی گاوسی آن. (با قرار دادن $a=b=r$ صحت جواب خود را تحقیق کنید.)

۵. اگر f تابعی دیفرانسیلپذیر، و $r=\sqrt{x^۲+y^۲}>۰$ تابع مختصاتی قطبی معمولی در صفحهٔ xy باشد، نشان دهید که $M:z=f(r)$ رویه‌ای است دورانی و خمیدگی گاوسی آن (برحسب r) عبارت است از

$$K=\frac{f'(r)f''(r)}{r(۱+f'(r)^۲)^۲}$$

۶. خمیدگی گاوسی رویهٔ $M:z=e^{-r^۲/۲}$ را بیابید. طرح اجمالی آن را ترسیم کنید، و نواحی متناظر به $K>۰$ و $K<۰$ آن را معین کنید.

۷. ثابت کنید که هر رویهٔ هموار دورانی بخشی از یک مخروط یا استوانه است.

۸. گیریم M رویهٔ حاصل از دوران یک طاق α $(-\pi < t < \pi)$ از سیکلوئید $\gamma(t)=(t+\sin t,\ 1+\cos t)$ حول محور x باشد.

(الف) مطلوب است محاسبهٔ K براساس نمایش پارامتری معمولی M.

(ب) مطلوب است تعیین تابع h که ارتفاع α را برحسب طول کمان آن نشان می‌دهد (مبدأ کمان را بالاترین نقطهٔ طاق بگیرید)، ومحاسبهٔ $\bar{K}=-h''/h$.

(راهنمایی: ازنیمزاویه‌ها استفاده کنید.)

(ج) نشان دهید که نتایج قسمتهای (الف) و (ب) سازگارند.

۹. (رویه‌های دورانی با خمیدگی ثابت منفی $K=-1/c^2$). یك خانواده ازاین رویه‌ها، مانند حالت $K=1/c^2$ می‌توان یافت که به‌وسیلهٔ رویهٔ خاصی به‌دوطبقه تقسیم می‌شوند. جوابهای معادلهٔ

$$h''-\frac{h}{c^2}=0$$

با نمایش پارامتری متعارف، اصولاً همهٔ این رویه‌ها را به‌دست می‌دهند:

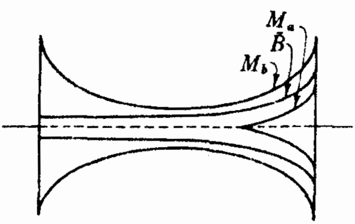
(الف) $h(u)=a\sinh(u/c)$، $0<a<c$، $u>0$. نشان دهیدکه خم نیمرخ $\alpha(u)=(g(u),\ h(u))$ ازمبدأ با شیب $a/\sqrt{c^2-a^2}$ می‌گذرد و تا ارتفاع ماکسیمم $\sqrt{c^2-a^2}$ بالا می‌رود. طرح اجمالی رویهٔ دورانی M_a حاصل را به‌ازای مقدار کوچك پارامتر a، و به‌ازای مقداری از a که به c نزدیك باشد ترسیم کنید.

(ب) $h(u)=b\cosh(u/c)$، $b>0$. نشان دهیدکه خم نیمرخ α به طور متقارن (به‌ازای $\pm u$) به‌جهت ارتفاع ماکسیمم $\sqrt{c^2+b^2}$ بالا می‌رود. طرح اجمالی رویهٔ حاصل M_b را به‌ازای یك مقدارکوچك ویك مقدار بزرگ b ترسیم کنید.

(ج) $h(u)=ce^{u/c}$، $u<0$. این رویهٔ $\bar{B}$ تصویر آینه‌ای رویهٔ B است که از

$$h(u)=ce^{-u/c},\qquad u>0$$

به‌دست می‌آید. نشان دهیدکه B همان رویهٔ شیپوری است (مثال ۶.۶). رویهٔ $\bar{B}$ چگونه دوطبقه را ازهم جدا می‌کند، یعنی به‌ازای چه مقادیر a و b رویه‌های M_a و M_b با $\bar{B}$ مشابهت دارند (شکل ۴۶.۵ را ببینیدکه در آن M_a و M_b در طول محور دوران انتقال یافته‌اند.)



شکل ۴۶.۵

۷. خلاصه

برای هر رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$، عملگر شکلی S میزان تغییر قائم یکهٔ U در هر امتداد واقع

بر M را نشان می‌دهد. اگر U را به‌عنوان «مشتق‌اول» رویهٔ M تصور کنیم، دراین صورت S «مشتق دوم» آن خواهد بود. امـا این عملگر شکلی همچنین شیئی است جبری کـه از عملگرهای خطی روی صفحه‌هـای مماس M تشکیل یافته است، و براساس همین تحلیل جبری S، ما به اهم‌تغییرناپذیرهای هندسی یك رویه در $\mathbf{E}^3$: امتدادها وخمیدگیهای اصلی، خمیدگیهای گاوسی ومتوسط، دست یافتیم.

۶

هندسهٔ رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$

پس‌از شناخت طرز اندازه‌گیری شکل رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$، باید چگونگی ارتباط آن را باخواص دیگر M بررسی کرد. درمجاورت هرنقطه از M، خمیدگی گاوسی دارای تأثیر زیادی روی شکل است (تبصره ۳.۳، فصل ۵)، امـا دراینجا وضعیت سراسری یعنی همهٔ پهنهٔ رویهٔ M موردتوجه است. مثلاً: دربارهٔ شکل رویهٔ M درصورتی کـه فشرده، یـا هموار، یا هردو باشد چه‌می‌توان گفت؟

تقریباً ۱۵۰ سال پیش گاوس سؤالی مطرح‌کرد که بـه درك جدیتر و عمیقتری از هندسه انجامید: چه‌اندازه از هندسهٔ یك رویه در $\mathbf{E}^3$ از شکل آن مستقل است؟ این سؤال درنظر اول عجیب می‌نماید، مثلاً، دربارهٔ یك کـره اگر از گردی آن صـرفنظر کنیم محتملاً چه می‌توان گفت؟ برای آنکه سررشتهٔ سؤال گاوس به‌دست آید، فرض‌کنیم رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ دارای ساکنینی است که از فضای خارج رویهٔ خود بی‌اطلاع‌اند، و درنتیجه هیچ تصوری از شکل آن در $\mathbf{E}^3$ ندارند. باوجود این، می‌توانند در M دوری از جایی به‌جایی و مساحت نواحی را اندازه‌گیری کنند. دراین فصل و فصل بعد خواهیم دید کـه آنان در واقع می‌توانند یك «هندسهٔ ذاتی» برای M بسازند، که ازهندسهٔ آشنای اقلیدسی صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ غنیتر و حداقل به‌همان اندازه جالب باشد.

۱. معادلات اساسی

برای بررسی هندسهٔ رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$، روشهای کارتان راکه درفصل ۲ مطرح شد به‌کار

می‌گیریم. برای این منظور، باید همانند نظریهٔ فرنه دربارهٔ یك خم در $\mathbf{E}^3$، سه‌وجهیهایی روی M قرار دهیم، ومیزان تغییرات آنهارا درطول M بررسی کنیم. یك میدان‌سه‌وجهی اقلیدسی روی $M \subset \mathbf{E}^3$ دقیقاً از سه‌میدان برداری اقلیدسی (تعریف ۷.۳، فصل ۴) که درهر نقطهٔ متعامد یکانی باشند تشکیل می‌شود. برای یك رویه می‌توان به‌طریق زیرمیدان سه‌وجهی مناسبی درنظر گرفت.

۱.۱ تعریف. میدان سه‌وجهی برازندهٔ E_1 ، E_2 ، E_3 روی‌ناحیهٔ $\mathcal{O}$ از $M \subset \mathbf{E}^3$ عبارت است از یك میدان سه‌وجهی اقلیدسی که در آن E_3 همواره قائم بر M باشد (درنتیجه E_1 و E_2 مماس بر M خواهند بود) (شکل ۱.۶).

بدینسان میدان‌برداری قائم که درفصل پیش با U نشان داده‌شد دراینجا به E_3 بدل می‌شود. ازلحاظ اختصار، اصطلاح میدان سه‌وجهی برازنده «روی M» را به‌کار می‌بریم، اما حوزهٔ تعریف آن عموماً ناحیه‌ای از M خواهد بود، زیرا معلوم نیست که یك میدان سه‌وجهی برازنده روی تمام M وجود داشته باشد.

۲.۱ لم. یك میدان سه‌وجهی برازنده روی ناحیهٔ $\mathcal{O}$ از $M \subset \mathbf{E}^3$ وجود دارد اگر، و فقط اگر، $\mathcal{O}$ جهت‌پذیر باشد و روی آن یك میدان برداری مماس وجود داشته باشد که هیچ‌گاه صفر نشود.

برهان. لزوم این‌شرط کاملاً روشن است، زیرا $\mathcal{O}$ به‌وسیلهٔ E_3 جهتدار می‌شود، و E_1 و E_2 میدانهای برداری مماس یکه‌اند. برای اثبات کفایت شرط، گیریم $\mathcal{O}$ به وسیلهٔ یك میدان برداری قائم‌یکهٔ U جهتدار شده است، و V میدان برداری مماسی باشدکه روی $\mathcal{O}$ صفر نشود. دراین‌صورت به‌آسانی می‌توان نشان دادکه

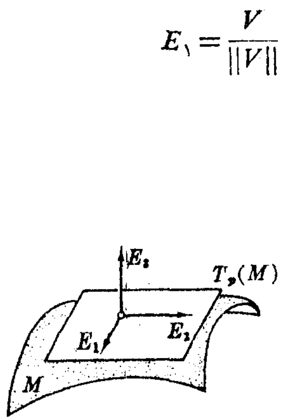
$$E_1 = \frac{V}{\|V\|}, \qquad E_2 = U \times E_1, \qquad E_3 = U$$

روی $\mathcal{O}$ یك میدان سه‌وجهی برازنده است. ∎

۳.۱ مثال. میدانهای سه‌وجهی برازنده.

(۱) استوانهٔ $M : x^2 + y^2 = r^2$. از گرادیان $g = x^2 + y^2$ میدان برداری قائم یکهٔ $E_3 = (xU_1 + yU_2)/r$ به‌دست می‌آید. روشن است که میدان برداری یکهٔ U_3 درهرنقطه بر M مماس‌است. باقرار دادن $E_2 = U_3 \times E_3$، میدان سه‌وجهی برازندهٔ

$$E_1 = U_3$$



شکل ۱.۶

$$E_{2} = \frac{-yU_{1} + xU_{2}}{r}$$

$$E_{3} = \frac{xU_{1} + yU_{2}}{r}$$

روی تمام استوانه M به‌دست می‌آید (شکل ۲.۶).

(۲) کرهٔ $\Sigma : x^{2} + y^{2} + z^{2} = r^{2}$. قائم یکهٔ برون سوی

$$E_{3} = \frac{xU_{1} + yU_{2} + zU_{3}}{r}$$

روی همهٔ Σ معین است، امـا چنان‌کـه درفصل ۷ خـواهیم دید هر میدان برداری مماس روی Σ درجایی‌صفر خواهدشد. مثلاً، میدان برداری «شرق‌نمای» $V = -yU_{1} + xU_{2}$ درقطبهای شمال و جنوب $(0, 0, \pm r)$ صفر است. بدینسان میدان سه‌وجهی برازندهٔ

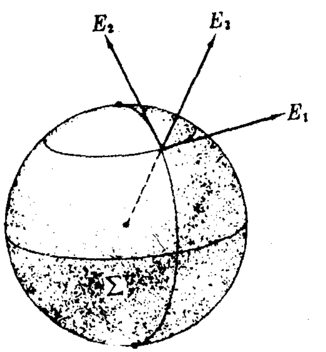
$$E_{1} = \frac{V}{\|V\|}$$

$$E_{2} = E_{3} \times E_{1}$$

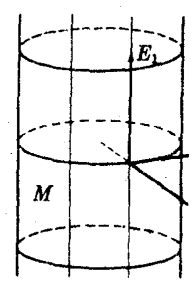
$$E_{3} = \frac{xU_{1} + yU_{2} + zU_{3}}{r}$$

روی‌ناحیهٔ $\mathcal{O}$ که از Σ باحذف قطبهای‌شمال وجنوب به‌دست می‌آید معین‌است (شکل ۳.۶).

لم ۲.۱ به‌ویژه مبین آن است که روی تصویر $\mathbf{x}(D)$ هرقطعه مختصاتی از M، یك میدان سه‌وجهی برازنده وجود دارد؛ بدینسان روی هـر رویه در $\mathbf{E}^{3}$ به‌طور موضعی چنین میدانهایی وجود خواهند داشت.



شکل ۳.۶



شکل ۲.۶

اکنون در بررسی رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$، از معادلات همبندی (قضیهٔ ۲.۷، فصل ۲) استفاده می‌کنیم. گیریم E_1، E_2، E_3 یك میدان سه‌وجهی برازنده روی M باشد. اگر در هرنقطهٔ $\mathbf{p}$، هرسه‌وجهی $E_1(\mathbf{p})$، $E_2(\mathbf{p})$، $E_3(\mathbf{P})$ را روی فاصلهٔ کوچکی ازخط قائم حرکت دهیم، میدان سه‌وجهی مفروض به یك میدان سه‌وجهی که روی یك مجموعهٔ باز در $\mathbf{E}^3$ معین است، بسط می‌یابد. بدینسان می‌توان معادلات همبندی

$$\nabla_v E_i = \sum \omega_{ij}(\mathbf{v}) E_j(\mathbf{p})$$

را به‌کار گرفت. ازاین معادلات تنها دربارهٔ بردارهای $\mathbf{v}$ مماس بر M استفاده خواهیم کرد. به‌ویژه، فرمهای همبندی ω_{ij} به ۱- فرمهایی روی M به‌مفهوم بند۴، فصل ۴ تبدیل خواهند شد. بدینسان داریم

۴.۱ قضیه. اگر E_1، E_2، E_3 یك‌میدان سه‌وجهی برازنده روی $M \subset \mathbf{E}^3$، و $\mathbf{v}$ مماس بر M در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه

$$\nabla_v E_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(\mathbf{v}) E_j(\mathbf{p}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

ازاین معادلات می‌توان تعبیر متداول فرمهای همبندی را درك کرد، و متضمن تکرار این نکته است که: $\omega_{ij}(\mathbf{v})$ میزان اولیهٔ چرخش E_i به‌طرف E_j را هنگامی که $\mathbf{p}$ درامتداد $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. چون E_3 یك میدان برداری قائم یکه روی M است، می‌توان عملگر شکلی M را برحسب فرمهای همبندی بیان کرد.

۵.۱ فرع. گیریم S عملگر شکلی متناظر به E_3 و E_1، E_2، E_3 یك میدان سه‌وجهی برازنده روی $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد. آنگاه به‌ازای هربردار مماس $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ داریم

$$S(\mathbf{v}) = \omega_{13}(\mathbf{v}) E_1(\mathbf{p}) + \omega_{23}(\mathbf{v}) E_2(\mathbf{p}).$$

برهان. بنابر تعریف $S(\mathbf{v}) = -\nabla_v E_3$. بدینسان از معادلهٔ همبندی به‌ازای $i = 3$، وباتوجه به آن‌که فرم همبندی $\omega = (\omega_{ij})$ متقارن چپ، $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$، است،نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. ▌

میدان‌سه‌وجهی برازنده E_1، E_2، E_3 علاوه برفرمهای همبندی دارای ۱-فرمهای دوگان θ_1، θ_2، θ_3 نیز می‌باشد (تعریف ۱.۸، فصل ۲) که برای هربردار مماس $\mathbf{v}_p$ مختصات $\theta_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot E_i(\mathbf{p})$ را نسبت به سه‌وجهی $E_1(\mathbf{p})$، $E_2(\mathbf{p})$، $E_3(\mathbf{p})$ به‌دست می‌دهند. فرمهای دوگان نیز مانند فرمهای همبندی تنها روی بردارهای مماس بر M اثر می‌کنند، و درنتیجه فرمهایی روی M خواهند بود. دراین تخصیص θ_3 مستهلك می‌شود، زیرا اگر $\mathbf{v}$ مماس بر M باشد، بر E_3 عمودخواهدبود، بنابراین $\theta_3(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot E_3(\mathbf{p}) = 0$. بدینسان روی M فرم θ_3 متحداً صفر است.

چون فرم همبندی دارای تقارن چپ است، به‌طور اساسی فقط پنج ۱- فرمی خواهیم داشت:

θ_1 ، θ_2 که معرف دوگان میدانهای برداری مماس E_1 ، E_2 می‌باشند.
ω_{12} که میزان چرخش E_1 ، E_2 را به‌دست می‌دهد.
ω_{13} ، ω_{23} که معرف عملگر شکلی متناظر به E_3 می‌باشند.

۶.۱. مثال. کره. میدان سه‌وجهی برازندهٔ E_1 ، E_2 ، E_3 را که درمثال ۳.۱ روی کرهٔ Σ (با حذف دو قطب) تعریف شد درنظر می‌گیریم. چون این میدان سه‌وجهی را به یك مجموعهٔ باز از $\mathbf{E}^3$ بسط دهیم، میدان سه‌وجهی کروی مذکور در مثال ۲.۶، فصل ۲ به‌دست می‌آید، البته باید اندیسهای آن‌را به‌صورت زیر

$$1 \rightarrow 3, \qquad 2 \rightarrow 1, \qquad 3 \rightarrow 2$$

تبدیل کرد. بدینسان، ازمثال ۴.۸، فصل ۲، برحسب توابع مختصات کروی چنین به‌دست می‌آید

$$\theta_1 = r\cos\varphi\, d\vartheta \qquad \theta_2 = r\, d\varphi$$

$$\omega_{12} = \sin\varphi\, d\vartheta \qquad \omega_{13} = -\cos\varphi\, d\vartheta \qquad \omega_{23} = -d\varphi$$

چون همهٔ فرمها (به‌انضمام توابع) دراینجا به رویهٔ Σ تخصیص یافته‌اند، تابع مختصات‌کروی ρ تبدیل به‌یك ثابت r شده است: شعاع کره.

به‌طورکلی فرمهای وابسته به‌میدان سه‌وجهی برازنده، از معادلات مهم زیر تبعیت می‌کنند.

۷.۱. قضیه. اگر E_1 ، E_2 ، E_3 یك‌میدان‌سه‌وجهی برازنده روی $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه فرمهای دوگان آن وفرمهای همبندی روی M در روابط زیر صدق می‌کنند:

(۱) معادلات ساختاری اول

$$\begin{cases} d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2 \\ d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1 \end{cases}$$

(۲) معادلهٔ تقارن

$$\omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2 = 0$$

(۳) معادلهٔ گاوس

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

(۴) معادلات کودازی

$$\begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} \end{cases}$$

برهان. کافی است معادلات ساختاری‌قضیهٔ ۳.۸، فصل ۲ را به‌کار گیریم. معادلهٔ ساختاری اول

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$$

معادلات (۱) و (۲) را به‌دست می‌دهد. در واقع، چون روی رویهٔ M داریم $\theta_3 = 0$، به‌ازای $i = 1, 2$ روابط (۱) به‌دست می‌آید. چون $\theta_3 = 0$ پس $d\theta_3 = 0$، در نتیجه به‌ازای $i = 3$ رابطهٔ (۲) حاصل می‌شود.

آنگاه ازمعادلهٔ ساختاری دوم، معادلات گاوس(۳) وکودازی(۴) حاصل می‌شوند. ▌

چون‌فرمهای همبندی دارای تقارن چپ‌اند، وضرب ۱ـفرمیها در $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$ صدق می‌کند، معادلات اساسی بالا را می‌توان به‌صورتهای گوناگون هم‌ارز نوشت. اما ما همان صورت اندیسی مذکور در بالا را به‌کارخواهیم برد، زیرا روی‌هم رفته می‌توان آنها را آسانتر به‌خاطرسپرد.

باید توجه داشت‌که فرمهای مذکور دراین‌بند مستقیماً رویهٔ M را تشریح نمی‌کنند، بلکه تنها نمایانگر وضعیت میدان سه‌وجهی برازندهٔ ویژهٔ E_1، E_2، E_3 مربوطه می‌باشند: با انتخاب یك میدان سه‌وجهی دیگر، فرمهای متفاوتی حاصل می‌شود. با وجود این، شش معادلهٔ اساسی قضیهٔ ۷.۱ شامل اطلاعات بسیار زیادی دربارهٔ رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ می‌باشند، و ما در موارد مقتضی هریك از آنها را به‌نوبهٔ خود مورد توجه قرار خواهیم داد.مثلاً، چون ω_{13} و ω_{23} معرف عملگرشکلی M می‌باشند، معادلات کودازی (۴) میزان تغییرشکل M از نقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر را بیان می‌کنند.

تمرین اول ازتمرینات زیرنشان می‌دهدکه چگونه روش‌کارتان خود به‌خود سه‌نوع خمی راکه در فصل۵، بند ۵ درنظرگرفتیم از یکدیگر متمایز می‌سازد.

تمرینات

۱. گیریم α خمی با تندی واحد در $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد. اگر میدان سه‌وجهی برازندهٔ E_1، E_2، E_3 را طوری انتخاب کنیم‌که تخصیص E_1 به α همان مماس یکهٔ T باشد، نشان دهیدکه

(الف) α یك ژئودزیك Mـ است اگر، و فقط اگر، $\omega_{12}(T) = 0$.

(ب) اگر $E_3 = E_1 \times E_2$، آنگاه

$$g = \omega_{12}(T), \qquad k = \omega_{13}(T), \qquad t = \omega_{23}(T)$$

توابع g، k و t درتمرین۷، فصل۵، بند ۵ تعریف شده‌اند. (راهنمایی: اگر درطول α، $T = E_1$، آنگاه در طول α داریم $E_i' = \nabla_{E_1} E_i$.)

۲. (کره). دربارهٔ میدان سه‌وجهی مثال ۶.۱ :

(الف) معادلات اساسی (قضیهٔ ۷.۱) را تحقیق کنید.

(ب) از فرمولهای θ_1 و θ_2 نتیجه بگیریدکه

$$E_1[\vartheta]=\frac{1}{r\cos\varphi}\qquad E_1[\varphi]=0$$

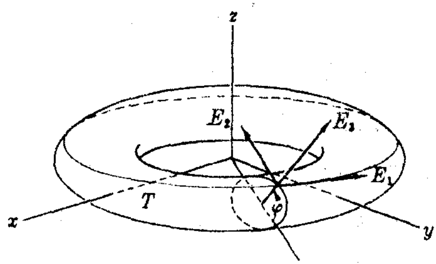
$$E_2[\vartheta]=0\qquad E_2[\varphi]=\frac{1}{r}$$

(ج) S، عملگرشکلی کره را با استفاده از فرع ۵.۱ بیابید.

۳. (چنبره). گیریم E_1، E_2، E_3 میدان سه‌وجهی برازنده روی چنبرهٔ $T(R>r)$ است، به‌طوری که E_2 مماس برنصف‌النهارات و E_1 مماس برمدارات باشد (شکل ۴.۶). با استفاده از میدان سه‌وجهی چنبره‌ای در $\mathbf{E}^3$ نشان دهید که

$$\theta_1=(R+r\cos\varphi)\,d\vartheta,\quad \theta_2=r\,d\varphi,\quad \omega_{12}=\sin\varphi\,d\vartheta,$$
$$\omega_{13}=-\cos\varphi\,d\vartheta,\quad \omega_{23}=-d\varphi$$

معادلات اساسی را برای این فرمها بررسی کنید.



شکل ۴.۶

۴. (ادامه). $S(E_1)$ و $S(E_2)$ را به‌ازای میدان سه‌وجهی بالا با روشهای این بند محاسبه کنید. نتیجه بگیرید که نصف‌النهارات و مدارات خمهای اصلی‌اند، و توابع خمیدگی اصلی را بیابید. (با مثال ۱.۶، فصل ۵، که در آن قائم یکه «درون سوی» است مقایسه کنید.)

۵. با استفاده ازمیدان سه‌وجهی استوانه‌ای در $\mathbf{E}^3$ (مثال ۲.۶، فصل ۲) عملگر شکلی استوانهٔ $M: x^2+y^2=r^2$ را محاسبه کنید.

۶. با استفاده از معادلهٔ تقارن (قضیهٔ ۷.۱) برهان جدیدی برای متقارن بودن عملگرهای شکلی بیابید.

۲. محاسبات فرمی

از اینجا به‌بعد، هندسهٔ رویه‌ها را عمدتاً برحسب فرمهای دیفرانسیلی بررسی خواهیم کرد،

از این‌رو بهتر است خواننده خواص عمومی آنها را در بندهای ۴ و ۵ فصل ۴ مرور کند. همواره می‌خواهیم رویهٔ M را با صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^۲$ مقایسه کنیم. بدینسان اگر $E_۱$، $E_۲$، $E_۳$ یك میدان سه‌وجهی برازنده روی $M \subset \mathbf{E}^۳$ باشد، گوییم $E_۱$، $E_۲$ یك میدان سه‌وجهی مماس روی M تشکیل می‌دهند. هرمیدان برداری مماس V روی M را می‌توان برحسب $E_۱$ و $E_۲$ با استفاده از بسط متعامد یکانی:

$$V = V \cdot E_۱ E_۱ + V \cdot E_۲ E_۲$$

بیان کرد. برای آنکه تساوی دو فرم را ثابت کنیم، لزومی ندارد که مقدار آنها را روی همهٔ بردارهای مماس بررسی کنیم، بلکه کافی است این بررسی فقط روی میدانهای برداری «پایه‌ای» $E_۱$، $E_۲$ انجام گیرد (تبصره‌های پیش از مثال ۷.۴، فصل ۴ را ببینید). به‌عنوان توضیح: ۱- فرمیهای ϕ و ψ را برابرگویند اگر، و فقط اگر،

$$\phi(E_۱) = \psi(E_۱) \quad و \quad \phi(E_۲) = \psi(E_۲)$$

و ۲- فرمیهای μ و ν را برابرگویند اگر، و فقط اگر،

$$\mu(E_۱, E_۲) = \nu(E_۱, E_۲)$$

همان‌طور که تأکید شد، فرمهای دوگان $\theta_۱$، $\theta_۲$ فقط توصیف دیگری از میدان سه‌وجهی مماس $E_۱$، $E_۲$ می‌باشند، وکاملاً با معادلات زیر مشخص می‌شوند

$$\theta_i(E_j) = \delta_{ij} \qquad (۱ \leqslant i,\ j \leqslant ۲)$$

این فرمها برای فرمهای روی M (یا به‌بیان دقیقتر، روی حوزهٔ تعریف $E_۱$، $E_۲$) یك «پایه» فراهم می‌سازد.

۱.۲ لم. (فرمولهای پایه‌ای) گیریم $\theta_۱$، $\theta_۲$ ۱- فرمیهای دوگان $E_۱$، $E_۲$ روی M باشند. اگر ϕ یك ۱- فرمی و μ یك ۲- فرمی باشد، آنگاه

$$\phi = \phi(E_۱)\theta_۱ + \phi(E_۲)\theta_۲ \quad (۱)$$

$$\mu = \mu(E_۱, E_۲)\theta_۱ \wedge \theta_۲ \quad (۲)$$

برهان. با استفاده از ملاك تساوی، و توجه به تعریف ضرب گوه‌ای در رابطهٔ (۲) داریم

$$(\theta_۱ \wedge \theta_۲)(E_۱, E_۲) = \theta_۱(E_۱)\theta_۲(E_۲) - \theta_۱(E_۲)\theta_۲(E_۱)$$

$$= ۱ \cdot ۱ - ۰ \cdot ۰ = ۱ \qquad \blacksquare$$

با درنظر گرفتن اینکه فرمهای $\theta_۱$، $\theta_۲$، $\omega_{۱۲}$، $\omega_{۱۳}$، $\omega_{۲۳}$ به‌همان طریق بند ۱، ازمیدان سه‌وجهی برازندهٔ $E_۱$، $E_۲$، $E_۳$ روی ناحیه‌ای از M به‌دست می‌آیند، به‌بررسی برخی از مفاهیم مذکور در فصل ۵ می‌پردازیم تا ببینیم هنگامی که برحسب فرمها بیان می‌شوند

به‌چه صورتی درمی‌آیند. مطلب را با بیانی نظیر لم ۴.۳ فصل۵ آغاز می‌کنیم.

۲.۲. لم.

$$\omega_{13}\wedge\omega_{23}=K\theta_1\wedge\theta_2 \quad (1)$$

$$\omega_{13}\wedge\theta_2+\theta_1\wedge\omega_{23}=2H\theta_1\wedge\theta_2 \quad (2)$$

برهان. با به‌کاربردن تعاریف $K=\det S$، $2H=\operatorname{tra} S$، ماتریس S را نسبت به E_1 و E_2 به‌دست می‌آوریم. مانند فرع ۵.۱ از معادلات همبندی داریم

$$S(E_1)=-\nabla_{E_1}E_3=-\omega_{31}(E_1)E_1-\omega_{32}(E_1)E_2$$

$$S(E_2)=-\nabla_{E_2}E_3=-\omega_{31}(E_2)E_1-\omega_{32}(E_2)E_2$$

بدینسان ماتریس S چنین خواهد بود

$$\begin{pmatrix} \omega_{13}(E_1) & \omega_{23}(E_1) \\ \omega_{13}(E_2) & \omega_{23}(E_2) \end{pmatrix}$$

اکنون بنابرفرمول دوم لم ۱.۲، باید نشان دهیم که

$$(\omega_{13}\wedge\omega_{23})(E_1, E_2)=k \quad \text{و} \quad (\omega_{13}\wedge\theta_2+\theta_1\wedge\omega_{23})(E_1, E_2)=2H$$

اما

$$(\omega_{13}\wedge\omega_{23})(E_1, E_2)=\omega_{13}(E_1)\omega_{23}(E_2)-\omega_{13}(E_2)\omega_{23}(E_1)$$

$$=\det S=K$$

و با محاسبهٔ مشابهی فرمول اثر نیز اثبات می‌شود. ∎

از مقایسهٔ فرمول اول بالا با معادلهٔ گاوس(۳) در قضیهٔ ۷.۱ خواهیم داشت

۳.۲. فرع. $d\omega_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2$

این معادله را معادلهٔ ساختاری دوم[1] می‌نامیم، وازآن تعبیر جدیدی برای خمیدگی گاوسی استنتاج می‌کنیم: ω_{12} نمایشگرمیزان دوران میدان سه‌وجهی‌مماس E_1، E_2 است، وچون K مشتق خارجی $d\omega_{12}$ را معین می‌کند، نوعی«مشتق‌خارجی» E_1، E_2 خواهد بود.

مثلاً روی کرهٔ Σ به‌شعاع r، از فرمولهای مثال ۶.۱ داریم:

$$\theta_1\wedge\theta_2=r^2\cos\varphi\, d\vartheta\, d\varphi=-r^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$$

---

۱. چنان‌که خواهیم دید این معادله برای رویهٔ M نظیر معادلهٔ ساختاری دوم (قضیهٔ ۳.۸، فصل۲) برای E^3 است.

اما

$$d\omega_{12}=d(\sin\varphi\, d\vartheta)=d(\sin\varphi)\wedge d\vartheta=\cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$$

بدینسان از معادلهٔ ساختاری دوم همان نتیجه‌ای که انتظار می‌رفت، $K=1/r^2$، حاصل می‌شود.

این بیان جدید خمیدگی را می‌توان به‌صورت دیگری نیز نوشت.

۴.۲ فرع. $K=E_2[\omega_{12}(E_1)]-E_1[\omega_{12}(E_2)]-\omega_{12}(E_1)^2-\omega_{12}(E_2)^2$

برهان. بنابر لم ۱.۲، داریم:

$$\omega_{12}=f_1\theta_1+f_2\theta_2$$

که در آن

$$f_i=\omega_{12}(E_i)\quad i=1,2 \text{ به‌ازای }$$

آنگاه

$$\begin{aligned}d\omega_{12}&=df_1\wedge\theta_1+df_2\wedge\theta_2+f_1\,d\theta_1+f_2\,d\theta_2\\&=df_1\wedge\theta_1+df_2\wedge\theta_2+f_1\omega_{12}\wedge\theta_2+f_2\omega_{21}\wedge\theta_1\end{aligned}$$

که در آن ازمعادلهٔ ساختاری اول (قضیهٔ ۷.۱) استفاده کرده‌ایم. اکنون این فرمول را برای E_1، E_2 به‌کار می‌گیریم. چون $\theta_i(E_j)=\delta_{ij}$ بنابراین:

$$d\omega_{12}(E_1,E_2)=-df_1(E_2)+df_2(E_1)+f_1\omega_{12}(E_1)-f_2\omega_{21}(E_2)$$

و با استفاده از فرع پیش داریم

$$-K=-E_2[f_1]+E_1[f_2]+f_1\omega_{12}(E_1)+f_2\omega_{12}(E_2)$$

که با توجه به‌تعریف f_1 و f_2، همان نتیجه مطلوب است. ∎

مثلاً، از مثال ۶.۱ با محاسبه‌ای ساده به‌دست می‌آید

$$\omega_{12}(E_1)=\frac{1}{r}\tan\varphi \quad \text{و} \quad \omega_{12}(E_2)=0$$

بدینسان برای کره، از فرمول بالا خواهیم داشت:

$$K=E_2\left[\frac{1}{r}\tan\varphi\right]-\left(\frac{1}{r}\tan\varphi\right)^2=\frac{\sec^2\varphi-\tan^2\varphi}{r^2}=\frac{1}{r^2}$$

زیرا بنابرتمرین ۲، بند ۱ داریم

$$E_2[\tan\varphi]=\sec^2\varphi E_2[\varphi]=\frac{\sec^2\varphi}{r}$$

در بند ۱ تأکید کردیم که، به‌طور کلی از میدانهای سه‌وجهی برازنده روی $M \subset \mathbf{E}^3$ تنها اطلاعات غیرمستقیمی دربارهٔ M به‌دست می‌آید. اگر یك چنین میدان سه‌وجهی وجود داشته باشد که اطلاعات هندسی مستقیمی به‌دست دهد، باید به‌روشی طبیعی برهندسهٔ خود M مبتنی باشد، چنان‌که درحالت خمها میدان‌سه‌وجهی فرنه چنین بود. برای انجام این کار روشی موجود است:

۵.۲. تعریف. یك میدان سه‌وجهی اصلی روی $M \subset \mathbf{E}^3$ عبارت است از میدان سه‌وجهی برازندهٔ E_1، E_2، E_3 به‌طوری که در هرنقطه، E_1 و E_2 بردارهای اصلی M باشند.

مادامی‌که حوزهٔ تعریف شامل نقطهٔ نافی نباشد، میدان سه‌وجهی اصلی به‌طور یکتا، صرفنظر از تغییرعلامتها، در هرنقطه با دو امتداد اصلی معین می‌شود.

گاهی این امکان وجود دارد که یك میدان سه‌وجهی اصلی‌روی تمام رویه به‌دست آورد. مثلاً، روی یك رویهٔ دورانی، می‌توان E_1 را مماس برنصف‌النهارات، و E_2 را مماس برمدارات گرفت. اما به‌طور کلی آنچه می‌توان انجام داد از این‌قرار است:

۶.۲. لم. اگر $\mathbf{p}$ نقطه‌ای غیرنافی از $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه یك میدان سه‌وجهی اصلی روی یك همسایگی $\mathbf{p}$ در M وجود دارد.

برهان. گیریم F_1، F_2، F_3 یك میدان سه‌وجهی برازندهٔ دلخواه روی یك همسایگی $\mathscr{H}$ از $\mathbf{p}$ باشد. چون $\mathbf{p}$ نافی نیست، می‌توان، فرض کرد (درصورت لزوم با دوران F_1، F_2) که $F_1(\mathbf{p})$ و $F_2(\mathbf{p})$ در نقطهٔ $\mathbf{p}$ بردارهای اصلی نیستند. بنابرفرض $k_1(\mathbf{p}) \neq k_2(\mathbf{p})$؛ از این‌رو با توجه به‌پیوستگی، k_1 و k_2 در مجاورت $\mathbf{p}$ همچنان متمایز باقی‌می‌مانند. بدینسان در یك همسایگی $\mathscr{H}$ از $\mathbf{p}$ که به‌قدرکافی کوچك باشد، همهٔ این شرایط به‌قوت خود باقی هستند.

گیریم (S_{ij}) ماتریس S نسبت به F_1، F_2 باشد. اما محاسبهٔ بردارهای خاص S، یعنی بردارهای اصلی M — توأماً در همهٔ نقاط $\mathscr{H}$ — یك مسألهٔ عادی از جبر خطی است. در واقع، میدانهای برداری مماس

$$V_1 = S_{12}F_1 + (k_1 - S_{11})F_2$$
$$V_2 = (k_2 - S_{22})F_1 + S_{12}F_2$$

در هرنقطه بردارهای خاص S را به‌دست می‌دهند (اگرکسی نخواهد از جبرخطی استفاده کند، می‌تواند این مطلب را از راه محاسبهٔ مستقیم تحقیق کند). علاوه بر این، تابع $S_{12} = S(F_1) \cdot F_2$ هیچ‌گاه روی همسایگی‌انتخاب شده $\mathscr{H}$ صفر نیست، بنابراین $\|V_1\|$ و $\|V_2\|$ نیز هیچ‌گاه صفر نخواهند بود. بدینسان میدانهای برداری

$$E_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} \qquad E_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}$$

فقط از بردارهای اصلی تشکیل می‌شوند، و E_1 ، E_2 ، $F_3 = E_3$ یک‌میدان سه‌وجهی اصلی روی $\mathcal{H}$ خواهد بود. ∎

اگر E_1، E_2، E_3 یک میدان سه‌وجهی اصلی روی M باشد، آنگاه میدانهای برداری E_1 و E_2 از بردارهای خاص عملگرشکلی متناظر به E_3 تشکیل یافته‌اند. بدینسان می‌توان اندیس توابع خمیدگی اصلی را طوری انتخاب کرد که $S(E_1) = k_1 E_1$ و $S(E_2) = k_2 E_2$. آنگاه از مقایسه با فرع ۵.۱ حاصل می‌شود:

$$\omega_{13}(E_1) = k_1 \qquad \omega_{13}(E_2) = 0$$
$$\omega_{23}(E_1) = 0 \qquad \omega_{23}(E_2) = k_2$$

بدینسان از فرمول پایه‌ای (۱) در لم ۱.۲ چنین به‌دست می‌آید

$$\omega_{13} = k_1\theta_1 \qquad \omega_{23} = k_2\theta_2 \tag{*}$$

از اینجا بیان جالبی برای معادلات کودازی حاصل می‌شود.

۷.۲. قضیه. اگر E_1، E_2، E_3 یک میدان سه‌وجهی اصلی روی $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه

$$E_1[k_2] = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_2)$$
$$E_2[k_1] = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_1)$$

برهان. معادلات کودازی (قضیهٔ ۷.۱) عبارت‌اند از

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} \qquad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$$

اثبات این قضیه تمرینی است از محاسبهٔ فرمها که درفصل ۴، بند ۴ مورد بحث قرار گرفت. چون در معادلهٔ اول، (*) را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$d(k_1\theta_1) = \omega_{12} \wedge k_2\theta_2$$

از آنجا

$$dk_1 \wedge \theta_1 + k_1\, d\theta_1 = k_2\omega_{12} \wedge \theta_2$$

با قراردادن معادلهٔ ساختاری $d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2$، خواهیم داشت

$$dk_1 \wedge \theta_1 = (k_2 - k_1)\omega_{12} \wedge \theta_2$$

اکنون این ۲- فرمیها را به‌زوج میدانهای برداری E_1، E_2 اعمال می‌کنیم و در نتیجه

$$0 - dk_1(E_2) = (k_2 - k_1)\omega_{12}(E_1) - 0$$

بنابراین

$$E_2[k_1] = dk_1(E_2) = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_1)$$

معادلهٔ مطلوب دیگر نیز به‌همین‌طریق ازمعادلهٔ کودازی $d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$ حاصل می‌شود. ∎

باید توجه داشت که $\omega_{12}(\mathbf{v})$ برای یك میدان سه وجهی اصلی مبین چگونگی تغییر امتدادهای اصلی درامتداد $\mathbf{v}$ می باشد.

تمرینات

۱. معادلات کودازی (قضیهٔ ۷.۲) را دربارهٔ میدان سه وجهی اصلی روی چنبرهٔ تمرین ۳، بند ۱ تحقیق کنید. (راهنمایی:

$$V\left[\frac{f}{g}\right]=\frac{gV[f]-fV[g]}{g^2}$$

مشتقهای v و φ نسبت به E_1 و E_2 را می‌توان از فرمولهای θ_1 و θ_2 درهمان تمرین به‌دست آورد.)

۲. اگر E_1، E_2، E_3 یك‌میدان سه‌وجهی برازنده روی M باشد، و $E_1 \cdot E_2 \times E_3 = 1$، قرار می‌دهیم

$$h_i(\mathbf{p})=\mathbf{p}\cdot E_i(\mathbf{p}) \qquad \text{به‌ازای}\quad i=1,2,3$$

به‌ویژه، h_3 همان تابع‌محملی h رویهٔ M است که درصفحهٔ ۲۴۵ تعریف شد. نشان‌دهید که

$$dh_1=\theta_1+\omega_{12}h_2+\omega_{13}h_3$$

$$dh_2=\theta_2+\omega_{21}h_1+\omega_{23}h_3$$

(راهنمایی: به‌بیان دقیق داریم $h_i=X\cdot E_i$، که درآن X میدان برداری قابل‌توجهی است که در رابطهٔ $\nabla_V X=V$ صدق می‌کند، و درصفحهٔ ۲۴۵ نیز به‌کاررفت.)

برای محاسبهٔ مشتقهای خارجی ۱-فرمیها برحسب یك میدان سه وجهی برازنده یك قاعدهٔ ساده وجود دارد: فرم را برحسب θ_1 و θ_2 (یا شاید ω_{ij}) بیان می‌کنیم، آنگاه d را اعمال، و ازمعادلات اساسی استفاده می‌کنیم. برهان قضیهٔ ۷.۲ مثالی دراین مورداست، ذیلاً مثال دیگری نیزمی‌آوریم.

۳. (ادامه)

(الف) اگر ۱-فرمی ψ طوری باشد که داشته باشیم $\psi(\mathbf{v})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}\times E_3(\mathbf{p})$، نشان دهید که

$$d\psi=2(1+hH)\theta_1\wedge\theta_2$$

که درآن h تابع محملی است.

(ب) اگر ۱- فرمی ζ طوری باشد که داشته باشیم $\zeta(\mathbf{v})=\psi(S(\mathbf{v}))$ نشان دهید که

$$d\zeta=2(H+hK)\theta_1\wedge\theta_2$$

(راهنمایی: $\psi=h_1\theta_2-h_2\theta_1$، و ζ نیز دارای عبارت مشابهی است.)

۳. چند قضیهٔ کلی

همواره خاطرنشان کرده‌ایم که عملگر شکلی S برای رویهٔ M نظیر خمیدگی و تاب یك خم در E^3 است. فرضهای ساده‌ای دربارهٔ κ و τ چند نوع خم ویژه ومهم را مشخص می‌کنند. اکنون باید دیدکه درحالت رویه‌ها چه نتایجی از S می‌توان گرفت. (توجه شود که منحصراً با رویه‌های همبند سروکار داریم.)

۱.۳ قضیه. اگر عملگرشکلی متحداً صفر باشد، آنگاه M (بخشی از) یك صفحه در E^3 است.

برهان. طرح اثبات این قضیه نظیر اثبات فرع ۵.۳ فصل ۲ است. بنا برتعریف عملگر شکلی، رابطهٔ $S=0$ بدان معنی است که هرمیدان برداری قائم‌یکهٔ E_3 روی M دارای توازی اقلیدسی است، بنابراین می‌توان آن را با نقطه‌ای از E^3 متحد گرفت. یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M را درنظر می‌گیریم. نشان خواهیم دادکه M درصفحهٔ ماربر $\mathbf{p}$ و عمود بر E_3 واقع است. اگر $\mathbf{q}$ نقطهٔ دلخواهی از M باشد، چون M همبند است، درآن یك خم α از $\alpha(0)=\mathbf{p}$ به $\alpha(1)=\mathbf{q}$ وجود خواهد داشت. تابع زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$f(t)=(\alpha(t)-\mathbf{p})\cdot E_3$$

ازآنجا

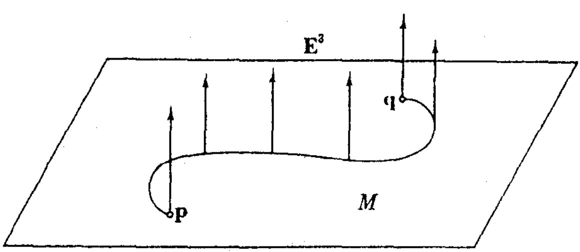
$$\frac{df}{dt}=\alpha'\cdot E_3=0 \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

از این رو f متحداً صفراست. به‌ویژه

$$f(1)=(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot \mathbf{E}_3=0$$

بنابراین هرنقطهٔ $\mathbf{q}$ از M درصفحهٔ مزبور واقع است (شکل ۵.۶). ∎

درفصل ۵، بند ۳ دیدیم که قید هامنی بودن تنها یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از $M\subset E^3$ ($k_1=k_2=0$، یاهم ارز باآن $S=0$)، تأثیرچندانی برشکل M درمجاورت $\mathbf{p}$ ندارد.



شکل ۵.۶

اما نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که اگر هر نقطه هامنی باشد، آنگاه M واقعاً بخشی از یك صفحه است.

شاید ساده‌ترین فرض دیگر دربارهٔ یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ آن است که در هر نقطهٔ $\mathbf{p}$، عملگر شکلی تنها از ضرب اسکالری در یك عدد، که از پیش می‌تواند به $\mathbf{p}$ بستگی داشته باشد، تشکیل شود. این بدان معنی است که M کلاً نافی است، یعنی تماماً از نقاط نافی تشکیل شده است.

۲.۳. لم. اگر $M \subset \mathbf{E}^3$ کلاً نافی باشد، آنگاه خمیدگی گاوسی ثابت دارد و $K \geqslant 0$.

برهان. گیریم E_1، E_2، E_3 یك میدان سه وجهی برازنده روی ϑ ناحیه‌ای از M باشد. چون M کلاً نافی است، توابع خمیدگی اصلی روی ϑ برابرند، $k_1 = k_2 = k$، وعلاوه براین E_1، E_2، E_3 در واقع یك میدان سه وجهی اصلی خواهد بود (زیرا روی M هر امتداد، اصلی است). بدینسان می‌توان با استفاده از قضیهٔ ۷.۲ نتیجه گرفت که $E_1[k] = E_2[k] = 0$. به‌عبارت دیگر می‌توان نوشت

$$dk(E_1) = dk(E_2) = 0$$

و بنابر لم ۱.۲، روی ϑ داریم $dk = 0$. اما $K = k_1 k_2 = k^2$، بنابراین روی ϑ خواهیم داشت $dK = 2k\,dk = 0$. چون هر نقطه از رویهٔ M دریك چنین ناحیهٔ ϑ واقع است، نتیجه می‌گیریم که روی تمام M داریم $dK = 0$. از تمرینی که قبلاً بررسی شده است نتیجه می‌شود که K ثابت است. ∎

۳.۳. قضیه. اگر $M \subset \mathbf{E}^3$ کلاً نافی باشد و $K > 0$، آنگاه M بخشی ازیك کره در $\mathbf{E}^3$ به‌شعاع $1/\sqrt{K}$ خواهد بود.

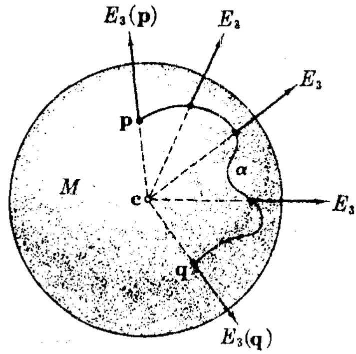
برهان. (این بار طرح اثبات، نظیر اثبات لم ۶.۳، فصل ۲ است.) به‌تصادف یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M و یك بردار قائم یکهٔ $E_3(\mathbf{p})$ بر M در $\mathbf{p}$ انتخاب می‌کنیم. اکنون ثابت خواهیم کرد که نقطهٔ

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} + \frac{1}{k(\mathbf{p})} E_3(\mathbf{p})$$

ازهرنقطهٔ متعلق به M به‌یك فاصله است. (در اینجا $k(\mathbf{p}) = k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p})$ خمیدگی اصلی متناظر به $E_3(\mathbf{p})$ است.)

اکنون گیریم $\mathbf{q}$ نقطهٔ دلخواهی از M، و α قطعه خمی در M از $\alpha(0) = \mathbf{p}$ به $\alpha(1) = \mathbf{q}$ باشد. $E_3(\mathbf{p})$ را به‌یك میدان برداری قائم یکهٔ E_3 روی α به‌همان گونه که درشکل ۶.۶ دیده می‌شود تعمیم می‌دهیم، وخم

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{k} E_3$$



شکل ۶.۶

را در $\mathbf{E}^3$ درنظرمی گیریم.

در اینجا منظور از k، تابع خمیدگی اصلی متناظر به E_3 می‌باشد، بدینسان k پیوسته‌است. اما $K=k^2$ و بنابر لم پیش K ثابت است، و در نتیجه k نیز ثابت می‌باشد. بدینسان

$$\gamma'=\alpha'+\frac{1}{k}E_3'$$

اما

$$E_3'=-S(\alpha')=-k\alpha'$$

S عبارت است از ضرب اسکالری در k، زیرا بنا برفرض M کلاً نافی است. بدینسان

$$\gamma'=\alpha'+\frac{1}{k}(-k\alpha')=0$$

وخم γ باید ثابت باشد. به‌ویژه

$$\mathbf{c}=\gamma(0)=\gamma(1)=\mathbf{q}+\frac{1}{k}E_3(\mathbf{q})$$

بنابراین به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{q}$ از M داریم $d(\mathbf{c},\mathbf{q})=1/|k|$. بدینسان چون $K=k_1k_2=k^2$، ثابت می‌شود که M بخشی از کره‌ای به‌مرکز $\mathbf{c}$ و به شعاع $1/\sqrt{K}$ می باشد. ∎

با استفاده ازهرسه نتیجهٔ بالا، چنین نتیجه می‌شود که رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ کلاً نافی‌است اگر، وفقط اگر، M بخشی ازیك صفحه یا یك‌کره باشد.

۴.۳. فرع. یك رویهٔ کلاً نافی فشردهٔ M در $\mathbf{E}^3$، یك کرهٔ درست است.

برهان. با توجه به‌آنچه گذشت، ازقضیهٔ ۶.۷، فصل ۴ نتیجه می‌شود که M باید یك‌صفحه یا کرهٔ درست باشد. حالت اول غیرممکن است، زیرا M بنابرفرض فشرده است، اما صفحه فشرده نیست. ∎

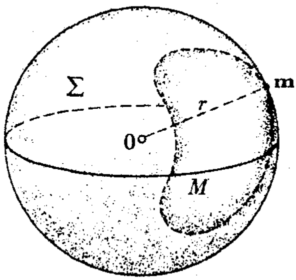
درنتایج پیش، ازخمیدگی گاوسی بیشتر از آن جهت استفاده شدکه این خمیدگی روی همهٔ M به‌خوبی معین ودیفرانسیلپذیر است، و بدینسان‌کار با آن ازکار باخمیدگیهای اصلی آسانتر است.

اکنون به بررسی جدیتری در مورد خمیدگی گاوسی K از رویهٔ $M\subset\mathbf{E}^3$ می‌پردازیم.

۵.۳ قضیه. روی هر رویهٔ فشردهٔ M در $\mathbf{E}^3$، نقطه‌ای وجود دارد که در آن، خمیدگی گاوسی K اکیداً مثبت است.

برهان. تابع با مقدار حقیقی f روی M با ضابطهٔ $f(\mathbf{p})=\|\mathbf{p}\|^2$ را در نظر می‌گیریم. بدینسان برحسب مختصات طبیعی $\mathbf{E}^3$، داریم $f=\sum x_i^2$. f دیفرانسیلپذیر و در نتیجه پیوسته است، و M فشرده می‌باشد. از این رو بنا برلم ۳.۷، فصل ۴، f در یک نقطهٔ $\mathbf{m}$ از M دارای ماکسیمم است. از آنجاکه f مربع مسافت ازمبدأ را نشان می‌دهد، $\mathbf{m}$ به‌طور ساده نقطه‌ای از M خواهد بود که دارای مسافت ماکسیمم $r=\|\mathbf{m}\|>0$ ازمبدأ است. به‌وضوح دیده می‌شود که M در $\mathbf{p}$ برکرهٔ Σ به‌شعاع r مماس است، و M در داخل Σ قرار دارد، بنابراین از Σ خمیده‌تر است (شکل ۷.۶). بدینسان می‌توان انتظار داشت که $K(\mathbf{m})\geqslant 1/r^2>0$. اکنون به‌اثبات این نامساوی می‌پردازیم.

به‌ازای هر بردار مماس یکهٔ $\mathbf{u}$ بر M در نقطهٔ ماکسیمم $\mathbf{m}$، خمی باتندی واحد α در M طوری درنظرمی گیریم که $\alpha(0)=\mathbf{m}$، $\alpha'(0)=\mathbf{u}$. با مشتقگیری از $\mathbf{m}$ نتیجه‌می‌شود که تابع مرکب $f(\alpha)$ در $t=0$ دارای ماکسیمم است. بدینسان



شکل ۷.۶

$$\frac{d}{dt}(f\alpha)(0)=0,\ \frac{d^2}{dt^2}(f\alpha)(0)\leqslant 0 \qquad (1)$$

اما $f(\alpha)=\alpha\cdot\alpha$، بنابراین $(d/dt)(f\alpha)=2\alpha\cdot\alpha'$. به ازای $t=0$ خواهیم داشت

$$0=\frac{d(f\alpha)}{dt}(0)=2\alpha(0)\cdot\alpha'(0)=2\mathbf{m}\cdot\mathbf{u}$$

چون $\mathbf{u}$ یک بردار مماس یکهٔ دلخواه بر M در $\mathbf{m}$ است، این رابطه بدان معنی است که $\mathbf{m}$ (به عنوان یک بردار) قائم بر M در $\mathbf{m}$ است.

چون بار دیگر مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2(f\alpha)}{dt^2}=2\alpha'\cdot\alpha'+2\alpha\cdot\alpha''$$

از اینجا در $t=0$ بنابر (۱) داریم

$$\begin{aligned} 0&\geqslant \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{m}\cdot\alpha''(0)\\ &=1+\mathbf{m}\cdot\alpha''(0)\end{aligned} \qquad (2)$$

از بحث بالا نتیجه می‌شود که می‌توان $\mathbf{m}/r$ را به‌عنوان یک بردار قائم یکهٔ بر M در $\mathbf{m}$ در نظر گرفت، چنان که در شکل ۸.۶ نشان داده شده است. بدینسان $(\mathbf{m}/r)\cdot\alpha''$ دقیقاً

همان $k(\mathbf{u})$ خمیدگی قائم رویهٔ M در امتداد $\mathbf{u}$ است، و از (۲) نتیجه می‌شود که $k(\mathbf{u}) \leqslant -1/r$. به‌ویژه هردو خمیدگی اصلی در این نامساوی صدق می‌کنند، ازاین‌رو

$$K(\mathbf{m}) \geqslant \frac{1}{r^2} > 0 \quad \blacksquare$$

بدینسان در $\mathbf{E}^3$ هیچ رویهٔ فشرده‌ای با $K \leqslant 0$ وجود ندارد.

با حفظ فرض فشردگی، به‌بررسی تأثیرقید خمیدگی گاوسی ثابت می‌پردازیم. قضیهٔ ۵.۳ نشان می‌دهدکه تنها حالت ممکن عبارت است از $K > 0$. کره، مثال روشنی از رویه‌های فشرده در $\mathbf{E}^3$ با خمیدگی گاوسی ثابت مثبت است. یکی از مهمترین نکات نظریهٔ رویه‌ها اثبات این حقیقت است که تنها کره چنین رویه‌ای است. برای اثبات این مطلب به‌مقدمهٔ نسبتاً عمیقتری نیاز داریم.

۶.۳. لم. (هیلبرت). گیریم $\mathbf{m}$ نقطه‌ای از رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، به‌طوری‌که

(۱) k_1 دارای یك ماکسیمم موضعی در $\mathbf{m}$ باشد.

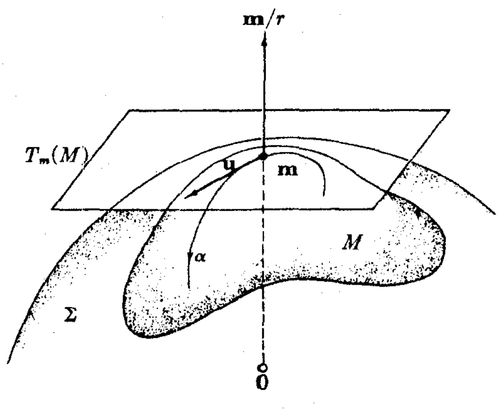
(۲) k_2 دارای یك مینیمم موضعی در $\mathbf{m}$ باشد.

(۳) $k_1(\mathbf{m}) > k_2(\mathbf{m})$.

آنگاه $K(\mathbf{m}) \leqslant 0$.

به‌عنوان مثال، به‌آسانی می‌توان دیدکه این فرضها در هر نقطه از استوای داخلی چنبره وهمچنین دایرهٔ مینیمال ($x = 0$) کاتنوئید برقرارند، و K درهر دو مثال منفی است.

برای آنکه فرضهای (۱) و (۲) را به‌صورتی قابل استفاده در برهان زیر درآوریم، به‌یادآوری چند نکته ازماکسیمم و مینیمم می‌پردازیم. اگر f تابعی (دیفرانسیلپذیر) روی یك رویهٔ M و V یك میدان برداری مماس باشد، آنگاه مشتق اول $V[f]$ نیزتابعی روی



شکل ۸.۶

M خواهد بود. بدینسان می‌توان با اعمال مجدد V مشتق دوم $V[V[f]]=VV[f]$ را به‌دست آورد. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که اگر f در نقطهٔ $\mathbf{m}$ دارای ماکسیمم موضعی باشد، آنگاه شرایطی نظیر آنچه در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی داریم برقرار خواهد بود، یعنی

$$V[f]=\circ, \qquad VV[f]\leqslant \circ \qquad \text{در } \mathbf{m}$$

روشن است که درمورد مینیمم موضعی نامساوی برعکس می‌شود.

برهان. $\mathbf{m}$ نافی نیست، زیرا $k_1(\mathbf{m})>k_2(\mathbf{m})$، از این‌رو بنا بر لم ۶.۲ یك میدان سه‌وجهی اصلی E_1، E_2، E_3 روی یك همسایگی $\mathbf{m}$ در M، وجود خواهد داشت. بنا بر توضیح بالا، از فرضهای مینیمم بودن و ماکسیمم بودن در $\mathbf{m}$ به‌ویژه نتیجه می‌شود

$$E_1[k_2]=E_2[k_1]=\circ \qquad \text{در } \mathbf{m} \tag{۱}$$

و

$$E_1E_1[k_2]\geqslant \circ \quad \text{و} \quad E_2E_2[k_1]\leqslant \circ \qquad \text{در } \mathbf{m} \tag{۲}$$

اکنون از معادلات کودازی (قضیهٔ ۷.۲) استفاده می‌کنیم. از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\omega_{12}(E_1)=\omega_{12}(E_2)=\circ \qquad \text{در } \mathbf{m}$$

چون در $\mathbf{m}$ داریم $k_1-k_2\neq\circ$، بدینسان بنا بر فرع ۴.۲ خواهیم داشت

$$K=E_2[\omega_{12}(E_1)]-E_1[\omega_{12}(E_2)] \qquad \text{در } \mathbf{m} \tag{۳}$$

با اعمال E_1 بر معادلهٔ اول کودازی درقضیهٔ ۷.۲، نتیجه می‌شود

$$E_1E_1[k_2]=(E_1[k_1]-E_1[k_2])\omega_{12}(E_2)+(k_1-k_2)E_1[\omega_{12}(E_2)]$$

اما در نقطهٔ خاص $\mathbf{m}$ داریم $\omega_{12}(E_2)=\circ$ و $k_1-k_2>\circ$، بنابراین از (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$E_1[\omega_{12}(E_2)]\geqslant \circ \qquad \text{در } \mathbf{m} \tag{۴}$$

چون از معادلهٔ دوم کودازی شروع کنیم با استدلال مشابهی خواهیم داشت

$$E_2[\omega_{12}(E_1)]\leqslant \circ \qquad \text{در } \mathbf{m} \tag{۵}$$

با استفاده از (۴) و (۵) درعبارت (۳)، درمورد خمیدگی گاوسی در $\mathbf{m}$ به‌این نتیجه می‌رسیم که $K(\mathbf{m})\leqslant\circ$. ▮

۷.۳ قضیه. (لیبمان[1]). اگر M رویه‌ای فشرده در $\mathbf{E}^3$ باخمیدگی گاوسی ثابت K باشد،

1. Liebmann

آنگاه M کره‌ای به‌شعاع $1/\sqrt{K}$ است. (قضیهٔ ۵.۳ مستلزم مثبت بودن K است.)

برهان. چون معلوم نیست کــه M جهت‌پذیــر باشد، از این‌رو تــوابع خمیدگی اصلی را نمی‌توان روی‌همهٔ M درنظر گرفت. باوجود این، تابع

$$H^2 - K = (k_1 - k_2)^2/4$$

روی همهٔ M به‌خوبی معین و پیوسته است، زیرا ابهام علامت دراثر مجذور کردن ازبین می‌رود. چون M فشرده است، تابع $H^2 - K \geqslant 0$ دارای یك نقطهٔ ماکسیمم $\mathbf{m}$ خواهد بود. اگر $H^2 - K$ در $\mathbf{m}$ صفر باشد، متحداً صفر خواهد بود، بدینسان M کلاً نافی است و فرع ۴.۳ مدعا را ثابت می‌کند.

اکنون آنچه باید ثابت‌کنیم این است که $H^2 - K$ نمی‌توانــد در $\mathbf{m}$ مثبت باشد. فرض‌کنیم چنین باشد، دراین‌صورت $\mathbf{m}$ نافی نیست وباجهتدهی مناسب یك همسایگی $\mathfrak{N}$ از $\mathbf{m}$ می‌توان ترتیبی دادکــه روی $\mathfrak{N}$ داشته باشیم $k_1 > k_2 > 0$ (زیــرا $K > 0$). چون $(k_1 - k_2)^2$ در $\mathbf{m}$ دارای ماکسیمم است، $k_1 - k_2$ نیزچنین خواهد بود. ازطرف دیگر $K = k_1 k_2$ ثابت است، در نتیجه در $\mathbf{m}$، k_1 دارای ماکسیمم موضعی و k_2 دارای مینیمم‌موضعی‌می‌باشد. اما اکنون‌می‌توان لم هیلبرت رابه‌کار گرفت و به‌تناقض $K(\mathbf{m}) \leqslant 0$ رسید. ∎

اگر فرض فشردگی حذف شود، قضیهٔ لیبمان دیگــر صادق نیست،زیــرا چنان‌کــه درفصل ۵، بند ۶، دیدیم رویه‌های غیرکــروی بسیاری در $\mathbf{E}^3$ باخمیدگــی ثابت (مثبت) وجود دارند. قضیهٔ ۵.۳ و قضیهٔ لیبمان هــردو براین نکته اساسی توپولوژیکی (لم ۳.۷، فصل ۴) مبتنی می‌باشند کــه هرتابع بامقدار حقیقی پیوسته روی یــك رویهٔ فشرده دارای ماکسیمم است. بررسی کامل تأثیر خمیدگی گاوسی روی شکل رویــه‌ها در $\mathbf{E}^3$، مستلزم روشهای توپولوژیکی پیشرفته‌تری است. بــه عنوان مثال می‌توان ایــن پرسش را مطرح کرد که اگر به‌جای فشردگی فرض ضعیفتر بسته بــودن در $\mathbf{E}^3$ را قرار دهیم[1]، وضعیت رویه‌هایی‌که دارای خمیدگی ثابت‌اند چه‌خواهد بود. جوابها ازاین قرارند:

هررویهٔ بستهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ با K ثابت و مثبت، فشرده است، درنتیجه بنابرقضیهٔ لیبمان یك کره است.

هر رویهٔ بستهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ با $K = 0$ یك استوانه به مفهوم اعم می‌باشد (ماسی[2]).

در $\mathbf{E}^3$ رویهٔ بسته‌ای با K ثابت منفی وجود ندارد (هیلبرت).

---

۱. این شرط در تمرین ۱۰، فصل ۴، بند ۷ آمده است. به‌بیان اجمالی مبین آن است‌که M دارای‌کناره یا لبه نیست. درمورد رویه‌ها در E^3 این شرط با خاصیت ذاتی کامل‌بودن (تعریف ۴.۴، فصل ۷) هم‌ارز است.

2. Massey

نتیجهٔ اول‌را درفصل ۷ اثبات خواهیم کرد. برهان‌دونتیجهٔ دیگررا می‌توان به‌ترتیب درهیکس [۵] و ویلمور [۳] یافت.

تمرینات

۱. اگر M یك رویهٔ مینیمال هموار باشد، ثابت‌کنید‌که M بخشی ازیك صفحه است.

۲. رویه‌های هموار در $\mathbf{E}^3$ فقط درامتداد خطوط مستقیم می‌توانند دارای خمیدگـی باشند: اگر $k_1 = 0$ ، و k_2 هیچ‌گاه صفر نباشد، نشان دهید که خمهای اصلی متناظـر به k_1 قطعه خطهای مستقیمی در $\mathbf{E}^3$ می‌باشند. (راهنمایی: ازتمرین ۱، فصل ۶، بند ۱، استفاده شود.)

این مطلب نقطهٔ شروع برای اثبات قضیهٔ ماسی است.

۳. گیریم $M \subset \mathbf{E}^3$ رویه‌ای‌جهتپذیر وفشرده با $K > 0$ باشد. اگر M دارای خمیدگی متوسط ثابت باشد، نشان دهید‌که M یك کره است.

۴. ثابت‌کنید‌که از هرنقطهٔ ناحیه‌ای‌که نقاط نافی نداشته باشد،دقیقاً دوخم اصلی‌می‌گذرد (صرفنظـر از نمایشهای پـارامتری مختلف)، این خمها درنقطـهٔ تقاطع متعامـدنـد. (راهنمایی: از تمرین ۷، فصل ۴، بند ۸، استفاده شود.)

۵. اگر خمیدگیهای اصلی رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ ثابت باشند، نشان دهید‌که M بخشی از یك صفحه یا یك‌کره ویا یك‌استوانهٔ مستدیر است. (راهنمایی: درحالت با ارج $k_1 \neq k_2$؛ فرض‌کنید‌که یك میدان سه‌وجهی برازنده روی همهٔ M وجود دارد، ونشان دهید‌کـه، مثلاً، $k_1 = 0$.)

۴. ایزومتری و ایزومتری موضعی

درپیش به خواصی از رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ که امکان‌کشف آنها برای ساکنین M، بی‌اطلاع از فضای خارج رویـه وجود دارد اشاره شد. درنظر گرفته شد که ساکنین M می‌توانند مسافت بین هردو نقطهٔ در M را، درست به‌همان گونه بیابند‌که‌مسافت برسطح زمین به‌وسیلهٔ ساکنین آن معین می‌شود. بیان ریاضی این مطلب به‌شرح زیر است.

۱.۴. تعریف. اگر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ نقاطی از $M \subset \mathbf{E}^3$ باشند، مجموعهٔ متشکل از همهٔ قطعه‌خمهای α در M از $\mathbf{p}$ بـه $\mathbf{q}$ را درنظر می‌گیریـم. $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ دوری ذاتی از $\mathbf{p}$ تا $\mathbf{q}$ در M بـا بزرگترین‌کران پایینی طولهای $L(\alpha)$ی این قطعه خمها تعریف می‌شود.

البته لزومی ندارد که یك خم α طوری وجود داشته باشد که طول آن دقیقاً برابر $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ باشد (تمرین ۳ را ببینید). مسافت ذاتی $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ به‌طورکلی از دوری‌اقلیدسی

مستقیم‌الخط $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ بزرگتر است، زیرا خمهای α مقیدند که در M قرار داشته باشند (شکل ۹.۶).

البته روی سطح زمین (که کره‌ای است به‌شعاع تقریبی ۴۰۰۰ میل) درعمل‌مسافت ذاتی مورد توجه است. مثلاً، گفته می‌شود کـه از قطب شمال تا قطب جنوب ۱۲۵۰۰ میل است، درحالی که دوری اقلیدسی با عبور از مرکز زمین فقط ۸۰۰۰ میل می باشد.

درفصل ۳ دیده شد که چگونه هندسهٔ اقلیدسی برمفهوم ایزومتری، نگاشتی که دوری را حفظ می کند،مبتنی است. دربارهٔ رویه‌ها در M، خاصیت حفظ مسافت را اثبات‌می کنیم، واز فرم بینهایت کوچک آن (فرع ۲.۲، فصل ۳) به‌عنوان تعریف استفاده می کنیم.

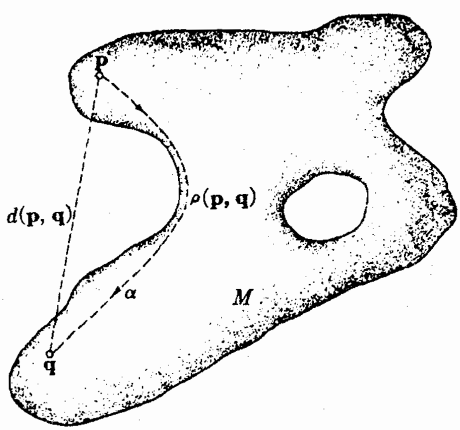
۲.۴. تعریف. ایزومتری رویه‌هـا در E^3 عبارت است از هر نگاشت یك بـه‌یك و پوشای $F: M \rightarrow \bar{M}$ کـه حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای مماس را حفظ کند. به‌عبارت روشنتر، اگر F_* نگاشت مشتق F باشد، آنگاه به‌ازای هر زوج $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ از بردارهای مماس بر M داریم

$$F_*(\mathbf{v}) \cdot F_*(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

اگر F_* حاصل‌ضرب نقطه‌ای را حفظ کند، دراین‌صورت‌طول بردارهای‌مماس‌را نیز حفظ خواهدکرد. از اینجا نتیجه می‌شود که هر ایزومتری یك نگاشت منظم است (فصل ۴، بند ۵)، زیرا اگر $F_*(\mathbf{v}) = 0$، آنگاه

$$\|\mathbf{v}\| = \|F_*(\mathbf{v})\| = 0$$

از این‌رو $\mathbf{v} = 0$. بدینسان بنابـر تـوضیحات ذیـل قضیهٔ ۴.۵، فصل ۴، هـر ایزومتری $F: M \rightarrow \bar{M}$ به‌ویژه یك‌دیفئومرفیسم است، یعنی، دارای نگاشت‌وارون $F^{-1}: \bar{M} \rightarrow M$ می باشد.



شکل ۹.۶

۳.۴ قضیه. ایزومتریها مسافت ذاتی را حفظ می‌کنند: اگر $F : M \to \bar{M}$ یك ایزومتری رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه به‌ازای هردو نقطهٔ $\mathbf{p}$، $\mathbf{q}$ از M داریم

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{\rho}(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q}))$$

(دراینجا ρ و $\bar{\rho}$ به‌ترتیب توابع مسافت ذاتی M و $\bar{M}$ می‌باشند.)

برهان. نخست باید توجه‌کرد که ایزومتری تندی و طول‌خمها را حفظ می‌کند. برهان، درست مانند حالت اقلیدسی آن است: اگر α قطعه خمی در M باشد، آنگاه $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ قطعه خمی در $\bar{M}$ با سرعت $\bar{\alpha}' = F_*(\alpha')$ می‌باشد. چون F_* حاصل‌ضرب نقطه‌ای را حفظ می‌کند، نرم را نیز حفظ خواهدکرد، درنتیجه

$$\|\alpha'\| = \|F_*(\alpha')\| = \|F(\alpha)'\| = \|\bar{\alpha}'\|$$

بنابراین

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\bar{\alpha}'(t)\|\, dt = L(\bar{\alpha})$$

اما اگر α در M از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ حرکت کند، نگارهٔ آن $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ در $\bar{M}$ از $F(\mathbf{p})$ به $F(\mathbf{q})$ حرکت‌خواهدکرد. برعکس، اگر β قطعه خمی‌از $F(\mathbf{p})$ به $F(\mathbf{q})$ در $\bar{M}$ باشد، آنگاه $F^{-1}(\beta)$ در M از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ حرکت می‌کند. بدینسان تناظری یك به‌یك بین گردایهٔ قطعه خمهایی‌که برای تعریف $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ وگردایه‌ای که برای تعریف $\bar{\rho}(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q}))$ به‌کار رفته‌اند، برقرارمی‌شود. اما چنان‌که‌در بالا ثابت‌شد خمهای متناظر دارای طول یکسان‌اند، ازاینجا مستقیماً نتیجه می‌شود که

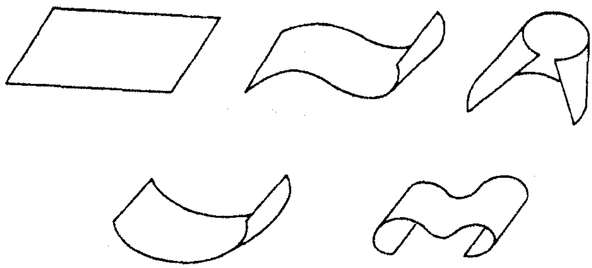
$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{\rho}(F(\mathbf{p}), F(\mathbf{q})) \qquad \blacksquare$$

بدینسان می‌توان ایزومتری را به عنوان دگرگونی شکل رویه بی‌آنکه مسافت ذاتی بین نقاط آن تغییرکند تصورکرد. نتیجتاً ساکنین رویه اصلاً هیچ تغییری احساس نمی‌کنند، زیرا تمام اندازه‌گیریهای هندسی آنان دقیقاً یکسان باقی می‌مانند.

اگر یك ایزومتری از M به $\bar{M}$ وجود داشته باشد، آنگاه این دو رویه را ایزومتریك می‌نامند. مثلاً، اگر یك ورق کاغذ را بدون ایجاد چین وچروك و یا کشیدگی به اشکال گوناگون درآوریم، همهٔ رویه‌های حاصل ایزومتریك‌اند (شکل ۶.۱۰).

دربررسی ایزومتریها بهتر است شرط هندسی حفظ حاصل‌ضرب نقطه‌ای و قیود یك به‌یك وپوشا بودن را ازهم جداکنیم.

۴.۴ تعریف. ایزومتری موضعی $F : M \to N$ رویه‌ها عبارت است از نگاشتی که حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای مماس را حفظ کند (یعنی به‌ازای هر دومماس $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ بر M، داشته باشیم $F_*(\mathbf{v}) \cdot F_*(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$).



شکل ۱۰.۶

بدینسان هر ایزومتری، یك ایزومتری موضعی است که یك به‌یك و پوشا نیز می باشد.

اگر F یك ایزومتری موضعی باشد، استدلال پیش همچنان نشان می‌دهد که F یك نگاشت منظم است. ازاین‌رو به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M، بنا بر قضیهٔ تابع وارون (۴.۵، فصل ۴)، F بین یك‌همسایگی $\mathcal{U}$ از $\mathbf{p}$ در M و یك همسایگی $\mathcal{V}$ از $F(\mathbf{p})$ در N یك دیفئومرفیسم برقرار می‌کند. اما $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ نیز خود رویه‌هایی در $\mathbf{E}^3$ می‌باشند، و بدینسان نگاشت

$$F|\mathcal{U}: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

یك ایزومتری خواهد بود. بدین معنی هر ایزومتری موضعی، واقعاً به طور موضعی یك ایزومتری است.

برای ایزومتریهای موضعی ملاك مختصاتی ساده‌ای وجود دارد که بر توابع E، F و G که در بند ۴، فصل ۵ تعریف شدند مبتنی است.

۵.۴ لم. گیریم $F: M \to N$ یك نگاشت باشد. به‌ازای هر قطعهٔ مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ نگاشت مرکب

$$\bar{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}): D \to N$$

را درنظر می‌گیریم. در این صورت F یك ایزومتری موضعی است اگر، وفقط اگر، به‌ازای هرقطعهٔ مختصاتی $\mathbf{x}$ داشته باشیم:

$$E = \bar{E} \qquad F = \bar{F} \qquad G = \bar{G}$$

(دراینجا لزومی ندارد که $\bar{\mathbf{x}}$ یك قطعهٔ مختصاتی باشد، اما $\bar{E}$، $\bar{F}$ و $\bar{G}$ مطابق معمول برای آن تعریف می‌شوند.)

برهان. فرض کنیم که این ملاك فقط برای قطعه‌های مختصاتی که به‌قدرکافی همهٔ M را بپوشانند صادق است. برای اینکه نشان دهیم F_* ضرب نقطه‌ای را حفظ می‌کند، بنا بر یکی از هم‌ارزیهای تمرین ۱، تنها باید ثابت کنیم که

$$\|\mathbf{x}_u\| = \|F_*(\mathbf{x}_u)\|, \quad \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = F_*(\mathbf{x}_u) \cdot F_*(\mathbf{x}_v), \quad \|\mathbf{x}_v\| = \|F_*(\mathbf{x}_v)\|$$

اما چنان‌که در فصل ۴ دیدیم، از تعریف F_* مستقیماً نتیجه می‌شود که $F_*(\mathbf{x}_u) = \bar{\mathbf{x}}_u$ و $F_*(\mathbf{x}_v) = \bar{\mathbf{x}}_v$. بدینسان روابط بالا از فرضهای $E = \bar{E}$، $F = \bar{F}$، $G = \bar{G}$ نتیجه می‌شوند. ازاین‌رو F یك ایزومتری موضعی است.

با عکس ترتیب استدلال، وارون گزاره نیز ثابت می‌شود. ∎

ازاین نتیجه گاهی برای ساختن ایزومتریهای موضعی استفاده می‌شود. درساده‌ترین حالت، فرض کنیم که M نگارهٔ تنها یك قطعهٔ مختصاتی $\mathbf{x} : D \rightarrow M$ باشد. دراین‌صورت اگر $\mathbf{y} : D \rightarrow N$ یك‌قطعهٔ مختصاتی دریك رویهٔ دیگرباشد، نگاشت $F : M \rightarrow N$ را با

$$F(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{y}(u, v) \qquad \text{به‌ازای } (u, v) \text{ در } D$$

تعریف می‌کنیم. اگر داشته باشیم

$$E = \bar{E}, \ F = \bar{F}, \ G = \bar{G}$$

آنگاه بنابرملاك بالا، F یك ایزومتری موضعی خواهد بود.

۴.۶. مثال.

(۱) ایزومتری موضعی از یك صفحه برروی یك استوانه. صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ را می‌توان به‌عنوان یك رویه بـا میدان سه‌وجهی طبیعی U_1، U_2 درنظر گرفت. اگر $\mathbf{x} : \mathbf{E}^2 \rightarrow M$ نمایش پارامتری یك رویه بـاشد، آنگاه بنابر تمرین ۱ نگاشت $\mathbf{x}$ یك ایزومتری موضعی خواهد بود اگر

$$\mathbf{x}_*(U_i) \cdot \mathbf{x}_*(U_j) = U_i \cdot U_j$$

اما داریم $\mathbf{x}_*(U_1) = \mathbf{x}_u$، $\mathbf{x}_*(U_2) = \mathbf{x}_v$، و $U_i \cdot U_j = \delta_{ij}$، و این همان قید $E = 1$، $F = 0$، $G = 1$ است.

به‌عنوان مثال ملموس، استوانهٔ $M : x^2 + y^2 = r^2$ دارای نمایش پارامتری

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(r \cos\left(\frac{u}{r}\right), \ r \sin\left(\frac{u}{r}\right), \ v\right)$$

است، که درآن $E = 1$، $F = 0$، $G = 1$. بدینسان $\mathbf{x}$ یك ایزومتری موضعی است، کـه صفحهٔ $\mathbf{E}^2$ را بـه دور استوانه می‌پیچد، خطوط افقی بـه دور دوایر مقطع عرضی پیچیده می‌شوند، وخطوط قائم برمولدهای استوانه قرار می‌گیرند.

(۲) ایـزومتری موضعی ازیك هلیکوئید بـر روی یك کاتنوئید. هلیکوئید H نگارهٔ قطعه مختصاتی

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, \ u \sin v, \ v)$$

و کاتنوئید C با نمایش پارامتری متعارف $\mathbf{y}: \mathbf{E}^2 \to C$ راکه درمثال ۴.۶، فصل ۵ بیان شد درنظر می گیریم. بدینسان

$$\mathbf{y}(u, v) = (g(u),\ h(u)\cos v,\ h(u)\sin v)$$

$$g(u) = \sinh^{-1} u \qquad h(u) = \sqrt{1+u^2}$$

گیریم $F: H \to C$ نگاشتی باشد، به‌طوری‌که

$$F(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{y}(u, v)$$

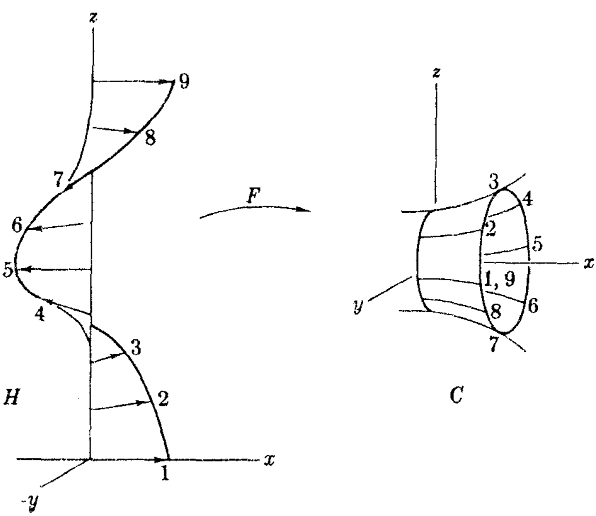
برای اثبات آنکه F یك ایزومتری موضعی است، کافی است بررسی شود که

$$E = 1 = \bar{E}, \qquad F = 0 = \bar{F}, \qquad G = 1 + u^2 = h^2 = \bar{G}$$

F مولدهای H (v ثابت) را بـرروی نصف‌النهارات رویـهٔ دورانی C می‌برد، و مارپیچهای H (u ثابت) را به دور مدارات C می‌پیچد. به‌ویژه محور مرکزی H (محور z) به دور دایرهٔ مینیمال $x = 0$ از C پیچیده می‌شود.

شکل ۱۱.۶ چگونگی انتقال یك نوار نمونه‌ای H را برروی C نشان می‌دهد.

فرض کنیم که هلیکوئید H (یا اقلاً یك ناحیهٔ متناهی از آن) از یك ورقهٔ انعطاف‌پذیر فولادین، مانند پیشبخاری اتومبیل قالب‌گیری شده باشد، عمل قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ همین است. دراین صورت می‌توان H را بـه شکل کاتنوئید درآورد بی‌آنکه درفلز اعوجاج دیگری



شکل ۱۱.۶

ایجاد شود (تمرین ۵، بند ۵).

برای انجام تجربهٔ مشابهی می‌توان در توپ پینگ‌پنگ که نمایشگر یك کره در $\mathbf{E}^3$ است از راه بریدگی سوراخی ایجاد کرد. دراین‌صورت فشارهای ملایم، توپ را به‌اشکال مختلف غیرکروی درمی‌آورد، که همه آنها ایزومتریك‌اند. اما دربارهٔ رویه‌های ایزومتریك دلخواه M و $\bar{M}$ در $\mathbf{E}^3$، عموماً نمی‌توان M را طوری خم کرد (با پیمودن یك خانواده از رویه‌های ایزومتریك) که $\bar{M}$ ایجاد شود.

بغیر از ایزومتریها (موضعی) انواع خاص دیگری از نگاشتها وجود دارند که در هندسه مورد توجه می‌باشند.

۷.۴. تعریف. نگاشت $F: M \to N$ را که درآن M و N دو رویه‌اند، هنگامی یك همشکلی می‌نامند که یك تابع با مقدار حقیقی $\lambda > 0$ روی M وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به‌ازای همهٔ بردارهای مماس بر M داشته باشیم

$$\|F_*(\mathbf{v}_p)\| = \lambda(\mathbf{p})\|\mathbf{v}_p\|$$

تابع λ را سازهٔ مقیاس F می‌نامند.

توجه شود که اگر در نگاشت همشکلی F مقدار λ ثابت و برابر ۱ باشد، F یك ایزومتری موضعی خواهد بود. بدینسان نگاشت همشکلی، ایزومتری تعمیم‌یافته‌ای است که لزومی ندارد که طول بردارهای مماس را حفظ کند، اما درهرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M طول همهٔ بردارهای مماس در $\mathbf{p}$ به‌یك اندازه تغییر می‌کند.

می‌توان ملاکی راکه درلم ۵.۴ و تمرین ۱ برای ایزومتریها بیان کردیم، به‌آسانی به نگاشتهای همشکلی با دخالت‌دادن سازهٔ مقیاس (یا مربع آن) تطبیق داد. مثلاً در لم ۵.۴، به‌جای $E = \bar{E}$ قرارمی‌دهیم $E\lambda^2(\mathbf{x}) = E$، و به‌همین‌طریق برای دومعادلهٔ دیگر. خاصیت اساسی نگاشتهای همشکلی درتمرین ۸ مورد بحث قرارگرفته است.

تمرینات

۱. اگر $F: M \to N$ یك نگاشت باشد، نشان دهید که شرایط زیر دربارهٔ نگاشت مشتق آن دریك نقطهٔ $\mathbf{p}$ منطقاً هم‌ارزند:

(الف) F_* حاصل‌ضرب داخلی را حفظ می‌کند.

(ب) F_* طول بردارهای مماس را حفظ می‌کند، یعنی به‌ازای همهٔ بردارهای $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ داریم $\|F_*(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$

(ج) F_* سه‌وجهیها را حفظ می‌کند: اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ یك سه‌وجهی مماس در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه

$$F_*(\mathbf{e}_1),\ F_*(\mathbf{e}_2)$$

نیز یك سه‌وجهی مماس در $F(\mathbf{p})$ است.

(د) اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ یك زوج مستقل خطی از بردارهای مماس در $\mathbf{p}$ باشند، آنگاه

$$\|F_*(\mathbf{v})\|=\|\mathbf{v}\|,\ \ \|F_*(\mathbf{w})\|=\|\mathbf{w}\| \ \text{و}\ \ F_*(\mathbf{v})\cdot F_*(\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

[راهنمایی: کافی است، مثلاً، ثابت شود که

(الف) $\Longrightarrow$ (ب) $\Longrightarrow$ (د) $\Longrightarrow$ (ج) $\Longrightarrow$ (الف)].

این نکات عمومی از جبر خطی در این تعبیر ملاك مفیدی را بـرای آنکـه F یك ایزومتری موضعی باشد فراهم می‌سازند.

۲. نشان دهید برای آنکه $F: M \to N$ یك ایزومتری موضعی باشد، هریك از شرایط زیر لازم و کافی است.

(الف) F تندی خمها را حفظ می‌کند: $\|F(\alpha)'\|=\|\alpha'\|$ بـه ازای همهٔ خمهای α در M.

(ب) F طول خمها را حفظ می‌کند: $L(F(\alpha))=L(\alpha)$ به ازای همهٔ قطعه خمهای α در M.

۳. گیریم M صفحهٔ xy در $\mathbf{E}^3$ بـا حذف مبدأ باشد. نشان دهید کـه مسافت ذاتی از $(-1, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ در M برابر ۲ می‌باشد، اما در M قطعه خمی که این دونقطه را بهم بپیوندد وطول آن برابر ۲ باشد وجود ندارد (راهنمایی: تمرین ۱۱، فصل ۲، بند ۲).

۴. مطلوب است بیان دقیق ریاضی و اثبات گزارهٔ زیر: در ایزومتریهای موضعی مسافت ذاتی می‌تواند کاهش یابد، اما افزایش پیدا نمی‌کند.

۵. گیریم $\alpha, \beta: I \to \mathbf{E}^3$ خمهایی با تندی واحد و با تابع خمیدگی برابر $\kappa > 0$ باشند، و فرض کنیم که نمایش پارامتری خطدار رویهٔ مماسی α

$$\mathbf{x}(u, v)=\alpha(u)+vT(u)$$

دقیقاً یك قطعه مختصاتی بـاشد. مطلوب است تعیین یك ایزومتری موضعی از رویهٔ مماسی α به:

(الف) رویهٔ مماسی β.

(ب) یك ناحیهٔ D ازصفحه.

(راهنمایی: تمرین ۹، فصل ۳، بند ۵).

۶. نشان دهید که تمرین پیش را می‌توان دربارهٔ رویهٔ مماسی یك مارپیچ به‌کار بـرد، و ناحیهٔ نگارهٔ D درصفحه را بیابید.

۷. شرایط تمرین ۱ را طوری تغییر دهید کـه ملاکی برای همشکلی نگاشت F به‌دست آید. آنگاه ثابت‌کنید که قطعه مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ یك نگاشت همشکلی خواهد بود اگر، و فقط اگر، $E=G$ و $F=0$.

۸. نشان دهید که هر نگاشت همشکلی $F : M \to N$ زوایا را حفظ می‌کند، بدین مفهوم: اگر v $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه زاویهٔ بین $F_*(\mathbf{v})$ و $F_*(\mathbf{w})$ در $F(\mathbf{p})$ نیز همان v است.

۹. اگر $F : M \to \bar{M}$ یك ایزومتری باشد، ثابت کنید که نگاشت وارون $F^{-1} : \bar{M} \to M$ نیز یك ایزومتری است. اگر $F : M \to N$ و $G : N \to P$ ایزومتریهای (موضعی) باشند، ثابت کنید کـه نگاشت مرکب $GF : M \to P$ نیز یك ایزومتری (موضعی) است.

۱۰. گیریم $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری تمام M و $\bar{\mathbf{x}}$ یك نمایش پارامتری در N بـاشد. اگـر نگاشت $F : M \to N$ طوری باشد که $F(\mathbf{x}(u, v)) = \bar{\mathbf{x}}(f(u), g(v))$، آنگاه–

(الف) تأثیر F را برخمهای پارامتر $\mathbf{x}$ بررسی کنید.
(ب) نشان دهید که F یك ایزومتری موضعی است اگر، و فقط اگر،

$$E = \bar{E}(f, g)\left(\frac{df}{du}\right)^2, \quad F = \bar{F}(f, g)\frac{df}{du}\frac{dg}{dv}, \quad G = \bar{G}(f, g)\left(\frac{dg}{dv}\right)^2$$

(درحالت‌کلی f و g تابع u و v می‌باشند، و این ملاك پیچیده‌تر خواهد شد.)
(ج) شرایط مشابهی برای همشکلی F بیابید.

۱۱. گیریم M یك رویهٔ دورانی، و $F : H \to M$ یك ایزومتری موضعی از هلیکوئید بـاشد به طوری کـه (مانند مثال ۴.۶) مولدها را به نصف‌النهارات و مارپیچها را به مدارات تبدیل کند. نشان دهید کـه M یك‌کاتنوئید است. (راهنمایی: از تمرین ۱۰ استفاده کنید.)

۱۲. گیریم M نگارهٔ یك قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ باشد، که در آن $E = 1$، $F = 0$ و G فقط تابع u $(G_v = 0)$ است. اگر مشتق $d(\sqrt{G})/du$ کراندار باشد، نشان دهید که یك ایزومتری موضعی از M دریك رویهٔ دورانی وجود دارد.
بدینسان هرناحیهٔ به‌قـدر کافی کوچك از M بـا ناحیه‌ای از یك رویـهٔ دورانی ایزومتریك است.

۱۳. گیریم $\mathbf{x}$ قطعه مختصاتی جغرافیایی درکرهٔ Σ به‌شعاع r (مثال ۲.۲، فصل ۴) باشد با ایجادکشیدگی در $\mathbf{x}$ درامتداد شمال ـ جنوب، آن را به‌یك نگاشت همشکلی بدل کنید. به‌عبارت صریح، قرار دهید

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(u, g(v)) \quad \text{با} \quad g(0) = 0$$

و g را طوری تعیین کنید که $\mathbf{y}$ یك‌همشکلی باشد. سازهٔ مقیاس $\mathbf{y}$ را بیابید، وحوزهٔ

D را طوری تعیین کنید که $\mathbf{y}(D)$ فقط یك نیمدایره از Σ را حذف کند. ($\mathbf{y}$ نقشهٔ مرکاتور زمین را به‌دست می‌دهد: وارون آن تصویر مرکاتور است.)

۱۴. نشان دهید که تصویر منظری $P : \Sigma_0 \to \mathbf{E}^2$ (مثال ۲.۵، فصل ۴) یك همشکلی است با سازهٔ مقیاس:

$$\lambda(\mathbf{p}) = 1 + \frac{\|P(\mathbf{p})\|^2}{4}$$

۱۵. گیریم M یك رویهٔ دورانی است که خم نیمرخ آن بسته نیست و در نتیجه دارای یك نمایش پارامتری یك به یك خواهد بود. نگاشت همشکلی $F : M \to \mathbf{E}^2$ را طوری تعیین کنید که نصف‌النهارات به‌خطوط مار ازمبدأ و مدارات به‌دوایری به‌مرکز مبدأ بدل شوند.

۵. هندسهٔ ذاتی رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$

در فصل ۳ هندسهٔ اقلیدسی را به‌عنوان مفاهیمی که بر اثر ایزومتریهای اقلیدسی محفوظ می‌مانند تعریف کردیم. همین تعریف را می‌توان درمورد رویه‌ها به‌کار برد: هندسهٔ ذاتی $M \subset \mathbf{E}^3$ عبارت است از مفاهیمی، موسوم به تغییرناپذیرهای ایزومتریك، که براثر همهٔ ایزومتریهای $F : M \to \bar{M}$ محفوظ می‌مانند. به‌عنوان مثال، قضیهٔ ۳.۴ نشان می‌دهد که مسافت ذاتی، یك تغییرناپذیر ایزومتریك است. اکنون می‌توان سؤال گاوس را (که در آغاز این فصل عنوان شد) دقیقتر بیان کرد: کدام یك از ویژگیهای رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ به‌هندسهٔ ذاتی آن تعلق دارد؟ تعریف ایزومتری (تعریف ۲.۴) حاکی از آن است که تغییرناپذیرهای ایزومتری باید تنها به‌حاصل‌ضرب نقطه‌ای که در بارهٔ بردارهای مماس بر M اعمال می‌شود بستگی داشته باشند. اما عملگر شکلی از یك میدان برداری قائم منتج می‌شود، و مثالهای بند ۴ نشان می‌دهند که امکان دارد رویه‌های ایزومتریك در $\mathbf{E}^3$ شکلهای کاملاً متفاوتی داشته باشند. در واقع، مثالهای مزبور مبین اثبات صوری این نکته است که عملگرهای شکلی، امتدادهای اصلی، خمیدگیهای اصلی، و خمیدگی متوسط قطعاً به هندسهٔ ذاتی $M \subset \mathbf{E}^3$ تعلق ندارند.

برای آنکه نظریهٔ هندسهٔ ذاتی را به‌طور منظم بنا کنیم باید به بند ۱ برگردیم و ببینیم که چه اندازه از آن بررسی نسبت به M ذاتی است. اگر حاصل‌ضرب نقطه‌ای را تنها روی بردارهای مماس بر M به‌کار بریم، بازهم می‌توان یك میدان سه وجهی مماس E_1 ، E_2 روی M معین کرد. بدینسان می‌توان از یك میدان سه‌وجهی برازنده دومیدان برداری مماس E_1 ، E_2 و درنتیجه ۱-فرمیهای دوگانی θ_1 ، θ_2 را به‌دست آورد. نکتهٔ جالب آنکه فرم همبندی ω_{12} بدینسان کاملاً معین می‌گردد.

۱.۵ لم. فرم همبندی $\omega_{12} = -\omega_{21}$ همان ۱-فرمی یکتایی است که در معادلات

ساختاری اول

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2 \qquad d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1$$

صدق می‌کند.

برهان. معادلات بالا را درمورد میدانهای برداری مماس E_1، E_2 اعمال می‌کنیم. چون $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$، از تعریف حاصل‌ضرب خارجی (تعریف ۳.۴ فصل ۴) به‌دست می‌آید

$$\omega_{12}(E_1) = d\theta_1(E_1, E_2)$$
$$\omega_{12}(E_2) = -\omega_{21}(E_2) = d\theta_2(E_1, E_2)$$

بدینسان به‌موجب لم ۱.۲، $\omega_{12} = -\omega_{21}$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ θ_1، θ_2 تعیین می‌گردد. ∎

۲.۵ تبصره. درواقع، این برهان طرزساختن $\omega_{12} = -\omega_{21}$ را بدون استفاده ازمشتقهای کوواریانی اقلیدسی (چنان‌که دربند ۱ آمد) نشان می‌دهد. هنگامی که E_1، E_2 ودرنتیجه θ_1، θ_2 داده شده باشند، معادلاتی راکه در برهان آمدند به‌عنوان تعریف ω_{12} روی E_1 و E_2 درنظرمی‌گیریم. آنگاه شرط خطی بودن معمولی

$$\omega_{12}(V) = \omega_{12}(v_1 E_1 + v_2 E_2) = v_1 \omega_{12}(E_1) + v_2 \omega_{12}(E_2)$$

ω_{12} را به‌یك ۱-فرمی روی M بدل می‌کند، وبه‌آسانی می‌توان (با عکس استدلال بالا) نشان دادکه $\omega_{12} = -\omega_{21}$ در معادلات ساختاری اول صدق می‌کند.

اگر $F: M \to \bar{M}$ یك ایزومتری باشد، آنگاه می‌توان میدان سه‌وجهی مماس E_1، E_2 روی M رابه‌یك‌میدان سه‌وجهی مماس $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ روی $\bar{M}$ منتقل کرد: به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{q}$ از $\bar{M}$ تنها یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M وجود دارد به‌طوری‌که $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ باشد. آنگاه $\bar{E}_1$ و $\bar{E}_2$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{E}_1(\mathbf{q}) = F_*(E_1(\mathbf{p}))$$
$$\bar{E}_2(\mathbf{q}) = F_*(E_2(\mathbf{p}))$$

(شکل ۱۲.۶).

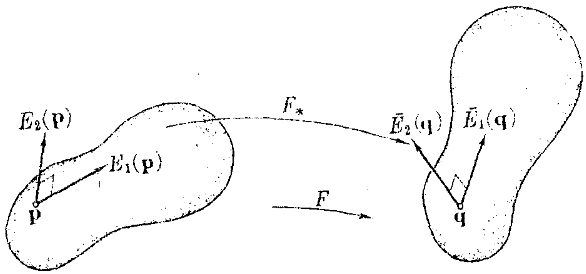
درعمل این فرمولها را تسامحاً به‌صورت اختصاری زیر می‌نویسیم

$$\bar{E}_1 = F_*(E_1), \quad \bar{E}_2 = F_*(E_2)$$

چون F_* حاصل‌ضرب نقطه‌ای را حفظ می‌کند:

$$\bar{E}_i \cdot \bar{E}_j = F_*(E_i) \cdot F_*(E_j) = E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$$

بنابراین $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ یك میدان سه‌وجهی روی $\bar{M}$ خواهد بود.



شکل ۱۲.۶

۳.۵ لم. گیریم $F : M \to \bar{M}$ یك ایزومتری، و E_1، E_2 یك میدان سه‌وجهی روی M باشد. اگر $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ میدان سه‌وجهی انتقالی روی $\bar{M}$ باشد، آنگاه

$$\theta_1 = F^*(\bar{\theta}_1),\ \theta_2 = F^*(\bar{\theta}_2) \quad (1)$$

$$\omega_{12} = (F^*\bar{\omega}_{12}) \quad (2)$$

برهان. (۱) کافی‌است ثابت‌کنیم که θ_i و $F^*(\bar{\theta}_i)$ روی E_1 و E_2 دارای مقادیر یکسان‌اند. اما به‌ازای $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ داریم

$$F^*(\bar{\theta}_i)(E_j) = \bar{\theta}_i(F_* E_j) = \bar{\theta}_i(\bar{E}_j) = \delta_{ij} = \theta_i(E_j)$$

(۲) معادلهٔ ساختاری $d\bar{\theta}_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\theta}_2$ را روی $\bar{M}$ درنظر می‌گیریم. اگر F^* را اعمال کنیم، آنگاه بنابرنتایج فصل ۴، بند ۵، خواهیم داشت

$$d(F^*\theta_1) = F^*(d\bar{\theta}_1) = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge F^*(\bar{\theta}_2)$$

ازآنجا بنابر(۱) داریم

$$d\theta_1 = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge \theta_2$$

معادلهٔ ساختاری دیگر

$$d\bar{\theta}_2 = \bar{\omega}_{21} \wedge \bar{\theta}_1$$

نیز معادلهٔ متناظری به‌دست می‌دهد، بنابراین

$$d\theta_1 = F^*(\bar{\omega}_{12}) \wedge \theta_2$$

$$d\theta_2 = F^*(\bar{\omega}_{21}) \wedge \theta_1$$

و (۲) مستقیماً از خاصیت یکتایی (لم ۱.۵) نتیجه می‌شود، زیرا

$$F^*(\bar\omega_{21}) = F^*(-\bar\omega_{12}) = -F^*(\bar\omega_{12})$$ ▮

با استفاده از این لم ساده به‌آسانی می‌توان برهانی برای قضیهٔ فوق‌العاده[1] و مشهور گاوس به‌دست داد.

۴.۵ قضیه. خمیدگی گاوسی، یك تغییرناپذیر ایزومتریك است؛ یعنی اگر $F: M \to \bar M$ یك ایزومتری باشد، آنگاه به‌ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M داریم

$$K(\mathbf{p}) = \bar K(F(\mathbf{p}))$$

برهان. به‌ازای هر نقطهٔ دلخواه $\mathbf{p}$ از M، یك میدان سه‌وجهی مماس E_1، E_2 متناظر به‌یك همسایگی $\mathbf{p}$ را انتخاب می‌کنیم، وآن را به‌وسیلهٔ F_* به $\bar E_1$، $\bar E_2$ روی $\bar M$ انتقال‌می‌دهیم. بنابر لم پیش داریم، $F^*(\bar\omega_{12}) = \omega_{12}$. طبق فرع ۳.۲، خواهیم داشت

$$d\bar\omega_{12} = -\bar K \bar\theta_1 \wedge \bar\theta_2$$

چون F^* را براین معادله اعمال‌کنیم، بنابرنتایج فصل ۴، بند ۵ به‌دست می‌آید

$$d(F^*\bar\omega_{12}) = F^*(d\bar\omega_{12}) = -F^*(\bar K)F^*(\bar\theta_1) \wedge F^*(\bar\theta_2)$$

که درآن $F^*(\bar K)$ چیزی جزتابع مرکب $\bar K(F)$ نیست. بدینسان بنابرلم پیش داریم

$$d\omega_{12} = -\bar K(F)\theta_1 \wedge \theta_2$$

از مقایسهٔ آن با $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$ نتیجه می‌شود $K = \bar K(F)$، ازاین‌رو به‌خصوص $K(\mathbf{p}) = \bar K(F(\mathbf{p}))$. ▮

قضیهٔ گاوس یکی ازاکتشافات بزرگ ریاضیات قرن نوزدهم است، وچنان‌که در فصل بعد خواهیم دید متضمن نتایج دامنه‌داری می‌باشد. مرحلهٔ اساسی در برهان، برمعادلهٔ ساختاری دوم، یعنی

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$$

مبتنی است. با اثبات لم ۱.۵ دیده می‌شود که همهٔ اجزای معادله را باستثنای K می‌توان ازخود M به‌دست آورد، بنابراین K نیز باید چنین باشد. این بدان معنی است که‌ساکنین $M \subset \mathbf{E}^3$ با وجود آنکه عموماً قادر به‌تعیین S نیستند و تصوری ازشکل M در $\mathbf{E}^3$ ندارند، می‌توانند خمیدگی گاوسی رویهٔ خود را بیابند.

مکانیسم فرمهای دیفرانسیلی بافراهم ساختن برهان صوری تغییرناپذیری ایزومتریك درقضیهٔ ۴.۵ این حدس را از ابهام بیرون می‌آورد. شاید این وضعیت جالب توجه را

---

1. theorema egregium

بتوان بافرمول $K = k_1 k_2$ به‌بهترین‌وجه توضیح داد: لزومی ندارد که ایزومتری، خمیدگیهای اصلی یا مجموع آنها را حفظ کند، بلکه باید حاصلضرب آنها را حفظ کند. بدینسان رویه‌های ایزومتریك با آنکه می‌توانند دارای اشکال کاملاً متفاوتی باشند، به‌هیچ وجه نامرتبط نیستند.

هر ایزومتری موضعی، همان‌طور که ثابت کردیم، روی همهٔ همسایگیهایی که به قدر کافی کوچك باشند یك ایزومتری است. بدینسان ازقضیهٔ ۲.۵ نتیجه می‌شود که ایزومتریهای موضعی خمیدگی‌گاوس را حفظ می‌کنند. به‌عنوان مثال، درمثال ۶.۴ صفحه واستوانه هردو دارای خمیدگی گاوسی $K = 0$ می‌باشند. (به‌همین‌علت، بی‌درنگ رویهٔ خمیدهٔ استوانه‌ای را «هموار» نامیدیم. در واقع استوانه به طور ذاتی به‌همان اندازهٔ صفحه هموار است.) درقسمت دوم مثال ۶.۴، هلیکوئید وکاتنوئید درنقاط متناظر

$$\mathbf{x}(u, v) \quad \text{و} \quad F(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{y}(u, v)$$

دقیقاً دارای یك خمیدگی گاوسی $-1/(1+u^2)^2$ می‌باشند (مثال ۳.۴ و ۴.۶ فصل ۵ را ببینید.)

روشن است که می‌توان از قضیهٔ فوق‌المعادهٔ گاوس برای اثبات آنکه رویه‌های مفروضی ایزومتریك نیستند استفاده کرد. به‌عنوان مثال، کرهٔ Σ (یاحتی ناحیهٔ بسیار کوچکی ازآن) نمی‌تواند با بخشی ازصفحه ایزومتریك باشد، زیرا خمیدگی گاوسی آنها متفاوت است. اشکال نقشه‌کشان نیزهمین است: هندسهٔ ذاتی سطح زمین با هیچ نقشهٔ مسطحی درست نمایش داده نمی‌شود.

بند بعدی جنبهٔ محاسباتی دارد، و تغییرناپذیرهای ایزومتریك دیگری را دربند ۷ خواهیم آورد.

تمرینات

۱. ژئودزیکها به‌هندسهٔ ذاتی تعلق دارند: اگر α یك ژئودزیك در M، و $F: M \to N$ یك ایزومتری (موضعی) باشد، آنگاه $F(\alpha)$ ژئودزیکی از N است. (راهنمایی: تمرین ۱، بند ۱، فصل ۶ را ببینید.)

۲. با استفاده از تمرین ۱ ژئودزیکهای استوانهٔ مستدیر را بیابید (مثال ۸.۵ فصل ۵). این مطلب را به‌استوانهٔ دلخواه تعمیم دهید.

۳. مقادیر خمیدگی گاوسی یك رویهٔ (همبند)، فاصله‌ای را می‌پوشانند. اگر یك ایزومتری موضعی از M به N وجود داشته باشد (به ویژه اگر M و N ایزومتریك باشند)، نشان‌دهید که فاصلهٔ خمیدگی M و N یکی است. با ذکرمثالی نشان دهید که عکس آن درست نیست.

۴. ثابت کنید که هیچ دوتایی از رویه‌های زیر ایزومتریك نیستند:

کره، چنبره، هلیکوئید، استوانهٔ مستدیر، رویهٔ زینی.

۵. خمانیدن هلیکوئید درون کاتنوئید (۶.۴). به ازای هر عدد t در فاصلهٔ $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$، نگاشت $\mathbf{x}_t : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^3$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_t(u, v) = \cos t(Sc, Ss, v) + \sin t(-Cs, Cc, u)$$

که در آن $C = \cosh u$، $S = \sinh u$، $c = \cos v$، و $s = \sin v$.

$\mathbf{x}_0$ یك قطعه مختصاتی است که هلیکوئید را می‌پوشاند، و $\mathbf{x}_{\pi/2}$ یك نمایش پارامتری کاتنوئید می‌باشد، $\mathbf{x}_0$ و $\mathbf{x}_{\pi/2}$ همان نمایشهای پارامتری معمول با اندکی تغییر می‌باشند، و در اینجا محور دوران کاتنوئید محور z است. اگر t را به عنوان زمان تصور کنیم، آنگاه $\mathbf{x}_t$ به‌ازای $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ معرف خمانیدن هلیکوئید M_0 درفضاست که آن را با عبور از یك خانوادهٔ کامل رویه‌های $M_t = \mathbf{x}_t(\mathbf{E}^2)$ روی کاتنوئید $M_{\pi/2}$ می‌برد. ثابت کنید.

(الف) M_t یك رویه است. (فقط نشان دهید که $\mathbf{x}_t$ منظم است.)

(ب) اگر $t < \pi/2$، آنگاه M_t باهلیکوئید M_0 ایزومتریك است. (نشان دهید که $F_t : M_0 \to M_t$ که در آن

$$F_t(\mathbf{x}_0(u, v)) = \mathbf{x}_t(u, v)$$

یك ایزومتری می‌باشد، و نیز نشان دهید که به ازای $t = \pi/2$، $F_{\pi/2}$ یك ایزومتری موضعی است.)

(ج) هر M_t یك رویهٔ مینیمال است. (با محاسبه نشان دهید که $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$)

(د) قائمهای یکه روی مدارها متوازی‌اند: درطول خم $t \to \mathbf{x}_t(u,v)$ که نقطهٔ $\mathbf{x}_0(u,v)$ را از M_0 به $M_{\pi/2}$ می‌برد قائمهای یکهٔ U_t رویه‌های متوالی، متوازی‌اند.

(ه) روی مدارها خمیدگی گاوسی ثابت است. ($K_t(\mathbf{x}_t(u,v))$ را که در آن K_t خمیدگی گاوسی M_t است، بیابید.)

در کتاب استروك [۶] این خمانیدن با یك رشته تصاویر روشن نشان داده شده است.

۶. نشان دهید که هر ایزومتری موضعی از هلیکوئید H به کاتنوئید C، چنان که در مثال ۶.۴ آمده است، باید محور H را بر روی دایرهٔ مینیمال C، و مولدهای H را بر روی نصف‌النهارات C ببرد. (با تمرین ۱۱، فصل ۶، بند ۴، مقایسه شود.)

۶. مختصات متعامد

چنان که دیدیم هندسهٔ ذاتی یك رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ را می‌توان برحسب فرمهای دوگان θ_1، θ_2 و فرم همبندی ω_{12} متناظر به یك میدان سه‌وجهی مماس E_1، E_2 بیان کرد. این فرمها در معادلات ساختاری اول:

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2$$
$$d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1$$

و معادلهٔ ساختاری دوم:

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$$

صدق می‌کنند. در این بند یك روش عملی برای محاسبهٔ این فرمها بیان می‌کنیم، واز آنجا روش جدیدی برای تعیین خمیدگی گاوسی M می‌یابیم.

نخست قطعه مختصاتی متعامد $\mathbf{x}: D \to M$ را درنظرمی‌گیریم، و برای این قطعه داریم $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$. چون $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ متعامدند، بنابراین از تقسیم آنها برطولهای $\|\mathbf{x}_u\| = \sqrt{E}$ و $\|\mathbf{x}_v\| = \sqrt{G}$ سه‌وجهیهایی ایجاد می‌شود.

۱.۶. تعریف. میدان سه‌وجهی وابسته به‌قطعه مختصاتی قائم $\mathbf{x}: D \to M$ عبارت است از میدانهای برداری یکهٔ متعامد E_1، E_2 که مقادیرآنها درهرنقطهٔ $\mathbf{x}(u, v)$ از $\mathbf{x}(D)$ برابر است با

$$\frac{\mathbf{x}_u(u, v)}{\sqrt{E}\,(u, v)} \quad \text{و} \quad \frac{\mathbf{x}_v(u, v)}{\sqrt{G}\,(u, v)}$$

در تمرین ۹ بند ۴ فصل۴، به‌هرقطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ توابع مختصاتی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ را وابسته کردیم؛ این‌توابع به‌هرنقطهٔ $\mathbf{x}(u, v)$ به‌ترتیب اعداد u و v را نسبت‌می‌دهند. مثلاً، برای قطعه مختصاتی جغرافیایی $\mathbf{x}$ درمثال ۲.۲ فصل۴، توابع مختصاتی عبارت‌اند ازتوابع طول و عرض جغرافیایی روی کرهٔ Σ. در حالت نهایی، یعنی هنگامی که $\mathbf{x}$ نگاشت همانی $\mathbf{E}^2$ است، توابع مختصاتی درست همان توابع مختصاتی‌طبیعی $u \leftarrow (u, v)$، $v \leftarrow (u, v)$ روی $\mathbf{E}^2$ می‌باشند.

در مورد قطعه مختصاتی‌متعامد $\mathbf{x}$ با میدان سه‌وجهی وابستهٔ E_1 و E_2، باید فرمهای θ_1، θ_2 و ω_{12} را برحسب توابع مختصاتی $\tilde{u}$، $\tilde{v}$ بیان‌کرد. نظر به‌اینکه $\mathbf{x}$ در سراسر بحث یکی است، خطرناشی ازحذف نگاشت معکوس $\mathbf{x}^{-1}$ را از نمادگذاری می‌پذیریم.

با این‌قرارداد، توابع مختصاتی $\tilde{u} = u(\mathbf{x}^{-1})$ و $\tilde{v} = v(\mathbf{x}^{-1})$ به‌طور ساده به‌صورت u و v نوشته می‌شوند، و به‌همین طریق $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ نیز میدانهای برداری مماس‌روی خود M را نشان می‌دهند. بدینسان میدان سه‌وجهی وابسته به $\mathbf{x}$ دارای عبارت خلاصهٔ زیر است

$$E_1 = \mathbf{x}_u/\sqrt{E} \qquad E_2 = \mathbf{x}_v/\sqrt{G} \tag{1}$$

اکنون با توجه به‌اینکه فرمهای دوگان θ_1، θ_2 با رابطهٔ $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$ مشخص می‌گردند، و در مسألهٔ مذکور در بالا نشان داده شده است که

$$du(\mathbf{x}_u)=1 \qquad d_v(\mathbf{x}_u)=0$$

$$du(\mathbf{x}_v)=0 \qquad dv(\mathbf{x}_v)=1$$

بدینسان از (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\theta_1=\sqrt{E}\,du \qquad \theta_2=\sqrt{G}\,dv \tag{۲}$$

با استفاده از معادلات ساختاری، فرمولهای مشابهی برای ω_{12} و K به‌دست می‌آوریم. یادآوری می‌کنیم که برای یك تابع f داریم $df=f_u du+f_v dv$ که در آن اندیسها نمایشگر مشتقهای جزئی‌اند. بنابراین از (۲) به‌دست می‌آید:

$$d\theta_1=d(\sqrt{E})\wedge du=(\sqrt{E})_v\, dv du=\frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\, du\wedge\theta_2$$

$$d\theta_2=d(\sqrt{G})\wedge dv=(\sqrt{G})_u\, du\, dv=\frac{-(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\, dv\wedge\theta_1$$

که در آن از دستور تناوبی ضرب گوه‌ای استفاده کرده و مقادیر $dv=\theta_2/\sqrt{G}$ و $du=\theta_1/\sqrt{E}$ را از (۲) به‌دست آورده‌ایم. از مقایسه با معادلات ساختاری اول

$$d\theta_2=-\omega_{12}\wedge\theta_1 \text{ و } d\theta_1=\omega_{12}\wedge\theta_2$$

نتیجه می‌شود که

$$\omega_{12}=\frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\, du+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\, dv \tag{۳}$$

طرز استدلال ساده است: بنابرمحاسبات بالا، این فرم در معادلات ساختاری اول صدق می‌کند، و بنابریکتایی (لم ۱.۵) باید همان ω_{12} باشد.

۲.۶. مثال. مختصات جغرافیایی روی کره. برای قطعهٔ مختصاتی جغرافیایی $\mathbf{x}$ در کرهٔ Σ (مثال ۲.۲، فصل ۴) به دست آوردیم $E=r^2\cos^2 v$، $F=0$، $G=r^2$. بدینسان بنابر فرمول (۲) در بالا، خواهیم داشت

$$\theta_1=r\cos v\, du \qquad \theta_2=r dv$$

وچون $(\sqrt{E})_v=-r\sin v$ و $(\sqrt{G})_u=0$، از این‌رو بنابر (۳) داریم

$$\omega_{12}=\sin v\, du$$

میدان سه‌وجهی وابسته به‌این قطعه مختصاتی همان است که در مثال ۶.۱ از میدان سه‌وجهی کروی در $\mathbf{E}^3$ به‌دست آمد. با تغییرنماد گذاری $u\to\vartheta$، $v\to\varphi$، فرمهای بالا نیز

(لزوماً) همان فرمهای مثال ۶.۱ می‌شوند. اما دراینجا آنها را به‌روش ساده‌تری مستقیماً برحسب خودرویه بدون توسل به‌هندسهٔ $\mathbf{E}^3$، محاسبه کرده‌ایم.

بالاخره بـرای خمیدگی گاوسی عبارت جدیدی به‌دست می‌آوریم. بدین‌نحـو از دیفرانسیلگیری خارجی ω_{12} که با رابطهٔ (۳) داده شده است حاصل می‌شود

$$d\omega_{12}=-((\sqrt{E})_v/\sqrt{G})_v\,dv\,du+((\sqrt{G})_u/\sqrt{E})_u\,du\,dv$$

از (۲) به‌دست می‌آید

$$\theta_1\wedge\theta_2=\sqrt{EG}\,du\,dv$$

بنابراین

$$-dv\,du=du\,dv=\frac{1}{\sqrt{EG}}\theta_1\wedge\theta_2$$

بدینسان فرمول بالا به‌صورت زیردرمی‌آید

$$d\omega_{12}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}\theta_1\wedge\theta_2$$

اکنون این رابطه را با معادلهٔ ساختاری دوم

$$d\omega_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2$$

مقایسه می‌کنیم.

۳.۶ لم. گیریم $\mathbf{x}:D\to M$ یك قطعه مختصاتی متعامد باشد، آنگاه خمیدگی گاوسی K برحسب $\mathbf{x}$ چنین است

$$K=\frac{-1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u+\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v\right\}$$

برخلاف فرمول K که در فـرع ۱.۴ فصل ۵ به‌دست آوردیم، در اینجا توابع l، m و n (که معرف عملگر شکلی می‌باشند) شرکت ندارند. درواقع چون K دراینجا فقط برحسب E، F و G بیان‌شده‌است، بااستفاده ازلم ۵.۴، برهان دیگری برای تغییرناپذیری خمیدگی گاوسی در ایزومتری به‌دست می‌آید.

در عمل به‌جای آنکه مستقیماً در فرمول بالا به‌جایگذاری بپردازیم، عموماً آسانتر است که درهرمورد روش استنتاج لـم ۳.۶ را تکرار کنیم. به‌عنوان مثال، بـرای صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$ نمایش پارامتری قطبی $\mathbf{x}(u,v)=(u\cos v,u\sin v)$ رادرنظرمی‌گیریم،

دراینجا داریم $E=1$، $F=0$ (بنابراین $\mathbf{x}$ متعامد است) و $G=u^2$. بدینسان بنابر(۲) خواهیم داشت $\theta_1 = du$ و $\theta_2 = u\,dv$، وچون

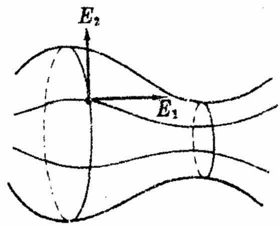
$$d\theta_1 = 0 \quad و \quad d\theta_2 = du\,dv = -dv \wedge \theta_1$$

ازآنجا $\omega_{12} = dv$ ودر نتیجه $d\omega_{12}=0$، و از اینجا هموار بودن $\mathbf{E}^2$ بار دیگر اثبات می‌شود.

۴.۶ مثال. میدان سه‌وجهی طبیعی یک‌رویهٔ دورانی. برای یک رویهٔ دورانی بـا نمایش پارامتری متعارف

$$\mathbf{x}(u,v) = (g(u),\, h(u)\cos v,\, h(u)\sin v)$$

میدان سه‌وجهی وابسته، از E_1 و E_2 به‌ترتیب درامتداد نصف‌النهارات و مدارات (شکل ۱۳.۶) تشکیل می‌شود.



شکل ۱۳.۶

چون $\mathbf{x}$ متعامد است، و $E=1$، $G=h^2$. بنابراین‌داریم $\theta_1 = du$ و $\theta_2 = h\,dv$.دراینجا h فقط تابع u است، بنابراین $h_v=0$، و h_u همان مشتق معمولی h' می‌باشد. از (۳)، یا ازراه محاسبهٔ مستقیم، خواهیم داشت $\omega_{12} = h'\,dv$، ازآنجا

$$d\omega_{12} = h''\,du\,dv = \frac{h''}{h}\,\theta_1 \wedge \theta_2$$

درنتیجـه خمیدگی‌گاوسی برابر است بـا $K=-h''/h$، که با نتایج لـم ۳.۶ فصل ۵ مطابقت دارد.

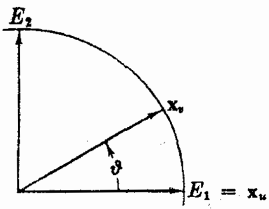
تمرينات

۰۱ مطلـوب است محاسبهٔ فرمهای دوگان، فـرم همبند، وخمیدگی‌گاوسی درمورد میدان سه‌وجهی وابسته به‌قطعه‌های مختصاتی متعامد زیر:

(الف) $\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$، هلیکوئید
(ب) $\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2/2)$، سهمیگون دورانی
(ج) $\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, au)$، مخروط

۲. گیریم قطعه مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ یک نگاشت همشکلی باشد. (دستگاه مختصاتی وابسته را دستگاه مختصاتی تکدما گویند.) ثابت کنید که:
(الف) $K = -\Delta(\log E)/2E$، که در آن Δ لاپلاسی است: $\Delta f = f_{uu} + f_{vv}$.
(ب) خمیدگی متوسط H برابر صفر است اگر، وفقط اگر، $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$.
(راهنمایی: از تمرین ۷، فصل ۶، بند ۴ استفاده کنید.)

۳. درمورد یک قطعه مختصاتی با $E = G = 1$، نشان دهید که $K = -\vartheta_{uv}/\sin\vartheta$، که در آن ϑ زاویهٔ مختصاتی است. (راهنمایی: درمورد میدان سه‌وجهی با $E_1 = \mathbf{x}_u$ مانند شکل ۱۴.۶، نشان دهید که $\theta_1 = du + \cos\vartheta\, dv$، $\theta_2 = \sin\vartheta\, dv$.)



شکل ۱۴.۶

۴. اگر $\mathbf{x}$ یک قطعه مختصاتی اصلی باشد (تمرین ۹، فصل ۵، بند ۴)، ثابت کنید که

(الف) $\omega_{13} = \dfrac{l}{\sqrt{E}}\, du$ (ب) $l_v = HE_v$

$\omega_{23} = \dfrac{n}{\sqrt{G}}\, dv$ $n_u = HG_u$

۵. استدلال متن را دقیقتر بیان کرده نشان دهید که معادلات (۲) و (۳) دقیقاً درست هستند، مشروط برآنکه درآنها به‌جای θ_1، θ_2 و ω_{12} عبارات مختصاتی

$$\mathbf{x}^*(\theta_1),\ \mathbf{x}^*(\theta_2),\ \mathbf{x}^*(\omega_{12})$$

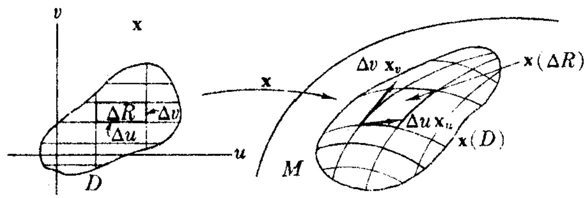
را جایگزین کرد.

۷. انتگرالگیری و جهتدهی

هدف اصلی این بند تعریف انتگرال یک ۲- فرمی روی یک‌رویهٔ جهتدار فشرده است. این

مفهوم به‌حساب انتگرال روی رویه‌ها (فصل ۴، بند ۶) تعلق دارد، و به‌هیچ‌وجه از آن هندسه نیست. اما، با بررسی چند مسألهٔ هندسی دراین‌باره به‌توضیح تعریف می‌پردازیم.

شاید ساده‌ترین کاربرد انتگرال‌دوگانه در هندسه، تعیین مساحت یك‌رویه باشد. برای آنکه تعریف مناسبی برای‌مساحت پیداکنیم،نخست قطعه مختصاتی $\mathbf{x}: D \to M$ را درنظر می‌گیریم و این سؤال را مطرح می‌کنیم که مساحت نگارهٔ آن، $\mathbf{x}(D)$ چه باید باشد؟ در D مستطیل مختصاتی کوچك ΔR به‌اضلاع Δu و Δv را درنظرمی‌گیریم. اکنون $\mathbf{x}$ مستطیل ΔR را به‌ناحیهٔ خمیدهٔ‌کوچك $\mathbf{x}(\Delta R)$ در M بدل می‌کند، این ناحیه با چهارقطعه از خمهای پارامتر، چنان‌که درشکل ۱۵.۶ نشان‌داده شده است، مشخص می‌شود.



شکل ۱۵.۶

قبلاً دیده شدکه تقریب خطی قطعه خمهایی‌که $\mathbf{x}(u, v)$ را به $\mathbf{x}(u+\Delta u, v)$ و $\mathbf{x}(u, v+\Delta v)$ می‌پیوندند به‌ترتیب برابر $\Delta u\, \mathbf{x}_u$ و $\Delta v\, \mathbf{x}_v$ می‌باشد (در نقطهٔ (u, v) محاسبه می‌شوند). بدینسان ناحیهٔ $\mathbf{x}(\Delta R)$ با متوازی‌الاضلاعی در $T_{\mathbf{x}(u,v)}(M)$ که این بردارها اضلاع آن می‌باشند تقریب می‌شود. مساحت این متوازی‌الاضلاع چنان‌که در فصل ۲، بند ۱، آمد برابراست با

$$\|\Delta u \mathbf{x}_u \times \Delta v \mathbf{x}_v\| = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \Delta u \Delta v = \sqrt{EG-F^2}\, \Delta u \Delta v$$

ازاینجا نتیجه می‌گیریم که مساحت $\mathbf{x}(\Delta R)$ باید تقریباً $\sqrt{EG-F^2}$ برابرمساحت مستطیل ΔR یعنی $\Delta u \Delta v$ باشد. عبارت آشنای $\sqrt{EG-F^2}$ معرف میزان انبساط‌مساحت به‌وسیلهٔ $\mathbf{x}$ در نقطهٔ (u, v) می‌باشد. بدینسان مساحت‌کل ناحیهٔ $\mathbf{x}(D)$ را می‌توان به‌طور طبیعی با

$$\iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

تعریف کرد.

البته امکان دارد که چنین انتگرالهایی ناسره باشند؛ برای اجتناب از این اشکال، مفهوم قطعه مختصاتی را اصلاح می‌کنیم.

۱.۷. تعریف. R° درون مستطیل $R: a \leqslant u \leqslant b$ ، $c \leqslant v \leqslant d$ عبارت است از مجموعهٔ باز $a < u < b$ ، $c < v < d$. یك ۲-قطعه‌ای $\mathbf{x}: R \to M$ را هنگامی شبه قطعه مختصاتی نامند که نگاشت تخصیص‌یافتهٔ $\mathbf{x}: R^\circ \to M$ یك قطعه مختصاتی در M باشد.

بنا بر توضیحی که قبل از لم ۳.۷، فصل ۴ آمد، $0 \leqslant \sqrt{EG-F^2}$ روی R کراندار است و در نتیجه مساحت $\mathbf{x}(R)$ متناهی خواهد بود.

لزومی ندارد که شبه‌قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای $\mathbf{x}: R \to M$ روی مرز R یك به‌یك باشد، بنا براین نگارهٔ آن می‌تواند زیاد هم مستطیلی‌شکل نباشد. درواقع هم‌اکنون خواهیم دید که اغلب می‌توان مساحت کل یك رویهٔ فشرده را با پوشاندن آن به‌وسیلهٔ تنها یك ۲-قطعه‌ای محاسبه کرد.

۲.۷. مثال. مساحت رویه‌ها

(۱) کرهٔ Σ به شعاع r. اگر فرمولی را که قطعه مختصاتی جغرافیایی را تعریف می‌کند برمستطیل $R: -\pi \leqslant u \leqslant \pi$ ، $-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$ اعمال کنیم، یك ۲-قطعه‌ای که همهٔ کره را می‌پوشاند به‌دست می‌آید. دراینجا

$$E = r^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad \text{و} \quad G = r^2$$

بنا براین

$$\sqrt{EG - F^2} = r^2 \cos v$$

و بدینسان مساحت کره برابر است با

$$A(\Sigma) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos v \, du \, dv = 4\pi r^2$$

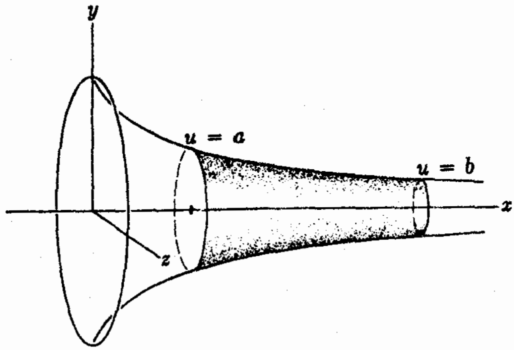
(۲) چنبرهٔ T به‌شعاعهای $0 < r < R$. از مثال ۶.۲، فصل ۴ می‌توان یك شبه قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای به‌دست آورد که چنبره را بپوشاند. دراینجا

$$\sqrt{EG - F^2} = r(R + r \cos u)$$

بنا براین مساحت برابر است با

$$A(T) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(R + r \cos u) \, du \, dv = 4\pi^2 Rr$$

(۳) رویهٔ شیپوری (مثال ۶.۶، فصل ۵). هر رویهٔ دورانی M دارای یك نمایش پارامتری متعارف با $E = 1$ ، $F = 0$ ، $G = h^2$ است. روی هر مستطیل $R: a \leqslant u \leqslant b$ ، و $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ ، $\mathbf{x}$ یك شبه‌قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای است که نگارهٔ آن ناحیه‌ای از M است که بین مدارات $u = a$ و $u = b$ واقع می‌باشد (شکل ۱۶.۶). بدینسان مساحت این ناحیه برابر است با



شکل ۱۶.۶

$$A_{ab}=\int_a^b\int_0^{2\pi} h\,du\,dv=2\pi\int_a^b h\,du$$

درفصل ۵ دیدیم که درمورد رویهٔ شیپوری داریم $h(u)=ce^{-u/c}$، از آنجا

$$A_{ab}=2\pi c\int_a^b e^{-u/c}\,du$$
$$=2\pi c^2(e^{-a/c}-e^{-b/c})$$

برای تعیین مساحت کل شیپور، که رویه‌ای نـافشرده است، این ناحیه را با درنظر گرفتن $a\to 0$ و $b\to\infty$ گسترش می‌دهیم.

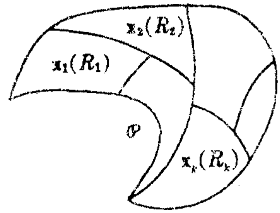
بدینسان (تبصرهٔ ۶.۷ را ببینید) مساحت رویهٔ شیپوری متناهی وبرابر است با

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} A_{ab}=2\pi c^2$$

برای تعیین مساحت یك ناحیهٔ پیچیده سعی نخواهیم کرد که تنها یك‌شبه‌قطعه‌مختصاتی ۲ـقطعه‌ای را برآن تطبیق دهیم. درعوض با پیروی از طرح معمول در حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی، ناحیهٔ مزبور را به‌اجزای ساده‌ای تقسیم وسپس مساحت آنها را جمع می‌کنیم.

۳.۷. تعریف. پوشش فـرشی نـاحیهٔ $\mathcal{P}$ در M عبارت است از تعداد متناهی از شبه قطعه مختصاتی ۲ـقطعه‌ای $\mathbf{x}_1$، ...، $\mathbf{x}_k$ که نگاره‌های آنها $\mathcal{P}$ را بپوشانند، به‌طوری‌که هرنقطه‌از $\mathcal{P}$ حداکثر به‌یك مجموعهٔ $\mathbf{x}_i(R_i^\circ)$ متعلق باشد.

به اختصـار، نگـاره‌هـای $\mathbf{x}_i$هـا دقیقـاً $\mathcal{P}$ را می‌پوشاننـد، و تنها در مرزهایشان



شکل ۱۷.۶

همپوش‌اند (شکل ۱۷.۶).

هر ناحیه‌ای فرشپذیر نیست، زیرا تعداد x_iها متناهی است، و از این‌رو شرط فشردگی قطعاً ضروری می‌باشد. (تعریف ۲.۷، فصل ۴) دراینجا بدون هیچ اشکالی این نکته را می‌پذیریم کـه هر ناحیهٔ فشرده‌ای که مرز آن از تعداد متناهی قطعه خمهای منظم تشکیل شده باشد فرشپذیر است. به‌ویژه، همواره تمام یك رویهٔ فشرده فرشپذیر است[1]. مساحت یك ناحیهٔ فرشپذیر $\mathcal{P}$ بـا مجموع مساحتهای $x_1(R_1)$، ...، $x_k(R_k)$ به‌ازای یك پوشش فرشی $\mathcal{P}$ تعریف می‌شود. (مسألهٔ سازگاری مربوطه درذیل تعریف مشابه ۵.۷ مورد بحث قرارخواهد گرفت.)

از بیانی که گذشت دیده می‌شود که در محاسبهٔ مساحت نیازی به‌فرمهای دیفرانسیلی نیست، اما با انتگرالگیری ۲-فرمیها (تعریف ۳.۶، فصل ۴) علاوه بـر مساحت، چیزهای بسیاری نیز به‌دست می‌آیند. نخستین سؤال این است که: ازکدام ۲-فرمی باید روی یـك شبه‌قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای x انتگرال گرفت تا مساحت نگارهٔ آن به‌دست آید؟ بنا بر تعریف:

$$\iint_x \mu = \iint_R \mu(x_u, x_v)\, du\, dv$$

بدینسان مقدار ۲-فرمی مطلوب روی x_u، x_v باید برابر

$$\|x_u \times x_v\| = \sqrt{EG-F^2}$$

باشد. به‌طور کلی، ۲-فرمی μ را به‌گونه‌ای که به‌ازای هر v و w تساوی

$$\mu(v, w) = \pm\|v \times w\|$$

برقرار باشد، یك فرم مساحت می‌نامند. چنین فرمی به‌هرزوج بردارهای مماس v، w مساحت متوازی‌الاضلاع به‌ضلعهای v و w را با علامت مثبت یا منفی نسبت می‌دهد.

۴.۷ لم. شرط لازم و کافی برای آنکه رویهٔ M دارای فرم مساحت باشد، آن است کـه جهتپذیر باشد. روی هر رویهٔ جهتپذیر (همبند) M دقیقاً دو فرم مساحت وجود دارد، کـه مساوی ومختلف‌العلامه‌اند. (آنها را با dM و $-dM$ نشان می‌دهیم.)

برهان. اگر v و w استقلال خطی داشته باشند، آنگاه $\|v \times w\| > 0$، بدینسان فرمهای مساحت هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند. از این‌رو بنا بـرتعریف ۴.۷، فصل ۴، رویـهٔ جهتناپذیر نمی‌تواند دارای فرم مساحت باشد.

اکنون فرض کنیم که M یك رویهٔ جهتپذیر در E^3 باشد. برهان قضیهٔ ۵.۷، فصل ۴

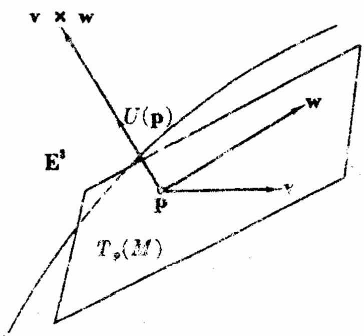
[1] توضیحات ومرجع ذیل قضیهٔ ۵.۸، فصل ۷ را ببینید.

یك تناظر یك بـه‌یك بین میدانهای برداری قائم روی M و ۲-فرمیهای روی M برقرار می‌کنند. اگر U یك قائم یکه باشد، آنگاه ۲-فرمی وابستهٔ dM یك فرم مساحت است،زیرا

$$dM(\mathbf{v},\ \mathbf{w})=U(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\pm\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$$

(در شکل ۱۸۰۶ این عدد مثبت است،زیرا $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ و $U(\mathbf{p})$ همسو می‌باشند،اما اگر جای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را با هم عوض کنیم، عددی با علامت منفی به‌دست می‌آید.)

بدینسان دو میدان برداری قائم یکه روی M، دو فرم مساحت dM و $-dM$ را روی M معین می‌کنند. ∎



شکل ۱۸۰۶

برای جهتدارکردن یك‌رویهٔ جهتپذیر باید یکی از فرمهای مساحت را انتخاب کرد، زیرا، این عمل با انتخاب یکی از قائمهای یکهٔ آن معادل است.

تعیین مساحت را واقعاً نمی‌توان یك مسألهٔ نمونهٔ انتگرالگیری به‌حساب آورد، زیرا مساحت همواره مثبت است. بدینسان برای تعیین مساحت بـه‌وسیلهٔ انتگرالگیری از فرم مساحت، باید در موردعلامت دقت کرد. فرض کنیم $\mathbf{x}$ یك شبه‌قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای در رویه‌ای باشدکه بافرم مساحت dM جهتدار شده است. بنا بر تعریف،

$$\iint_{\mathbf{x}} dM=\iint_R dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)\,du\,dv$$

دراینجا دو حالت وجود دارد:

(۱) اگر $dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)>0$، گوییم که $\mathbf{x}$ به‌طور مثبت جهتدار شده است. در این صورت بنابر تعریف فرم مساحت داریم،

$$dM(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)=\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|$$

از این‌رو $\iint_{\mathbf{x}} dM$ برابر مساحت $\mathbf{x}(R)$ است.

(۲) اگر $dM(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) < 0$، گوییم که $\mathbf{x}$ به‌طور منفی جهتدار شده است. در این صورت

$$dM(\mathbf{x}_u ,\mathbf{x}_v) = -\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$$

از این‌رو $\iint_{\mathbf{x}} dM$ برابر مساحت $\mathbf{x}(R)$ با علامت منفی است.

بدینسان برای آنکه مساحت یك ناحیهٔ جهتدار شدهٔ فرشپذیر را با انتگرالگیری از فرم مساحت انتخاب شده بیابیم، نمی‌توان از پوشش فرشی دلخواه استفاده کرد، پوشش فرشی مزبور باید به طور مثبت جهتدار شده باشد، یعنی، تنها از شبه‌قطعه‌های مختصاتی ۲-قطعه‌ای که به‌طور مثبت جهتدار شده‌اند تشکیل گردد. آنگاه

$$A(\mathcal{P}) = \sum_i A(\mathbf{x}(R_i)) = \sum_i \iint_{\mathbf{x}_i} dM$$

اکنون به‌جای فرم مساحت، یك ۲-فرمی دلخواه قرار می‌دهیم تا تعریفی راکه جستجو می‌کنیم بیابیم.

۵.۷ تعریف. گیریم ν یك ۲-فرمی روی یك ناحیهٔ جهتدار فرشپذیر $\mathcal{P}$ از رویه‌ای باشد. انتگرال ν روی $\mathcal{P}$ عبارت است از

$$\iint_{\mathcal{P}} \nu = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\mathbf{x}_i} \nu$$

که در آن $\mathbf{x}_1$، ...، $\mathbf{x}_k$ یك پوشش فرشی $\mathcal{P}$، با جهتدهی مثبت است.

در این تعریف یك مسألهٔ سازگاری مطرح است: باید نشان داد که برای مجموع طرف دوم به‌ازای دو پوشش فرشی متمایز $\mathcal{P}$ با جهتدهی مثبت، یك مقدار به‌دست می‌آید. برهان دقیق آن تا اندازه‌ای طولانی است، طرح کلی آن در صفحهٔ ۱۰۳ کتاب هیکس [۵] آمده است.

چون رویه‌های فشرده فرشپذیرند، تعریف بالا انتگرال هر ۲-فرمی را به‌ویژه روی یك رویهٔ فشرده جهتدار به‌دست می‌دهد.

۶.۷ تبصره. انتگرالهای ناسره. مساحت وانتگرال فرمها درمورد رویه‌های فشرده تعریف شد، اما مفهوم مساحت را می‌توان به‌آسانی برای هر رویهٔ نافشردهٔ N تعمیم داد. مساحت N را باکوچکترین کران بالای مجموعهٔ همهٔ مساحتهای نواحی فرشپذیر $\mathcal{P}$ در N تعریف می‌کنیم:

$$A(N) = \mathrm{l.u.b.}\, A(\mathcal{P})$$

بدینسان اگر کران بالا متناهی نباشد، داریم $A(N) = +\infty$.

بر‌عکس، عموماً نمی‌توان به‌انتگرال ناسرهٔ $\iint_N f\,dN$ یك مقدار متناهی یا نامتناهی نسبت داد. اما درحالت خاص $f \geqslant 0$، می‌توان به‌همان روش تعیین مساحت‌عمل کرد؛ قرار می‌دهیم

$$\iint_N f\,dN = \text{l. u. b.} \iint_{\mathscr{P}} f\,dN \quad (\text{ناحیه‌ای فرشپذیر از } N \;\; \mathscr{P})$$

درحالت $f \geqslant 0$، بزرگترین‌کران پایین را درنظر می‌گیریم. بدینسان ممکن است‌که در این دوحالت مقادیر $+\infty$ و $-\infty$ به‌دست آید. اکنون گیریم $\mathscr{P}_1$، $\mathscr{P}_2$، ... دنباله‌ای از نواحی فرشپذیر در N باشد، به‌طوری‌که $\mathscr{P}_i$ مشمول در $\mathscr{P}_{i+1}$ بوده، وهرناحیهٔ فرشپذیر از N مشمول دریکی از $\mathscr{P}_i$ها باشد. دراین‌صورت نتیجه می‌شود که

$$\lim_{i\to\infty} \iint_{\mathscr{P}_i} f\,dN = \iint_N f\,dN$$

(برای این منظور ازنکته‌ای‌که درمورد مساحت در (۳)، مثال ۲.۷ آمد استفاده می‌کنیم.)

اگر $\mathscr{P}$ ناحیه‌ای‌فرشپذیر در رویهٔM که با dM جهتدارشده‌است‌باشد، چنان‌که دیدیم $\iint_{\mathscr{P}} dM$ مساحت $\mathscr{P}$ را نشان می‌دهد. به‌طورکلیتر، $\iint_{\mathscr{P}} f\,dM$ انتگرال تابع f را روی $\mathscr{P}$ به‌دست می‌دهد، که شباهت واضحی با انتگرال معمولی $\int_a^b f\,dx$ درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی دارد. اکنون یکی ازکاربردهای هندسی مهم این مطلب را مورد توجه قرار می‌دهیم.

۷.۷. تعریف. گیریم K خمیدگی گاوسی‌رویهٔ M و $\mathscr{P}$ ناحیه‌ای فرشپذیر از M باشدکه با dM جهتدار شده است. آنگاه برای ناحیهٔ $\mathscr{P}$ عدد

$$\iint_{\mathscr{P}} K\,dM$$

را خمیدگی گاوسی کل $\mathscr{P}$ می‌نامند.

هنگامی‌که $\mathscr{P}$ تمام یك‌رویهٔ فشردهٔ جهتدار M باشد،خمیدگی گاوسی‌کل M به‌دست می‌آید. خمیدگی کل، یك مجموع جبری است: خمیدگی منفی در یك‌جا، ممکن است خمیدگی مثبت درجای دیگر را حذف کند.

برای محاسبهٔ خمیدگی کل، بنابرتعریف ۵.۷ کافی است بدانیم چگونه از ۲-فرمی $K\,dM$ روی شبه قطعه‌های مختصاتی ۲-قطعه‌ای انتگرال بگیریم. اما با نمادگذاری معمول $\mathbf{x}: R \to M$ داریم

$$\iint_{x} K\, dM = \iint_{R} \mathbf{x}^*(K\, dM)$$
$$= \iint_{R} K(\mathbf{x})\mathbf{x}^*(dM) = \int_a^b \int_c^d K(\mathbf{x})\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

آنگاه $K(\mathbf{x})$ را می‌توان صریحاً با استفاده از فرع ۱.۴ فصل ۵ یا لم ۳.۶ محاسبه کرد. خوشبختانه مسائل مربوط به‌جهت‌دهی در اینجا خود به‌خود حل می‌شوند، تمرین ۴ (ج) را ببینید.

۸.۷. مثال. خمیدگی کل چند رویه

(۱) **خمیدگی ثابت.** اگر خمیدگی گاوسی M ثابت باشد، آنگاه خمیدگی کل آن برابر است با

$$\iint_{M} K\, dM = K \iint_{M} dM = K\, A(M)$$

بدینسان کره‌ای به‌شعاع r دارای خمیدگی کل 4π است (زیرا $K\,A(M)$ به‌صورت $(4\pi r^2)\,(1/r^2)$ درمی‌آید)، و رویهٔ شیپوری دارای خمیدگی کل $2\pi-$ است (زیرا $K\,A(M)$ به‌صورت $(2\pi c^2)\,(-1/c^2)$ درمی‌آید).

(۲) **چنبره.** روی چنبرهٔ T، ۲-قطعه‌ای $\mathbf{x}$ مذکور درمثال ۲.۷ را درنظر می‌گیریم. فرم مساحت dT بنابر مثال مزبور دارای عبارت مختصاتی

$$\mathbf{x}^*(dT) = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = r(R+r\cos u)\, du\, dv$$

است. اما درمثال ۱.۶، فصل ۵، به‌ازای همین $\mathbf{x}$ محاسبه شد که

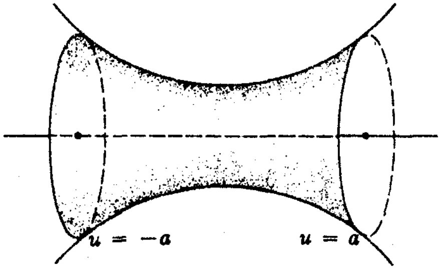
$$K(\mathbf{x}) = \frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}$$

بنابراین، خمیدگی کل چنبره چنین است

$$\iint_{T} K\, dT = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos u\, du\, dv = 0$$

بدینسان روی چنبره خمیدگی منفی نیمهٔ داخلی آن دقیقاً با خمیدگی مثبت نیمهٔ خارجی برابری می‌کند، و خمیدگی کل صفر می‌شود.

(۳) **کاتنوئید.** این رویه فشرده نیست، و مساحت آن بینهایت است، باوجود این خمیدگی کل آن، بنابر تبصرهٔ بالا که به‌صورت انتگرال ناسره درنظر گرفته می‌شود، متناهی است. روی مستطیل $R: -a \leqslant u \leqslant a,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$، نمایش پارامتری مذکور در مثال ۱.۶، فصل ۵ به‌صورت یك شبه قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای درمی‌آید که ناحیهٔ بین



شکل ۱۹.۶

مدارات $u=-a$ و $u=a$ را می‌پوشاند (شکل ۱۹.۶). ازمثال ۱.۶ فصل ۵، به‌دست‌می‌آید

$$K(\mathbf{x})=\frac{-۱}{c^۲\cosh^۴\left(\frac{u}{c}\right)}$$

و

$$\mathbf{x}^*(dM)=\sqrt{EG}\,du\,dv=c\cosh^۲\left(\frac{u}{c}\right)$$

بنابراین ناحیهٔ مزبور دارای خمیدگی کل زیر است

$$\iint_{\mathbf{x}} K\,dM=-\int_{-a}^{a}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{du\,dv}{c\cosh^۲\left(\frac{u}{c}\right)}=-۴\pi\tanh\left(\frac{a}{c}\right)$$

هنگامی که $a\to\infty$، این ناحیه توسعه می‌یابد وتمام رویه‌را فرا می‌گیرد، بدینسان خمیدگی کل کاتنوئید برابر است با

$$\iint_{M} K\,dM=-۴\pi\lim_{a\to\infty}\tanh\left(\frac{a}{c}\right)=-۴\pi$$

خمیدگیهای کل که در بالا محاسبه شد عبارت‌اند از ۴π، $۲\pi-$، ۰ و $۴\pi-$، که مجموعهٔ نسبتاً خاصی از اعداد است. علاوه براین، هیچ کدام به «اندازهٔ» خاص رویهٔ خود (شعاع r، ثابت c،...) بستگی ندارد. در این باره توضیح مختصری در فرع ۱۰.۷ آمده است؛ در فصل ۷، بند ۸ به‌تعمق بیشتری می‌پردازیم.

گیریم $F:M\to N$ یك نگاشت رویه‌های جهتدار باشد، در این صورت J، ژاکوبی F، عبارت است ازیك تابع بامقدار حقیقی روی M به‌طوری که

$$F^*(dN)=J\,dM$$

تعبیر هندسی J را می‌توان با بحثی همانند آنچه در آغاز این بند در حالت خاص آمد به‌دست آورد. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دو بردار مماس بسیار کوچك در نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M باشند، در $T_p(M)$ متوازی‌الاضلاعی ایجاد می‌کنندکه تقریبی از یك ناحیهٔ کوچك ΔM از M می‌باشد. ویژگی نگاشت مشتق یعنی F_* به‌گونه‌ای است که $F_*(\mathbf{v})$ و $F_*(\mathbf{w})$ اضلاع متوازی‌الاضلاعی در $T_{F(p)}(N)$ می‌باشند به طوری که این متوازی‌الاضلاع تقریبی است از $F(\Delta M)$ ناحیهٔ نگاره، چنان‌که در شکل ۲۰.۶ نشان داده شده است. بنابر تعریف ژاکوبی خواهیم داشت

$$J(\mathbf{p})\, dM(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (F^* dN)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = dN(F_*\mathbf{v}, F_*\mathbf{w}) \qquad (*)$$

از طرف دیگر $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$ تقریباً برابرمساحت ΔM (و مشابه‌آن برای $F(\Delta M)$) است. از این‌رو با گرفتن قدرمطلق خواهیم داشت

$$|J(\mathbf{p})|\,(\Delta M \text{ مساحت}) \sim F(\Delta M) \text{ مساحت}$$

بدینسان $|J(\mathbf{p})|$ میزان انبساط مساحت در $\mathbf{p}$ را، که به‌وسیلهٔ F به‌وجود می‌آید، به‌دست می‌دهد. علاوه براین اگر ΔM به‌طور مثبت جهتدار شده باشد، یعنی $dM(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$، آنگاه (*) نشان می‌دهد که علامت $dN(F_*\mathbf{v}, F_*\mathbf{w})$ همان علامت $J(\mathbf{p})$ است. بدینسان علامت $J(\mathbf{p})$ نشان می‌دهد که F جهتدهی ΔM را حفظ کرده یا معکوس می‌کند.

بدینسان عدد

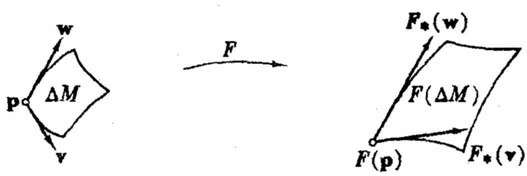
$$\iint_M J\, dM = \iint_M F^*(dN)$$

را مساحت جبری $F(M)$ می‌نامیم. بحث بالا نشان می‌دهد که، به‌طور اجمالی، هر ناحیهٔ کوچك ΔM از M مساحت جبری نگارهٔ خود یعنی $F(\Delta M)$ را به‌این جمع کل به شرح زیر می‌افزاید:

(۱) باعلامت مثبت، اگر جهتدهی $F(\Delta M)$ با جهتدهی N مطابقت داشته باشد،

(۲) با علامت منفی، اگر این جهتدهیها مطابقت نداشته باشند (بنابراین F، ΔM را واژگون کرده است)،

(۳) با مقدار صفر، اگر F، ΔM را به‌یك خم یا یك نقطه تبدیل کند.



شکل ۲۰.۶

اکنون بـه تعبیر این مطلب در حالت نگاشت گاوس (تمـرین ۴، بند ۱، فصل ۵) می‌پردازیم.

۹.۷. قضیه. K خمیدگـی گاوسی رویهٔ جهتدار $M \subset \mathbf{E}^3$ بـرابـر با ژاکوبی نگاشت گاوسی آن $G: M \to \Sigma$ است.
(در اینجا Σ کرهٔ یکه است، که با قائم برون سوی $\bar{U}$ یا فرم مساحت $d\Sigma$ متناظـر جهتدار شده است.)

برهان. اگر $U = \sum g_i U_i$ قائم یکه‌ای باشد که M را جهتدار کند، آنگاه نگاشت گاوس متناظر با آن عبارت خواهد بود از $G = (g_1, g_2, g_3)$. توجه شود کـه اگر S عملگـر شکلی رویهٔ M باشد که از U به‌دست می‌آید، آنگاه

$$-S(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} U = \sum \mathbf{v}[g_i] U_i(\mathbf{p})$$

و بنا بر قضیهٔ ۵.۷، فصل ۱ داریم،

$$G_*(\mathbf{v}) = \sum \mathbf{v}[g_i]\, U_i(G(\mathbf{p}))$$

بنابراین $G_*(\mathbf{v})$ و $-S(\mathbf{v})$ به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر M موازی‌اند، چنان که در شکل ۲۱.۶ نشان داده شده است.

برای اثبات قضیه باید نشان داد که

$$K\, dM = G^*(d\Sigma)$$

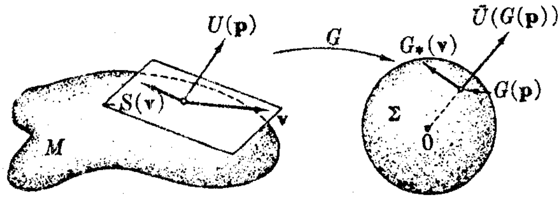
ازاین‌رو به‌محاسبهٔ این ۲-فرمیها روی یک زوج دلخواه بردارهای مماس بر M می‌پردازیم. با استفاده از لم ۴.۳، فصل ۵ داریم،

$$(K\, dM)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = K(\mathbf{p})\, dM(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = K(\mathbf{p}) U(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
$$= U(\mathbf{p}) \cdot S(\mathbf{v}) \times S(\mathbf{w})$$

ازطرف دیگر

$$(G^* d\Sigma)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d\Sigma(G_*\mathbf{v}, G_*\mathbf{w}) = \bar{U}(G(\mathbf{p})) \cdot G_*\mathbf{v} \times G_*\mathbf{w}$$

اما حاصل‌ضرب مختلط سه بردار فقط به‌مختصات اقلیدسی بردارهای مزبور بستگی دارد، بنابراین می‌توان به‌جای $G_*(\mathbf{v})$ و $G_*(\mathbf{w})$، بردارهای $-S(\mathbf{v})$ و $-S(\mathbf{w})$ را کـه با آنها موازی‌اند قـرار داد. علاوه براین، بنا برتعریف G و خصوصیت ویژهٔ کرهٔ یکهٔ Σ، بـردارهای $U(\mathbf{p})$ و $U(G(\mathbf{p}))$ نیز موازی‌انـد (شکل ۲۱.۶). بدینسان دوحاصل‌ضرب مختلط بالا باهم برابرند، و اثبات پایان می‌یابد. ∎



شکل ۲۱.۶

۱۰.۷. فرع. خمیدگی گاوسی کل رویهٔ جهتدار $M \subset \mathbf{E}^3$ برابر است با مساحت $G(M)$ نگارهٔ آن در نگاشت گاوس $G : M \longrightarrow \Sigma$.

برای اثبات کافی است که ازفرم

$$K\, dM = G^*(d\Sigma)$$

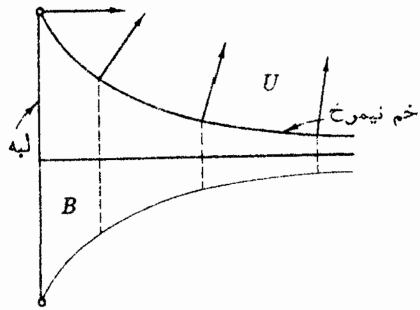
روی M انتگرال بگیریم.

هنگامی که نگاشت $F : M \longrightarrow N$، M را روی ناحیه‌هایی از N، چندبار تا کند، مساحت جبری دشواریهایی را موجب می‌شود. ازاین‌رو در عمل، حالت خاصی از قضیهٔ ۱۰.۷ که در زیر می‌آید و متضمن مساحت عادی است ساده‌تر می‌باشد.

۱۱.۷. فرع. اگر $\mathcal{R}$ ناحیه‌ای جهتدار از $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، به‌طوری‌که روی آن (۱) نگاشت گاوس G یك به‌یك باشد(U درنقاط مختلف $\mathcal{R}$ متوازی‌نیست)، و (۲) یا $K \geqslant 0$ یا $K \leqslant 0$، آنگاه خمیدگی کل $\mathcal{R}$ برابر است با مساحت $G(\mathcal{R})$ با علامت مثبت یا منفی، یعنی همان علامت K. علاوه براین مساحت مزبور از 4π تجاوز نمی‌کند.

(برای اثبات از انتگرالهای ناسره استفاده می‌شود.) به عنوان مثال، نگاشت گاوس یك چنبرهٔ جهتدار را درنظر می‌گیریم. دراینجا G دایره‌های فوقانی و تحتانی T را (که در آنها $K = 0$) بـه قطبهای شمالی و جنوبی Σ تبدیل می‌کند. اگر، مانند شکل ۲۱.۵، $\mathcal{O}$ و $\mathcal{J}$ نیمه‌های بیرونی و درونی T باشند، آنگاه G ناحیهٔ $\mathcal{O}$ را (که در آن $K \geqslant 0$) به‌طور یك به‌یك روی همهٔ کرهٔ Σ می‌نگارد. و درمورد ناحیهٔ $\mathcal{J}$ (که درآن $K \leqslant 0$) نیز به‌همین‌نحو عمل‌می‌کند. بدینسان T دارای‌خمیدگی کل $+A(\Sigma) - A(\Sigma) = 0$ می‌باشد، و این همان نتیجه‌ای است که درمثال ۸.۷ مستقیماً با انتگرالگیری به‌دست آمد.

به‌عنوان مثال دیگر، نشان می‌دهیم که تمام رویهٔ شیپوری B درفرضهای فرع ۱۱.۷ صدق می‌کند. در واقع چنان که در شکل ۲۲.۶ دیـده می‌شود، نگاشت گاوس خم نیمرخ آن‌را به‌طور یك‌به‌یك روی ربع یك‌دایرهٔ عظیمه از Σ می‌نگارد. بدینسان با حرکت‌دادن U روی مدارات B، دیده می‌شود که G یك نگاشت یك‌به‌یك از B روی یك نیمکرهٔ باز (بدون نقطهٔ مرکزی آن، زیرا رویهٔ B شامل لبه نیست) است. بدینسان خمیدگی کل‌شیپور



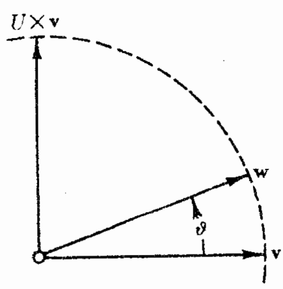
شکل ۲۲.۶

برابر است با $-A(\Sigma)/۲ = -۲\pi$. علاوه براین، چون شیپور دارای خمیدگی ثابت است، می‌توان مساحت آن‌را بدون انتگرالگیری به‌دست آورد: خمیدگی کل یعنی -۲π را برخمیدگی (ثابت) $K = -۱/c^۲$ تقسیم می‌کنیم و مساحت برابر $۲\pi c^۲$ به دست می‌آید، چنان‌که درمثال ۲.۷ نیز پیدا کردیم.

ابهامی را که دربارهٔ اندازه‌گیری زوایا درفصل ۲، بند ۱ بیان‌کردیم، می‌توان در مورد رویه‌های جهتدار برطرف‌کرد. اگر رویه، با قائم یکهٔ U جهتدار شده باشد، آنگاه به ازای هربردار مماس $\mathbf{v}$ بر M، بردار $U \times \mathbf{v}$ یك بردار مماس عمود بر $\mathbf{v}$ خواهد بود. $U \times \mathbf{v}$ را به‌صورت برداری‌که از دوران $\mathbf{v}$ بداندازهٔ $+۹۰^\circ$ به دست آمده است درنظر می‌گیریم. آنگاه اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ دوبردار مماس یکه دریك نقطه از M باشند، زاویهٔ جهتدار از $\mathbf{v}$ به $\mathbf{w}$ را با عدد ϑ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{w} = \cos\vartheta\, \mathbf{v} + \sin\vartheta (U \times \mathbf{v})$$

(شکل ۲۳.۶). بدینسان همهٔ زوایای جهتدار از $\mathbf{v}$ به $\mathbf{w}$ به‌صورت $\vartheta + ۲n\pi$ می‌باشند، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. (همین‌طرح را می‌توان درمورد هرزوج بردار مماس غیرصفر به‌کار برد: کافی است آنها را بر نرمشان تقسیم‌کنیم تا بردارهای یکه به‌دست آیند.)



شکل ۲۳.۶

سازگاری، جوهر جهتپذیری است ــ در بررسی رویه‌ای که به وسیلهٔ فرم مساحت dM جهتدار شده است همواره قطعه‌های مختصاتی با جهتدهی مثبت $dM(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) > ۰$ و میدانهای سه‌وجهی با جهتدهی مثبت را که به‌ازای آنها

$$dM(E_۱, E_۲) = +۱$$

به‌کار می‌بریم.

(توجه‌شود که بنا بر تعریف فرم‌مساحت، تنها مقادیر ممکن برای dM روی یك‌سه‌وجهی، ± 1 است.) اکنون می‌توان در مورد یك میدان سه‌وجهی با جهتدهی مثبت، تعبیر هندسی حاصل‌ضرب خارجی فرمهای دوگان آن

$$dM = \theta_1 \wedge \theta_2$$

را روی حوزهٔ تعریف میدان سه‌وجهی بیان کـرد. برای اثبات این نکتهٔ مفید، کافی است توجه شود کـه مقدار هردو طرف این رابطه روی E_1، E_2 برابر $+1$ است. بدینسان معادلهٔ ساختاری دوم (فرع ۳.۲) به‌صورت $d\omega_{12} = -K\, dM$ درمی‌آید.

تمرینات

۱. نشان دهیدکه برای قطعه مختصاتی مونژ

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

مساحت $\mathbf{x}(D)$ با همان فرمول معمول درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به‌دست می‌آید. نتیجه بگیریدکه $A(\mathbf{x}(D)) \geqslant A(D)$.

۲. برای مساحت رویـهٔ دورانی دلخواه فرمولی بیابید، و آن را به‌صورت $A = 2\pi L\bar{h}$ که در آن L طول خم نیمرخ و $\bar{h}$ مسافت متوسط آن از محور دوران است تعبیرکنید (پاپوس).

۳. مساحت رویه‌های زیر را بیابید:

(الف) ناحیه‌ای از رویهٔ زینی $z = xy$ متناظر به‌قرص $x^2 + y^2 \leqslant c^2$ ازصفحهٔ xy

(ب) کاتنوئید

(ج) نوار موبیوس .(تمرین ۷، فصل ۴، بند ۷)

۴. گیریم M و $-M$ نمایشگر یك رویهٔ فشرده باشند کـه به ترتیب با فرمهای مساحت dM و $-dM$ جهتدار شده‌اند. ثابت‌کنید که

(الف) (c_1، c_2 مقادیر ثابت‌اند)

$$\iint_M (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \iint_M v_1 + c_2 \iint_M v_2$$

(ب)
$$\iint_{-M} v = -\iint_M v$$

(راهنمایی: اگر $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = \mathbf{x}(v, u)$ باشد، نشان دهید که $\tilde{\mathbf{x}}$ و $\mathbf{x}$ دارای جهتدهـی متقابل‌اند، و سپس تمرین ۲۱ را ببینید.)

$$\iint_M f\,dM = \iint_{-M} f(-dM) \qquad (\text{ج})$$

(د) اگر $f \leqslant g$، آنگاه
$$\iint_M f\,dM \leqslant \iint_M g\,dM$$

(به‌تأثیر $f = 0$ یا $g = 0$ توجه شود.)

خاصیت (ج) نشان می‌دهد که درتعریف انتگرال یك تابع روی رویهٔ فشرده‌ای که جهتپذیر باشد، هرفرم مساحت را انتخاب کنیم نتیجه یکی است. به‌ویژه، برای یك‌رویهٔ فشردهٔ جهتپذیر، خمیدگی کل به‌خوبی معین است.

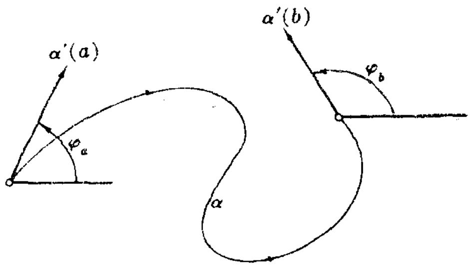
۵. خمیدگی‌کل رویه‌های دورانی. روی‌رویهٔ دورانی M با خم نیمرخ α، ناحیهٔ(«منطقه») بین مدارات ماربر $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ را با Z_{ab} نشان می‌دهیم.
(الف) ثابت کنیدکه خمیدگی کل Z_{ab} برابر است با

$$2\pi(\sin\varphi_a - \sin\varphi_b)$$

که درآن φ_a و φ_b زوایای شیب خم α به‌ترتیب در $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ نسبت به‌محور دوران می‌باشند (شکل ۲۴.۶).
(ب) نتیجه بگیرید که خمیدگی‌کل هر رویهٔ دورانی‌که خم نیمرخ آن بسته باشد برابر صفر است.
اگر خم نیمرخ α بسته نباشد، آنگاه با یك فاصلهٔ باز $A < t < B$ در تناظر یك به‌یك خواهد بود. دراین حالت خمیدگی کل را با

$$2\pi(\lim_{a\to A}\sin\varphi_a - \lim_{b\to B}\sin\varphi_b)$$

تعریف می‌کنیم، مشروط برآنکه هردو حد وجود داشته باشند.
(ج) این فرمول را درمورد رویهٔ شیپوری و کاتنوئید تحقیق کنید.



شکل ۲۴.۶

۶. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه نگاشت گاوس یك رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ همشکلی باشد، آن است که M قسمتی از یك کره یا از یك رویهٔ مینیمال باشد.

۷. خمیدگی کل رویه‌های دورانی با خمیدگی ثابت (فصل ۵، بند ۶، و تمرینات آن) را بیابید، و مساحت آنها را نتیجه بگیرید.

۸. فرمهای مساحت $\mathbf{E}^2$ همان‌طور که حدس زده می‌شود عبارت‌اند از $\pm\, du\, dv$ (زیرا du و dv فرمهای دوگان یك میدان سه وجهی می‌باشند). جهتدهی طبیعی $\mathbf{E}^2$ متناظر با $du\, dv$ است، همواره این جهتدهی را می‌پذیریم مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.
(الف) با استفاده از تعریف کلی که درمتن آمد، نشان دهید که ژاکوبی نگاشت

$$F = (f, g) : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$$

با فرمول معمولی زیر داده می‌شود

$$J = f_u g_v - f_v g_u$$

(ب) نشان دهید که ژاکوبی قطعه مختصاتی $\mathbf{x} : D \to M$ که در آن M یك رویهٔ جهتدار و D همبند است برابر $\pm \sqrt{EG - F^2}$ می‌باشد، علامت آن بستگی به این دارد که $\mathbf{x}$ به‌طور مثبت ویا منفی جهتدار شده باشد.

۹. گیریم M یك رویهٔ خط‌دار باشد که مرزهای آن ازخطوط مستقیم کامل تشکیل شده‌اند، و فرض کنیم که $K < 0$.
(الف) نشان دهید که خمیدگی کل M برابر است با $-2L(\delta)$، که در آن δ خم هادی است با $\|\delta\| = 1$.
(ب) با این روش خمیدگی کل رویهٔ زینی $M : z = xy$ را محاسبه کنید، و آن را با فرع ۱۱.۷ تطبیق دهید.

۱۰. خمیدگی کل رویه‌های درجهٔ دوم
(الف) خمیدگی کل، سهمیگون هذلولوی، سهمیگون بیضوی، وبیضیگون را بیابید.
(ب) نشان دهید که خمیدگی کل هذلولیگون دورانی $M : (x^2 + y^2)/a^2 - z^2/c^2 = 1$ برابر است با $-4\pi a/\sqrt{a^2 + c^2}$.
بدینسان خمیدگی کل هذلولیگون بیضوی به «ابعاد» خاص آن بستگی دارد، و همین مطلب نیز در مورد هذلولیگون بیضوی دوپارچه صادق است.

۱۱. یك ناحیهٔ سادهٔ $\mathcal{S}$ در M، عبارت است از ناحیه‌ای کــه بتوان آن را به‌عنوان نگارهٔ $F(D)$ از قرص $u^2 + v^2 \leqslant 1$ در $\mathbf{E}^2$ با نگاشت منظم یك به یك F بیان کرد. نشان دهید که $\mathcal{S}$ را می‌توان با یك شبه قطعه مختصاتی ۲-قطعه‌ای $\mathbf{x}$ به‌طوری فرش کرد کــه به‌ازای هر ۱-فرمی ϕ داشته باشیم

$$\iint_S d\phi = \int_\alpha \phi$$

که در آن α خم مرزی $\mathbf{x}$ است. (راهنمایی: تمرین ۱۲، فصل ۴، بند ۶ را ببینید.)

۱۲. (ادامه)

(الف) اگر $\mathcal{S}$ یك ناحیهٔ ساده در $\mathbf{E}^2$ باشد، نشان دهید که مساحت $\mathcal{S}$ برابر است با

$$\frac{1}{2}\int_\alpha (u\,dv - v\,du)$$

که در آن α «خم مرزی» $\mathcal{S}$ است.

(ب) مطلوب است تعیین مساحت ناحیه‌ای در $\mathbf{E}^2$ که با بیضی زیر محصور شده‌است

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

۱۳. در تمرین ۷، بند ۸، فصل ۷ نشان خواهیم داد که اگر ϕ یك ۱-فرمی روی رویهٔ جهتدار فشرده‌ای باشد، آنگاه داریم

$$\iint_M d\phi = 0$$

با ترکیب این فرع و تمرین ۳، بند ۲ نشان دهید که اگر h تابع محملی $M \subset \mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه

$$A(M)+\iint_M hH\,dM = 0 \qquad \iint_M H\,dM + \iint_M hK\,dM = 0$$

این فرمولها را دربارهٔ کره‌ای به‌شعاع r، که با قائم یکهٔ برون‌سوی جهتدار شده است تحقیق کنید.

۱۴. زاویهٔ جهتدار $\mathbf{v}$ با $\mathbf{u}$ را با $\vartheta = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید که

(الف) اگر $\vartheta = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ و $\varphi = \measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$، آنگاه $\vartheta+\varphi = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

(ب) اگر $\vartheta = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$، آنگاه $-\vartheta = \measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

۱۵. گیریم $\alpha : I \rightarrow M$ خمی در رویهٔ جهتدار M باشد. اگر V و W میدانهای برداری مماس غیرصفر روی α باشند، نشان دهید که روی I می‌توان تابع دیفرانسیلپذیر ϑ را طوری تعیین کرد که به‌ازای هر t از I، $\vartheta(t)$ نمایشگر زاویهٔ جهتدار $W(t)$ با $V(t)$ باشد. ϑ را تابع زاویهٔ W با V می‌نامند. توجه شود که اختلاف هردو تابع‌زاویه‌ای مضرب صحیحی از 2π است. (راهنمایی: از تمرین ۱۲، فصل ۲، بند ۱ استفاده‌شود.)

۱۶. نگاشت $F : M \rightarrow N$ را هنگامی مساحت نگهدار می‌نامند که مساحت هر ناحیهٔ

فرشیذیر $\mathcal{R}$ در M با مساحت $F(\mathcal{R})$، نگارهٔ آن در N، برابر باشد.
(توجه شود که چنین نگاشتی لزوماً یك‌به‌یك است.) نشان دهید که:
(الف) نگاشت یك‌به‌یك $F: M \to N$ مساحت نگهدار است اگر به‌ازای هر قطعه‌مختصاتی $\mathbf{x}$ در M و $\bar{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ در N داشته باشیم

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2$$

(راهنمایی: نشان دهید کـه F هرپوشش فرشی M را به‌یك پوشش فرشی N بـدل می‌کند.)
(ب) هـر ایزومتری مساحت نگهـدار است، و رویـه‌های ایزومتریك دارای یـك مساحت‌اند. حالت نافشرده را نیز درنظر بگیرید.
(ج) نگاشت (۱) درمثال ۲.۵ فصل ۴ مساحت نگهدار است، ولـی یـك ایزومتری نیست. از اینجا فرمول معمولی مساحت منطقهٔ کروی را نتیجه بگیرید. (کافی‌است در (الف) تنها یك نمایش پارامتری $\mathbf{x}$ راکه تمام M را بپوشاند درنظر بگیریم.)

۱۷. گیریم $F: M \to N$ یك‌نگاشت رویه‌های جهتدار با ژاکوبی J باشد، نشان‌دهید که:
(الف) F منظم است اگر، وفقط اگر، J هیچ‌گاه صفر نشود.
(ب) F مساحت نگهدار است اگـر یك‌به‌یك بـاشد و $J = \pm 1$. (عکس آن نیز صادق است.)
(ج) اگر F یك ایزومتری باشد، آنگاه $J = \pm 1$، اما عکس آن صادق نیست.

چون ما تنها به‌بررسی رویه‌های همبند می‌پردازیم، (الف) نشان می‌دهد کـه همهٔ این‌قبیل نگاشتهای F به‌دوطبقه تقسیم‌می‌شوند: سونگهدارند اگر $J > 0$، سوبرگردان‌اند اگر $J < 0$. جز درمورد قطعه‌های مختصاتی (تمرین ۸)، این‌مفهوم‌را اساساً دربارهٔ حالت ساده‌ای که درآن F یك ایزومتری است به‌کار می‌بریم.

۱۸. گیریم $F: M \to \bar{M}$ یك‌ایزومتری رویه‌های‌جهتدار باشد. نشان‌دهید که F سونگهدار است‌اگر، وفقط اگر، یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(الف)
$$F^*(d\bar{M}) = dM$$

(ب) به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$،

$$F_*(U(\mathbf{p}) \times \mathbf{v}) = \bar{U}(F(\mathbf{p})) \times F_*(\mathbf{v})$$

(U و $\bar{U}$ قائمهای یکه‌ای می‌باشندکه M و $\bar{M}$ را جهتدار می‌کنند.)
(ج) به‌ازای هر زوج بردارهای مماس،

$$U(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \bar{U}(F(\mathbf{p})) \cdot F_*(\mathbf{v}) \times F_*(\mathbf{w})$$

(د) به‌ازای هـر میدان سه‌وجهی بـاجهتدهی مثبت E_1، E_2 روی M، $F_*(E_1)$، $F_*(E_2)$ نیز یك میدان سه‌وجهی با جهتدهی مثبت روی M است.

۱۹. گیریم $F : M \to N$ یك دیفئومرفیسم سونگهداری‌از رویه‌های فشردهٔ جهتدار باشد، نشان دهید که
(الف) به‌ازای هر ۲-فرمی روی N،

$$\iint_M F^*(\nu) = \iint_N \nu$$

(راهنمایی: تمرین ۸، فصل ۴، بند ۶ را ببینید.)
(ب) خمیدگی کل درمورد رویه‌های فشردهٔ جهتپذیر یك تغییرناپذیر ایزومتری است.
(ج) درحالت رویه‌های نافشرده، بافرض آنکه $K \geqslant 0$ یا $K \leqslant 0$ قسمت (ب) را تعمیم دهید.

۲۰. نگاشت گاوس G درمورد چند رویهٔ مینیمال. ثابت‌کنید‌که:
(الف) کاتنوئید. G یك‌به‌یك است ونگارهٔ آن تمام‌کره بجز دونقطه را می‌پوشاند.
(ب) هلیکوئید. نگارهٔ G تمام‌کره بجزدونقطه را می‌پوشاند، وهرنقطهٔ نگاره با بینهایت نقطه از هلیکوئید متناظر است.
(ج) رویهٔ شرك (تمرین ۲۱، فصل۵، بند ۴). مانند هلیکوئید است جز آنکه در اینجا چهار نقطه حذف مـی‌شود. (راهنمایی: $Z = \nabla g$ را روی خطوط شاغولی بررسی کنید.)
خمیدگی کل این رویه‌ها را بیابید.

۲۱. گیریم $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دوشبه قطعه مختصاتی ۲- قطعه‌ای روی یـك رویهٔ جهتدار M بـاشند به‌طوری‌کـه نگارهٔ آنها یکی باشد، $\mathbf{x}(D) = \mathbf{y}(E)$. نشان دهیدکـه بـه‌ازای هر ۲-فرمی ν داریم

$$\iint_{\mathbf{y}} \nu = \pm \iint_{\mathbf{x}} \nu$$

علامت مثبت است اگر جهتدهی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ یکی باشد، و منفی است اگر جهتدهی آنها متقابل باشد (راهنمایی: علامت ژاکـوبی $\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}$ را بـررسی‌کنید و فرمول تعویض متغیرها درانتگرال دوگانه را به‌کار برید.)

۸. انطباق رویه‌ها

دو رویهٔ M و $\bar{M}$ را هنگامی قابل انطباق گویند کـه یك ایزومتری $\mathbf{F}$ از $\mathbf{E}^3$ وجـود داشته‌باشد به‌طوری‌که M را دقیقاً روی $\bar{M}$ ببرد. بدینسان رویه‌های‌قابل‌انطباق همشکل‌اند، و فقط ازلحاظ وضع قرار گرفتن در $\mathbf{E}^3$ باهم اختلاف دارنـد. مثلاً، هردو کره‌ای که شعاع آنها برابر باشد قابل‌انطباق‌اند (با استفاده از انتقالی‌کـه مرکز یکی را به مرکـز دیگری می‌برد)، و رویه‌های

$$M: z = xy, \qquad M: z = \frac{x^2+y^2}{2}$$

نیز با دوران 45° حول محور z برهم منطبق می‌شوند.

برای سهولت بیان، دراین بند رویه‌ها را جهتپذیر و همبند فرض می‌کنیم.

۱.۸. قضیه. اگر $\mathbf{F}$ یک ایزومتری اقلیدسی باشد به‌طوری که $\mathbf{F}(M) = \bar{M}$، آنگاه تخصیص $\mathbf{F}$ به M یعنی $F = \mathbf{F}|M : M \to \bar{M}$ یك ایزومتری رویه‌هاست. علاوه براین، اگر M و $\bar{M}$ به‌طور مناسبی جهتدار شده باشند، آنگاه F حافظ عملگرهای شکلی است، یعنی به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}$ بر M داریم

$$F_*(S(\mathbf{v})) = \bar{S}(F_*(\mathbf{v}))$$

خلاصه آنکه، رویه‌های قابل انطباق ایزومتریك‌اند و عملگرهای شکلی آنها اساساً یکی هستند. البته باید توجه داشت که رویه‌های ایزومتریك لزوماً قابل انطباق نیستند، زیرا چنانکه دیدیم، امکان دارد که عملگرهای شکلی آنها در $\mathbf{E}^3$ کاملاً متفاوت باشند.

برهان. چنانکه درفصل ۴، بند ۵ دیدیم، تخصیص $F : M \to \bar{M}$ یك نگاشت است. علاوه‌براین نگاشتهای مشتق F و $\mathbf{F}$ روی بردارهای مماس بر M سازگارند. در واقع، اگر $\mathbf{v}$ بر M مماس باشد، آنگاه $\mathbf{v}$ سرعت آغازی یك خم α در M است، و چون $F = \mathbf{F}|M$، داریم

$$F(\alpha) = \mathbf{F}(\alpha)$$

بدینسان

$$F_*(\mathbf{v}) = F(\alpha)'(0) = \mathbf{F}(\alpha)'(0) = \mathbf{F}_*(\mathbf{v})$$

از اینجا مستقیماً نتیجه می‌شود که F_* حافظ ضرب نقطه‌ای بردارهای مماس بر M می‌باشد، زیرا $\mathbf{F}_*$ به‌ازای هر زوج از بردارهای مماس، این خاصیت را داراست (فرع ۲.۲، فصل ۳). علاوه‌براین، $F : M \to \bar{M}$ یك‌به‌یك است (همانند $\mathbf{F}$) و پوشا (بنا برفرض) نیز می‌باشد، از این‌رو F یك ایزومتری رویه‌هاست.

بالاخره، نشان می‌دهیم که F حافظ عملگرهای شکلی است. اگر M با قائم یکهٔ U جهتدارشده باشد، آنگاه چون $\mathbf{F}_*$ حافظ ضرب نقطه‌ای (و با F_* روی M سازگاراست)، نتیجه می‌شود که $\mathbf{F}_*(U)$ دارای طول واحد بوده و همواره بر $\bar{M} = \mathbf{F}(M)$ قائم می‌باشد. بدینسان یکی ازقائمهای یکهٔ رویهٔ M، مثلاً $\bar{U}$، دارای این خصوصیت است که در آن

$$\mathbf{F}_*(U(\mathbf{p})) = \bar{U}(\bar{\mathbf{p}}) \qquad \bar{\mathbf{p}} = F(\mathbf{p})$$

اگر روی M و $\bar{M}$ عملگرهای شکلی S و $\bar{S}$ به‌ترتیب با U و $\bar{U}$ متناظر باشند، نشان خواهیم داد که

$$\mathbf{F}_*(S(\mathbf{v})) = \bar{S}(\mathbf{F}_*(\mathbf{v}))$$

اکنون گیریم α خمی در M با سرعت آغازی $\mathbf{v}$ باشد. بدینسان $\mathbf{F}(\alpha)$ نیز خمی در $\bar{M}$ با سرعت آغازی $\mathbf{F}_*(\mathbf{v})$ خواهد بود. اگر U به α و $\bar{U}$ به $\mathbf{F}(\alpha)$ تخصیص یابد، آنگاه $\mathbf{F}_*(U) = \bar{U}$ (شکل ۲۵.۶). چون $\mathbf{F}_*$ حافظ مشتقات میدانهای برداری است، خواهیم‌داشت

$$\mathbf{F}_*(S(\mathbf{v})) = -\mathbf{F}_*(U'(0)) = -\bar{U}'(0) = \bar{S}(\mathbf{F}_*(\mathbf{v}))$$

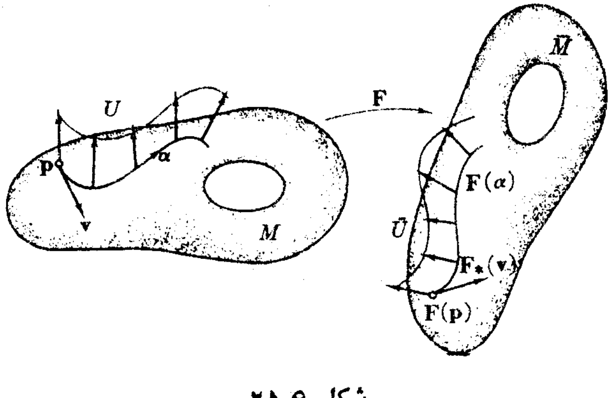
اما چون $\mathbf{v}$ و $S(\mathbf{v})$ بر M مماس‌اند، بنا براین می‌توان F_* را به‌جای $\mathbf{F}_*$ قرارداد. ▌

اکنون به عکس قضیهٔ پیش می‌پردازیم، یعنی: اگر M و $\bar{M}$ ایزومتریك و دارای عملگرهای شکلی یکسان باشند، آنگاه M و $\bar{M}$ قابل انطباق‌اند. این قضیه نظیر همان نتیجهٔ اساسی (قضیهٔ ۳.۵، فصل ۳) مربوط به‌خمهاست. شرط ایزومتریك بودن M و $\bar{M}$ در اینجا با فرضی‌که خمهای α و β روی یك فاصله تعریف شده‌اند و دارای تندی واحد می‌باشند متناظر است، و «یکسانی عملگرهای شکلی» نیز با

$$\kappa = \bar{\kappa}, \quad \tau = \pm\bar{\tau}$$

متناظر می‌باشد.

۸.۲۰ لم. گیریم $F: M \to \bar{M}$ یك ایزومتری رویه‌های جهتدار حافظ عملگرهای شکلی در $\mathbf{E}^3$ باشد (مانند قضیهٔ ۱.۸). گیریم E_1، E_2 یك میدان سه وجهی مماس روی M و $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ میدان سه وجهی انتقالی روی $\bar{M}$ باشد. اگر E_3 و $\bar{E}_3$ قائمهای یکه‌ای باشند که M و $\bar{M}$ را جهتدارمی‌کنند، آنگاه E_1، E_2، E_3 و $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$، $\bar{E}_3$ میدانهای سه‌وجهی برازنده روی M و $\bar{M}$ را تشکیل‌می‌دهند. درمورد فرمهای همبندی این‌میدانهای سه‌وجهی داریم



شکل ۲۵.۶

$$F^*(\bar{\omega}_{ij})=\omega_{ij} \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant 3)$$

برهان. بنا بر لم ۳.۵ می‌دانیم که $F^*(\bar{\omega}_{12})=\omega_{12}$. بنا براین تنها باید ثابت کنیم که

$$F^*(\bar{\omega}_{i3})=\omega_{i3}, \quad i=1,\ 2 \text{ به‌ازای}$$

اما بنا برفرع ۵.۱ این رابطه محفوظ ماندن عملگرهای شکلی را برحسب فرمهای همبندی بیان می‌کند. در واقع، به‌ازای $j=1,\ 2$،

$$F^*(\bar{\omega}_{i3})(E_j)=\bar{\omega}_{i3}(F_*E_j)=\bar{S}(F_*E_j)\cdot \bar{E}_i=F_*(S(E_j))\cdot F_*(E_i)$$

$$=SE_j\cdot E_i=\omega_{i3}(E_j)$$

بنا براین فرمهای $F^*(\omega_{i3})$ و ω_{i3} برابرند. ∎

۳.۸ قضیه. گیریم $F: M \to N$ یك ایزومتری بین رویه‌های جهتدار باشد، به‌طوری که عملگرهای شکلی را حفظ کند، یعنی به‌ازای همهٔ بردارهای مماس $\mathbf{v}$ بر M،

$$F_*(S(\mathbf{v}))=\bar{S}(F_*(\mathbf{v}))$$

آنگاه M و $\bar{M}$ قابل انطباق‌اند؛ در واقع یك ایزومتری $\mathbf{F}$ از $\mathbf{E}^3$ وجود دارد به‌طوری که $F=\mathbf{F}|M$.

(ممکن است اتفاق افتدکه به ازای همهٔ بردارهای مماس داشته باشیم

$$F_*(S(\mathbf{v}))=-\bar{S}(F_*(\mathbf{v}))$$

دراین صورت کافی است جهتدهی M یا $\bar{M}$ را معکوس کنیم، تا به‌صورت فرض‌مذکوردر قضیه درآید.)

برهان. یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم E_3 و $\bar{E}_3$، قائمهای یکه‌ای باشندکه M و $\bar{M}$ را جهتدهی می‌کنند. با استفاده از فرع ۳.۲ فصل ۳ به‌آسانی می‌توان نشان دادکه یك ایزومتری یکتای $\mathbf{F}$ از $\mathbf{E}^3$ وجود داردکه با F درنقطهٔ انتخاب شدهٔ $\mathbf{p}$ سازگار باشد، بدین‌معنی که

$$\mathbf{F}(\mathbf{p})=F(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{F}_*(\mathbf{v})=F_*(\mathbf{v}) \quad \text{به‌ازای هر بردارمماس } \mathbf{v} \text{ بر } M \text{ در } \mathbf{p}$$

$$\mathbf{F}_*(E_3(\mathbf{p}))=\bar{E}_3(F(\mathbf{p}))$$

اکنون نشان‌می‌دهیم که $\mathbf{F}$ همان ایزومتری اقلیدسی مطلوب است، به‌عبارت‌دیگر به‌ازای هرنقطهٔ دلخواه $\mathbf{q}$ از M داریم $\mathbf{F}(\mathbf{q})=F(\mathbf{q})$. بدینسان اگر α خمی در M از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ باشد، کافی است ثابت‌کنیم که $\mathbf{F}(\alpha)=F(\alpha)$.

بی آنکه از کلیت کاسته شود می‌توان فرض کرد که α درحوزهٔ تعریف یك میدان سه‌وجهی برازندهٔ E_1 ، E_2 ، E_3 روی M واقع است. (اگر چنین نباشد، می‌توان α را به قطعاتی با این خصوصیت تقسیم کرد، و برهان زیر را به‌نوبهٔ خود دربارهٔ هر یك از آنها تکرار نمود.) در اینجا برای اثبات آنکه خمهای $\mathbf{F}(\alpha)$ و $F(\alpha)$ متحدند، ملاك کلی قضیهٔ ۷.۵ فصل ۳ را به‌کارمی‌بریم.

الف. خم $\mathbf{F}(\alpha)$. میدان سه وجهی E_1، E_2، E_3 را به خم α تخصیص می‌دهیم (شکل ۲۶.۶). آنگاه بنا برمعادلات همبندی،

$$E_i' = \nabla_{\alpha'} E_i = \sum \omega_{ij}(\alpha') E_j \quad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

اکنون $\mathbf{F}_*$ را به‌این معادله اعمال می‌کنیم، چون $\mathbf{F}_*$ خطی است ومشتقها را حفظ می‌کند، داریم

$$(\mathbf{F}_* E_i)' = \sum \omega_{ij}(\alpha') \mathbf{F}_*(E_j) \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \qquad \text{(الف ۱)}$$

$\mathbf{F}_*$ حاصل‌ضرب نقطه‌ای را نیزحفظ می‌کند، بنابراین $\mathbf{F}_* E_1$، $\mathbf{F}_* E_2$ ، $\mathbf{F}_* E_3$ همان‌میدان سه وجهی روی خم نگارهٔ $\mathbf{F}(\alpha)$ می‌باشد. علاوه براین،

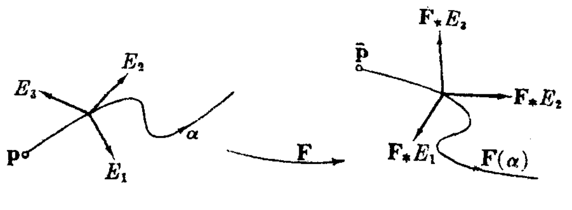
$$\mathbf{F}(\alpha)' \cdot \mathbf{F}_* E_i = \alpha' \cdot E_i \qquad \text{(الف ۲)}$$

زیرا

$$\mathbf{F}(\alpha)' = \mathbf{F}_*(\alpha')$$

ب. خم $F(\alpha) = \bar{\alpha}$. با استفاده از ایزومتری F، میدان سه وجهی مماس E_1، E_2 را به میدان سه‌وجهی مماس $\bar{E}_1$ ، $\bar{E}_2$ روی $\bar{M}$ انتقال می‌دهیم. بدینسان با میدان برداری قائم یکهٔ $\bar{E}_3$، یك میدان سه وجهی برازندهٔ $\bar{E}_1$ ، $\bar{E}_2$ ، $\bar{E}_3$ روی $\bar{M}$ خواهیم داشت. چون آن را به خم نگارهٔ $F(\alpha) = \bar{\alpha}$ تخصیص دهیم، ومانندبالا ازمعادلات همبندی‌استفاده کنیم به‌دست می‌آید،

$$\bar{E}_i' = \sum \bar{\omega}_{ij}(\bar{\alpha}') \bar{E}_j \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \qquad \text{(ب ۱)}$$



شکل ۲۶.۶

علاوه بر این، داریم

$$\bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i = \alpha' \cdot E_i \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \qquad \text{(ب ۲)}$$

این رابطه به‌ازای $i = 1, 2$ مستقیماً از تعریف $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ نتیجه می‌شود، زیرا F_* یك ایزومتری است و

$$\bar{\alpha}' = F(\alpha)' = F_*(\alpha')$$

به‌ازای $i = 3$ هر دوطرف صفرند، زیرا α و $\bar{\alpha}$ به‌ترتیب خمهایی در M و $\bar{M}$ می‌باشند.

ج. مقایسهٔ $\mathbf{F}(\alpha)$ و $F(\alpha) = \bar{\alpha}$. طرز ساختمان بالا و فرض آنکه F حافظ عملگرهای شکلی است دقیقاً با مفروضات لم پیش مطابقت دارد، بنابراین به‌ازای $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ داریم $F^*(\bar{\omega}_{ij}) = \omega_{ij}$. بدینسان

$$\bar{\omega}_{ij}(\bar{\alpha}') = \bar{\omega}_{ij}(F_*(\alpha')) = (F^*\bar{\omega}_{ij})(\alpha') = \omega_{ij}(\alpha')$$

با استفاده از این نکته از (الف ۱) و(ب ۱) نتیجه می‌شود که،

$$(\mathbf{F}_* E_i)' \cdot \mathbf{F}_* E_j = \bar{E}_i' \cdot \bar{E}_j \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 3) \qquad \text{(ج ۱)}$$

ازمقایسهٔ (الف ۲) و(ب ۲) به‌دست می‌آید،

$$\mathbf{F}(\alpha)' \cdot \mathbf{F}_* E_i = \bar{\alpha}' \cdot \bar{E}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \qquad \text{(ج ۲)}$$

و بنا برطرز ساختمان آغازی، در نقطهٔ $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\alpha}(0) = F(\alpha(0))$ داریم

$$\mathbf{F}_* E_i = \bar{E}_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3) \qquad \text{(ج ۳)}$$

با توجه به معادلات ($\ddagger$)، قضیهٔ ۵.۷، فصل ۳، مشاهده می‌شود که سه معادلهٔ (ج ۱)، (ج ۲) و (ج ۳) دقیقاً همان شرایط موردنیاز برای اثبات $\mathbf{F}(\alpha) = \bar{\alpha}$ می‌باشند؛ بدینسان،

$$\mathbf{F}(\alpha) = F(\alpha) \qquad \blacksquare$$

این قضیه به طور صوری ثابت می‌کند که عملگرهای شکلی یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$، شکل آن راکاملاً مشخص می‌کنند.

تمرینات

۱. رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ هنگامی صلب است که هر رویهٔ ایزومتریك با M، قابل انطباق با آن باشد. با استفاده ازقضیهٔ لیبمان نشان دهید که کره رویه‌ای است صلب.

۲. اگر $\alpha, \beta : I \to \mathbf{E}^3$ خمهایی با تندی واحد باشند به‌طوری که $\kappa_\alpha = \kappa_\beta > 0$ و

$\tau_\alpha=\tau_\beta$، نشان دهید که رویه‌های مماسی آنها قابل انطباق‌اند. (تمرین ۵، فصل ۶، بند ۴ را ببینید.)

۳. اگر M و N رویه‌های قابل انطباق در $\mathbf{E}^3$، و $\mathbf{F}$ یك ایزومتری اقلیدسی باشد به‌طوری که $\mathbf{F}(M)=N$، ثابت کنید که $\mathbf{F}|M$، خمیدگیهای گاوسی ومتوسط، وخمیدگیهای اصلی، امتدادهای اصلی وهمچنین خمهای نافی، مجانبی و اصلی و ژئودزیك را حفظ می‌کند. کدام یك ازاینها با ایزومتریهای دلخواه $F: M \rightarrow N$ محفوظ می‌ماند؟ (راهنمایی: رویه‌ها را به‌طورموضعی جهتدار کنید، و ازابهام علامت درمورد H، k_1 و k_2 صرفنظر نمایید.)

۴. اگر $F: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ یك ایزومتری کره‌ها باشد، نشان دهید که یك ایزومتری اقلیدسی $\mathbf{F}$ وجود دارد به‌طوری که $F=\mathbf{F}|\Sigma$.

۵. رویهٔ زینی M $(z=xy)$ را درنظر می‌گیریم. از دوران 90° حول محور z و سپس تقارن نسبت به صفحهٔ xy یك تبدیل متعامد C از $\mathbf{E}^3$ به دست می‌آید که ماتریس آن برابر است با

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(مطابق قرارداد ما، ستونهای این‌ماتریس عبارت‌اند از $C(\mathbf{u}_1)$، $C(\mathbf{u}_2)$، $C(\mathbf{u}_3)$، که درآن $\mathbf{u}_i$، i امین بردار یکه است.)

(الف) ثابت کنید که $C(M)=M$.

(ب) گیریم $F=C|M: M \rightarrow M$. M را (به عنوان حوزهٔ F) با قائم یکهٔ U طوری جهتدار کنید که $U(0)=\mathbf{u}_3$. کدام جهتدهی M (به‌عنوان نگارهٔ F) F حافظ عملگرهای شکلی است؟

۶. درشرح کلی رویه‌های دورانی مثال ۶.۱ فصل ۴ (M از دوران C حول A به‌دست آمد)، گیریم A خط ماربر $\mathbf{p}$ درامتداد یك بردار یکهٔ $\mathbf{e}_1$، و

$$\alpha(u)=\mathbf{p}+g(u)\mathbf{e}_1+h(u)\mathbf{e}_2$$

نمایش پارامتری C باشد، که درآن $\mathbf{e}_2$ یك بردار یکهٔ عمود بر $\mathbf{e}_1$ است.

(الف) مطلوب است تعیین یك نگاشت منظم $\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbf{E}^3$ به طوری کـه نگارهٔ آن مجموعهٔ M باشد.

آنگاه ثابت کنید که:

(ب) M قابل انطباق بـا یك رویهٔ دورانی در وضعیت خاص مذکور در مثال ۵.۲، فصل ۴ می‌باشد.

(ج) M یك رویه در $\mathbf{E}^3$ است.
(د) دو رویهٔ دورانی قابل‌انطباق‌اند، اگر، و فقط اگر، زوجهای g ، h متناظر به آنها یکی باشند.

۷. رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ را درنظرمی‌گیریم، هرایزومتری‌اقلیدسی $\mathbf{F}$ با شرط $\mathbf{F}(M)=M$، یك تقارن اقلیدسی M نامیده می‌شود. نشان دهید که
(الف) مجموعهٔ همهٔ تقارنهای اقلیدسی M، یك زیر گروه $\mathcal{S}(M)$ از گروه $\mathcal{E}$ ، یعنی همهٔ ایزومتریهای $\mathbf{E}^3$ است (تمرین۷، فصل۳، بند۱). $\mathcal{S}(M)$ را گروه تقارن اقلیدسی M می‌نامند.
(ب) گروههای تقارن اقلیدسی رویه‌های قابل انطباق، ایزومورف (یکسان)‌اند.

۸. نشان دهید که گروه تقارن اقلیدسی هر کره با گروه همهٔ ماتریسهای متعامد ۳ × ۳ ایزومورف است.

۹. همهٔ هشت تقارن اقلیدسی رویهٔ زینی $M: z=xy$ را بیابید. نشان دهید که این تقارنها تبدیلات متعامدند و ماتریسهای آنها را به‌دست آورید.

۱۰. مطلوب‌است تعیین‌همهٔ تقارنهای‌اقلیدسی بیضیگون $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ که در آن $a>b>c$. (راهنمایی: ازاین‌نکته‌که خمیدگی گاوسی محفوظ می‌ماند، استفاده کنید.)

۱۱. اگر M رویهٔ‌شرك (تمرین ۲۱، فصل۵، بند۴) و D مربع باز $-\pi/2 \leqslant u,v \leqslant \pi/2$ باشد، نشان دهید که:
(الف) $\mathbf{x}(D)$ نگارهٔ $\mathbf{x}$ (تمرین ۴، فصل ۵، بند ۴) در M واقع است.
(ب) هرقسمت از M که دربالای یکی ازمربعهای باز (تمرین ۲۱، فصل ۵، بند ۴) واقع است بر $\mathbf{x}(D)$ قابل انطباق می‌باشد.
(ج) فرمولهای خمیدگی که درمسائل فوق‌الذکر داده شده‌اند سازگارند.

۹. خلاصه

بررسی هندسی یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ به‌سه مقولهٔ متمایز تقسیم می‌شود:
(۱) هندسهٔ ذاتی M.
(۲) شکل M در $\mathbf{E}^3$.
(۳) هندسهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^3$.

درفصول ۲ و ۳ دیدیم که هندسهٔ $\mathbf{E}^3$ برضرب نقطه‌ای مبتنی است و ازهمهٔ مفاهیمی که در ایزومتریهای $\mathbf{E}^3$ محفوظ می‌مانند تشکیل می‌شود. به همین نحو، دراینجا نیز دیده شد که هندسهٔ ذاتی M برضرب نقطه‌ای مبتنی است، که تنها دربارهٔ بردارهای مماس بر M اعمال می‌شود، و ازمفاهیمی که در ایزومتریهای M محفوظ می‌مانند تشکیل می‌شود.

شکل M در $\mathbf{E}^3$ به‌نحوی رابط بین این دو هندسه است. به‌عنوان مثال، خمیدگی گاوسی K یکی ازمشخصات اساسی هندسهٔ ذاتی M است، و برترین نقش را در مقولهٔ (۲) عملگر شکلی S ایفا می‌کند، بدینسان معادلهٔ

$$K = \det S$$

نمایشگر آن است که تنها با اعمال قیودی بر (۲) می‌توان هندسه‌های (۱) و (۳) را هماهنگ‌ساخت. به‌عبارت سطحی: در $\mathbf{E}^3$ برای یك رویهٔ M که خمیدگی گاوسی آن از پیش تعیین شده باشد، تنها برخی اشکال امکان‌پذیرند. یك نتیجهٔ پرتوان این خصوصیت همان قضیهٔ لیبمان است، که مبین آن است که برای هررویهٔ فشرده در $\mathbf{E}^3$ با K ثابت مثبت، تنها یك شکل امکان‌پذیر می‌باشد، و آن کرویت است.

در دو فصل اخیر، محاسبات مربوط به‌مثالها برحسب قطعه‌های مختصاتی (گاوس) انجام گرفت، اما خود نظریه برحسب میدانهای سه‌وجهی و فرمها (کارتان) بیان شد. از لحاظ تاریخی، در مورد این نظریه نیز روش مختصاتی را به کار می‌برده‌اند، اما اخیراً روش‌کارتان به‌طور وسیعی رواج یافته است. در بند ۶ دیدیم که این دو روش هنگامی‌که قطعه مختصاتی، متعامد باشد چندان تفاوتی ندارند.

۷

هندسهٔ ریمانی

هنگامی که هندسهٔ رویه‌ها در E^3 را بررسی می‌کردیم، دیدیم که برخی از مهمترین خواص هندسی رویه از خود رویه است، و نه از فضای اقلیدسی محیط بر آن. مثال برجسته در این باره خمیدگی گاوسی است که هرچند برحسب عملگرهای شکلی تعریف می‌شود، اما چون در تبدیلات ایزومتری تغییرناپذیر است به‌این هندسهٔ ذاتی متعلق خواهد بود. هنگامی که این وضعیت برای ریاضیدانان قرن نوزدهم به‌تدریج روشن گردید، ریمان به استنتاج صحیحی نایل آمد: باید برای رویه‌ها یك نظریهٔ هندسی کاملاً مستقل از E^3 وجود داشته باشد، هندسه‌ای که از آغاز منحصراً بر تغییرناپذیرهای ایزومتری بنا شده باشد. در این فصل طرحی از نظریهٔ به‌دست آمده را می‌آوریم، و توجه خود را اساساً به ویژگیهای برجستهٔ آن: خمیدگی گاوسی و ژئودزیکها معطوف می‌داریم. همواره راهنمای ما دوحالت خاصی است که بدین ابداع انجامیده است: یکی هندسهٔ ذاتی رویه‌ها در E^3، و دیگری هندسهٔ اقلیدسی، به‌ویژه هندسهٔ صفحهٔ E^2.

۱. رویه‌های هندسی

با توجه به بررسیهایی که قبلاً دربارهٔ هندسهٔ ذاتی رویه‌ها در E^3 (وهمچنین هندسهٔ اقلیدسی) انجام گرفت، به‌خوبی درك می‌شود که برای آنکه بر روی یك رویهٔ هندسه‌ای تعریف شود، به‌وجود حاصلضرب نقطه‌ای برای بردارهای مماس نیازمندیم.

اما برای آنکه خود را از محدودیت $\mathbf{E}^3$ آزاد سازیم باید با یك رویهٔ مجرد M آغاز کنیم (فصل ۴، بند ۸). اما چون لزومی ندارد که رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ باشد، فاقد حاصل‌ضرب نقطه‌ای بوده و بنابراین هندسه‌ای نخواهیم داشت. اما حاصل‌ضرب نقطه‌ای تنها حالت خاصی از مفهوم کلی حاصل‌ضرب داخلی است، و اندیشهٔ ریمان این بود که به‌جای حاصل‌ضرب نقطه‌ای، روی هر صفحهٔ مماس M یك حاصل‌ضرب داخلی کاملاً دلخواه جایگزین کند.

۱.۱. تعریف. حاصل‌ضرب داخلی روی یك فضای برداری V عبارت است از تابعی که به‌هر زوج بردار $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ متعلق به V عددی که آن را با $\mathbf{v} \circ \mathbf{w}$ نشان می‌دهیم متناظر سازد و دارای خواص زیر باشد:

(۱) دوخطی بودن:

$$(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) \circ \mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{w} + a_2\mathbf{v}_2 \circ \mathbf{w}$$
$$\mathbf{v} \circ (b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2) = b_1\mathbf{v} \circ \mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{v} \circ \mathbf{w}_2$$

(۲) متقارن بودن:

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \mathbf{w} \circ \mathbf{v}$$

(۳) مثبت معین بودن:

$\mathbf{v} \circ \mathbf{v} \geqslant 0$، و $\mathbf{v} \circ \mathbf{v} = 0$ اگر، و فقط اگر، $\mathbf{v} = 0$

البته روی فضای برداری $\mathbf{E}^2$ حاصل‌ضرب نقطه‌ای

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

یك حاصل‌ضرب داخلی است، اما روی همین فضا بینهایت حاصل‌ضرب داخلی دیگر وجود دارد، مانند $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 2v_1w_1 + 3v_2w_2$ (تمرین ۸، بند ۲ را ببینید).

چون به‌جای رویه‌های $\mathbf{E}^3$، رویه‌های مجرد و به‌جای حاصل‌ضرب نقطه‌ای، حاصل‌ضربهای داخلی دلخواهی را درنظر بگیریم، به‌تعریف زیر می‌رسیم.

۲.۱. تعریف. رویهٔ هندسی عبارت است از رویهٔ مجرد M که به یك حاصل‌ضرب داخلی، $\circ$، برای هر یك از صفحه‌های مماس خود مجهز باشد. لازم است که این ضرب داخلی دیفرانسیلپذیر باشد، بدین معنی که اگر V و W میدانهای برداری (دیفرانسیلپذیر) روی M باشند، آنگاه $V \circ W$ نیز یك تابع دیفرانسیلپذیر با مقدار حقیقی روی M باشد.

تأکید می‌شود که هر صفحهٔ مماس $T_p(M)$ ضرب داخلی مربوط به خود را دارد، و این ضربهای داخلی‌جز شرط دیفرانسیلپذیری هیچ وابستگی ندارند و این ضرورت مسلم هر نظریه‌ای است که براساس حساب دیفرانسیل بنا شود. در این تعریف، $V \circ W$ دارای همان معنی معمولی نقطه‌ای خود می‌باشد: یعنی تابعی است روی M که مقدار آن در هر

نقطهٔ $\mathbf{p}$ عدد $V(\mathbf{p}) \circ W(\mathbf{p})$ می‌باشد. این حاصلضربهای داخلی که به‌صفحه‌های مماس در تعریف ۲.۱ تخصیص داده شده‌اند، ساختار هندسی (یا تانسورمتریك یا «ds^2») روی M نامیده می‌شوند.

به‌اختصار:

$$\text{رویهٔ هندسی} = \text{ساختار هندسی} + \text{رویه}$$

باید توجه داشت که ازیك رویه به‌وسیلهٔ دو ساختار هندسی متفاوت، دو رویهٔ هندسی مختلف پدید می‌آید.

۳.۱. مثال. چند رویهٔ هندسی

(۱) صفحهٔ $\mathbf{E}^2$، همراه با حاصلضرب نقطه‌ای معمولی روی بردارهای مماس، معروفترین رویهٔ هندسی است. هندسهٔ آن هندسهٔ اقلیدسی دو بعدی است.

(۲) یك راه ساده برای به‌دست آوردن ساختارهای هندسی جدید، آن است که به ایجاد یك دگرگونی در ساختارهای پیشین بپردازیم. مثلاً اگر $g > 0$ یك تابع دیفرانسیلپذیر روی صفحه، و . ضرب نقطه‌ای معمولی باشد، به‌ازای بردارهای مماس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بر $\mathbf{E}^2$ در $\mathbf{p}$ قرار دهیم

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{g^2(\mathbf{p})}$$

یك ساختار جدید هندسی روی صفحه خواهیم داشت، که آن را برحسب تعریف، باساختار هندسی حاصل از ضرب نقطه‌ای همشکل می‌گویند (تمرین ۱). چنانکه خواهیم دید رویهٔ هندسی حاصل دارای خواص کاملاً متفاوتی با خواص صفحهٔ اقلیدسی (۱) است (به‌استثنای حالتهای خاصی از g).

(۳) اگر M رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه ضرب نقطه‌ای مربوط به $\mathbf{E}^3$ را می‌توان دربارهٔ بردارهای مماس M به‌کار برد، و با این ضرب داخلی، M یك رویهٔ هندسی خواهد شد. این دقیقاً همان روشی است که در فصول ۵ و ۶ به‌کار رفت. جز درمواردی که ضرب داخلی دیگری تصریح شود، با همین ضرب داخلی هر رویه از $\mathbf{E}^3$ را به‌یك رویهٔ هندسی تبدیل می‌کنیم.

در اینجا لازم است توضیحی دربارهٔ اصطلاحات بیاوریم. نام اقلیدس مترادف با استلزام هندسی است. بنابراین در فصل ۱، که با هندسه سروکار نداشتیم می‌بایستی $\mathbf{E}^2$ را صفحهٔ دکارتی می‌نامیدیم، و اصطلاح صفحهٔ اقلیدسی را برای رویهٔ هندسی (۱) در بالا، نگاه می‌داشتیم.

از همان آغاز تعریف ۲.۱، پرتوانی نظریهٔ هندسی حاصل موجب شگفتی می‌شود. اما چنانکه قبلاً عنوان شد، از مثالهای (۱) و (۳) برمی‌آید که نظریهٔ مزبور آمادهٔ کاوش

است، و حتی ویژگیهای مشترك این مسائل معرف نوع نتایجی هستند که می‌توان به‌حصول آنها امیدوار بود.

تعاریف فصل ۶ که به‌روشنی‌دارای سرشت ذاتی‌اند در اینجا بدون بحث بیشتر به‌کار خواهند رفت. به‌ویژه، یك ایزومتری $F: M \to \bar{M}$ از رویه‌های هندسی دلخواه دقیقاً همان است‌که در تعریف ۲.۴ فصل ۶ آمد، و هندسهٔ M بنا بر تعریف از تغییرناپذیرهای ایزومتری تشکیل‌می‌شود. مانند معمول میدان سه‌وجهی روی یك رویهٔ هندسی دلخواه M، از دو میدان برداری یکهٔ متعامد E_1، E_2 تشکیل می‌شود که روی مجموعهٔ بازی از M تعریف شده باشند. معادلات تعامد و یکانی

$$E_i \circ E_j = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant 2)$$

طبعاً برحسب ضرب داخلی M بیان می‌شوند. مانند پیش θ_1 و θ_2، ۱- فرمیهای دوگان با $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$ مشخص می‌شوند، و سپس فرم همبندی $\omega_{12} = -\omega_{21}$، با نخستین معادلات ساختاری زیر معین می گردد:

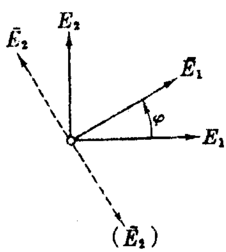
$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2, \qquad d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1$$

باردیگر تأکید می‌کنیم که این فرمهای θ_1، θ_2 و ω_{12} به‌طور تغییرناپذیری به‌رویهٔ هندسی M وابسته نیستند؛ اگریك میدان سه‌وجهی دیگر $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ انتخاب‌کنیم، فرمهای متفاوت $\bar{\theta}_1$، $\bar{\theta}_2$ و $\bar{\omega}_{12}$ به‌وجود می آیند. پیش از آنکه جلوتر برویم، بهتر است چگونگی‌ارتباط چنین دومجموعه فرمها را بررسی‌کنیم.

در یك همسایگی نقطهٔ $\mathbf{p}$ که به‌قدرکافی کوچك اختیار شود، استفادهٔ دقیق از تابع وارون $\cos^{-1}$ (یا $\sin^{-1}$) یك تابع دیفرانسیلپذیر φ به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که

$$\bar{E}_1 = \cos\varphi\, E_1 + \sin\varphi\, E_2$$

φ راتابع‌زاویه‌ی از E_1، E_2، به $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ می‌نامیم. چنان‌که درشکل ۱.۷ نشان داده شده است، برای $\bar{E}_2$ دو امکان وجود دارد. یکی



شکل ۱.۷

$$\bar{E}_2 = -\sin\varphi\, E_1 + \cos\varphi\, E_2$$

که دراین‌حالت گوییم $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ و E_1، E_2 دارای یك‌جهت‌اند، و دیگری

$$\bar{E}_2 = \sin\varphi\, E_1 - \cos\varphi\, E_2$$

که دارای جهت مخالف است.

۴.۱ لم. گیریم E_1، E_2 و $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ میدانهای سه‌وجهی روی یك ناحیهٔ M باشند. اگر این میدانهای سه‌وجهی دارای:

(۱) یك جهت باشند، آنگاه

$$\bar{\omega}_{۱۲}=\omega_{۱۲}+d\varphi, \quad \text{و} \quad \bar{\theta}_۱\wedge\bar{\theta}_۲=\bar{\theta}_۱\wedge\theta_۲$$

(۲) دارای جهت مخالف باشند، آنگاه

$$\bar{\omega}_{۱۲}=-(\omega_{۱۲}+d\varphi), \quad \text{و} \quad \bar{\theta}_۱\wedge\bar{\theta}_۲=-\theta_۱\wedge\theta_۲$$

برهان. فقط حالت اول‌را مورد بحث قرارمی‌دهیم، زیرا حالت دوم تنها با یك تغییرعلامت به‌دست می‌آید. بنا برفرمول پایه‌ها (لم ۱.۲، فصل۶) از معادلات

$$\bar{E}_۱=\cos\varphi\, E_۱+\sin\varphi\, E_۲, \qquad \bar{E}_۲=-\sin\varphi\, E_۱+\cos\varphi\, E_۲$$

چنین به‌دست می‌آید:

$$\theta_۱=\cos\varphi\,\bar{\theta}_۱-\sin\varphi\,\bar{\theta}_۲, \qquad \theta_۲=\sin\varphi\,\bar{\theta}_۱+\cos\varphi\,\bar{\theta}_۲ \tag{۰}$$

چون از مشتق خارجی دربارهٔ معادلهٔ اول استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$d\theta_۱=-\sin\varphi\, d\varphi\wedge\bar{\theta}_۱+\cos\varphi\, d\bar{\theta}_۱-\cos\varphi\, d\varphi\wedge\bar{\theta}_۲-\sin\varphi\, d\bar{\theta}_۲$$

اکنون از نخستین معادلات ساختاری برای $d\bar{\theta}_۱$، $d\bar{\theta}_۲$ استفاده می‌کنیم، وخواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d\theta_۱&=(\bar{\omega}_{۱۲}-d\varphi)\wedge(\sin\varphi\,\bar{\theta}_۱+\cos\varphi\,\bar{\theta}_۲)\\ &=(\bar{\omega}_{۱۲}-d\varphi)\wedge\theta_۲ \end{aligned}$$

به‌همین طریق به‌دست می‌آید:

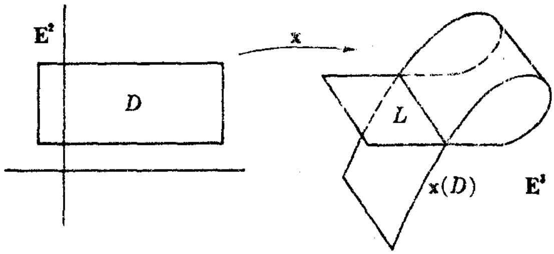
$$d\theta_۲=-(\bar{\omega}_{۱۲}-d\varphi)\wedge\theta_۱$$

چون فرم $\omega_{۱۲}=-\omega_{۲۱}$ به‌طور یکتا در نخستین معادلهٔ ساختاری صدق می‌کند، از دو معادلهٔ اخیر نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید: $\omega_{۱۲}=\bar{\omega}_{۱۲}-d\varphi$. محاسبهٔ مستقیم $\theta_۱\wedge\theta_۲$ با استفاده از (۰) نشان می‌دهد که این ۲- فرمی با $\bar{\theta}_۱\wedge\bar{\theta}_۲$ برابر است. ∎

از مفهوم رویهٔ هندسی می‌توان برای پرکردن شکافی که درکارقبلی وجود داشت استفاده کنیم. گاهی به‌نگاشتهای منظم $\mathbf{x}: D\to\mathbf{E}^۳$ برمی‌خوردیم که نمایش‌پارامتری هیچ رویه‌ای از $\mathbf{E}^۳$ نبودند. مثلاً نگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ از ناحیهٔ D ممکن است با خود متقاطع باشد، چنان که درشکل۲.۷ نشان داده‌ایم، بدینسان تعریف رویه در $\mathbf{E}^۳$ در طول خط تقاطع L صادق نیست.

این اشکال فنی را می‌توان بدین‌طریق از بین بردکه برای D (که یك رویه است) به‌جای ضرب نقطه‌ای معمولی، ضرب داخلی القایی

$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=\mathbf{x}_*(\mathbf{v})\cdot\mathbf{x}_*(\mathbf{w})$$



شکل ۲۰۷

را درنظر بگیریم. بدینسان D یك رویهٔ هندسی خواهد شد، و اگر $\mathbf{x}(D)$ یك رویه در $\mathbf{E}^3$ باشد، $\mathbf{x}$ به‌وضوح یـك ایزومتری خواهد بود. خلاصه، D دقیقاً دارای همان هندسهٔ ذاتی خواهد بود که به‌طور شهودی برای $\mathbf{x}(D)$ تصور می‌شود.

در این فصـل نیز مانند پیش قید ابعادکم، اساسی نیست. رویه یك حالت دوبعدی از مفهوم کلی خمینه است (فصل ۴، بند ۸). خمینهٔ M با بعد دلخواه که به‌یك ضرب داخلی (دیفرانسیلپذیر) روی هریك از فضاهای مماس‌خود مجهز باشد خمینهٔ ریمانی نام دارد، و هندسهٔ حاصل به‌هندسهٔ ریمانی موسوم است. (هندسهٔ اقلیدسی، چنان که در فصل ۳ موردبحث قرارگرفت، حالت خاصی از هندسهٔ ریمانی است کـه روی فضای اقلیدسی $\mathbf{E}^n$ با ضرب نقطه‌ای معمولیش به‌دست می‌آید.) بدینسان یك رویهٔ هندسی همان خمینهٔ ریمانی دوبعدی است، و موضوع این فصل هندسهٔ ریمانی دوبعدی می‌باشد.[1]

تمرینات

۱. دربارهٔ ساختار هندسی همشکل روی صفحه (مثال ۳.۱) نشان دهید که

(الف) فرمول

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \cos \vartheta \qquad (\text{که در آن } \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \circ \mathbf{v}})$$

برای زاویهٔ $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ همان مقـدار زاویه در صفحـهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$ را به‌دست می‌دهد.

(ب) تندی خم $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ برابراست با $\sqrt{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2}\,/g(\alpha)$.

(ج) gU_1، gU_2 یك‌میدان سه‌وجهی‌است و فرمهای دوگان‌آن عبارت‌اند از du/g، dv/g.

(د) فرمهای‌مساحت‌عبارت‌اند از $\pm\, du\, dv/g^2$.

توجه شود که به‌ازای $g = 1$ همان ساختار اقلیدسی معمول را خواهیم داشت.

---

۱. به‌نظرما ارجح آن بودکه رویهٔ هندسی، رویهٔ ریمانی نامیده شود، اما این اصطلاح به معنی کاملاً متفاوتی به‌کار رفته و تثبیت شده است.

۲. نیمصفحهٔ پوانکاره عبارت است از نیمصفحهٔ فوقانی $v > 0$ مجهز به‌ضرب داخلی(۱) که در هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از تقسیم حاصل‌ضرب نقطه‌ای به‌مجذور مسافت $v(\mathbf{p}) = p_2$ ازمحور u به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{v^2(\mathbf{p})}$$

برای خم $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$، $0 < t < \pi$، توابع تندی‌و طول‌کمان (مبدأ کمان را بالاترین نقطهٔ نیمدایره متناظر به $t = \pi/2$ بگیرید) را بیابید.

۳. (الف) گیریم V و W دو میدان برداری مستقل خطی روی یك رویهٔ هندسی M باشند. مطلوب است تعیین یك میدان سه‌وجهی E_1، E_2 به‌طوری‌که $E_1 = V/\|V\|$.
(ب) فرمول صریحی برای یك میدان سه وجهی روی نگارهٔ یك قطعه مختصاتی دلخواه $\mathbf{x}$ در M بیابید.

۴. اگر dM یك فرم مساحتی روی M و ν یك ۲-فرمی دلخواه باشد، نشان دهیدکه یك تابع f وجود دارد به‌طوری‌که $\nu = f\, dM$. از آنجا نتیجه بگیریدکه هررویهٔ هندسی جهت‌پذیر (همبند) دقیقاً دارای دوفرم مساحتی $\pm dM$ است.

۵. گیریم M یك رویهٔ هندسی باشد، که بسا فرم مساحتی dM جهتدار شده است. ثابت کنیدکه
(الف) روی هرفضای مماس بر M یك «دوران $+90°$» یکتا وجود دارد، یعنی یك عملگر خطی $J: T_p(M) \to T_p(M)$ به‌طوری‌که

$$\|J(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \qquad J(\mathbf{v}) \circ \mathbf{v} = 0$$

و

$$dM(\bar{\mathbf{v}}, J(\mathbf{v})) > 0 \qquad (\text{اگر } \mathbf{v} \neq 0)$$

(راهنمایی: اگر E_1، E_2 میدان سه‌وجهی با جهت مثبت باشد،

$$J(E_1) = E_2, \quad J(E_2) = -E_1)$$

مجموعهٔ این عملگرها، متناظر به‌همهٔ نقاط M را عملگر دوران M می‌نامیم.
(ب) J دیفرانسیل‌پذیر ($J(V) \circ J(W)$ بـه ازای هر دو میدان بـرداری V و W دیفرانسیل‌پذیر است) ومتقارن چپ، یعنی

$$J(V) \circ W + V \circ J(W) = 0$$

و $J^2 = -I$ (I عملگر همانی است.)

---

۱. باحالات خاصی که درتمرین ۱۴، بند ۴، فصل۲ آمد مقایسه کنید.

(ج) اگر M با dM — جهت داده شود، آنگاه عملگر دوران J — خواهد بود.
(د) اگر M یک رویه در $\mathbf{E}^3$ باشد، که با قائم یکهٔ U جهتدار شده است، آنگاه $J(V)=U\times V$.

عملگر J، درمورد رویه‌هایی که در $\mathbf{E}^3$ نیستند، به‌عنوان نوعی جانشین قائم یکهٔ U به‌کار می‌رود. به‌ویژه (d)، نشان می‌دهد که چگونه طرحی که درفصل ۶ (صفحهٔ ۳۲۷) برای اندازه‌گیری زوایای جهتدار داده شد، دربارهٔ یک رویهٔ هندسی (جهتدار) دلخواه به‌کار می‌رود.

۶. اگر $F: M \to N$ یک نگاشت منظم از رویه‌های هندسی جهتدار باشد، نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند:
(الف) F سونگهدار و یک نگاشت همشکل است (تعریف ۷.۴، فصل ۶).
(ب) F عملگرهای دوران M و N را حفظ می‌کند، یعنی به ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر M:

$$F_*(J(\mathbf{v}))=\bar{J}(F_*(\mathbf{v}))$$

(ج) F زوایای جهتدار را حفظ می‌کند، یعنی اگر ϑ زاویهٔ $\mathbf{w}$ با $\mathbf{v}$ باشد، آنگاه ϑ زاویهٔ $F_*(\mathbf{w})$ با $F_*(\mathbf{v})$ نیز می‌باشد.

۷. (الف) ثابت کنید که نگاشت منظم $F=(f, g): \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ یک نگاشت همشکل[1] و سونگهدار است، اگر، وفقط اگر، $f_u=g_v$، $f_v=-g_u$.

اگر $\mathbf{E}^2$ را به‌عنوان صفحهٔ مختلط با $z=u+iv=(u, v)$ درنظر بگیریم، این دومعادله (شرایط کوشی-ریمان) مبین شرط لازم وکافی برای تحلیلی بودن تابع مختلط $F: z \to F(z)$ می‌باشند.
(ب) اگر F چنین تابع مختلطی باشد، نشان دهید که سازهٔ مقیاس $\lambda(z)$ برابر قدرمطلق مشتق (مختلط) dF/dz است.

۸. اگر از $\mathbf{E}^2$ مبدأ را حذف کنیم، نشان دهید که نگاشت F در مثال ۲، بند ۳.۷، فصل ۱، نگاشتی همشکل و سونگهدار است. دراین حالت تابع مختلط متناظر را بیابید.

۹. گیریم D و E دوناحیه ازصفحه باشند که به‌ترتیب با توابع g_1 و g_2 به‌ساختارهای هندسی همشکل مجهز شده‌اند. فرض کنیم D' و E' همان نواحی با ساختار اقلیدسی معمول باشند. اگر $F: D' \to E'$ یک نگاشت همشکل با سازهٔ مقیاس λ باشد، ثابت کنید که $F: D \to E$ نگاشتی همشکل با سازه مقیاس $\lambda g_1/g_2(F)$ است.

---

۱. اصطلاح همشکل غالباً متضمن مفهوم سونگهداری است.

۲. خمیدگی گاوسی

درمورد رویه‌های هندسی دلخواه، لازم است برای خمیدگی گاوسی به تعریف جدیدی بپردازیم. تعریف $K=\det S$ که برای رویه‌ها در $\mathbf{E}^3$ بیان شد، چون برعملگرهای شکلی مبتنی است، دراینجا فاقد معنی است. اما با این تعریف جالب K به‌صورت یك تغییرناپذیر ایزومتری درمی‌آید، بنابراین مناسب است که برهان قضیهٔ فوق‌العاده (به ویژه فرع ۳.۲، فصل ۶) را موردبررسی قراردهیم وبرای آن تعمیم رضایت‌بخشی به‌دست آوریم.

۱.۲. قضیه. تنها یك تابع با مقدار حقیقی K روی یك رویهٔ هندسی M وجود دارد، به‌طوری که به‌ازای هرمیدان سه‌وجهی روی M معادلهٔ ساختاری دوم

$$d\omega_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2$$

برقرار باشد. K را خمیدگی گاوسی M می‌نامند.

برهان. به‌ازای هرمیدان سه‌وجهی E_1، E_2 تنها یك تابع K وجود دارد (بنابر فرمول پایه‌ها، لم ۱.۲، فصل ۶) به‌طوری که

$$d\omega_{12}=-K\theta_1\wedge\theta_2$$

اما یك میدان سه‌وجهی دیگر $\bar{E}_1$، $\bar{E}_2$ می‌تواند از پیش دارای یك تابع متفاوت $\bar{K}$ باشد، به‌طوری که

$$d\bar{\omega}_{12}=-\bar{K}\bar{\theta}_1\wedge\bar{\theta}_2$$

آنچه باید اثبات کنیم مسألهٔ سازگاری است: در ناحیهٔ مشترك حوزه‌های این میدانهای سه‌وجهی، داریم $K=\bar{K}$. چون‌این گونه حوزه‌ها همهٔ M را می‌پوشانند (تمرین ۳، بند۱) یك تابع یکتای K روی M، با ویژگی مطلوب، نتیجه می‌شود. این سازگاری نیز مستقیماً از لم ۴.۱ به‌دست می‌آید. نخست‌حالتی راکه میدانهای سه‌وجهی دارای جهت‌دهی‌یکسان‌اند درنظر می‌گیریم، لذا $\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\varphi$. از آنجا $d\bar{\omega}_{12}=d\omega_{12}$، زیرا $d^2=0$. اما دراین صورت

$$K\theta_1\wedge\theta_2=\bar{K}\bar{\theta}_1\wedge\bar{\theta}_2$$

وچون

$$\bar{\theta}_1\wedge\bar{\theta}_2=\theta_1\wedge\theta_2\neq 0$$

نتیجه می‌شود که

$$\bar{K}=K$$

هنگامی که‌میدانهای‌سه‌وجهی دارای‌جهت مخالف باشند، خواهیم داشت $d\bar{\omega}_{12}=-d\omega_{12}$،

دراین حالت هم $\bar{K}=K$ است؛ زیرا

$$\bar{\theta}_1 \wedge \bar{\theta}_2 = -\theta_1 \wedge \theta_2 \qquad \blacksquare$$

چنان‌که در بالا دیدیم، فرع ۳.۲ فصل ۶ نشان می‌دهد که این تعریف کلیتر خمیدگی گاوسی، با تعریف $K=\det S$ درحالتی‌که M رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ باشد، مطابقت دارد. اثبات تغییرناپذیری ایزومتری که درآنجا بـه دست آمد کاملاً دارای خصوصیت ذاتی است، و بنابراین دربارهٔ رویه‌های هندسی دلخواه نیز صدق می‌کند.

خمیدگی گاوسی ویژگی اصلی یك رویهٔ هندسی M است، و بر بسیاری از مهمترین خواص M غالباً تـأثیر قاطعی دارد. دربند ۶ تأثیر خمیدگی بر ژئودزیکهـا و دربند ۸ تأثیرهایش را بر توپولوژی M بررسی خواهیم کرد.

خلاصه آنکه: نقش اساسی در بررسیهای هندسی کـه برحسب یك میدان سه‌وجهی E_1، E_2 انجام می‌شود با معادلات ساختاری آن است

$$\begin{cases} d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2 \\ d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1 \end{cases}$$

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$$

معادلات ساختاری اول در واقع معرف فرم همبندی

$$\omega_{12} = -\omega_{21}$$

از میدان سه وجهی مزبورند، و آخرین معادلـهٔ ساختاری معرف خمیدگی گاوسی K از رویهٔ هندسی مزبور (مستقل از انتخاب میدان سه‌وجهی) است. از بند ۶ فصل ۶ به‌روشنی دیـده می‌شود کـه چگونه می‌توان از این تعاریف ضمنی بـه محاسبهٔ صریح ω_{12} و K دست یافت.

۲.۴ مثال. خمیدگی گاوسی

(۱) صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$. اگر ازمیدان سه‌وجهی طبیعی U_1، U_2 استفاده کنیم، آنگاه ۱-فرمیهای دوگان عبارت خواهند بود از $\theta_1 = du$ و $\theta_2 = dv$. چون $d\theta_1 = d\theta_2 = 0$، بنابراین فرم متحد با صفر $\omega_{12}=0$ درنخستین معادلات ساختاری صدق می کند، وبنابراین فرم همبندی U_1، U_2 خواهد بود. از طرف دیگر چون $d\omega_{12}=0$، پس $K=0$، و صفحهٔ اقلیدسی مسطح است. این چندان تعجبی ندارد، زیرا $\mathbf{E}^2$ با یك صفحه در $\mathbf{E}^3$ ایزومتریك است، و درمورد این صفحه می‌دانستیم که به علت صفربودن عملگرهای شکلی آن داریم $K=0$.

(۲) صفحه با ضرب داخلی همشکل

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{g(\mathbf{p})^2}$$

(مثال ۳.۱، (۲) را ببینید).

میدان سه‌وجهی اقلیدسی طبیعی U_1، U_2 نسبت به‌این ضرب داخلی جدید دیگر یك میدان سه‌وجهی نیست. گرچه U_1 و U_2 همچنان متعامدند اما

$$U_1 \circ U_1 = U_2 \circ U_2 = \frac{1}{g^2}$$

بدینسان gU_1، gU_2 یك‌میدان سه‌وجهی خواهد بود. به‌آسانی نتیجه می‌شود که ۱-فرمهای دوگان آن عبارت‌اند از:

$$\theta_1 = \frac{du}{g}, \qquad \theta_2 = \frac{dv}{g}$$

برای به‌دست‌آوردن فرم همبندی ω_{12}، نخست از θ_1 و θ_2 دیفرانسیل می‌گیریم

$$d\theta_1 = d\left(\frac{1}{g}\right) \wedge du$$

$$d\theta_2 = d\left(\frac{1}{g}\right) \wedge dv$$

اما $d(1/g) = -dg/g^2$ و $dg = g_u\, du + g_v\, dv$. چون $du\, du = dv\, dv = 0$، خواهیم داشت:

$$d\theta_1 = \left(\frac{g_v}{g} du\right) \wedge \theta_2$$

$$d\theta_2 = -\left(\frac{-g_u}{g}\, dv\right) \wedge \theta_1 \qquad (*)$$

از مقایسه با نخستین معادلات ساختاری به‌دست می‌آید

$$\omega_{12} = \frac{1}{g}(g_v\, du - g_u\, dv)$$

این فرم ω_{12} با توجه به (*) در نخستین معادلات ساختاری صدق می‌کند، و بنابریکتایی، باید همان فرم همبندی باشد.

برای محاسبهٔ خمیدگی باردیگر دیفرانسیل می‌گیریم:

$$d\omega_{12} = d\left(\frac{1}{g}\right) \wedge (g_v\, du - g_u\, dv) + \frac{1}{g}(g_{vv}\, dv\, du - g_{uu}\, du\, dv)$$

اما می‌دانیم که

$$d\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{-1}{g^{2}}(g_u\,du+g_v\,dv)$$

و $du=g\theta_1$، $dv=g\theta_2$. محاسبهٔ ساده‌ای با استفاده از این روابط به‌دست می‌دهد:

$$d\omega_{12}=(g_u^2+g_v^2-g(g_{uu}+g_{vv}))\,\theta_1\wedge\theta_2$$

بدینسان با استفاده از معادلهٔ ساختاری دوم بدین‌نتیجه می‌رسیم که

$$K=g(g_{uu}+g_{vv})-(g_u^2+g_v^2)$$

ضرب داخلی القایی که در صفحهٔ ۳۴۶ مورد بحث قرار گرفت، در موارد دیگر نیز به‌کار می‌رود. مثلاً گیریم که $F: M \to N$ یك دیفئومرفیسم رویه‌ها (فصل ۴، بند ۵) و N یك رویهٔ هندسی باشد. در این‌صورت ضرب داخلی القایی

$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=F_*(\mathbf{v})\circ F_*(\mathbf{w})$$

روی بردارهای مماس بر M، موجب می‌شود که M یك رویهٔ هندسی گردد، و F به‌صورت یك ایزومتری درآید. M را می‌توان «مدل جدید» N تلقی کرد، با اینکه ممکن است متفاوت با N به‌نظرآید، از لحاظ هندسی با آن متحد است.

۲.۳.۰ مثال

(۱) **کرهٔ منظری.** در مثال ۵.۵ فصل ۴ ثابت کردیم که تصویر منظری P، یك دیفئومرفیسم از کرهٔ Σ_0 با حذف یك نقطه، روی صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$ می‌باشد. اکنون Σ_0 را تنها به‌عنوان یك‌رویه، و $\mathbf{E}^2$ را همراه با ضرب نقطه‌ای معمولی آن به‌عنوان یك رویهٔ هندسی درنظر می‌گیریم. بدینسان ضرب داخلی القایی، Σ_0 را به‌صورت یك رویهٔ هندسی که با $\mathbf{E}^2$ ایزومتریك، وبنابراین هموار می‌باشد، در می‌آورد. اگر Σ_0 به‌نظر گرد می‌آید، تنها به‌خاطر آن است که ما با دید اقلیدسی به آن نگاه می‌کنیم، یعنی به‌خطا فرض می‌کنیم که Σ_0 باید مانند فصل ۵ دارای همان ضرب نقطه‌ای $\mathbf{E}^3$ باشد.

(۲) **صفحهٔ منظری.** اکنون برعکس مثال (۱)، Σ_0 را با ساختار هندسی‌معمولی آن به‌عنوان یك رویه در $\mathbf{E}^3$ و $\mathbf{E}^2$ را تنها به‌عنوان یك رویه درنظر می‌گیریم.
عکس تصویرمنظری، $P^{-1}: E^2 \to \Sigma_0$ نیزیك‌دیفئومرفیسم است. ضرب داخلی (∘) که به‌وسیلهٔ P^{-1} روی $\mathbf{E}^2$ القاء می‌شود، $\mathbf{E}^2$ را به‌صورت یك‌رویهٔ هندسی(صفحهٔ منظری) درمی‌آورد که با Σ_0 ایزومتریك است، و بدینسان دارای خمیدگی $K=+1$ می‌باشد.

اکنون این صفحهٔ منظری جدید را مورد بررسی دقیقتر قرارمی‌دهیم. در اینجا نقطهٔ (•) طبق معمول ضرب نقطه‌ای روی $\mathbf{E}^2$ یا $\mathbf{E}^3$ را نشان می‌دهد.

اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای مماس بر $\mathbf{E}^2$ در $\mathbf{q}=P(\mathbf{p})$ باشند، آنگاه $\tilde{\mathbf{v}}$ و $\tilde{\mathbf{w}}$ را بردارهای

یکتای مماس بر Σ_0 در **p** می‌گیریم به‌طوری که در $P_*(\tilde{\mathbf{v}})=\mathbf{v}$ ، $P_*(\tilde{\mathbf{w}})=\mathbf{w}$ صدق کنند (شکل ۳۰۷). اما با توجه به‌تمرین ۱۴، فصل ۶، بند ۴ می‌دانیم که

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=P_*(\tilde{\mathbf{v}})\cdot P_*(\tilde{\mathbf{w}})=\left(1+\frac{\|\mathbf{q}\|^2}{4}\right)^2\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{w}}$$

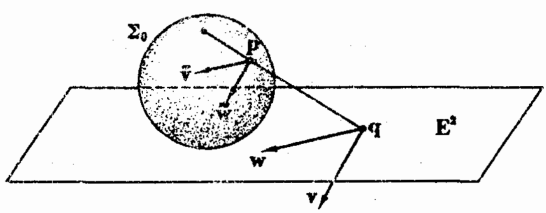
اما چون $(P^{-1})_*$ بردارهای **v** و **w** را به‌همان $\tilde{\mathbf{v}}$ و $\tilde{\mathbf{w}}$ برمی‌گرداند، بنابراین برای ضرب داخلی القایی روی $\mathbf{E}^2$ خواهیم داشت

$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=(P^{-1})_*(\mathbf{v})\cdot(P^{-1})_*(\mathbf{w})=\tilde{\mathbf{v}}\cdot\tilde{\mathbf{w}}=\left(1+\frac{\|\mathbf{q}\|^2}{4}\right)^{-2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

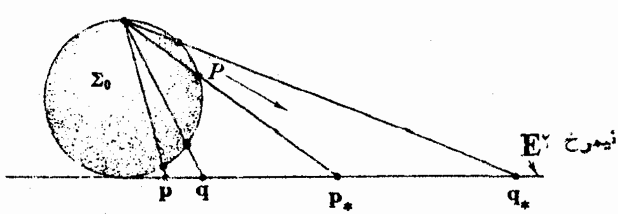
که از آن مستقیماً نتیجه می‌شود که این‌ضرب داخلی از نوع همشکلی‌هایی است که درمثال ۳۰۱ بحث شد و برای آن داشتیم

$$g=1+\frac{u^2+v^2}{4}$$

برای تجسم این «صفحهٔ» غیرعادی می‌توان تصور کرد که هرچه از مبدأ دورتر شویم، طول خطکشها افزایش می‌یابد. اما چون P یك ایزومتری است، مسافت ذاتی از **p** تا **q** (درشکل ۴۰۷) دقیقاً همان مسافت از $\mathbf{p}_*$ تا $\mathbf{q}_*$ است. همچنین دایره‌های $u^2+v^2=r^2$ که در آنها r بسیار بزرگ باشد، عملاً دارای طول کمان منظری بسیار کوچك خواهند بود،



شکل ۳۰۷



شکل ۴۰۷

زیرا (بر اثر ایزومتری P) با دایره‌های کوچکی حول قطب شمال در $\Sigma_\circ$ متناظر می‌باشند.

۴.۳. مثال. صفحهٔ هذلولوی. اکنون ضرب داخلی منظری بالا را با تغییرعلامتی بررسی می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$g = 1 - \frac{u^2+v^2}{4}$$

چون لازم است که داشته باشیم $g > 0$، این ضرب داخلی هذلولوی، $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = (1/g^2)\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ تنها در قرص $u^2+v^2 < 4$ به‌شعاع ۲ در صفحهٔ مزبور به‌کار می‌رود. رویهٔ هندسی حاصل صفحهٔ هذلولوی H نامیده می‌شود.

در این حالت

$$g_u = \frac{-u}{2}, \quad g_v = \frac{-v}{2} \quad \text{و} \quad g_{uu} = g_{vv} = \frac{-1}{2}$$

بدینسان با توجه به‌محاسبات مثال ۲.۲ داریم

$$\omega_{12} = \frac{1}{2g}(u\,dv - v\,du)$$

و در نتیجه صفحهٔ هذلولوی دارای خمیدگی گاوسی ثابت $K = -1$ است.

هنگامی که نقطهٔ (u, v) به‌لبهٔ H یعنی به‌دایرهٔ $u^2+v^2 = 4$ (که جزو H نیست!) نزدیک می‌شود، $g(u, v)$ به‌صفر می‌گراید. بدینسان با تعبیر بالا، طول خطکش با نزدیک شدن به‌لبه کاهش می‌یابد، به‌طوری که H از آنچه دید اقلیدسی شخص نشان می‌دهد بسیار بزرگتر خواهد بود. به‌عنوان مثال، تابع طول کمان $s(t)$ مربوط به‌قطعهٔ خط اقلیدسی

$$\alpha(t) = (t\cos\vartheta,\ t\sin\vartheta) \qquad 0 \leqslant t < 2$$

با ϑ ثابت را که ازمبدأ تقریباً به‌لبه می‌رسد محاسبه می‌کنیم. چون $\alpha' = (\cos\vartheta,\ \sin\vartheta)$ بنابراین $\alpha' \circ \alpha' = 1/g(\alpha)^2$. اما

$$g(\alpha(t)) = 1 - \frac{t^2}{4}$$

در نتیجه α دارای تندی هذلولوی

$$\|\alpha'(t)\| = \frac{1}{g(\alpha)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)}$$

است، و بدینسان داریم

$$s(t)=\int_{\circ}^{t}\frac{dt}{1-\frac{t^{۲}}{۴}}=۲\tanh^{-۱}\frac{t}{۲}=\log\frac{۲+t}{۲-t}$$

بدینسان هنگامی که t به‌سمت ۲ می گراید، $s(t)$ طول کمان از مبدأ $\alpha(\circ)$ تا $\alpha(t)$ به‌بینهایت می گراید. این قطعه خط «کوتاه» α در واقع دارای طول هذلولوی نامتناهی است. خواص دیگر صفحهٔ هذلولوی را به‌تدریج که پیش می‌رویم شرح خواهیم داد. چنان که خواهیم دید شبه کرهٔ واقعی، یعنی رویه‌ای که خمیدگی آن ثابت منفی باشد، همین رویه است، نه رویهٔ شیپوری (مثال ۶.۶، فصل ۵).

۵.۲ مثال. چنبرهٔ هموار. چنبرهٔ دورانی T را تنها به‌عنوان یك رویه درنظرمی گیریم و فرض کنیم $\mathbf{x}:\mathbf{E}^{۲}\to T$ نمایش پارامتری معمولی آن باشد (مثال ۲.۶، فصل ۴). اکنون روی T یك ساختار هندسی با روابط زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathbf{x}_u\circ\mathbf{x}_u=۱,\qquad \mathbf{x}_u\circ\mathbf{x}_v=\circ,\qquad \mathbf{x}_v\circ\mathbf{x}_v=۱$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این روابط روی هرصفحهٔ مماس T بدون ابهام یك ضرب داخلی را تعریف می کنند.

چون $\mathbf{x}_*(U_۱)=\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_*(U_۲)=\mathbf{x}_v$ مستقیماً نتیجه می‌شود که $\mathbf{x}$ یك ایزومتری موضعی از صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^{۲}$ روی رویهٔ هندسی T می باشد. چون ایزومتریهای موضعی نیز خمیدگی گاوسی‌را حفظ می کنند، بنابراین T هموار است. بدینسان این‌ساختارهندسی، با چنبرهٔ معمولی در $\mathbf{E}^{۳}$ که دارای خمیدگی متغیر است متفاوت می باشد.

چون این چنبرهٔ T فشرده و هموار است، بنا برقضیهٔ ۵.۳ فصل ۶، هرگز در $\mathbf{E}^{۳}$ چنین رویه‌ای یافت نمی‌شود. صریحاً آنکه هیچ رویهٔ $M\subset\mathbf{E}^{۳}$ که با T ایزومتریك باشد وجود ندارد، زیرا رویهٔ M نیز باید فشرده و هموار باشد، واین با قضیهٔ مذکور مغایر است. بدین‌وسیله مدلل می گردد که ردهٔ رویه‌های هندسی به‌مراتب از ردهٔ رویه‌های واقع در $\mathbf{E}^{۳}$ غنیتر است. امیدواریم که در طول این فصل خواننده را متقاعد سازیم که موضوع طبیعی بحث و بررسی را رویه‌های هندسی تشکیل می‌دهند، و رویه‌های واقع در $\mathbf{E}^{۳}$ هرچند در نظر اول چنین می نماید که مستقیماً قابل درك‌اند، تنها یك حالت خاص جالب رویه‌ها می باشند.

از مثال بالا نباید نتیجه گرفت که هر رویه را می‌توان به‌یك ساختار هندسی هموار مجهز کرد. چنان که در بند ۸ خواهیم دید این امر متضمن نکات دقیق توپولوژیکی است.

۶.۲ تبصره. تا اینجا علامت نقطه (.) را به‌ضرب نقطه‌ای فضای اقلیدسی اختصاص داده بودیم، و دایرهٔ کوچك ($\circ$) را برای تأکید عمومیت ضرب داخلی روی یك رویهٔ هندسی دلخواه به‌کار بردیم. ازاینجا به‌بعد نقطه را برای همهٔ ضربهای داخلی به‌کار می‌گیریم، وتنها هنگامی که، مانند مثال ۴.۲، هردو ضرب با هم در بحث مطرح شوند به‌قرارداد پیش برمی گردیم.

تمرینات

۱. فرمهای دوگان و فرم همبندی $\omega_{12}=du/v$ را در مورد میدان سه‌وجهی vU_1، vU_2 روی نیمصفحهٔ پوانکاره (تمرین۲، فصل۷، بند ۱) بیابید، و نشان دهید که این رویه دارای خمیدگی منفی ثابت $K=-1$ است.

۲. برای تمامی صفحه ساختار هندسی همشکل زیر را درنظر می‌گیریم

$$g=\cosh(uv)$$

فرمهای دوگان و فرم همبندی میدان سه‌وجهی gU_1، gU_2 را محاسبه کنید و خمیدگی گاوسی K را نتیجه بگیرید.

۳. در صفحهٔ هذلولوی مساحت قرص $u^2+v^2\leqslant r^2$ را بیابید. (راهنمایی: E، F، G را برای ۲- قطعه‌ای

$$\mathbf{x}(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v)$$

بیابید.) مساحت تمام صفحهٔ هذلولوی چیست؟

۴. چون در مثال ۴.۲ به‌جای تابع g تابع $g=1+(u^2+v^2)/4r^2$ را درنظر بگیریم، صفحهٔ هذلولوی با شبه شعاع r به‌دست می‌آید. خمیدگی گاوسی آن را بیابید.

۵. مساحت چنبرهٔ هموار در مثال ۵.۲ را بیابید. تعریف را به‌گونه‌ای تغییر دهید که یك چنبرهٔ هموار با مساحت دلخواه $A>0$ به‌دست آید.

۶. نشان دهید که روی صفحهٔ تصویری یك ساختارهندسی وجود دارد به‌طوری که نگاشت طبیعی $P:\Sigma\to\bar{\Sigma}$ یك ایزومتری موضعی باشد. ثابت کنید که این رویهٔ هندسی $\bar{\Sigma}$ از رویه‌های واقع در $\mathbf{E}^3$ نیست. (اگر Σ کره‌ای به‌شعاع r باشد، $\bar{\Sigma}$ صفحهٔ تصویری به‌شعاع r خواهد شد و همین نتایج برقرارند.)

۷. نشان دهید که چون صفحه را با $g=\operatorname{sech} u$ به‌ساختارهندسی‌همشکلی‌مجهزکنیم، رویهٔ هندسی حاصل با هایکوئید ایزومتریك می‌باشد.

۸. نگاشت همانی $\mathbf{x}(u,v)=(u,v)$ از $\mathbf{E}^2$ یك قطعه مختصاتی‌می‌باشدکه برای آن داریم $\mathbf{x}_u=U_1$، $\mathbf{x}_v=U_2$. بدینسان اگر($\circ$) یك ساختار هندسی روی صفحه باشد، خواهیم داشت

$$E=U_1\circ U_1,\quad F=U_1\circ U_2,\quad G=U_2\circ U_2$$

(الف) اگر E، F و G سه تابع دیفرانسیلپذیر روی صفحه باشند به‌طوری که $E>0$، $G>0$، $EG-F^2>0$، نشان دهید که متناظر به این توابع، مانند بالا، یك ساختارهندسی روی صفحه وجود دارد.

(ب) نشان دهید روشی که درمثال ۲.۲ به‌کار رفت حالت خاص روش فصل ۶، بند ۶ می‌باشد و از لم ۳.۶ فصل ۶ فرمول K را که درمثال ۲.۲ آمده است نتیجه بگیرید. (راهنمایی: درقسمت (الف) ضرب‌داخلی را به‌صورت

$$\mathbf{V} \circ \mathbf{W} = Ev_1w_1 + F(v_1w_2 + v_2w_1) + Gv_2w_2$$

تعریف کنید.)

۳. مشتق کوواریانی

مشتق کوواریانی ∇ (فصل ۲، بند ۵) یک بخش اساسی از هندسهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^3$ می‌باشد. به‌عنوان مثال از آن برای تعریف عملگر شکلی یک رویه در $\mathbf{E}^3$ و با تغییری (فصل ۲، بند ۲) برای تعریف شتاب خم در $\mathbf{E}^3$ استفاده کردیم. دراین بند ثابت می‌کنیم که هر رویهٔ هندسی دارای مشتق کوواریانی بامفهوم مخصوص به‌خود می‌باشد.

یک مشتق کوواریانی ∇ روی رویهٔ هندسی M همانند آنچه درفضای اقلیدسی داشتیم، به‌هرزوج بردار، ازمیدانهای برداری V، W روی M، یك میدان برداری جدید $\nabla_V W$ نسبت می‌دهد که باید دارای خواص معمولی خطی و لایبنیتزی باشد (فرع ۴.۵، فصل ۲). بدیهی است‌که درهرنقطهٔ $\mathbf{p}$ مقدار $\nabla_V W$ باید برابر میزان تغییر W درامتداد $V(\mathbf{p})$ باشد. بدینسان اگرقرار باشدکه فرم همبندی ω_{12} مربوط به‌یک‌میدان سه‌وجهی E_1، E_2 همچنان معنی هندسی معمول خود را (میزان چرخش E_1 به‌طرف E_2 را نشان دهد) داشته باشد، لازم است قید زیر را نیز درنظر بگیریم

$$\omega_{12}(V) = \nabla_V E_1 \cdot E_2 \tag{$*$}$$

این شرایط، $\nabla_V W$ را به‌ازای هرزوج ازمیدانهای برداری V و W کاملاً معین می‌کنند:

۱.۳. لم. فرض کنیم که ∇ یك مشتق کوواریانی روی M باشد به‌طوری که دارای خواص معمولی خطی و لایبنیتزی بوده وبه‌ازای میدان سه‌وجهی E_1، E_2 قید $(*)$ برقرار باشد. آنگاه ∇ از معادلات همبندی زیر تبعیت می‌کند

$$\nabla_V E_1 = \omega_{12}(V) E_2$$

$$\nabla_V E_2 = \omega_{21}(V) E_1$$

علاوه‌براین اگر $W = f_1 E_1 + f_2 E_2$ یك میدان برداری دلخواه باشد، آنگاه

$$\nabla_V W = \{V[f_1] + f_2 \omega_{21}(V)\} E_1 + \{V[f_2] + f_1 \omega_{12}(V)\} E_2$$

عبارت اخیر را فرمول مشتق کوواریانی می‌نامیم. توجه شود که $V[f_1]$ و $V[f_2]$ تنها چگونگی تغییر W را نسبت به E_1، E_2 بیان می‌کنند، جمله‌های حاوی فرمهای همبندی

چرخش خود سه‌وجهی $E_۱$ ، $E_۲$ را جبران می کنند، وبنابراین $\nabla_V W$ میزان تغییر «مطلق» است.

برهان. چون $E_۱ \cdot E_۲ = ۰$ ، بنابرخاصیت لایبنیتزی ∇ داریم

$$۰ = V[E_۱ \cdot E_۲] = \nabla_V E_۱ \cdot E_۲ + E_۱ \cdot \nabla_V E_۲$$

ازآنجا، بنابر (*)،

$$\nabla_V E_۲ \cdot E_۱ = -\omega_{۱۲}(V) = \omega_{۲۱}(V)$$

اما $E_i \cdot E_i = ۱$ ، وبنابراین بااستفاده از خاصیت لایبنیتزی خواهیم داشت

$$۲\nabla_V E_i \cdot E_i = ۰ \qquad i = ۱,\ ۲ \text{ به‌ازای }$$

با به‌کاربردن این اطلاعات، معادلات همبندی را از بسط متعامد $\nabla_V E_۱$ و $\nabla_V E_۲$ نتیجه می گیریم.

بالاخره با استفاده از خواص مفروض ∇ به‌دست می آید

$$\nabla_V W = \nabla_V(f_۱ E_۱ + f_۲ E_۲) = \nabla_V(f_۱ E_۱) + \nabla_V(f_۲ E_۲)$$
$$= V[f_۱]E_۱ + f_۱\nabla_V E_۱ + V[f_۲]E_۲ + f_۲\nabla_V E_۲$$

و چون معادلات همبندی را به‌کار گیریم فرمول مشتق کوواریانی به‌دست می‌آید. ∎

از توجه به‌این لم دیده می‌شود که مشتق کوواریانی رویهٔ هندسی M راچگونه باید تعریف کرد. توجه شود که ترتیب مطالب دراینجا برعکس ترتیب مذکور درفصل ۲ است. درآنجا ازمشتق کوواریانی اقلیدسی برای تعریف فرمهای همبندی استفاده کردیم، دراینجا فرم همبندی $\omega_{۱۲}$ برای تعریف مشتق کوواریانی M به‌کار می‌رود.

۲.۳ قضیه. برای هر رویهٔ هندسی M ، یك و تنها یك مشتق کوواریانی ∇ با خواص معمولی خطی و لایبنیتزی (فرع ۴.۵، فصل ۲) وجود داردکه به‌ازای هر میدان سه‌وجهی روی M درمعادلهٔ (*) نیز صدق می کند.

برهان. لم پیش نشان می‌دهد که حداکثر یك چنین مشتق کوواریانی وجود دارد، زیرا $\nabla_V W$ با فرمولی که شامل ∇ نیست معین می‌شود. بنابراین آنچه باید ثابت کرد وجود یك چنین مشتق کوواریانی ∇ است. برهان به دوبخش تقسیم می‌شود، وما برخی از جزئیات را حذف می کنیم.

الف. تعریف موضعی. روی ناحیهٔ $\mathcal{O}$ میدان سه‌وجهی $E_۱$ ، $E_۲$ را درنظرمی گیریم، و از فرمول لم ۱.۳ به‌عنوان تعریف $\nabla_V W$ استفاده می‌کنیم. با محاسباتی سادهٔ خطی

و لایبنیتزی بودن ∇ تحقیق می‌شود، وچون به‌جای W میدان برداری E_1 را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\nabla_V E_1 = \omega_{12}(V)E_2$$

بنا براین (*) برقرار است.

ب. سازگاری. آیا به‌ازای دومیدان‌سه‌وجهی مختلف، تعاریف‌موضعی باهم سازگارند؟ اگر $\bar{\nabla}_V W$ از $\bar{E}_1$ ، $\bar{E}_2$ روی $\bar{\Theta}$ نتیجه شده باشد، باید نشان دهیم که روی ناحیهٔ همپوش Θ و $\bar{\Theta}$ داریم $\nabla_V W = \bar{\nabla}_V W$. زیرا دراین‌صورت روی همهٔ M تنها یك مشتق‌کوواریانی خواهیم داشت. با توجه به‌خواص خطی و لایبنیتزی‌کافی است نشان دهیم که

$$\nabla_V \bar{E}_1 = \bar{\nabla}_V \bar{E}_1, \quad \nabla_V \bar{E}_2 = \bar{\nabla}_V \bar{E}_2 \tag{1}$$

برای این منظور لم ۴.۱ را مورد استفاده قرارمی‌دهیم، وبرای آسانی جهتدهی E_1 ، E_2 و $\bar{E}_1$ ، $\bar{E}_2$ را یکسان فرض می‌کنیم. چون ∇_V را برمعادلهٔ

$$\bar{E}_1 = \cos \quad E_1 + \sin \quad E_2$$

اعمال‌کنیم، با استفاده ازفرمول مشتق‌کوواریانی به‌دست می‌آید

$$\nabla_V \bar{E}_1 = \{V[\cos \quad] + \sin \quad \omega_{21}(V)\}E_1 + \{V[\sin \quad] + \cos \quad \omega_{12}(V)\}E_2 \tag{2}$$

بنا برلم ۴.۱ داریم $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d$ چون $\omega_{12} = \bar{\omega}_{12} - d$ را در (۲) قرار دهیم وعبارت حاصل را ساده‌کنیم خواهیم داشت

$$\nabla_V \bar{E}_1 = \bar{\omega}_{12}(V)\{-\sin \quad E_1 + \cos \quad E_2\} = \bar{\omega}_{12}(V)\bar{E}_2 = \bar{\nabla}_V \bar{E}_1 \tag{3}$$

به‌همین‌طریق می‌توان تساوی $\nabla_V \bar{E}_2 = \bar{\nabla}_V \bar{E}_2$ را از

$$\bar{E}_2 = -\sin \quad E_1 + \cos \quad E_2$$

نتیجه گرفت. ∎

۳.۳ مثال. مشتق کوواریانی $\mathbf{E}^2$. برای‌میدان سه‌وجهی طبیعی U_1، U_2 داریم $\omega_{12} = 0$. بدینسان در مورد هر میدان برداری

$$W = f_1 U_1 + f_2 U_2$$

فرمول مشتق‌کوواریانی (لم ۱.۳) به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$\nabla_V W = V[f_1]U_1 + V[f_2]U_2$$

این درست همان لم ۲.۵، فصل ۲ است (که به‌جای $\mathbf{E}^3$ در مورد $\mathbf{E}^2$ به‌کار رفته

است)، بنابراین تعریف مجردی که از مشتق کوواریانی کردیم روی صفحهٔ اقلیدسی نتایج صحیحی به‌دست می‌دهد.

با تغییر مناسبی در مشتق کوواریانی ∇ مربوط به رویهٔ هندسی M، می‌توان آن را به‌هر میدان برداری Y روی خم α در M اعمال کرد. (بـه‌ازای هر t، طبق معمول، $Y(t)$ یك بردار مماس بر M در $\alpha(t)$ است، چنان‌که در شکل ۶.۷ دیده می‌شود.)

روی ناحیه‌ای از M کـه شامل α است، یك میـدان سه‌وجهی E_1، E_2 را درنظر می‌گیریم؛ می‌توان نوشت

$$Y(t)=y_1(t)E_1(\alpha(t))+y_2(t)E_2(\alpha(t))$$

یا به‌اختصار

$$Y=y_1E_1+y_2E_2$$

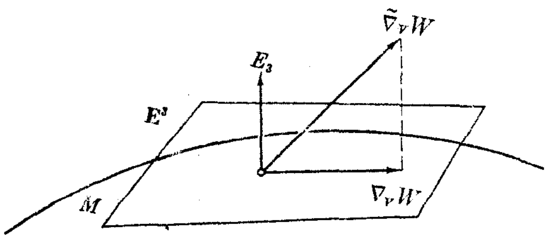
به‌بیان اجمالی، می‌خواهیم کـه Y'، مشتق کوواریانی Y، برابر با $\nabla_{\alpha'}Y$ گردد. بـدینسان فرمول مشتق کوواریانی (لم ۱.۳) نشان می‌دهد که باید Y' را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$Y'=\{y_1'+y_2\omega_{21}(\alpha')\}E_1+\{y_2'+y_1\omega_{12}(\alpha')\}E_2$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این مفهوم مشتق کوواریانـی از انتخاب میدان سه‌وجهی مستقل است، و دارای همان خواص خطی و لایبنیتزی مربوط به‌حالت اقلیدسی مـی‌باشد. علاوه براین، مانند فصل ۲، بند ۲، چون α' سرعت خم α در M یك میدان برداری روی M است، می‌توان از آن مشتق کوواریانی گرفت تا α'' شتاب خم α به‌دست آید.

اکنون مناسب است به‌حالتی که در آن رویهٔ $M \subset \mathbf{E}^3$ است برگردیم. اگر V و W میدانهای برداری مماس روی M باشند، به‌دو طریق می‌توان مشتقهای کوواریانی را محاسبه‌کرد: یکی از هندسهٔ ذاتی M به‌عنوان یك رویهٔ هندسی؛ و دیگری مشتق کوواریانی اقلیدسی $\mathbf{E}^3$. این دو مشتق عموماً متفاوت‌اند، اما بین آنها رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد.

۴.۳. لم. گیریم V و W میدانهای برداری مماس روی یك رویهٔ M در $\mathbf{E}^3$ باشند (شکل



شکل ۵.۷

۵.۷). اگر ∇ مشتق کوواریانی M به‌عنوان یك رویهٔ هندسی و $\tilde{\nabla}$ مشتق کوواریانی اقلیدسی باشد، آنگاه

$\nabla_V W$ مؤلفه‌ای از $\tilde{\nabla}_V W$ است که مماس بر M می‌باشد.

برهان. نخست فرض کنیم که W یکی از میدانهای برداری E_1، E_2 از میدان سه‌وجهی برازندهٔ E_1، E_2، E_3 باشد. بنا بر معادلات همبندی اقلیدسی (قضیهٔ ۲.۷، فصل ۲) داریم

$$\tilde{\nabla}_V E_1 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{1j}(V) E_j = \omega_{12}(V) E_2 + \omega_{13}(V) E_3$$

اما از معادلات همبندی (لم ۱.۳) مربوط به M خواهیم داشت

$$\nabla_V E_1 = \omega_{12}(V) E_2$$

بدینسان $\tilde{\nabla}_V E_1$ برابر است با حاصل جمع $\nabla_V E_1$ و یك میدان برداری قائم بر M. به‌عبارت دیگر، $\nabla_V E_1$ (در هر نقطه) با مؤلفهٔ مماسی $\tilde{\nabla}_V E_1$ برابر خواهد بود. همین نتیجه برای E_2 نیز صادق است.

در حالت کلی، چون W مماس بر M است، می‌توان نوشت

$$W = f_1 E_1 + f_2 E_2$$

و آنگاه نتیجهٔ مطلوب مستقیماً از حالت خاص بالا حاصل خواهد شد، زیرا هردو مشتق کوواریانی، خطی ولایبنیتزی‌اند. ∎

بدینسان ما همواره از مشتق کوواریانی ذاتی $M \subset \mathbf{E}^3$ بدون آنکه تصریح شود استفاده می‌کرده‌ایم. همچنین است در تمام مواردی که مؤلفهٔ مماسی مشتق کوواریانی اقلیدسی محاسبه می‌شود.

نکتهٔ شایان توجه آنکه تنها از اساسیترین خواص مشتقهای کوواریانی می‌توان در مورد همهٔ رویه‌های هندسی استفاده کرد. به‌ویژه، مفهوم توازی را (که از لوی‌چیویتاست) نمی‌توان همواره همانند حالت اقلیدسی درنظر گرفت. ویژگی خاص هندسهٔ اقلیدسی عمدتاً براین نکته مبتنی است که می‌توان به‌وسیلهٔ انتقال، بردار مماس $\mathbf{v}_p$، مثلاً بر $\mathbf{E}^2$ را به‌بردار مماس متوازی $\mathbf{v}_q$ درهر نقطهٔ دیگر $\mathbf{q}$ تبدیل کرد. چنانکه خواهیم دید، این مفهوم «توازی از دور» را نمی‌توان روی هر رویهٔ هندسی دلخواه درنظر گرفت. اما همواره می‌توان توازی را درمورد یك میدان برداری Y روی خم α تعریف نمود. در فضای اقلیدسی، این بدان معنی است که Y نسبت به‌میدان سه‌وجهی طبیعی دارای ضرایب ثابت می‌باشد، اما مشخصهٔ بینهایت کوچکی $Y' = 0$ به‌طور کلی دارای معنی است.

۵.۳. تعریف. میدان برداری Y روی یك خم α در رویهٔ هندسی M هنگامی متوازی است

که مشتق کوواریانی آن صفر باشد: $Y'=0$

هر میدان برداری متوازی، درست مانند حالت اقلیدسی دارای طول ثابت است، زیرا $Y\cdot Y=\|Y\|^2$، و $(Y\cdot Y)'=2Y\cdot Y'=0$.

۶.۳ لم. گیریم α خمی در رویهٔ هندسی M و $\mathbf{v}$ یك بردار مماس مثلاً در $\mathbf{p}=\alpha(0)$ باشد. آنگاه یك میدان برداری متوازی یکتای V روی α وجود دارد به‌طوری که $V(0)=\mathbf{v}$ (شکل ۶.۷).

برهان. می‌توان فرض کرد که α تماماً در حوزهٔ یك میدان سه وجهی E_1، E_2 روی M واقع باشد. (در غیر این صورت می‌توانیم α را به‌قطعاتی که هر یك دارای خصوصیت بالا باشند تقسیم کنیم.) میدان برداری V باید در شرایط زیر صدق کند

$$V'=0,\qquad V(0)=\mathbf{v} \tag{1}$$

چون V دارای طول ثابت $c=\|V\|$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$V=c\cos\varphi\,E_1+c\sin\varphi\,E_2 \tag{2}$$

که در آن φ زاویهٔ V با E_1 است. بدینسان از فرمول مشتق کوواریانی داریم

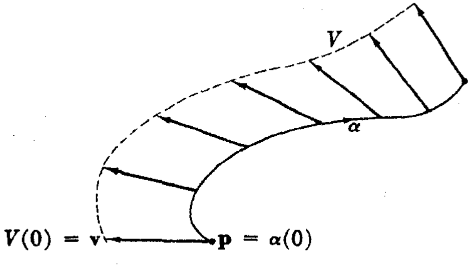
$$V'=c\{-\sin\varphi\,\varphi'+\sin\varphi\,\omega_{21}(\alpha')\}E_1$$
$$+c\{\cos\varphi\,\varphi'+\cos\varphi\,\omega_{12}(\alpha')\}E_2$$

از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که (۱) هم‌ارز است با

$$\varphi'=-\omega_{12}(\alpha')$$

و $\varphi(0)$ زاویه به $V(0)=\mathbf{v}$ با $E_1(\mathbf{p})$ است. این معادله دارای جواب یکتای

$$\varphi(t)=\varphi(0)-\int_0^t\omega_{12}(\alpha')dt$$



شکل ۶.۷

می‌باشد، که چون آن را در (۲) قرار دهیم میدان برداری مطلوب V معین می‌گردد. ∎

با وضعیت مذکور در لم ۶.۳ گوییم که به ازای هر t، $V(t)$ در $\alpha(t)$ از $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}=\alpha(\circ)$ با انتقال متوازی درطول α به‌دست آمده است.

در $\mathbf{E}^{۲}$، از انتقال متوازی یك بردار مماس $\mathbf{v}_p$ درطول قطعه خمی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ همان بردار موازی از دور $\mathbf{v}_q$ حاصل می‌شود، که بدینسان از انتخاب خم کاملاً مستقل است. امادرمورد یك رویهٔ هندسی دلخواه M، به‌ازای خمهای مختلف از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ معمولاً بردارهای مختلفی در $\mathbf{q}$ حاصل می‌شود. به‌همین نحو: اگر یك بردار $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ را برپیرامون یك خم‌بستهٔ α (با آغاز و انجام $\mathbf{p}$) انتقال متوازی دهیم، بردار حاصل $\mathbf{v}^*$ لزوماً همان بردار $\mathbf{v}$ نخواهد بود. این پدیده را هولونومی می‌نامند. اگر یك میدان سه وجهی روی خم α انتخاب کنیم، آنگاه از اثبات لم ۶.۳ نتیجه می‌شود که انتقال متوازی از $\mathbf{p}=\alpha(a)$ به $\mathbf{p}=\alpha(b)$ در طول α همهٔ بردارها را به‌اندازهٔ زاویهٔ ثابت $\varphi(b)-\varphi(a)$ دوران می‌دهد، زیرا φ' برای همهٔ میدانهای برداری متوازی یکی است. این زاویه را زاویهٔ هولونومی ψ_αی خم α می‌نامند. (در ψ_α ازمضارب ۲π می‌توان صرفنظر کرد، زیرا درتعیین $\mathbf{v}^*$ بی‌اثرند.)

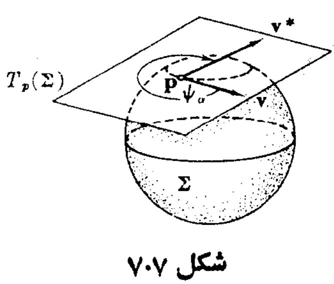
۷.۳. مثال. هولونومی روی‌کرهٔ Σ به‌شعاع r. فرض کنیم که خم بستهٔ α نمایش پارامتری دایره‌ای روی Σ باشد. بدون آنکه از عمومیت کاسته شود می‌توان α را دایرهٔ عرض جغرافیایی، یعنی خم پارامتر u

$$\alpha(u)=\mathbf{x}(u,\, v_\circ),\quad \circ\leqslant u\leqslant ۲\pi$$

فرض کرد، که درآن $\mathbf{x}$ قطعه مختصاتی جغرافیایی در Σ است (شکل ۷.۷). بنا برمثال ۲.۶، فصل ۶، درمورد میدان سه وجهی $E_۱$، $E_۲$ وابسته به $\mathbf{x}$ داریم $\omega_{۱۲}=\sin v\,du$. برهان لم ۶.۳ نشان می‌دهد که هرمیدان برداری متوازی روی α دارای زاویهٔ φاست (که از مبدأ $E_۱$ اندازه گرفته می‌شود) ودر $\varphi'=-\omega_{۱۲}(\alpha')$ صدق می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که φ' روی خم α دارای مقدار ثابت $-\sin v_\circ$ است. بدینسان برای خم α زاویهٔ هولونومی ψ_α برابر است با

$$\varphi(۲\pi)-\varphi(\circ)=-۲\pi\sin v_\circ$$

توجه شود که تنها روی استوا، $v=\circ$، بردار $\mathbf{v}$ پس ازانتقال متوازی در دور α، برخود منطبق می‌شود. هنگامی که $v_\circ$ به $\pi/۲$ نزدیك باشد، خم α دایرهٔ کوچکی در حول قطب شمال Σ خواهد بود. چون φ' نزدیك به -۱ است، میدان برداری متوازی V نسبت به $E_۱$، $E_۲$ به‌سرعت می‌چرخد. اما زاویهٔ هولونومی نزدیك



شکل ۷.۷

به 2π — است، بنابراین، تفاوت واقعی بین $\mathbf{v}=V(0)$ و $\mathbf{v}^*=V(2\pi)$ همان‌طور که انتظار می‌رود، بسیار کوچك است.

خمیدگی گاوسی چنان‌که در مسألهٔ ۵ خواهیم‌دید، روی هولونومی دارای تأثیر شدیدی است.

برای یك قطعه مختصاتی $\mathbf{x}$ در رویهٔ هندسی دلخواه M لزوماً علامت $\mathbf{x}_{uu}$ را برای مشتق کوواریانی $\mathbf{x}_u$ در طول خمهای پارامتر u از $\mathbf{x}$ به‌کار می‌بریم، $\mathbf{x}_{uv}$ ، $\mathbf{x}_{vu}$ و $\mathbf{x}_{vv}$ نیز دارای مفاهیم متناظری می‌باشند. از این‌رو هنگامی‌که M رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ است، باید نمادگذاری جدیدی، مثلاً $\tilde{\mathbf{x}}_{uu}$، ...، برای اشیایی نظیر آنچه در فصل ۵، بند۴ تعریف شد درنظر بگیریم. درآنجا مشتق کوواریانی $\mathbf{E}^3$، به کار می‌رفت، امـا در اینجا از مشتق کوواریانی خود M استفاده می‌کنیم. درحالت ذاتی نیز تساوی $\mathbf{x}_{uv}=\mathbf{x}_{vu}$ همچنان برقرار است، اما اثبات آن به‌هیچ وجه بدیهی وساده نیست (تمرین ۹).

تمرینات

۱. درنیمصفحهٔ پوانکاره، گیریم α خم داده شده درتمرین ۲، بند ۱ باشد. سرعت وشتاب آن را برحسب میدان سه‌وجهی

$$E_1=vU_1,\quad E_2=vU_2$$

بیان‌کنید. (راهنمایی: دراینجا سرعت وشتاب همخط‌اند.)

۲. گیریم β خم

$$\beta(t)=(ct,\ st),\quad t>0$$

درنیمصفحهٔ پوانکاره باشد، که درآن c و s مقادیر ثابتی با قید $c^2+s^2=1$ می‌باشند. (بدینسان β یك خط مستقیم اقلیدسی مار برمبدأ است.) سرعت و شتاب β را برحسب میدان سه‌وجهی تمرین ۱ بیان‌کنید.

۳. اگر V و W میدانهای برداری مماس روی یك رویه در $\mathbf{E}^3$ باشند، با دقیقترساختن برهان لم ۴.۳ نشان دهیدکه

$$\tilde{\nabla}_V W=\nabla_V W+S(V)\cdot W\,U$$

که درآن S عملگر شکلی متناظر به $U=\pm E_3$ است. بدینسان اگر α خمی در M باشد، آنگاه

$$\tilde{\alpha}''=\alpha''+S(\alpha')\cdot\alpha' U$$

۴. نشان دهید که روی کرهٔ Σ خم مفروض در مثال ۷.۳ دارای شتاب (ذاتی)

$\alpha'' = r\cos v_\circ \sin v_\circ E_\Upsilon$ است. شتاب اقلیدسی آن را حساب کرده ونشان دهید که α'' مؤلفهٔ مماس بر Σ است.

۵. گیریم α خمی بسته بر رویهٔ هندسی M باشد.
(الف) اگر α ازطریق $\mathbf{x}$ با یك ثابت هوموتوپ باشد (تمرین ۱۲، فصل ۴، بند ۶)، نشان دهید که زاویهٔ هولونومی α برابر است با $\iint_{\mathbf{x}} K\, dM$. (فرض کنید که $\mathbf{x}(R)$ درحوزهٔ یك میدان سه‌وجهی واقع باشد.) هنگامی که $\mathbf{x}$ یك شبه قطعه مختصاتی است، این انتگرال خمیدگی کل ناحیهٔ $\mathbf{x}(R)$ می‌باشد.
(ب) زاویهٔ هولونومی درمثال ۷.۳ را با این روش محاسبه کنید.

۶. گیریم V یك میدان برداری متوازی روی یك خم α در M و W یك میدان برداری با طول ثابت روی α باشد. نشان دهید که W متوازی است اگر، و فقط اگر، زاویهٔ بین V و W ثابت باشد.

۷. نشان دهید که ایزومتریها حافظ مشتقهای کوواریانی‌اند، بدین‌معنی که: اگر Y یك میدان برداری روی خم α در M، و $F: M \to \bar{M}$ یك ایزومتری باشد، آنگاه

$$F_*(Y') = \bar{Y}'$$

که درآن $\bar{Y}$ میدان برداری $F_*(Y)$ روی $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ در $\bar{M}$ است.
(برای سادگی فرض کنید که Y را می‌توان به صورت $Y = fE_\text{۱}$ نوشت، که درآن $E_\text{۱}$، $E_\text{۲}$ یك میدان سه وجهی روی M است.)
این، نظیر نتیجهٔ اقلیدسی (فرع ۴.۱، فصل ۳) است. حالت کلی در تمرین ۸ آمده است.

۸. ثابت کنید که هر ایزومتری $F: M \to \bar{M}$ حافظ مشتقهای کوواریانی ∇ و $\bar{\nabla}$ است. توضیح آنکه، در مورد هرمیدان برداری X روی M، گیریم $\bar{X}$ میدان برداری انتقالی روی $\bar{M}$: $\bar{X}(F(\mathbf{p})) = F_*(X(\mathbf{p}))$ به ازای هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M باشد. دراین صورت نشان دهید که $\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{W} = \overline{\nabla_V W}$. (راهنمایی: اگر $f_i = W \cdot E_i$ و $\bar{f}_i = \bar{W} \cdot \bar{E}_i$، با استفاده ازتمرین ۸، بند ۵، فصل ۴ نشان دهید که $V[f_i]$ در $\mathbf{p}$ برابر $\bar{V}[\bar{f}_i]$ در $F(\mathbf{p})$ است.)

۹. اگر $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی متعامد در رویهٔ هندسی M باشد، نشان دهید که

$$\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$$

(مشتقهای ذاتی). (راهنمایی: درمورد میدان سه وجهی وابسته، عبارت

$$\omega_{\Upsilon\Upsilon}(\mathbf{x}_u) = \left(\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right)_u \cdot \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} = \mathbf{x}_{vu} \cdot \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{EG}}$$

را محاسبه‌کنید و آنگاه با استفاده از فرمول ω_{12} که در فصل ۶، بند ۶ آمده است، نشان دهید که

$$\omega_{21}(\mathbf{x}_u)=\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}=\mathbf{x}_u\cdot\frac{\mathbf{x}_{uv}}{\sqrt{EG}}$$

برهان آسانتری برای حالت خاصی که M یك رویه در $\mathbf{E}^3$ است بیابید.

۱۰. (ادامه). نشان‌دهید که برای هرقطعه مختصاتی دلخواه $\mathbf{y}$ داریم $\mathbf{y}_{uv}=\mathbf{y}_{vu}$. (راهنمایی: قطعه مختصاتی متعامد $\mathbf{x}$ را می‌توان طوری تعیین کرد که $\mathbf{x}=\mathbf{y}(\bar{u},\bar{v})$.)

۱۱. اگر روی M یك میدان برداری W، که هیچ‌گاه صفر نشود، وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر V داشته باشیم $\nabla_V W=0$، نشان دهید که M یك رویهٔ هموار است. روی استوانه‌ای در $\mathbf{E}^3$ یك چنین میدان برداری را بیابید.

۴. خمهای ژئودزیك

ژئودزیك دریك رویهٔ هندسی دلخواه تعمیم خط مستقیم درهندسهٔ اقلیدسی است. چنان‌که دیدیم مشخصهٔ خط مستقیم $\alpha(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{q}$ از لحاظ بینهایت کوچکی، صفر بودن شتاب آن می‌باشد، بدینسان

۱.۴. تعریف. خم α واقع بر یك رویهٔ هندسی M را هنگامی ژئودزیك M می‌نامند که شتاب آن صفر باشد، $\alpha''=0$.

به‌عبارت دیگر، α'، سرعت ژئودزیك، متوازی است: ژئودزیکها پیچ ندارند. یادآوری می‌شود که چون α' متوازی است، $\|\alpha'\|$ ثابت می‌ماند، بنابراین ژئودزیکها دارای تندی ثابت‌اند.

چون ایزومتریها حافظ شتاب‌اند (تمرین ۷، بند ۳)، در نتیجه ژئودزیکها تغییرناپذیرهای ایزومتریکی‌می باشند. (یك برهان مستقیم درتمرین ۱، بند ۵، فصل ۶ آمده‌است.) در واقع، اگر $F:M\to N$ یك ایزومتری موضعی باشد، آنگاه F هر ژئودزیك α از M را به ژئودزیك $F(\alpha)$ از N می‌برد، زیرا F همان‌گونه‌که در فصل ۶، بند ۴ بحث شد به‌طورموضعی یك ایزومتری است.

تعریف کلی ژئودزیکها که دربالا بیان شد با تعریف ۷.۵ درفصل ۵ که در آن M یك رویه از $\mathbf{E}^3$ است سازگار می‌باشد، زیرا بنابر لم ۴.۳ شتاب ذاتی یك خم α در $M\subset\mathbf{E}^3$ همان مؤلفهٔ مماس بر M ازشتاب اقلیدسی آن می‌باشد. بدینسان شتاب ذاتی صفر است اگر، وفقط اگر، شتاب اقلیدسی قائم بر M باشد.

فرض‌کنیم که $\alpha:I\to M$ خمی واقع بر رویهٔ هندسی دلخواه M و E_1 ، E_2 یك میدان سه وجهی روی M باشد. دراین بند برای سرعت وشتاب α از نمادگذاریهای زیر استفاده می‌کنیم

$$\alpha' = v_1 E_1 + v_2 E_2 \quad \text{و} \quad \alpha'' = A_1 E_1 + A_2 E_2$$

مؤلفه‌های شتاب بنا بر بند ۳ عبارت‌اند از

$$A_1 = v_1' + v_2 \omega_{21}(\alpha')$$
$$A_2 = v_2' + v_1 \omega_{12}(\alpha')$$

که توابعی با مقدار حقیقی روی فاصلهٔ I می‌باشند. بدینسان ملاك اصلی ما برای ژئودزیك بودن α عبارت است از $A_1 = A_2 = 0$. اکنون با استفاده ازمختصات متعامد این معادلات را به‌صورتی آگاهی بخشتر می‌نویسیم.

۲.۴ قضیه. گیریم $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی متعامد در رویهٔ هندسی M باشد. خم $\alpha(t) = \mathbf{x}(a_1(t), a_2(t))$ یك ژئودزیك M است اگر، و فقط اگر،

$$a_1'' + \frac{1}{2E}\{E_u a_1'^2 + 2E_v a_1' a_2' - G_u a_2'^2\} = 0$$

$$a_2'' + \frac{1}{2G}\{-E_v a_1'^2 + 2G_u a_1' a_2' + G_v a_2'^2\} = 0$$

از این پس این معادلات را با $A_1 = 0$ و $A_2 = 0$ نشان می‌دهیم. توجه شود که این معادلات متقارن‌اند، بدین معنی که تبدیلهای $2 \leftrightarrow 1$، $u \leftrightarrow v$، $E \leftrightarrow G$ هریك از آنها را به‌دیگری بدل می‌کند. روشن است که در این عبارتها همواره توابع E، G و مشتقهای جزئی آنها E_u، E_v، ... روی (a_1, a_2) محاسبه می‌شوند، و بنابراین به‌صورت توابعی روی حوزهٔ α یعنی I درمی‌آیند.

برهان. سرعت α عبارت است از $\alpha' = a_1' \mathbf{x}_u + a_2' \mathbf{x}_v$، بنابراین برحسب میدان سه‌وجهی وابستهٔ $\mathbf{x}$ (فصل ۶، بند ۶) خواهیم داشت

$$\alpha' = (a_1' \sqrt{E}) E_1 + (a_2' \sqrt{G}) E_2$$

بدینسان A_1 و A_2، مؤلفه‌های شتاب که در بالا تعریف شدند، به‌صورت زیردرمی‌آیند

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_1' \sqrt{E})' + (a_2' \sqrt{G}) \omega_{21}(\alpha') \\ A_2 &= (a_2' \sqrt{G})' + (a_1' \sqrt{E}) \omega_{12}(\alpha') \end{aligned} \tag{۱}$$

با استفاده از فرمول ω_{12} که در فصل ۶، بند ۶ آمد داریم

$$\omega_{12}(\alpha') = \omega_{12}(a_1' \mathbf{x}_u + a_2' \mathbf{x}_v) = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} a_1' + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} a_2' \tag{۲}$$

و چون آن را در (۱) قراردهیم، معادلات ژئودزیك $A_1 = A_2 = 0$ چنین می‌شوند

$$(a_1'\sqrt{E})' + (\sqrt{E})_v a_1' a_2' - \frac{\sqrt{G}\,(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\, a_2'^2 = 0$$
(۳)
$$(a_2'\sqrt{G})' - \frac{\sqrt{E}\,(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\, a_1'^2 + (\sqrt{G})_u a_1' a_2' = 0$$

با محاسبات دیفرانسیل معمولی، (۳) به صورتی که در قضیه بیان شده است درمی‌آید. خواننده فقط باید توجه داشته باشد که در یك بسط لایبنیتزی از قبیل:

$$(a_1'\sqrt{E})' = a_1''\sqrt{E} + a_1' \frac{E'}{2\sqrt{E}}$$

$E_1(a_1\,,\,a_2)$ ازلحاظ اختصار با E نشان داده شده است، بنابراین

$$E' = E_u a_1' + E_v a_2'$$
∎

۳.۴. قضیه. به‌ازای هر بردار مماس $\mathbf{v}$ بر M درنقطهٔ $\mathbf{p}$، یك ژئودزیك یکتای α از M وجود دارد به‌طوری که

$$\alpha(0) = \mathbf{p}, \quad \alpha'(0) = \mathbf{v}$$

بدینسان در هر رویهٔ هندسی ژئودزیکهای بسیاری وجود دارند، و هریك از آنها با نقطهٔ آغازی وسرعت اولیهٔ خود مشخص می گردند. به‌عنوان مثال در $\mathbf{E}^2$، ژئودزیکی که با $\mathbf{v}$ و $\mathbf{p}$ معین می‌شود، عبارت است ازخط مستقیم $\alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$.

برهان. گیریم $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی‌متعامد در M با $\mathbf{p} = \mathbf{x}(u_0\,, v_0)$ باشد، وقرارمی‌دهیم $\mathbf{v} = c_0 \mathbf{x}_u + d_0 \mathbf{x}_v$. معادلات ژئودزیك مذکور درقضیهٔ ۲.۴ به‌صورت کلی زیرند

$$a_1'' = f_1(a_1,\, a_2,\, a_1',\, a_2')$$
(۱)
$$a_2'' = f_2(a_1,\, a_2,\, a_1',\, a_2')$$

علاوه براین، برای آنکه α درشرایط اولیهٔ داده شده صدق کند لازم وکافی است که

$$a_1(0) = u_0 \qquad a_1'(0) = c_0$$
(۲)
$$a_2(0) = v_0 \qquad a_2'(0) = d_0$$

اکنون بنابرقضیهٔ اساسی وجود ویکتایی‌مربوط به‌معادلات دیفرانسیل، یك فاصلهٔ I درحول ۰ وجود داردکه روی آن توابع یکتای a_1، a_2 معین و در (۱) و (۲) صدق می کنند. بدینسان $\alpha = \mathbf{x}(a_1\,,\,a_2)$ تنها ژئودزیکی‌خواهد بودکه روی I معین است و $\alpha(0) = \mathbf{p}$، $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.
∎

این برهان چندان رضایتبخش نیست، زیرا ممکن است فاصلهٔ I بیش از اندازه کوچك باشد. در اینجا مختصراً به‌شرح روشی برای آنکه فاصلهٔ I را تا آنجا که ممکن است بزرگتر کنیم می‌پردازیم. فرض کنیم که $\alpha_1 : I_1 \to M$ و $\alpha_2 : I_2 \to M$ ژئودزیکهایی باشند که در $t = 0$ شرایط اولیهٔ آنها یکی باشد. با استفاده از خاصیت یکتایی بالا، می‌توان نتیجه گرفت که روی فصل مشترك I_1 و I_2 داریم $\alpha_1 = \alpha_2$. چون این نتیجه سازگاری را برهمهٔ این قبیل ژئودزیکها اعمال کنیم یك ژئودزیك یگانهٔ ماکسیمال $\alpha : I \to M$ که در شرایط اولیهٔ مزبور صدق می‌کند به‌دست می‌آید. (فاصلهٔ I بزرگترین فاصلهٔ ممکن است.) از لحاظ تجسم، این بدان معنی‌است که ژئودزیك مزبور را تا آنجا که ادامه می‌یابد امتداد دهیم.

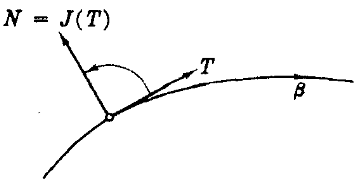
۴.۴. تعریف. رویهٔ هندسی M را هنگامی به‌طور ژئودزیکی کامل می‌نامند، که هر ژئودزیك ماکسیمال آن روی تمام خط حقیقی $\mathbf{R}$ معین باشد.

به‌اختصار: هر ژئودزیك دائماً ادامه می‌یابد. هر خم ثابت، آشکارا یك ژئودزیك است، و بجزاین حالت، هر ژئودزیك دارای تندی غیرصفرثابت است. بدینسان کامل بودن ژئودزیکی بدین معنی است که هر ژئودزیك عادی (ماکسیمال) در هر دوجهت دارای طول نامتناهی است. به‌عنوان مثال، $\mathbf{E}^2$ کامل است، و محاسبات مثال ۸.۵ فصل ۵ نشان می‌دهند که کره واستوانه در $\mathbf{E}^3$ نیز کامل‌اند. به‌طورکلیتر، هر رویهٔ هندسی فشرده کامل است، و به‌همین نحو همهٔ رویه‌های $\mathbf{E}^3$ که به‌صورت $M : g = c$ می‌باشند کامل‌اند(نتایج قضیهٔ ۱۵، فصل ۱۰، هیکس [۵]). اگر ازرویه‌ای که‌کامل است حتی یك نقطه حذف‌شود، این خاصیت ازبین خواهد رفت، زیرا ژئودزیکهایی که قبلاً از این نقطه می‌گذشته‌اند بالاجبار متوقف می‌شوند.

نظریهٔ مربوط به‌خمهای صفحه (تمرین ۸، بند ۳، فصل ۲)، به توسط نظریهٔ فرنه دربارهٔ خمهای یك رویهٔ هندسی دلخواه M، تعمیم یافته است.چون M تنها دارای‌دوبعد است، نمی‌توان تاب را تعریف کرد. اما اگر M جهتدار باشد، می‌توان برای خمیدگی علامتی که ازلحاظ هندسی معنی‌دار باشد درنظر گرفت، ازاین قرار: اگر $\beta : I \to M$ خمی باتندی واحد دریك رویهٔ هندسی جهتدار باشد، آنگاه $T = \beta'$ همان میدان برداری مماس یکه روی β است. برای به‌دست آوردن میدان برداری قائم اصلی N، «T را به اندازهٔ $+90^\circ$ دوران می‌دهیم»،

$$N = J(T)$$

که درآن J عملگر دوران مذکور در تمرین ۵، بند ۱ می‌باشد (شکل ۸.۷).



شکل ۸.۷

بدینسان κ_g خمیدگی‌ژئودزیکی‌خم β تابعی است با مقدار حقیقی روی I که در فرمول فرنه $T' = \kappa_g N$ صدق می‌کند. ازاین رو κ_g دیگر مانندحالت‌خمها در $\mathbf{E}^3$ به‌مقادیر غیرمنفی محدود

نمی‌گردد: $\kappa_g > 0$ بدین معنی‌است که چرخش T و در نتیجه چرخش β در جهت مثبت متناظر با جهتدهی M می‌باشد، $\kappa_g < 0$ به‌معنی چرخش منفی است.

۵.۴ لم. خم β با تندی واحد را در ناحیه‌ای که با میدان سه‌وجهی E_1، E_2 جهتدارشده است درنظر می‌گیریم. اگر در طول خم β، تابع زاویهٔ β' با E_1 را با φ نشان دهیم، آنگاه

$$\kappa_g = \frac{d\varphi}{ds} + \omega_{12}(\beta')$$

برهان. بنابرتعریف تابع زاویه‌ای (تمرین ۱۵، فصل ۶، بند ۷)، داریم

$$T = \beta' = \cos\varphi\, E_1 + \sin\varphi\, E_2$$

چون جهتدهی از همین میدان سه‌وجهی نتیجه شده است، از این‌رو

$$J(E_1) = E_2 \quad \text{و} \quad J(E_2) = -E_1$$

بنابراین

$$N = J(T) = -\sin\varphi\, E_1 + \cos\varphi\, E_2$$

با استفاده از فرمول مشتق صفحهٔ ۳۶۰، چنین به‌دست می‌آید

$$T' = \beta'' = \{-\sin\varphi\,\varphi' + \sin\varphi\,\omega_{21}(\beta')\}\, E_1$$
$$+ \{\cos\varphi\,\varphi' + \cos\varphi\,\omega_{12}(\beta')\}\, E_2$$

اما $\kappa_g = T' \cdot N = T' \cdot J(T)$ و چون از فرمولهای T' و $J(T)$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\kappa_g = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,(\varphi' + \omega_{12}(\beta')) = \varphi' + \omega_{12}(\beta') \quad \blacksquare$$

به‌عنوان مثال، در $\mathbf{E}^2$ برای میدان سه‌وجهی طبیعی داریم $\omega_{12} = 0$، و φ به‌صورت همان زاویهٔ شیب معمولی خم β در می‌آید. بدینسان نتیجهٔ بالا به صورت $\kappa_g = d\varphi/ds$ ساده می‌شود، که غالباً در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی از آن به‌عنوان تعریف خمیدگی استفاده می‌کنند.

در مورد خم منظم α با تندی دلخواه در M، دستگاه فرنه T، N، κ_g درست مانند فصل ۲، بند ۴ با تعویض پارامتر تعریف می‌شود.

علاوه براین از همان برهان لم ۲.۴ فصل ۲ نتیجه می‌شود که

$$\alpha' = vT \qquad \alpha'' = \frac{dv}{dt}\,T + \kappa_g v^2 N \tag{*}$$

که در آن $v=\|\alpha'\|$ همان تابع تندی α است.

۶.۴ لم. خم منظم α در M یك ژئودزیك است اگر، و فقط اگر، α دارای تندی ثابت بوده و κ_g خمیدگی ژئودزیکی آن صفر باشد.

برهان. چون $v>0$ است،خواهیم‌داشت $\alpha''=0$ اگر،وفقط اگر، $(dv/dt)=\kappa_g=0$. ∎

از معادلات (*) این نتیجه نیز به‌دست می‌آید که خمیدگی ژئودزیکی α صفر است اگر، وفقط اگر، α' و α'' همواره همخط باشند. گاهی این‌گونه خمها را ژئودزیك می‌نامند: برای آنکه از α یك ژئودزیك به‌مفهوم خاص‌تعریف ۱.۴ به‌دست آید‌کافی است با‌تعویض پارامتر آن را به‌خمی با تندی‌ثابت بدل‌کنیم. (برهان: κ_g با تعویض‌پارامتر تغییرنمی‌کند.) هنگامی‌که نمایش پارامتری دارای اهمیتی باشد، هرخم با $\kappa_g=0$ را یك پیش-ژئودزیك خواهیم نامید.

محاسبهٔ فرمولهای صریح برای ژئودزیکهای یك رویهٔ هندسی مفروض معمولاً کار ساده‌ای نیست. هدف ما اساساً آن است که وضع عمومی‌ژئودزیکها رابررسی کنیم نه‌آنکه به‌جمع آوری فرمول بپردازیم. پیش از‌ادامهٔ این‌بحث، حالت خاصی‌را‌که در‌آن‌اطلاعات ملموس بسیاری دربارهٔ ژئودزیکها غالباً با حداقل محاسبات به‌دست می‌آید، موردبررسی قرار می‌دهیم.

۷.۴ تعریف. نمایش پارامتری کلروعبارت است ازنمایش‌پارامتری متعامد $\mathbf{x}:D\to M$ که در آن E و G فقط به u بستگی دارند، یعنی $F=0$ و $E_v=G_v=0$.

به‌عنوان مثال، نمایش پارامتری معمولی هررویهٔ دورانی یك نمایش پارامتری کلرو است.

۸.۴ لم. اگر $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری کلرو باشد، آنگاه

۱. هرخم پارامتر u یك پیش-ژئودزیك است، و

۲. خم پارامتر v، $u=u_0$ یك ژئودزیك است اگر، و فقط اگر، $G_u(u_0)=0$.

برهان. درمورد (۱) بنابرتوضیحی که دربالا بیان شد،کافی است نشان دهیم که $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_{uu}$ همخطاند. چون $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ متعامدند، شرط بالا با

$$\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uu}=0$$

هم‌ارز است، و این رابطه از معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$0=E_v=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)_v=2\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv}$$

$$0=F_u=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_u=\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vu}$$

به‌همین طریق، درمورد (۲)، خم پارامتر v، $u=u_0$ یك پیش-ژئودزیك است اگر،

وفقط اگر، $\mathbf{x}_{vv}(u_\circ, v)\cdot \mathbf{x}_u(u_\circ, v)=\circ$. معادلات زیر نشان می‌دهند که این رابطه برقرار است اگر، و فقط اگر، $G_u(u_\circ)=\circ$.

$$\circ=F_v=\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv}$$

$$G_u(u_\circ)=G_u(u_\circ, v)=۲\mathbf{x}_{vu}(u_\circ, v)\cdot\mathbf{x}_v(u_\circ, v) \quad \text{به‌ازای هر } v$$

(توجه‌شود که $\mathbf{x}_{uv}=\mathbf{x}_{vu}$.) ازشرط $G_v=\circ$ استفاده نکردیم، تنها اثر آن اثبات این نکته است که پیش-ژئودزیکهای پارامتر v در واقع ژئودزیك می‌باشند، زیرا این رابطه به‌معنی آن است که خمهای پارامتر v دارای تندی ثابت‌اند. ∎

در حالت رویه‌های دورانی این لم به‌طور ذاتی ثابت می‌کند که نصف‌النهارات ژئودزیك‌اند و هرمدار $u=u_\circ$ ژئودزیك خواهد بود اگر، و فقط اگر، $h'(u_\circ)=\circ$. (تمرین ۳، فصل ۵، بند ۵ را ببینید.)

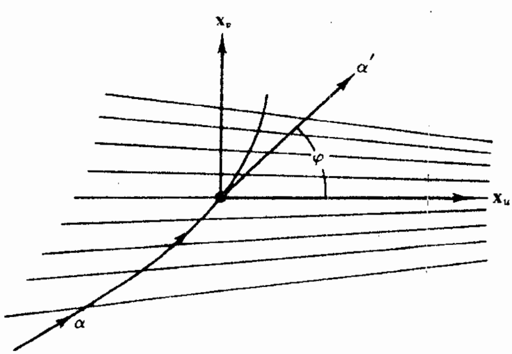
براساس لم پیش، نمایش پارامتری کلرو را به‌صورت «جریان» سیالی که خطوط جریان آن ژئودزیکهای پارامتر u می‌باشند درنظر می‌گیریم و وضعیت هر ژئودزیك دلخواه را نسبت به‌این جریان اندازه‌گیری خواهیم کرد.

۹.۴. لم. اگر $\alpha=\mathbf{x}(a_۱, a_۲)$ یك ژئودزیك با تندی واحد، و $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری کلرو باشد، آنگاه تابع

$$c=G(a_۱)a'_۲=\sqrt{G(a_۱)}\sin\varphi$$

ثابت است، و درآن φ زاویهٔ α' با $\mathbf{x}_u$ را نشان می‌دهد. بنابراین α نمی‌تواند ازناحیه‌ای که در آن $G\geqslant c^۲$ است خارج شود.

ثابت c راکه بدینسان بهرژئودزیك α وابسته می‌شود، میل α می‌نامند، زیرا از ترکیب آن با G می‌توان φ یعنی زاویهٔ تقاطع α با خطوط جریان پارامتر u (درنمایش پارامتری $\mathbf{x}$) را معین کرد (شکل ۹.۷ را ببینید).



شکل ۹.۷

برهان. چون درمورد نمایش پارامتری کلروداریم $E_v=G_v=0$، معادلهٔ $A_2=0$ درقضیهٔ ۲.۴ به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$a_2''+\frac{G_u}{G}a_1'a_2'=0$$

اما این معادله هم‌ارز است با ثابت بودن $c=Ga_2'$، زیرا

$$(Ga_2')'=G'\,a_2'+G\,a_2''=G_ua_1'\,a_2'+G\,a_2''$$

برای اثبات رابطهٔ $c=\sqrt{G}\sin\varphi$، کافی است دو معادلهٔ زیر را با هم مقایسه کنیم،

$$\alpha'\cdot\mathbf{x}_v=(a_1'\mathbf{x}_u+a_2'\mathbf{x}_v)\cdot\mathbf{x}_v=Ga_2'=c$$

$$\alpha'\cdot\mathbf{x}_v=\|\alpha'\|\,\|\mathbf{x}_v\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sqrt{G}\sin\varphi$$

و از $|\sin\varphi|\leqslant 1$ مستقیماً نتیجه می‌شود که $G\geqslant c^2$. ∎

اگر α در امتدادی که G در آن صعودی باشد حرکت کند، آنگاه از ثابت بودن $c=\sqrt{G}\sin\varphi$ نتیجه می‌شود که φ نزولی است: α اجباراً هرچه بیشتر به‌طرف امتداد جریان می‌چرخد. از طرف دیگر، اگر G در طول α نزول کند، آنگاه زاویهٔ تقاطع α با ژئودزیکهای پارامتر u همواره افزایش می‌یابد. برخی از نتایج جالب در تمرینهای ۱۱ و ۱۲ آمده است. در مورد رویه‌های دورانی این تعبیر بسیار ساده است (تمرین ۱۳).

می‌توان به‌لم بالا معادلهٔ

$$a_1'=\pm\frac{\sqrt{G-c^2}}{\sqrt{EG}} \tag{1}$$

را اضافه کرد. درواقع، چون α دارای تندی واحد است، داریم $1=\alpha'\cdot\alpha'=Ea_1'^2+Ga_2'^2$. چون در این معادله به‌جای a_2' مقدار:

$$a_2'=\frac{c}{G} \tag{2}$$

را (از لم ۹.۴) قراردهیم، و آن را نسبت به a_1' حل کنیم معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

برعکس، یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که اگر a_1' صفر نباشد، ازمعادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\alpha=\mathbf{x}(a_1,a_2)$ یك ژئودزیك با تندی واحد است. علاوه بر این، مخالف صفر بودن a_1' همان شرط لازم وکافی برای آن است که خم دلخواه α دارای تعویض پارامتری به‌صورت زیر باشد

$$\beta(u)=\mathbf{x}(u,v(u))$$

نکتهٔ اصلی این بحث آن است که اکنون می‌توان ملاك نسبتاً ساده‌ای برای آنکه خمی به‌این صورت یك پیش-ژئودزیك باشد به‌دست داد، و بدین‌وسیله مسیر ژئودزیکها را در هر ناحیه بـا یك نمایش پارامتری کلرو معین کـرد. (اساساً این نمایش پارامتری خـاص β تنهـا ژئودزیکهایی‌را که با قسمت (۲) لم ۸.۴ مشخص می‌گردند شامل نمی‌شود، تمرین ۱۲ را ببینید.)

۱۰.۴ قضیه. خم $\beta(u)=\mathbf{x}(u, v(u))$، که در آن $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری کلرو است، یك پیش-ژئودزیك می‌باشد اگر، و فقط اگر،

$$\frac{dv}{du}=\frac{\pm c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}$$

و در این صورت ثابت c میل خم β است.

برهان. استدلال این مطلب تمرین ساده‌ای دربارهٔ تعویض پارامتر است. گیریم α تعویض پارامتری با تندی واحد باشد کـه همانند فصل ۲ از تابـع طول قوس s برای β به‌دست می‌آید. بدینسان β یك پیش-ژئودزیك است اگر، و فقط اگر، α ژئودزیـك باشد. گیریم a_1 تابع وارون s باشد (بنابراین a_1' هیچ‌گاه صفر نمی‌شود). دراین‌صورت

$$\alpha=\beta(a_1)=\mathbf{x}(a_1, v(a_1))$$

و قرار می‌دهیم $a_2=v(a_1)$. از توضیحات بالا روشن می‌شود که α یك ژئودزیك (با میل c) خواهد بود اگر، و فقط اگر،

$$a_1'=\frac{\pm\sqrt{G-c^2}}{\sqrt{EG}}, \qquad a_2'=\frac{c}{G} \ (\text{محاسبه می‌شوند } a_1 \text{ برحسب } G \text{ و } E) \qquad (1)$$

اگر این معادلات برقرار باشند، آنگاه بنابر حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی داریم

$$\frac{dv}{du}=\frac{a_2'(s)}{a_1'(s)}=\frac{\pm c\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}} \qquad (2)$$

که با قراردادن مقدار s (تابع وارون a_1) E و G فقط تابـع u می‌شوند. برعکس، اگر (۲) برقرار باشد، از معادلهٔ $Ea_1'^2+Ga_2'^2=1$ که مبین تندی واحد داشتن خم α است، روابط (۱) را نتیجه می‌گیریم. ∎

چون در فرمول بـالا dv/du فقط بـه u بستگی دارد، بنابرقضیـهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان آن را به‌صورت انتگرالی نوشت:

$$v(u)=v(u_0)\pm\int_{u_0}^{u}\frac{c\sqrt{E}\,du}{\sqrt{G}\sqrt{G-c^2}}$$

بدینسان در مورد نمایش پارامتری کلرو، به‌ویژه، برای رویه‌های دورانـی، محاسبهٔ پیش-ژئودزیکها ساده می‌شود و به‌یك انتگرالگیری منجر می گردد. البته این ملاك بسیارساده‌تر از معادلهٔ دیفرانسیل‌مرتبهٔ دومی است که در قضیهٔ ۲.۴ آمد. اما متأسفانه به‌ندرت می‌توان انتگرالگیری را برحسب توابع مقدماتی انجام داد.

۱۱.۴. مثال. مسیرهای ژئودزیکها

(۱) **صفحهٔ اقلیدسی** E^2. نخست با رویه‌ای که ژئودزیکهای آن را می‌شناسیم آغاز می کنیم، ولی برای توضیح نتیجهٔ پیش به‌تعیین مسیرهای آنها برحسب نمایش پارامتری قطبی

$$\mathbf{x}(u, v)=(u\cos v,\ u\sin v)$$

می‌پردازیم. چون $E=1$، $F=0$ و $G=u^2$، این یـك نمایش پارامتری کلـرو می باشد. ژئودزیکهای پارامتر u همان خطوط شعاعی ماربر مبدأ می‌باشند. ژئودزیکهای دیـگر را می‌توان تماماً به‌صورت پارامتری $\beta(u)=\mathbf{x}(u, v(u))$ نمایش داد، که درآن بنا بر قضیهٔ ۱۰.۴،

$$\frac{dv}{du}=\frac{\pm c}{u\sqrt{u^2-c^2}}=\pm\frac{d}{du}\left(\cos^{-1}\frac{c}{u}\right)$$

و بنا براین $v-v_0=\pm\cos^{-1}(c/u)$، یا $u\cos(v-v_0)=c$، که‌همان معادلهٔ قطبی‌خط مستقیم است. تعبیر هندسی میل c در اینجا، مسافت خط از مبدأ می‌باشد.

(۲) **صفحهٔ هذلولوی** H. دراین حالت انتخاب مختصات قطبی مناسبتر است، زیرا تابع g که معرف ساختار هندسی H است فقط به‌مسافت ازمبدأ بستگی‌دارد.[1] بدینسان اگر

$$\mathbf{x}(u, v)=(u\cos v,\ u\sin v),\qquad 0<u<2$$

آنگاه $g(\mathbf{x})=1-u^2/4$. (از اینجا به‌بعد آن را فقط با g نمایش می‌دهیم.) و

$$E=\mathbf{x}_u\circ\mathbf{x}_u=\frac{1}{g^2},\qquad F=0,\qquad G=\mathbf{x}_v\circ\mathbf{x}_v=\frac{u^2}{g^2}$$

بدینسان $\mathbf{x}$ یك نمایش‌پارامتری کلرواست. بنا برلم ۸.۴ خمهای پارامترu، خطوط اقلیدسی ماربر مبدأ، مسیرهای ژئودزیکهای H می‌باشند. بنابرقضیهٔ ۱۰.۴، $\beta(u)=\mathbf{x}(u, v(u))$ هنگامی یك پیش-ژئودزیك است که

---

۱. البته انتخاب مختصات قطبی **هذلولوی** که درمثال ۵.۵ مورد بحث قرارگرفته بسیارمناسبتر می‌باشد، و خود منشأ تعویض متغیری است که بعداً در این مثال به‌کار می‌رود.

$$\frac{dv}{du}=\frac{\pm\left(\frac{cg}{u^{۲}}\right)}{\sqrt{۱-\left(\frac{cg}{u}\right)^{۲}}} \tag{۱}$$

برای انجام عمل انتگرالگیری، قرار می‌دهیم

$$w=\frac{a}{u}\left(۱+\frac{u^{۲}}{۴}\right)$$

که در آن $a=c/\sqrt{۱+c^{۲}}$. آنگاه با محاسبهٔ ساده‌ای خواهیم داشت

$$\frac{dv}{du}=\frac{\mp\frac{dw}{du}}{\sqrt{۱-w^{۲}}} \tag{۲}$$

بنابراین

$$v-v_{۰}=\pm\cos^{-۱}w \text{ یا } \cos(v-v_{۰})=w=\frac{a}{u}(۱+u^{۲}/۴)$$

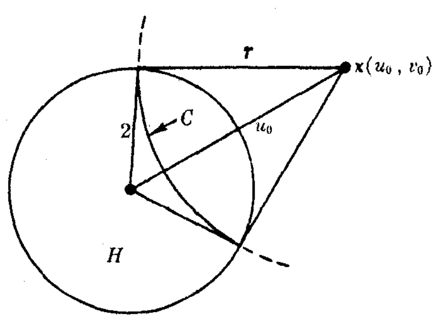
بدینسان

$$u^{۲}+۴-\frac{۴u}{a}\cos(v-v_{۰})=۰ \tag{۳}$$

با استفاده از قانون کسینوسها درنموداری مشابه به شکل ۱۰.۷، معادلهٔ قطبی دایره‌ای به‌شعاع r و به‌مرکز $X(u_{۰}, v_{۰})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$u^{۲}+u_{۰}^{۲}-۲u_{۰}u\cos(v-v_{۰})=r^{۲} \tag{۴}$$

که از مقایسهٔ آن با معادلهٔ (۳) دیده می‌شود که C، مسیر β، یك دایرهٔ اقلیدسی است به‌معادلهٔ $u_{۰}^{۲}-r^{۲}=۴$. چون $u_{۰}>۲$، مرکز C درخارج صفحهٔ هذلولوی $H: x^{۲}+y^{۲}<۴$ واقع می‌باشد. با توجه به‌شکل ۱۰.۷ می‌توان دید که دایرهٔ C به‌دایرهٔ لبهٔ H یعنی



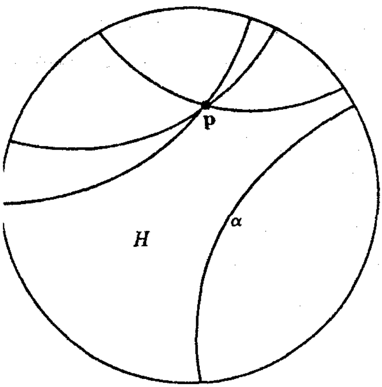
شکل ۱۰.۷

$x^2 + y^2 = 4$ عمود است. البته β روی کمان باز C واقع در داخل H قرار دارد، و از قضیهٔ ۲.۴ نتیجه می‌شود که β این کمان را می‌پوشاند.

نتیجه. مسیرهای ژئودزیکهای صفحهٔ هذلولوی H عبارت‌اند از قسمتهایی از: همهٔ خطوط مستقیم اقلیدسی مار بر مبدأ، و همهٔ دوایر اقلیدسی عمود برلبهٔ H، که در H واقع می‌باشند.

استدلال مثال ۴.۲ نشان می‌دهد که ژئودزیکهای H دارای طول بینهایت می‌باشند (یك برهان صوری در تمرین۱ بند ۵ آمده است)، بدینسان H از لحاظ ژئودزیکی کامل است.

ژئودزیکهای صفحهٔ هذلولوی با ژئودزیکهای صفحهٔ اقلیدسی قابل مقایسه‌اند. در حدود ۳۰۰ سال پیش ازمیلاد، اقلیدس برای خط مستقیم در صفحهٔ خودش، مجموعهٔ مشهوری از اصول را تنظیم کرد. هدف آن بود که هندسهٔ صفحه را چنان مقرون به‌دلیل از این اصول نتیجه گیری کند که به‌صورت «بدیهی» درآید. مشهورترین این اصول همان اصل هم‌ارز با اصل موضوع توازی است: اگر $\mathbf{p}$ نقطه‌ای در خارج خط α باشد، آنگاه خط یکتای β وجود دارد که از$\mathbf{p}$ می‌گذرد و α را قطع نمی‌کند. درطول قرنها به‌تدریج روشن شد که این اصل به‌اندازهٔ سایر اصول بدیهی نمی‌باشد. به‌عنوان مثال، این اصل را که از هردو نقطه تنها یك خط مستقیم می‌گذرد، می‌توان با قراردادن خط‌کش غیر مدرج به‌طوری که این دو نقطه برلبهٔ آن واقع شوند تحقیق کرد (البته ممکن است لازم آید که طول این خط‌کش بسیار دراز باشد، اما درهرصورت متناهی است). اما در مورد اصل موضوع توازی باید تمام طول نامتناهی β را برای حصول اطمینان از عدم تقاطع آن با α، پیمود. از این‌رو به‌منظور آنکه اصل موضوع توازی را از سایر اصول نتیجه بگیرند کوششهای بسیاری به‌عمل آمد. صفحهٔ هذلولوی H را می‌توان به‌عنوان دلیل قانع‌کننده‌ای برای عدم امکان اثبات اصل توازی تلقی کرد. زیرا اگر «مسیرژئودزیك» را به‌جای «خط» درنظر بگیریم، آنگاه درH همهٔ اصول اقلیدسی بجز اصل توازی برقرار می‌باشند. به عنوان مثال، به‌آسانی می‌توان دید که از هردونقطه یك، وفقط یك مسیر ژئودزیك می‌گذرد. اما با توجه به‌شکل۱۱.۷ دیده می‌شود که همواره درH تعداد نامتناهی‌مسیرهای ژئودزیك ماربر$\mathbf{p}$ وجود دارند که α را قطع نمی‌کنند. هنگامی که ثمرات این اکتشاف پدیدارگشت نه‌تنها اندك امید به اثبات اصل موضوع توازی از میان رفت، بلکه کل این اندیشه که $\mathbf{E}^2$، بنا برنوعی تعبیر فلسفی، یك مطلق است و خواص آن «بدیهی»، باطل شد. بدینسان $\mathbf{E}^2$ در ردیف رویه‌های هندسی بیشماردیگری که ریمان کشف کرده بود قرار گرفت.



شکل۱۱.۷

تمرینات

۱. نشان دهید که خم $\alpha(h)$ که از تعویض پارامتر ژئودزیك غیرثابت α به‌دست آمده است یك ژئودزیك خواهد بود اگر، و فقط اگر، h به‌صورت $h(t)=at+b$ باشد.

۲. در M ژئودزیك یکتایی را که سرعت اولیهٔ آن $\mathbf{v}$ است با γ_v نشان می‌دهیم. ثابت کنید که به‌ازای هرعدد a داریم:

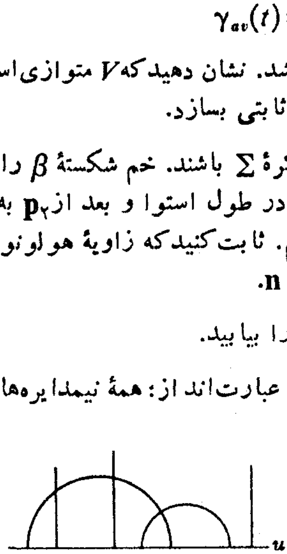
$$\gamma_{av}(t)=\gamma_v(at) \qquad \text{به‌ازای هر } t$$

۳. گیریم V یك میدان برداری روی یك ژئودزیك α باشد. نشان دهید که V متوازی است اگر، و فقط اگر، $\|V\|$ ثابت بوده و V با α' زاویهٔ ثابتی بسازد.

۴. گیریم $\mathbf{n}$ قطب شمال، $\mathbf{p}_1$ و $\mathbf{p}_2$ نقاطی روی استوای کرهٔ Σ باشند. خم شکستهٔ β راکه از $\mathbf{n}$ به $\mathbf{p}_1$ در طول یك نصف‌النهار، و از $\mathbf{p}_1$ به $\mathbf{p}_2$ در طول استوا و بعد از $\mathbf{p}_2$ به $\mathbf{n}$ درطول یك نصف‌النهار ترسیم می‌شود درنظرمی گیریم. ثابت کنید که زاویهٔ هولونومی β برابر است با زاویهٔ بین دو نصف‌النهار مزبور در $\mathbf{n}$.

۵. مسیرهای ژئودزیکهای کرهٔ منظری (۱) در مثال ۳.۲ را بیابید.

۶. نشان دهید که‌در نیمصفحهٔ پوانکاره مسیرهای ژئودزیکها عبارت‌اند از: همهٔ نیمدایره‌هایی که مراکز آنها روی محور u هستند، و همهٔ خطوط شاغولی. (راهنمایی: $\mathbf{x}(u,v)=(u,v)$ یك قطعه مختصاتی کلرو «نسبت به v» می‌باشد، از این‌رو در معادلات متن u و v، و همچنین E و G را به‌یکدیگر تبدیل کنید.) شکل ۱۲.۷ را ببینید.



شکل ۱۲.۷

۷. میدان سه‌وجهی E_1، E_2 وخم α با تندی واحد را به‌طوری که α' هیچ گاه با E_1 هم‌خط نباشد در نظر می گیریم. اگر $\alpha''=A_1E_1+A_2E_2$، نشان دهید که معادلهٔ $A_1=0$ به‌تنهایی مبین آن است که α یك ژئودزیك است.

۸. در صفحهٔ تصویری به‌شعاع r (تمرین ۶، بند ۲)، ثابت کنید که:
(الف) ژئودزیکها خمهای بستهٔ ساده‌ای به‌طول πr می‌باشند.
(ب) از هردو نقطهٔ متمایز فقط یك مسیر ژئودزیك می گذرد.
(ج) هردو مسیر ژئودزیك متمایز دقیقاً دریك نقطه متقاطع‌اند.
(راهنمایی: هرژئودزیك $\bar{\Sigma}$ تصویر یك ژئودزیك کرهٔ Σ تحت نگاشت $P:\Sigma\to\bar{\Sigma}$ است.)

۹. اگر α خمی در M با تندی $v>0$ باشد، ثابت کنید که:
(الف) κ_g، خمیدگی ژئودزیکی خم α، برابر است با $J(\alpha')/v^3 \cdot \alpha''$. بنابراین اگر

M یك رویه در $\mathbf{E}^3$ باشد، داریم $\kappa_g = U \cdot \alpha' \times \alpha'' / v^3$.
(ب) اگر α دارای تندی واحد باشد، آنگاه میدان برداری V که در تمرین ۷، فصل ۵، بند ۵ آمده است همان قائم یکهٔ خم α یعنی N می‌باشد، و تابع g نیز خمیدگی ژئودزیکی κ_g است.

۱۰. گیریم M صفحه‌ای با حذف مبدأ باشد، آن را به‌ساختار هندسی همشکلی که در آن $g = r = \sqrt{u^2 + v^2}$، مجهز می‌کنیم. خمیدگی گاوسی M و مسیرهای ژئودزیك آن را بیابید. نشان دهید که M با رویه‌ای در $\mathbf{E}^3$ ایزومتریك است.

۱۱. گیریم $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری کلرو، و $\alpha = \mathbf{x}(a_1, a_2)$ ژئودزیکی با تندی واحد و با میل c باشد. فرض کنیم که α از نقطهٔ

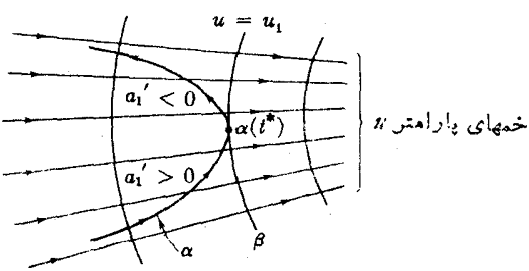
$$\alpha(0) = \mathbf{x}(a_1(0), a_2(0)) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$$

شروع شود و $a_1'(0)$ مثبت باشد. اگر عددی مانند $u > u_0$ وجود داشته باشد به‌طوری که $G(u) = c^2$، و گیریم u_1 کوچکترین عددی از این نوع باشد. آنگاه خم پارامتری v

$$\beta(v) = \mathbf{x}(u_1, v)$$

را یك خم سدی برای α می‌نامند. ثابت کنید که:
(الف) α به‌اندازهٔ دلخواه به β نزدیك می‌شود.
(ب) اگر β یك ژئودزیك باشد، α آن را قطع نمی‌کند (بدینسان α به‌طور مجانبی به β نزدیك می‌شود).

۱۲. (ادامه). اگر خم سدی β ژئودزیك نباشد، می‌توان نشان داد که α خم β را قطع می‌کند.[1] اگر $\alpha(t^*)$ نقطهٔ تقاطع باشد، ثابت کنید که $a_1'(t^*) = 0$ و a_1' در t^* تغییر علامت می‌دهد. بدینسان α پس از برخورد با β چنان که در شکل ۱۳.۷ دیده می‌شود به‌سرعت برگشت می‌کند (راهنمایی: ثابت کنید که $a_1''(t^*) < 0$).



شکل ۱۳.۷

۱. البته با فرض آنکه α در ناحیه‌ای که به‌وسیلهٔ $\mathbf{x}$ پارامتری شده است باقی بماند.

۱۳. گیریم α یك خم ژئودزیك روی یك رویهٔ دورانی باشد.
(الف) نشان دهید که میل α برابر است با $c = h\sin\varphi$ ، که درآن $h(t)$ مسافت از $\alpha(t)$ تا محوردوران، و φ زاویهٔ تقاطع α با نصف‌النهارات M است.
(ب) نتیجه بگیرید که α نمی‌تواند مداری به‌شعاع $|c|$ را قطع کند.

۱۴. گیریم α ژئودزیکی با میل c روی سهمیگون دورانی

$$M: z = x^{2} + y^{2}$$

باشد، مقدار مینیمم $z(\alpha)$ ، یعنی کمترین ارتفاعی راکه α تا آن تنزل می‌کند بیابید.
(راهنمایی: ازقطعه مختصاتی مونژ استفاده کنید.)

۱۵. ثابت کنید که هیچ ژئودزیکی بر رویهٔ شیپوری (فصل ۵، ۶.۶) نمی‌تواند روی تمام محورحقیقی معین باشد.

۱۶. روی یك چنبرهٔ دورانی، ژئودزیك α راکه درنقطه‌ای بردایرهٔ فوقانی $(u = \pi/2)$ مماس است درنظرمی‌گیریم. نشان دهید که α همواره روی نیمهٔ بیرونی چنبره $(-\pi/2 \leqslant u \leqslant \pi/2)$ باقی می‌ماند وضمن نوسان بین دایره‌های فوقانی و تحتانی چنبره را دورمی‌زند.

۱۷. کاتنوئید C (مثال ۱.۶، فصل ۵) با $c = 1$ مفروض است. ژئودزیك α را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0), \quad u_0 \neq 0$$

و $\alpha'(0)$ با نصف‌النهارات زاویه‌ای برابر φ_0 بسازد. (توجه شودکه φ_0 و $\pi - \varphi_0$ دونمایش پارامتری متمایز برای ژئودزیك مزبور به‌دست می‌دهند.) به‌ازای چه مقادیری از φ_0 ژئودزیك α دایرهٔ مینیمال $u = 0$ کاتنوئید C را قطع می‌کند؟

۱۸. نمایش پارامتری لیوویل $\mathbf{x}: D \rightarrow M$ عبارت است ازیك نمایش پارامتری متعامد به‌طوری که $E = G = U + V$، ودرآن U فقط تابعی از u و V فقط تابعی از v است. اگر $\alpha = \mathbf{x}(a_1, a_2)$ ژئودزیکی با تندی واحد باشدکه برحسب نمایش پارامتری مزبور بیان شده است، ثابت کنید

$$U(a_1)\sin^{2}\varphi - V(a_2)\cos^{2}\varphi$$

مقدار ثابتی است، φ زاویهٔ α' با $\mathbf{x}_u$ رانشان می‌دهد.

۱۹. گیریم E_1 ، E_2 یك میدان سه وجهی روی رویهٔ هندسی M باشد. فرض کنیم $\kappa_i(\mathbf{p})$ در $\mathbf{p}$ به‌ازای $i = 1, 2$ خمیدگی ژئودزیکی خم انتگرال E_i ماربر $\mathbf{p}$ باشد.
(الف) ثابت کنید که $K = E_1[\kappa_2] - E_2[\kappa_1] - \kappa_1^{2} - \kappa_2^{2}$.
(ب) این فرمول را درمورد یك رویهٔ دورانی دلخواه، با استفاده از میدان سه‌وجهی

مثال ۴.۶، فصل ۶ تحقیق کنید.
(راهنمایی: در مورد (الف)، ثابت کنید که $(\omega_{12}(E_i)=\kappa_i$)

۵. خواص ژئودزیکها به‌عنوان کوتاهترین مسیر

در بند پیش ژئودزیکها را به‌عنوان مستقیمترین خمها در نظر گرفتیم، اکنون خصوصیت آنها را به‌عنوان کوتاهترین خمها مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسألهٔ اساسی، به‌بیان اجمالی، عبارت است از تعیین کوتاهترین مسیر از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر روی یك رویهٔ هندسی. در مورد $\mathbf{E}^2$ حل این مسأله آسان است: به‌ازای هر دو نقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$، یك قطعهٔ خط مستقیم یکتا از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجود دارد و از هر خم دیگری که $\mathbf{p}$ را به $\mathbf{q}$ بپیوندد کوتاهتر است (تمرین ۱۱، بند ۲، فصل ۲). درمورد یك رویهٔ هندسی دلخواه M، وضعیت جالبتر است. نخست امکان دارد که کوتاهترین خم از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجود نداشته باشد (تمرین ۳، بند ۴، فصل ۶). و در صورتی هم که وجود داشته باشد، ممکن است یکتا نباشد. به عنوان مثال، ذیلاً این نتیجهٔ واضح را ثابت خواهیم کرد که روی کره، نیمدایره‌هایی که قطب شمال را به قطب جنوب می‌پیوندند همه متساوی و دارای کوتاهترین طول‌اند. برای دقت اصطلاحات ازمفهوم مسافت ذاتی (فصل ۶، بند ۴) استفاده خواهیم کرد.

۱.۵. تعریف. گیریم α قطعه خمی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ در M باشد. آنگاه
(۱) هنگامی α کوتاهترین قطعه خمی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ است که داشته باشیم

$$L(\alpha)=\rho(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

(۲) هنگامی α کوتاهترین قطعه خم از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ است که داشته باشیم $L(\alpha)=\rho(\mathbf{p},\mathbf{q})$ وهر کوتاهترین قطعه خم دیگر از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$، تنها یك تعویض پارامتر خم α باشد.

درحالت نخست، نیز گفته می‌شود که α طول قوس از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ را مینیمم می‌کند. این تعریف بدان معنی است که اگر β هر قطعه خم دیگری از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ باشد، آنگاه

$$L(\beta)\geqslant L(\alpha)$$

درحالت دوم گوییم که α به‌طوریکتا طول قوس را مینیمم می‌کند. «یکتایی» باید در اینجا به‌گونه‌ای تعبیر شود که امکان تعویض پارامتر وجود داشته باشد، زیرا تعویض پارامتر یکنوا (تمرین ۱۵، بند ۲، فصل ۲) طول قوس را تغییر نمی‌دهد.

چنانکه خواهیم دید (لم ۸.۵) همهٔ خمهایی از این گونه که دارای کوتاهترین طول‌اند، ژئودزیك می‌باشند. نخستین نتیجهٔ اصلی، (قضیهٔ ۶.۵)، نشان می‌دهد که در یك رویهٔ هندسی دلخواه هرقطعهٔ ژئودزیك که به‌قدر کافی کوتاه باشد، دارای نقشی همانند خطوط مستقیم در E^2 است. نخست به‌بیان مقدمات موردنیاز می‌پردازیم.

درصفحهٔ اقلیدسی، اگرمسافت تا مبدأ مورد توجه باشد، طبیعی است که باید از

مختصات قطبی استفاده کنیم، زیرا دراین صورت مسافت از o تا

$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v)$$

برابر u است. اکنون به‌تعمیم این نمایش پارامتری درمورد یك رویهٔ هندسی دلخواه M می‌پردازیم. همانند $\mathbf{E}^2$ دراینجا نیز خمهای پارامتر u ژئودزیکهایی خواهند بودکه از یك نقطهٔ ثابت $\mathbf{p}$ در M به‌صورت اشعه خارج می‌شوند. این‌گونه ژئودزیکها را می‌توان به‌آسانی به‌صورت زیرمشخص کرد: اگر $\mathbf{v}$ یك بردارمماس یکه در $\mathbf{p}$ باشد، ژئودزیك یکتایی راکه از $\mathbf{p}$ آغاز می‌شود و دارای سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ است با $\gamma_{\mathbf{v}}$ نشان می‌دهیم. اکنون به‌طریق زیر ازهمهٔ این ژئودزیکها یك نگاشت فراهم می‌آوریم:

۲.۵ تعریف. گیریم $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ یك سه وجهی در $\mathbf{p}$ از M باشد. آنگاه

$$\mathbf{x}(u, v) = \gamma_{\cos v\, \mathbf{e}_1 + \sin v\, \mathbf{e}_2}(u)$$

نگاشت قطبی ژئودزیکی رویهٔ M به قطب $\mathbf{p}$ است.

در اینجا حوزهٔ $\mathbf{x}$ بزرگترین ناحیه‌ای از $\mathbf{E}^2$ است که این فرمول روی آن دارای معنی می‌باشد. به‌ازای هرانتخاب v، یك بردارمماس یکهٔ

$$\mathbf{v} = \cos v\, \mathbf{e}_1 + \sin v\, \mathbf{e}_2$$

در $\mathbf{p}$ تثبیت می‌شود (شکل ۱۴.۷). دراین صورت خم پارامتر u

$$u \to \mathbf{x}(u, v) = \gamma_{\mathbf{v}}(u)$$

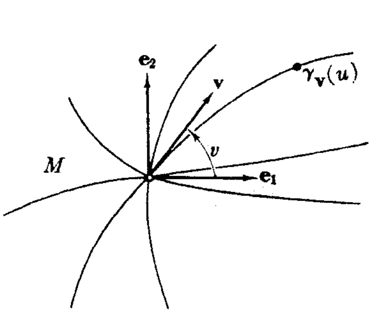
همان ژئودزیك شعاعی با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ است. چون $\|\mathbf{v}\| = 1$، این ژئودزیك دارای تندی واحد می‌باشد، وطول $\gamma_{\mathbf{v}}$ از $\mathbf{p} = \gamma_{\mathbf{v}}(0)$ تا $\gamma_{\mathbf{v}}(u)$ درست برابر u خواهد بود.

درحالت خاصی که $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ میدان سه وجهی طبیعی در o مبدأ $\mathbf{E}^2$ باشد، نگاشت قطبی ژئودزیکی به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= \gamma_{\cos v\mathbf{e}_1 + \sin v\mathbf{e}_2}(u)\\ &= 0 + u(\cos v\mathbf{e}_1 + \sin v\mathbf{e}_2)\\ &= (u\cos v, u\sin v).\end{aligned}$$

بدینسان $\mathbf{x}$ مختصات قطبی صفحه را تعمیم می‌دهد.

قطب $\mathbf{p}$ برای نگاشت قطبی‌ژئودزیکی یك نقطهٔ غیرعادی است. برای بررسی وضعیت در مجاورت $\mathbf{p}$، نگاشت جدیدی (در شرایط تعریف ۲.۵) به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم



شکل ۱۴.۷

$$\mathbf{y}(u, v) = \gamma_{u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2}(1)$$

براساس نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، $\mathbf{y}$ دیفرانسیلپذیر است، و بهآسانی می‌توان تحقیق کرد که $\mathbf{y}$ درمبدأ منظم می‌باشد. بدینسان بنابرقضیهٔ تابع معکوس، $\mathbf{y}$ دیفئومرفیسمی است ازیك قرص $D_\epsilon : u^2+v^2 < \epsilon^2$ روی یك همسایگی $\mathcal{N}_\epsilon$ از نقطهٔ $\mathbf{p}$. $\mathcal{N}_\epsilon$ را یك همسایگی عادی نقطهٔ $\mathbf{p}$ می‌نامیم. درحالت‌خاص $M = \mathbf{E}^2$، $\mathbf{y}$ درست‌نگاشت‌همانی $\mathbf{y}(u, v) = (u, v)$ است، بدینسان درمورد رویهٔ دلخواه M، $\mathbf{y}$ تعمیم مختصات(متعامد) طبیعی $\mathbf{E}^2$ خواهدبود.

۳.۵ لم. بهازای عدد $0 < \epsilon$ که بهقدر کافی کوچك باشد، نوار $0 < u < \epsilon$ در $\mathbf{E}^2$ را با S_ϵ نشان می‌دهیم. دراین‌صورت نگاشت‌قطبی ژئودزیکی $\mathbf{x} : S_\epsilon \to M$ به‌قطب $\mathbf{p}$، نمایش پارامتری یك همسایگی عادی $\mathcal{N}_\epsilon$ نقطهٔ $\mathbf{p}$، با حذف $\mathbf{p}$ می‌باشد (شکل ۱۵.۷ را ببینید).

برهان. توجه شودکه رابطهٔ $\mathbf{x}$ با $\mathbf{y}$ همان رابطهٔ مختصات قطبی با مختصات متعامد است، یعنی

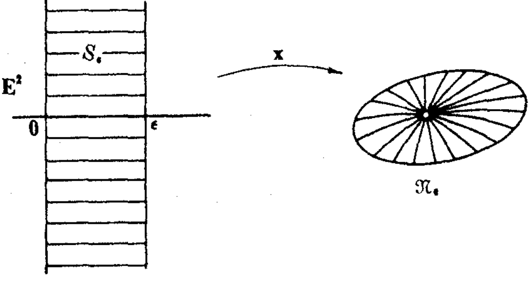
$$\mathbf{x}(u, v) = \gamma_{\cos v\mathbf{e}_1 + \sin v\mathbf{e}_2}(u) = \gamma_{u\cos v\mathbf{e}_1 + u\sin v\mathbf{e}_2}(1)$$
$$= \mathbf{y}(u\cos v, u\sin v)$$

که درآن از اتحاد $\gamma_v(u) = \gamma_{uv}(1)$ مذکور درتمرین ۲، بند ۴ استفاده کرده‌ایم. این فرمول، $\mathbf{x}$ را بهصورت ترکیب دونگاشت منظم زیر بیان می‌کند:

(۱) نگاشت قطبی اقلیدسی $(u, v) \to (u\cos v, u\sin v)$ که نوار S_ϵ را درگرداگرد قرص D_ϵ می‌نگارد، و

(۲) نگاشت یك به یك $\mathbf{y}$ از D_ϵ روی $\mathcal{N}_\epsilon$. بنابراین $\mathbf{x}$ منظم است و S_ϵ را بهروش مختصات قطبی معمولی روی همسایگی $\mathcal{N}_\epsilon$ می‌برد، وتنها قطب حذف می‌شود. ∎

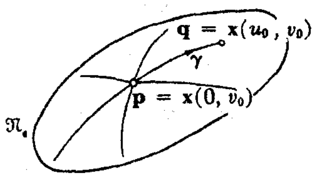
ازاینجا یك نتیجهٔ اساسی بهدست می‌آید: اگر $\mathbf{q} = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ نقطه‌ای دریك



شکل ۱۵.۷

همسایگی عادی $\mathcal{N}$ از $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه تنها یك ژئودزیك باتندی واحد از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجود دارد که تماماً در $\mathcal{N}$ واقع است، یعنی ژئودزیك شعاعی

$$\gamma(u) = \mathbf{x}(u, v_0) \qquad 0 \leqslant u \leqslant u_0$$



شکل ۱۶.۷

(برهان. هر ژئودزیك با تندی واحد که از $\mathbf{p}$ آغاز شود بنابر یکتایی ژئودزیکها، یك خم پارامتر u از نمایش پارامتری قطبی می‌باشد. همان‌طور که درشکل ۱۶.۷ دیده می‌شود، همه بجز $v = v_0 + 2\pi n$، بی آنکه‌از $\mathbf{q}$ بگذرند از $\mathcal{N}$ خارج می‌شوند، و به‌ازای مقادیرمختلف n همان ژئودزیك γ به‌دست می‌آید، این ابهام معمولی مختصات قطبی است).

۴.۵ لم. درمورد نمایش‌پارامتری قطبی ژئودزیکی داریم، $E = 1$ ، $F = 0$ ، $G > 0$.

برهان. چون خمهای پارامتر u ژئودزیکهایی با تندی واحدند، داریم

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{x}_{uu} = 0$$

بدینسان

$$F_u = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vu} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{2} E_v = 0$$

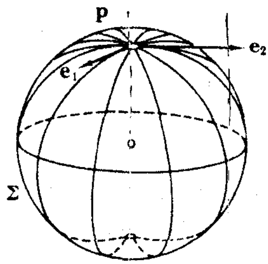
بنابراین F روی هریك از خمهای پارامتر u ثابت است. توابع E ، F ، G حتی هنگامی که $\mathbf{x}$ به‌نوار S_ε تخصیص نیافته باشد به‌خوبی معین می‌باشند. خم پارامتر v ، $v \to \mathbf{x}(0, v)$، همان خم ثابت درقطب $\mathbf{p}$ است، بنابراین

$$\mathbf{x}_v(0, v) = 0$$

اما دراین‌صورت به‌ازای هر v داریم $F(0, v) = 0$، وچون $F_u = 0$، نتیجه‌می‌شود که F متحداً صفر می‌باشد. چون $\mathbf{x}$ (که دراینجا بار دیگر به‌نوار S_ε تخصیص یافته است) یك نمایش پارامتری، یعنی یك نگاشت منظم است، می‌دانیم که $EG - F^2 = EG$ هیچ‌گاه صفر نیست. بنابراین $G > 0$. ∎

۵.۵ مثال. دراینجا نمایشهای پارامتری قطبی ژئودزیکی را در دوحالت کلاسیك‌صریحاً به‌دست می‌آوریم.

(۱) کرهٔ یکه Σ در $\mathbf{E}^3$. برای آسانی گیریم $\mathbf{p}$ قطب شمال $(0, 0, 1)$ باشد. برای به‌دست آوردن ژئودزیکهایی که به‌صورت اشعه از $\mathbf{p}$ خارج می‌شوند همانند شکل ۱۷.۷، نمایش پارامتری جغرافیایی را به‌صورت زیردرمی‌آوریم



شکل ۱۷۰۷

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

هرخم پارامتر u، در واقع یك نمایش پارامتری باتندی واحد دایرهٔ عظیمه است، و بنابراین یك ژئودزیك‌می‌باشد. به‌ازای $u = ۰$ خواهیم‌داشت

$$\mathbf{x}_u(۰, v) = (\cos v, \sin v, ۰)$$
$$= \cos v \mathbf{e}_۱ + \sin v \mathbf{e}_۲$$

که در آن

$$\mathbf{e}_۱ = U_۱(\mathbf{p}), \qquad \mathbf{e}_۲ = U_۲(\mathbf{p})$$

بدینسان بنابریکتایی ژئودزیکها داریم

$$\mathbf{x}(u, v) = \gamma_{\cos v\mathbf{e}_۱ + \sin v\mathbf{e}_۲}(u)$$

و دیده می‌شود که $\mathbf{x}$ به‌همان‌صورتی که در بالا تعریف شده است، یك نگاشت ژئودزیکی قطبی می‌باشد (تعریف ۲۰۵). به‌آسانی می‌توان دید که بزرگترین همسایگی عادی ممکن $\mathfrak{N}_\epsilon$ از $\mathbf{p}$ به‌ازای $\epsilon = \pi$ به‌دست می‌آید؛ زیرا روی نوار S_π ، $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری قطبی تمام‌کره به‌استثنای قطبهای شمال و جنوب است.

(۲) **صفحهٔ هذلولوی** H (مثال ۴۰۲). بـا انتخاب $\mathbf{p} = (۰, ۰)$ قـرار مـی‌دهیم $\mathbf{e}_۱ = U_۱(\mathbf{p})$ ، $\mathbf{e}_۲ = U_۲(\mathbf{p})$. (چون تابع g در مبدأ برابر ۱ است، ایـن یك سه‌وجهی می‌باشد.) درمثال ۱۱۰۴ دیدیم که ژئودزیکهای H که از مبدأ می‌گذرند درامتداد خطوط مستقیم اقلیدسی واقع‌اند. بنابراین به‌ازای هرعدد v ، خم

$$\alpha(t) = (t \cos v, t \sin v)$$

حداقل یك پیش‌ـ‌ژئودزیك ازنوع مطلوب می‌باشد. درمثال ۴۰۲ برای چنین خمی تـابع طول‌قوس را به‌صورت $s(t) = ۲ \tanh^{-۱}(t/۲)$ به‌دست آوردیم، بدینسان

$$s \to \alpha\left(۲ \tanh \frac{s}{۲}\right) = \left(۲ \tanh \frac{s}{۲} \cos v, ۲ \tanh \frac{s}{۲} \sin v\right)$$

تعویض پارامتر با تندی واحد خم α است. با قرار دادن u به‌جای s به‌دست می‌آید

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(۲ \tanh \frac{u}{۲} \cos v, ۲ \tanh \frac{u}{۲} \sin v\right)$$

چون دراین نگاشت خمهای پارامتر u ژئودزیکهایی باتندی واحدند، و

$$\mathbf{x}_u(۰, v) = \cos v \mathbf{e}_۱ + \sin v \mathbf{e}_۲$$

نتیجه می‌شود که مانند (۱)، $\mathbf{x}$ یك نگاشت قطبی ژئودزیکی است. دراین‌حالت همسایگی عادی تمام رویهٔ H می‌باشد.

۶.۵ قضیه. به‌ازای هرنقطهٔ $\mathbf{q}$ واقع درهمسایگی عادی $\mathfrak{N}_\epsilon$ از $\mathbf{p}$ قطعهٔ ژئودزیك شعاعی در $\mathfrak{N}_\epsilon$ از $\mathbf{p}$ تا $\mathbf{q}$ طول قوس را به‌طوریکتا مینیمم می‌کند.

برهان. گیریم $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری قطبی همسایگی عادی $\mathfrak{N}_\epsilon$ باشد. اگر

$$\mathbf{q}=\mathbf{x}(u_\circ, v_\circ)$$

آنگاه قطعهٔ ژئودزیك شعاعی عبارت خواهد بود از

$$\gamma(u)=\mathbf{x}(u, v_\circ), \qquad \circ \leqslant u \leqslant u_\circ$$

اکنون گیریم α یك قطعه خم دلخواه از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ در M باشد. می‌توان ترتیبی داد که α روی همان فاصله متناظر به γ معین باشد.

نخست ثابت می‌کنیم که

$$L(\gamma) \leqslant L(\alpha) \tag{۱}$$

دراینجا دوحالت درنظرمی‌گیریم یکی‌آنکه α ازهمسایگی $\mathfrak{N}_\epsilon$ خارج‌نشود (شکل ۱۸.۷). می‌توان فرض کرد که α پس‌از ترك $\mathbf{p}$ هیچ گاه به $\mathbf{p}$ باز نمی‌گردد، درغیراین‌صورت باحذف حلقهٔ مزبور طول α کوتاهتر می‌شود. بدینسان می‌توان نوشت

$$\alpha(t)=\mathbf{x}(a_1(t), a_2(t))$$

چون $\alpha(\circ)=\mathbf{p}$ و $\alpha(u_\circ)=\mathbf{q}$، داریم

$$\begin{matrix} a_1(\circ)=\circ & \quad a_1(u_\circ)=u_\circ \\ a_2(\circ)=v_\circ & \quad a_2(u_\circ)=v_\circ+2\pi n \end{matrix} \tag{۲}$$

(جملهٔ $2\pi n$ همچنان دراثر عدم یکتایی زوایا درمختصات قطبی به‌وجود می‌آید.)

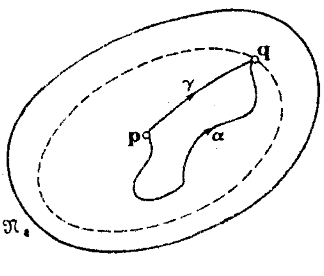
چون درمورد نگاشت $\mathbf{x}$ داریم $E=1$ و $F=\circ$، تندی α برابر خواهد بود با

$$\|\alpha'\|=\sqrt{a_1'^2+Ga_2'^2}$$

اما

$$\sqrt{a_1'^2+Ga_2'^2} \geqslant \sqrt{a_1'^2}=|a_1'| \geqslant a_1' \tag{۳}$$

بنابراین



شکل ۱۸.۷

$$L(\alpha)=\int_{\circ}^{u_\circ}\sqrt{a_1'^2+Ga_2'^2}\geqslant\int_{\circ}^{u_\circ}a_1'\,dt \tag{۴}$$
$$=a_1(u_\circ)-a_1(\circ)=u_\circ$$

در گام آخر از (۲) استفاده شده است. اما ژئودزیك شعاعی γ دارای تندی واحد است، بنابراین

$$L(\gamma)=\int_{\circ}^{u_\circ}dt=u_\circ$$

و نتیجه می‌شود که

$$L(\gamma)\leqslant L(\alpha)$$

درحالت دیگر که α از همسایگی $\mathfrak{N}_\epsilon$ خارج شود، نامساوی بالا بــه‌صورت اکید $L(\gamma)<L(\alpha)$ درمی‌آید. زیرا α باید دایرهٔ قطبی $u=u_\circ$ راکه درشکل ۱۸.۷ خط‌چین نشان داده شده است قطع کند تا بتواند از $\mathfrak{N}_\epsilon$ خارج شود.[۱] اما بنابر برهان بالا طول آن هنگامی که به‌دایره می‌رسد حداقل برابر $u_\circ=L(\gamma)$ خواهد بود.

اکنون به‌اثبات حکم یکتایی زیر می‌پردازیم:

(۵) اگر $L(\alpha)=L(\gamma)$، آنگاه α یك تعویض نمایش پارامتری γ است.

استدلال بالا نشان مــی‌دهدکه اگر $L(\alpha)=L(\gamma)$، آنگاه α در داخل $\mathfrak{N}_\epsilon$ باقــی می‌ماند، و نــامساوی (۴) بــه‌صورت تساوی درمی‌آیــد. از اینجا نتیجــه مــی‌شود کــه $\sqrt{a_1'^2+Ga_2'^2}=a_1'$. چون $G>\circ$ از (۳) نتیجه می‌شود که

$$a_1'\geqslant\circ,\qquad a_2'=\circ \tag{۶}$$

بدینسان a_2 دارای مقدار ثابت $v_\circ$ است (بنابراین در (۲) داریم $n=\circ$) و

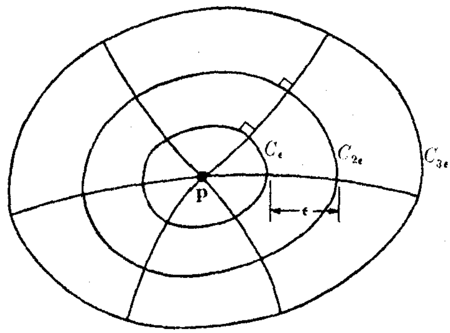
$$\alpha(t)=\mathbf{x}(a_1(t),v_\circ)=\gamma(a_1(t))$$

که نشان می‌دهد α در واقع یك تعویض پارامتر یکنوای γ است. ▌

این نتیجهٔ اساسی نشان مــی‌دهد، همان گونه کــه قبلاً گفته شد، اگــر نقاط $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ به‌قدر کافی به‌هم نزدیك باشند، آنگاه همانند فضای اقلیدسی به‌ازای نقاط دلخواه تنها یك قطعه ژئودزیکی یکتا از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجود دارد به‌طوری‌که از هرخم ماربر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ کوتاهتر است. (اما برخلاف حالت اقلیدسی، امکان دارد ژئودزیکهای بسیاری ماربر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ وجود

---

۱. برهان دقیق مستلزم کاربرد اصل موضوع هاوسدورف (تمرین ۵، فصل ۴، بند ۸) است که آن را درتمام این فصل محقق می‌گیریم.



شکل ۱۹.۷

داشته باشند که دارای کوتاهترین طول نباشند.) اگر $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری ژئودزیکی قطبی در $\mathbf{p}$ باشد، C_ϵ مسیرخم پارامتر v، $u=\epsilon$، را دایرهٔ قطبی به‌شعاع ϵ در $\mathbf{p}$ می‌نامیم (شکل ۱۹.۷). قضیهٔ ۶.۵ نشان می‌دهد که C_ϵ در واقع ازهمهٔ نقاطی که مسافت آنها از $\mathbf{p}$ برابر ϵ است تشکیل شده است.

درحالتهای خاصی که همسایگیهای عادی وسیعی در دسترس باشند، این اطلاع موضعی می‌تواند دارای تأثیر قطعی باشد.

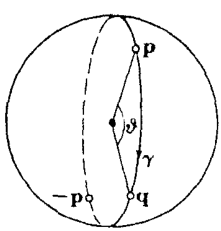
۷.۵. مثال. خواص ژئودزیکهای کرهٔ Σ به‌شعاع r، به‌عنوان کوتاهترین مسیر. با یك تعویض مقیاس می‌توان ازمثال ۵.۵ نتیجه گرفت که هرنقطهٔ $\mathbf{p}$ از Σ دارای همسایگی عادی $\mathfrak{N}_{\pi r}$ است که: ازهمهٔ نقاط Σ به‌جز $-\mathbf{p}$، نقطهٔ متقاطرقطب $\mathbf{p}$، تشکیل می‌شود. بنابراین ازقضیهٔ ۶.۵ نتیجه می‌شود که:

(الف) اگر دونقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ از Σ متقاطر نباشند (یعنی، $\mathbf{q}\neq-\mathbf{p}$)، دراین‌صورت یك خم یکتای γ از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجود دارد که دارای کوتاهترین طول است. ازطرف دیگر همهٔ ژئودزیکهای Σ را می‌شناسیم: γ تنها ژئودزیکی است که مسیر آن قوس کوچکتر دایرهٔ عظیمه ماربر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ است.

(ب) مسافت ذاتی ρ روی Σ از فرمول

$$\rho(\mathbf{p},\mathbf{q})=r\vartheta$$

به‌دست می‌آید، که درآن ϑ $(0\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$ زاویهٔ $\mathbf{p}$ با $\mathbf{q}$ در $\mathbf{E}^3$ است (شکل ۲۰.۷). اگر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ متقاطرنباشند، این تساوی ازقسمت (الف) نتیجه می‌شود، زیرا



شکل ۲۰.۷

$$\rho(\mathbf{p},\mathbf{q})=L(\gamma)=r\vartheta$$

هنگامی که $\mathbf{q}$ به‌طرف $\mathbf{p}-$ یعنی نقطهٔ متقاطر قطب $\mathbf{p}$ حـرکت کند، بنا بر پیوستگی نتیجه می‌شود که $\rho(\mathbf{p}, -\mathbf{p})=r\pi$. بنابراین

(ج) روی $\sum$ بین هردونقطهٔ متقاطر $\mathbf{p}$ و $\mathbf{p}-$ بینهایت ژئودزیك باکوتاهترین طول وجود دارد، یعنی (نمایشهای پارامتری با تندی ثابت مربوط به) نیمدایره‌هایی که $\mathbf{p}$ را به $\mathbf{p}-$ می‌پیوندند. (برهان: همهٔ آنها دارای طول $\rho(\mathbf{p}, -\mathbf{p})=r\pi$ هستند.)

(د) هیچ قطعهٔ ژئودزیك γ با طـول $L(\gamma)>\pi r$ نمی‌توانـد مسافت بین دونقطهٔ انتهایی خود را مینیمم کند. این نکته مستقیماً از آنجا نتیجه مـی‌شود کـه مسافت ذاتی ρ هیچ‌گاه از πr تجاوز نمی‌کند. ازلحاظ هندسی روشن است، که اگر γ از $\mathbf{p}$ آغاز شود، به‌مجرد آنکه ازنقطهٔ متقاطر $\mathbf{p}-$ فراتر رود طول آن از πr تجاوز می‌کند. اما دراین صورت γ^* قوس دیگر همان دایرهٔ عظیمه از γ کوتاهتر است.

فرض کنیم که α قطعه خمی در M از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ ، و β قطعه خمی از $\mathbf{q}$ به $\mathbf{r}$ بـاشد. البته عموماً نمی‌توان α و β را به‌صورت یك‌خم (دیفرانسیلپذیر) از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{r}$ درنظر گرفت، زیرا چنان‌کـه درشکل ۲۱۰۷ دیده مـی‌شود، امکان دارد در $\mathbf{q}$ «گوشه»‌ای تشکیل دهند. با استفاده از روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته، می‌توان این گوشه را «گرد» کرده ویك قطعه خم γ از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{r}$ به‌دست آورد که (برای بیان ضعیفترین قضیه) طول آن فقط اندکی از α و β بیشتر باشد. توضیح آنکه، به‌ازای هـر $\epsilon>0$ یك خم γ وجـود دارد به‌طوری که

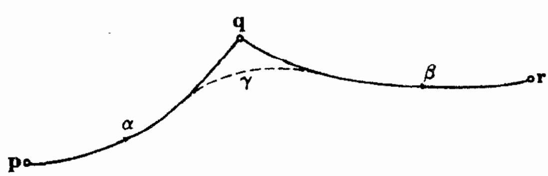
$$L(\gamma)\leqslant L(\alpha)+L(\beta)+\epsilon$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که مسافت ذاتی در نامساوی مثلثی صدق مـی‌کند. در واقع، اگـر نقاط $\mathbf{p}$ ، $\mathbf{q}$ و $\mathbf{r}$ داده شده باشند، بنابـر تعریف مسافت ذاتی، بـه‌ازای هر $\epsilon>0$ می‌توان خمهای α و β را طوری تعیین کرد که مانند بالا داشته باشیم

$$L(\alpha)\leqslant\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})+\epsilon, \qquad L(\beta)\leqslant\rho(\mathbf{q}, \mathbf{r})+\epsilon$$

گرد کردن گوشه درنقطهٔ $\mathbf{q}$ حداکثر به‌تعیین یك ϵ دیگر می‌انجامد: بدینسان یك قطعه‌خم γ از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{r}$ به‌دست می‌آید به‌طوری که

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})\leqslant L(\gamma)\leqslant\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})+\rho(\mathbf{q}, \mathbf{r})+3\epsilon$$



شکل ۲۱۰۷

اما چون ϵ دلخواه است، نتیجه می‌شود که

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leqslant \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r})$$

۸.۵. لم. اگر α قطعه خمی با کوتاهترین طول در M از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ باشد، آنگاه α ژئودزیك است.

برهان. ثابت می‌کنیم که اگر $\alpha:[a, b] \rightarrow M$ قطعه خمی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ ژئودزیك نباشد، آنگاه $L(\alpha) > \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. اگر α ژئودزیك نباشد، به‌ازای یك زمان $t_\circ$، شتاب $\alpha''(t_\circ)$ مخالف صفر است. بنابر پیوستگی، α'' در مجاورت $t_\circ$ صفر نمی‌شود، ازاین‌رو می‌توان فرض کرد که $t_\circ < b$. به‌ازای $\epsilon > \circ$ و به‌قدر کافی کوچك، $\alpha(t_\circ + \epsilon)$ در یك همسایگی عادی $\alpha(t_\circ)$ واقع است، و قطعه‌ای از α از $t_\circ$ تا $t_\circ + \epsilon$ ژئودزیك نیست، زیرا $\alpha''(t_\circ) \neq \circ$ (شکل ۲۲.۷). اما بنابر قضیهٔ ۶.۵ طول $L_{t_\circ, t_\circ+\epsilon}$ اکیداً بزرگتراز مسافت ذاتی $\alpha(t_\circ)$ تا $\alpha(t_\circ + \epsilon)$ است. بدینسان بنابر نامساوی مثلثی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L_{a, t_\circ} + L_{t_\circ, t_\circ+\epsilon} + L_{t_\circ+\epsilon, b} \\ &> \rho(\mathbf{p}, \alpha(t_\circ)) + \rho(\alpha(t_\circ), \alpha(t_\circ+\epsilon)) + \rho(\alpha(t_\circ+\epsilon), \mathbf{q}) \\ &\geqslant \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

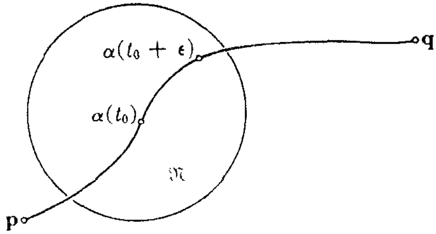
∎

این نتیجه شگفت‌آور نیست: کوتاهترین راه نمی‌تواند دارای پیچش، یا دارای گوشه‌هایی باشد، زیرا استدلال پیچیده‌تری نشان می‌دهد که کوتاهترین خم (که می‌تواند شکسته باشد) باید در واقع یك ژئودزیك (ناشکسته) باشد.

در اینجا به‌نتیجهٔ اصلی این بند می‌رسیم.

۹.۵. قضیه. به‌ازای هر دو نقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ دریك رویهٔ هندسی M که به‌طور ژئودزیکی کامل باشد، یك قطعهٔ ژئودزیك از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ باکوتاهترین طول وجود دارد.

برهان. طرح اثبات بسیار زیرکانه است،ودر تهیهٔ آن چندین ریاضیدان متوالیاً کوشیده‌اند.



شکل ۲۲.۷

(به قضیهٔ ۹.۱۰، صفحهٔ ۶۲، کتاب میلنور [۷] مراجعه شود.) اثبات را با درنظر گرفتن خمی به‌عنوان کوتاهترین خم از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ آغاز می‌کنیم. گیریم

$$\beta(v)=\mathbf{x}(a, v), \qquad \circ \leqslant v \leqslant ۲\pi$$

نمایش پارامتری دایرهٔ قطبی C به‌شعاع a در یك همسایگی عادی $\mathbf{p}$ باشد. بنابر تمرین ۶ تابع $\rho(\beta(v), \mathbf{q}) \leftarrow v$ روی فاصلهٔ بسته $[\circ, ۲\pi]$ پیوسته است؛ بنابراین به‌ازای یك مقداری، مثلاً $v_\circ$ مینیمم می‌شود. گیریم γ خم پارامتر $v=v_\circ$ باشد. چون M به‌طور ژئودزیکی کامل است، $\gamma(u)$ به‌ازای همهٔ مقادیر $u \geqslant \circ$ معین می‌باشد. ثابت خواهیم کرد که γ از $\mathbf{q}$ می‌گذرد، و در واقع

$$\gamma(r)=\mathbf{q} \quad \text{که درآن} \quad r=\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \tag{۱}$$

(شکل ۲۳.۷ نمایشگر این وضعیت است.) چون γ دارای تندی واحد است، نتیجه خواهد شد که

$$L(\gamma)=r=\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

و بدینسان قضیه ثابت می‌شود.

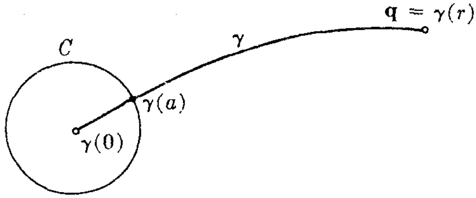
برای اثبات (۱)، از یك حالت استدلال استقرایی معمول که در آن به‌جای اعداد صحیح اعداد حقیقی جایگزین شده‌اند استفاده می‌کنیم. به‌ازای هر عدد $u \geqslant \circ$ حکم زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathfrak{A}(u): \qquad \rho(\gamma(u), \mathbf{q})=r-u \tag{۲}$$

که درآن، مانند بالا، $r=\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. این بدان معنی است که γ (با تندی واحد) نافذاست: پس‌از پیمودن مسافت u، مسافت تا $\mathbf{q}$ دقیقاً به‌اندازهٔ u کاهش می‌یابد. اگر بتوان نشان داد که حکم $\mathfrak{A}(r)$ صادق است، اثبات پایان می‌یابد، زیرا دراین صورت

$$\rho(\gamma(r), \mathbf{q})=\circ$$

و بنابر تمرین ۵، $\gamma(r)=\mathbf{q}$. ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathfrak{A}(a)$ به‌ازای a مذکور در بالا صادق است، یعنی



شکل ۲۳.۷

$$\rho(\gamma(a), \mathbf{q}) = r - a \tag{۳}$$

طبق قضیهٔ ۶.۵ داریم $\rho(\mathbf{p}, \gamma(a)) = a$، و بنابر نامساوی مثلثی

$$r = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leqslant a + \rho(\gamma(a), \mathbf{q})$$

باید عکس این نامساوی را اثبات کنیم تا (۳) به دست آید. بنابر تعریف مسافت ذاتی، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ یك قطعه خم α از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجود دارد به‌طوری که

$$L(\alpha) \leqslant \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \epsilon$$

اما α باید دایرهٔ قطبی C را در یك نقطهٔ $\alpha(t_0)$ قطع کند، و مشاهده می‌کنیم که قسمتی از α که $\mathbf{p}$ را به $\alpha(t_0)$ می‌پیوندد دارای طول $L_1 \geqslant a$ می‌باشد، و بقیهٔ α دارای طول

$$L_2 \geqslant \rho(\alpha(t_0), \mathbf{q}) \geqslant \rho(\gamma(a), \mathbf{q})$$

است. (قسمت دوم این نامساوی از آنجا نتیجه می‌شود که $\gamma(a)$ نزدیکترین نقطه به $\mathbf{q}$ روی C است.) بدینسان

$$a + \rho(\gamma(a), \mathbf{q}) \leqslant L_1 + L_2 = L(\alpha) \leqslant \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \epsilon$$

چون ϵ دلخواه است، نامساوی

$$a + \rho(\gamma(a), \mathbf{q}) \leqslant \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

که برای اثبات (۳) لازم بود به‌دست می‌آید.

اکنون مرحلهٔ استقرایی اثبات مطرح می‌شود. چون ρ نمی‌تواند منفی باشد، $\mathfrak{a}(u)$ به‌ازای $u > r$ فاقد معنی است. بدینسان مجموعهٔ اعداد a که به ازای آنها $\mathfrak{a}(a)$ صادق است دارای یك کوچکترین کران بالای b، با $b \leqslant r$ است. چون توابعی که در گزارهٔ $\mathfrak{a}(a)$ دخالت دارند پیوسته‌اند، بنابر تعریف کوچکترین کران بالا، $\mathfrak{a}(b)$ نیز صادق است.

طرح بقیهٔ اثبات از این قرار است: فرض می‌کنیم که $b < r$، و از آنجا تناقضی به‌دست می‌آوریم. آنگاه (چون $b \leqslant r$) باید داشته باشیم $b = r$، و $\mathfrak{a}(r)$ به‌همان گونه که می‌خواستیم صادق است.

گیریم C^* یك دایرهٔ قطبی به‌شعاع $a^* < r - b$ در یك همسایگی عادی $\gamma(b)$ باشد. با تکرار استدلال مربوط به‌دایرهٔ C، یك نقطهٔ $\mathbf{c}^*$ به دست می‌آید به‌طوری که

$$\rho(\mathbf{c}^*, \mathbf{q}) = \rho(\gamma(b), \mathbf{q}) - a^* \tag{۳'}$$

(شکل ۲۴.۷ را ببینید.) اما $\mathfrak{a}(b)$ عبارت است از $\rho(\gamma(b), \mathbf{q}) = r - b$، بنابراین

$$\rho(\mathbf{c}^*, \mathbf{q}) = r - b - a^* \tag{۴}$$

مرحلهٔ اصلی دیگری که باقی می‌ماند عبارت است از اثبات

$$\mathbf{c}^* = \gamma(b+a^*) \tag{۵}$$

این نکته چندان دشوار نیست. بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{c}^*) + \rho(\mathbf{c}^*, \mathbf{q}) \geqslant \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = r$$

و با استفاده از (۴) به‌دست می‌آید

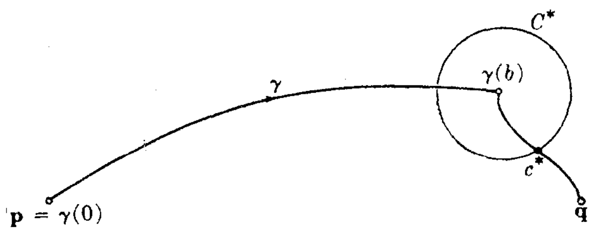
$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{c}^*) \geqslant b + a^*$$

اما از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{c}^*$ یك خم شکسته وجود دارد که طول آن دقیقاً برابر $b+a^*$ است. در واقع، با توجه به شکل ۲۴.۷، می‌توان روی γ از $\mathbf{p}$ به $\gamma(b)$ با طول قوس b، وسپس از $\gamma(b)$ به $\mathbf{c}^*$ روی یك شعاع ژئودزیکی به‌طول a^* حرکت کرد. بدینسان بنابر توضیحی که پیش‌از این قضیه آمد، خم مزبور در واقع شکسته نیست. بنابراین در طول تمام مسیر خم مزبور همان γ است، و $\gamma(b+a^*)$ دقیقاً برابر $\mathbf{c}^*$ می‌باشد.

بالاخره، چون (۵) را در (۴) قراردهیم، به‌دست می‌آید

$$\rho(\gamma(b+a^*), \mathbf{q}) = r - (b+a^*)$$

این بدان معنی است که $\mathfrak{a}(b+a^*)$ صادق است، و چون $b+a^*$ اکیداً از b که کران بالاست بزرگتر می‌باشد به‌تناقض مطلوب می‌رسیم. ▮



شکل ۲۴.۷

تمرینات

۱. در صفحهٔ هذلولوی H، مسافت ذاتی از مبدأ $\mathbf{o}$ تا یك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{p}$ را بیابید. نتیجه بگیرید که همهٔ ژئودزیکهای H دارای طول بینهایت‌اند، و بنابراین H کامل است. (راهنمایی: از نامساوی مثلثی استفاده کنید.)

۲. در نیمصفحهٔ پوانکاره (تمرین ۶، بند ۴):

(الف) برای مسیرهای ژئودزیکهای نیمدایره‌ای ماربرنقطهٔ $(\circ, ۱)$ معادله‌ای به‌صورت $F(x, y, c) = \circ$ بیابید.

(ب) معادله‌ای به‌صورت $G(x, y, a)=0$ برای دایره‌های قطبی به‌مرکز $(0, 1)$ بیابید. (راهنمایی: این دایره‌ها مسیرهای قائم خمهای قسمت (الف) می‌باشند.)
(ج) چند خم از هر خانواده را در یك طرح اجمالی رسم کنید.

۳. در نقطهٔ $\mathbf{p}=(r, 0, 0)$ از استوانهٔ $M: x^2+y^2=r^2$، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{e}_1=(0, 1, 0) \quad \text{و} \quad \mathbf{e}_2=(0, 0, 1)$$

در این حالت برای نگاشت $\mathbf{y}$ (صفحهٔ ۳۸۴) فرمول صریحی بیابید. بزرگترین همسایگی عادی نقطهٔ $\mathbf{p}$ چیست؟

۴. طرحی را که در برهان قضیهٔ ۹.۵ به‌کار رفت، درحالت خاص $M=\mathbf{E}^2$ بیازمایید. توضیح: با نگاشت قطبی ژئودزیکی

$$\mathbf{x}(u, v)=(p_1+u\cos v,\ p_2+u\sin v) \qquad \text{در } \mathbf{p}$$

شروع کرده و با پیروی از بند اول برهان قضیهٔ ۹.۵ ژئودزیك γ را بیابید.

۵. مسافت ذاتی روی M یك متریك است. نشان دهید که
(الف) همهٔ نقاط $\mathbf{q}$ به‌طوری‌که $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})<\epsilon$، یك همسایگی عادی $\mathfrak{N}_\epsilon$ برای $\mathbf{p}$ تشکیل می‌دهند.
(ب) ρ در سه خصوصیت متریك صدق می‌کند: (i) $\rho\geqslant 0$ و $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})=0$ اگر، و فقط اگر، $\mathbf{p}=\mathbf{q}$، (ii) $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})=\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})$، و (iii) نامساوی مثلثی.
(راهنمایی: لازم است که از اصل موضوع هاوسدورف به‌همان منظور که درپاورقی صفحهٔ ۳۸۸ آمده، استفاده شود.)

۶. مسافت ذاتی پیوسته‌است. دریك رویهٔ هندسی M، هنگامی گوییم $\mathbf{p}_i \to \mathbf{p}$، که دنبالهٔ اعداد حقیقی $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)$ به‌سمت ۰ میل کند. ثابت کنید که اگر $\mathbf{p}_i \to \mathbf{p}$ و $\mathbf{q}_i \to \mathbf{q}$، آنگاه $\rho(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) \to \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

۷. گیریم α و β دو ژئودزیك متمایز با تندی واحد باشند که هردو از یك نقطهٔ $\alpha(0)=\beta(0)$ آغاز می‌شوند. اگر α و β پس‌از پیمودن یك مسافت $r>0$ مجدداً یکدیگر را قطع کنند، یعنی، $\alpha(r)=\beta(r)$، ثابت کنید که از آن به‌بعد α و β هیچ کدام طول قوس را مینیمم نمی‌کنند. (ازاین نکته استفاده کنید که ژئودزیکهای شکسته نمی‌توانند طول قوس را مینیمم کنند.)

۸. (ادامه). ثابت کنید که روی استوانهٔ $M: x^2+y^2=r^2$:
(الف) ژئودزیکی که از نقطهٔ (a, b, c) آغاز شود، نمی‌تواند طول قوس را پس‌از عبور از خط متقاطر $t \to (\cancel{-}a, -b, t)$ مینیمم کند.
(ب) اگر $\mathbf{q}$ روی خط متقاطرنقطهٔ $\mathbf{p}$ نباشد، نشان دهید که تنها یك کوتاهترین ژئودزیك

از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ وجـود دارد. از اینجا فرمولی برای مسافت ذاتی روی استوانه به‌دست آورید.

۹. نشان دهیدکه عکس قضیهٔ ۹.۵ برقرار نیست: مثالی از یك رویهٔ هندسی M بیاورید که هر دونقطهٔ آن را بتوان به‌وسیلهٔ یك ژئودزیك باکوتاهترین طول به هم پیوست، و M به‌طور ژئودزیکی کامل نباشد.

۱۰. گیریم $\gamma: [a, b] \to M$ نمایش پارامتری قسمتی از یك نصف‌النهار رویهٔ دورانی M باشد. ثابت‌کنیدکه γ به‌طور یکتا طول قوس را مینیمم می‌کند. (راهنمایی: خم دیگر α باهمین خواص را بانمایش پارامتری متعارف $\mathbf{x}(a_1, a_2)$ درنظرگرفته، و از طرح قضیهٔ ۶.۵ استفاده کنید.)

۱۱. گیریم M یك رویهٔ دورانی اضافی باشد (تمرین ۱۲، فصل۴، بند ۱).
(الف) اگر M فقط دارای یك نقطهٔ تقاطع $\mathbf{p}$ (با محور دوران) باشد، نشان دهیدکه روی M هر ژئودزیك γ که از $\mathbf{p}$ آغازشود به‌طوریکتا طول قوس را مینیمم‌می‌کند.
(ب) اگر M دارای یك نقطهٔ تقاطع دیگر $\mathbf{q}$ باشد، نشان دهیدکه‌گزارهٔ (الف)وقتی وفقط وقتی برقراراست‌که γ به $\mathbf{q}$ نرسد.
(راهنمایی: به‌هیچ محاسبه‌ای نیاز نیست.)

۶. خمیدگی و نقاط مزدوج

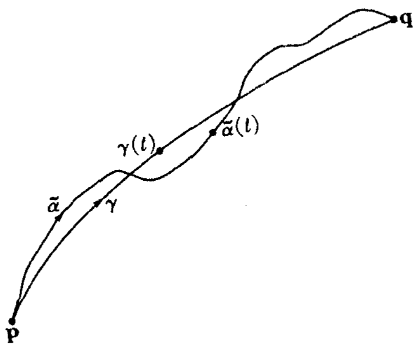
دراینجا به اختصار تأثیر K، خمیدگی گاوسی رویهٔ هندسی M را بـر ژئودزیکهای M بررسی می‌کنیم.

۱.۶. تعریف. قطعه ژئودزیك γ از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ هنگامی طول قوس از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ را به‌طور موضعی مینیمم می‌کند،که به‌ازای هرقطعه خم α از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ که به‌قدرکافی به γ نزدیك باشد داشته باشیم $L(\alpha) \geqslant L(\gamma)$.

برای توضیح اصطلاح «به قدرکافی نزدیك» باید تـوجه داشت‌کـه α هنگامی در ε- همسایگی γ قرار داردکه برای α یك تعویض پارامتر $\bar{\alpha}$ روی فـاصلهٔ I متناظر بـه γ وجود داشته باشد به‌طوری‌کـه به‌ازای هـر t در I داشته بـاشیم $\rho(\bar{\alpha}(t), \gamma(t)) < \varepsilon$ (شکل ۲۵.۷). بدینسان قسمت پایانی تعریف ۱.۶ به‌صورت زیر در می‌آید «یك $\varepsilon > 0$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که‌به‌ازای‌هرα درε- همسایگیγ، داشته‌باشیم $L(\alpha) \geqslant L(\gamma)$.» این مینیمم موضعی هنگامی اکید (یا یکتا) است‌که نامساوی اکید

$$L(\alpha) > L(\gamma)$$

برقرار باشد، مگر آنکه α یك تعویض پارامتر γ را نمایش دهد.



شکل ۲۵.۷

برای آنکه تصور روشنی ازاین تعریف به دست آید باید γ را به‌صورت یك نخ قابل ارتجاع، یا نوار لاستیکی درنظر گرفت، به‌طوری که (۱) مقید به‌قرار گرفتن در M، (۲) تحت کشش، و (۳) دوسر آن در $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ تثبیت شده باشد.

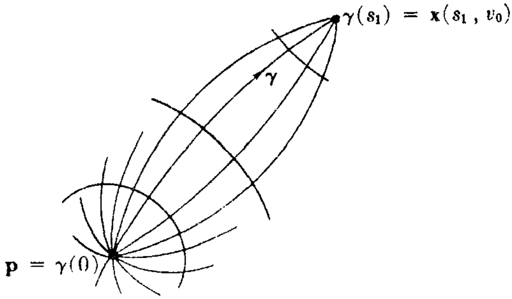
چون γ یك ژئودزیك می‌باشد، بنابراین حالت تعادل دارد: اگر ژئودزیك نباشد، نیروی کشش آن را به‌وضعیت جدیدکوتاهتری درمی‌آورد. اما آیا این تعادل پایداراست؟ یعنی اگر γ را اندکی بلغزانیم تا به‌یك خم جدید α بدل شود وآن را رها کنیم، آیا به وضعیت اولیهٔ γ برخواهدگشت؟ روشن است که γ (اکیداً) پایدار خواهد بود اگر، و فقط اگر، به مفهوم بالا یك مینیمم موضعی (اکید) باشد، زیرا اگر α از γ درازتر باشد، نیروی کشش آن را به روی γ برمی‌گرداند.

بررسی مینیمم موضعی براساس مفهوم نقاط مزدوج انجام می گیرد. اگر γ یك ژئودزیك با تندی واحد باشدکه از $\mathbf{p}$ آغاز شود، آنگاه γ یك‌خم پارامتر u، یعنی $v=v_\circ$، ازیك نگاشت قطبی ژئودزیکی $\mathbf{x}$ به‌قطب $\mathbf{p}$ می‌باشد. می‌دانیم که درطول خم γ تابع $G=\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ در $u=\circ$ برابرصفر است، و ازآن نقطه به‌بعد مخالف صفر می‌باشد (لم ۴.۵). نقطهٔ $\gamma(s)=\mathbf{x}(s, v_\circ)$ با $s>\circ$ را هنگامی مزدوج نقطهٔ $\mathbf{p}=\gamma(\circ)$ روی γ می‌نامند که داشته باشیم $G(s, v_\circ)=\circ$. (امکان دارد چنین نقاطی وجود نداشته باشند.)

معنی هندسی مزدوج بودن مبتنی بر آن است که $\sqrt{G}=\|\mathbf{x}_v\|$ را به‌عنوان میزان پیشرفت خمهای پارامتر u (ژئودزیکهای شعاعی) تعبیرکنیم. به بیان اجمالی، به ازای $\epsilon>\circ$، اگر $\sqrt{G}=\|\mathbf{x}_v\|$ بزرگ باشد، آنگاه مسافت از $\mathbf{x}(u, v)$ تا $\mathbf{x}(u, v+\epsilon)$ بزرگ است: ژئودزیکهای شعاعی دارای پیشرفت سریع می‌باشند. هنگامی که $\sqrt{G}$ کوچك باشد، این مسافت کوچك است، و ژئودزیکهای شعاعی مجدداً به هم نزدیك می‌شوند. بدینسان هنگامی که G دریك نقطهٔ مزدوج

$$\gamma(s_1)=\mathbf{x}(s_1, v_\circ)$$

صفر شود، مبین آن است که به ازای v در مجاورت $v_\circ$ خمهای پارامتر u همگی پس از پیمودن همین مسافت s_1 (با تندی واحد) به این نقطه می‌رسند (شکل ۲۶.۷). متأسفانه



شکل ۲۶.۷

امکان دارد که عملاً این تلاقی رخ ندهد. (G تنها روی مشتقهای مرتبهٔ اول دارای تأثیر است، و با وجود صفر بودن آن ممکن است مشتقهای مرتبهٔ بالاتر صفر نباشند.)

صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$، میزان «معمول» پیشرفت ژئودزیکهای شعاعی را به‌دست می‌دهد، وبه‌ازای $\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v)$ داریم

$$\sqrt{G} = u$$

دراین حالت خاص، نقاط مزدوج وجود ندارند. اکنون به‌مقایسهٔ حالتهایی که درمثال ۵.۵ بحث شد، یعنی کرهٔ یکهٔ Σ و صفحهٔ هذلولوی H می‌پردازیم. درمورد Σ داریم

$$\sqrt{G} = \sin u$$

بدینسان ژئودزیکهای شعاعی که مثلاً از $\mathbf{p}$، قطب‌شمال Σ، آغاز می‌شوند از ژئودزیکهای $\mathbf{E}^2$ دارای سرعت پیشرفت کمتری می‌باشند، زیرا به ازای $u > 0$ داریم $\sin u < u$. درشکل ۱۷.۷ می‌توان دید که ژئودزیکها پس ازعبور از استوا عملاً به تدریج به‌هم نزدیك می‌شوند، وهمهٔ آنها پس ازپیمودن مسافت π به نقطهٔ مزدوج خود می‌رسند، زیرا $\sqrt{G(\pi, v)} = \sin\pi = 0$. روشن است که در این حالت تلاقی ژئودزیکها واقعاً تحقق می‌یابد، نقطهٔ تلاقی همان قطب جنوب Σ است.

درمورد صفحهٔ هذلولوی، می‌دانیم که ژئودزیکهایی که به‌صورت شعاع ازمبدأخارج می‌شوند درست خطوط مستقیم اقلیدسی‌می‌باشند، اماسرعت پیشرفت آنها از ژئودزیکهای $\mathbf{E}^2$ بیشتر است، این نکته را با توجه به «انقباض متر در هنگام حرکت به‌طرف لبهٔ H» می‌توان حدس زد. برای اثبات آن، با استفاده ازاطلاعات موجود در مثال ۵.۵، قسمت (۲) به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{G} = \sinh u$$

بدینسان به‌ازای $u > 0$ داریم $\sqrt{G} > u$، ودراین‌حالت نیز نقاط مزدوجی وجود ندارد.

۶.۲. قضیه. اگر γ قطعه ژئودزیکی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ باشد، به‌طوری که روی γ برای $\mathbf{p}=\gamma(0)$ نقاط مزدوجی وجود نداشته باشند، آنگاه γ به طور موضعی طول قوس از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ را (اکیداً) مینیمم می‌نماید.

برهان. گیریم $\mathbf{x}$ یك نگاشت قطبی ژئودزیکی در $\mathbf{p}$ باشد، وحوزهٔ آن را به ناحیه‌ای از $\mathbf{E}^2$ که روی آن G مثبت است محدود کنیم. چون روی γ برای $\mathbf{p}$ نقاط مزدوجی وجود ندارد، می‌توان به ازای $0 \leqslant u \leqslant u_0$ نوشت $\gamma(u)=\mathbf{x}(u, v_0)$. (بدینسان در این معادله مطابق معمول می‌تواند u مساوی صفر باشد، حتی اگردر آنجا داشته باشیم $G=0$). قطعه خم دیگر α از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ را به‌طوری که روی فاصلهٔ $[0, u_0]$ نیزمعین باشد در نظر می‌گیریم. برهان براین نکته مبتنی است که اگر α به‌قدرکافی به γ نزدیك باشد (به‌طوری که قبلاً تعریف شد)، آنگاه α عبارت یعنی

$$\alpha(t)=\mathbf{x}(a_1(t), a_2(t))$$

به‌قدری به‌عبارت γ نزدیك است که

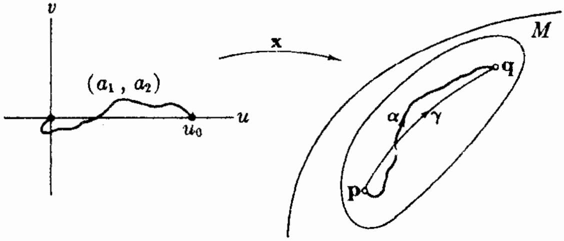
$$a_1(0)=0 \quad , \quad a_1(u_0)=u_0$$

(شکل ۷.۲۷).

این حکم گرچه ظاهراً موجه است، اما اثبات کامل آن چندان ساده نیست. در $u=0$ اشکالی وجود ندارد، زیرا بدون آنکه ازعمومیت کاسته شود، می‌توان به‌جای یك قطعهٔ اولیهٔ کوتاه از α یك ژئودزیك شعاعی را قرارداد، واین‌عمل طول α را افزایش نمی‌دهد. سپس a_1 و a_2 را با روش گام به‌گام و با استفاده از اینکه $\mathbf{x}$ یك نگاشت منظم و درنتیجه یك دیفئومرفیسم موضعی است، می‌سازیم.

بدینسان دقیقاً مانند آنچه در برهان قضیهٔ ۶.۵ بیان شد داریم

$$L(\alpha)=\int_0^{u_0}\sqrt{a_1'^2+Ga_2'^2}\,dt \geqslant \int_0^{u_0} a_1'\,dt$$
$$=a_1(u_0)-a_1(0)=u_0=L(\gamma)$$



شکل ۷.۲۷

و اگر $L(\alpha)=L(\gamma)$، α تنها یك تعویض پارامتر γ است. ∎

اکنون باید مفهوم نقاط مزدوج را از بستگی نگاشتهای قطبی ژئودزیکی آزادساخت. برای این کار «ضریب پیشرفت» یعنی $\sqrt{G}$ را مورد بررسی دقیقتری قرارمی‌دهیم.

۳.۶ قضیه. گیریم $\mathbf{x}$ یك نگاشت قطبی ژئودزیکی باشدکه روی ناحیه‌ای بـا $G>0$ معین است. آنگاه $\sqrt{G}=\|\mathbf{x}_v\|$ در معادلهٔ دیفرانسیل ژاکوبی

$$(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0$$

با شرایط اولیهٔ

$$\sqrt{G}(0, v)=0 \qquad (\sqrt{G})_u(0, v)=1 \qquad \text{به‌ازای هر } v$$

صدق می‌کند.

قید $G>0$ برای دیفرانسیلپذیر بودن $\sqrt{G}$ ضروری است. اما $\sqrt{G}(u, v)$ به‌ازای $u=0$ کاملاً معین است، و در واقع داریم

$$\sqrt{G}(0, v)=\|\mathbf{x}_v(0, v)\|=0$$

البته، لزومی نداردکه $\sqrt{G}$ در $u=0$ دیفرانسیلپذیر بـاشد، از ایـن‌رو $(\sqrt{G})_u(0, v)$ و $(\sqrt{G})_{uu}(0, v)$ را باید به‌عنوان حد درنظر گرفت، مثلا

$$(\sqrt{G})_u(0, v)=\lim_{u\to 0}(\sqrt{G})_u(u, v)$$

برهان. معادلهٔ ژاکوبی مستقیماً از لم ۳.۶ فصل ۶ به‌دست می‌آید، زیرا چنان‌کـه در لم ۴.۵ دیده شد، برای $\mathbf{x}$ داریم $E=1$ و $F=0$. بدینسان بـا توجه به‌توضیحات بالا کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{u\to 0}(\sqrt{G})_u(u, v)=1 \qquad (u>0)$$

برای این منظورکافی‌است تنها یك ژئودزیك شعاعی $\gamma(u)=\mathbf{x}(u, v_0)$ را درنظر بگیریم و قراردهیم

$$g(u)=\sqrt{G}(u, v_0) \qquad \text{به‌ازای } u>0$$

بعلاوه چون $E=1$ و $F=0$، یك میدان سه‌وجهی

$$E_1=\gamma'=\mathbf{x}_u, \quad E_2=\frac{\mathbf{x}_v}{g} \quad \text{روی } \gamma \text{ به‌ازای } u>0$$

به‌دست می‌آید.

چون γ یك ژئودزیك است، E_1 متوازی است و بنابرتمرین ۳، بند ۴، E_2 نیز متوازی می‌باشد. بدینسان بنابرتوازی E_2 در $u=0$ کاملاً معین است (شکل ۲۸.۷). اما

$$E_1(0)=\mathbf{x}_u(0,\ v_0)=\cos v_0\ \mathbf{e}_1+\sin v_0\ \mathbf{e}_2$$

بنابراین

$$E_2(0)=-\sin v_0\ \mathbf{e}_1+\cos v_0\ \mathbf{e}_2$$

علاوه براین، چون E_2 متوازی است و روی γ داریم $\mathbf{x}_v=gE_2$، به‌دست می‌آید

$$\mathbf{x}_{uv}=\mathbf{x}_{vu}=g'E_2 \qquad u>0 \text{ روی } \gamma \text{ به‌ازای }$$

با درنظر گرفتن حد هنگامی که $u\to 0$، داریم

$$\mathbf{x}_{uv}(0,\ v_0)=(\lim_{u\to 0} g'(u))\ E_2(0)$$

اما

$$\mathbf{x}_u(0,\ v)=\cos v\ \mathbf{e}_1+\sin v\ \mathbf{e}_2 \quad v \text{ به‌ازای هر }$$

بنابراین

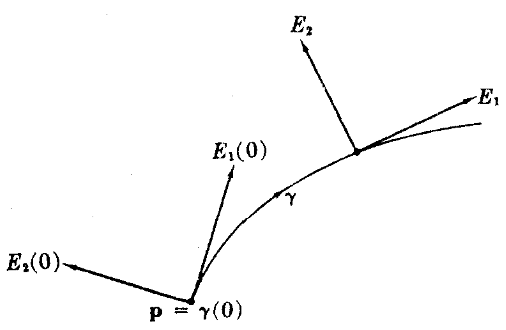
$$\mathbf{x}_{uv}(0,\ v_0)=-\sin v_0\ \mathbf{e}_1+\cos v_0\ \mathbf{e}_2=E_2(0)$$

بدینسان از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که $\lim_{u\to 0} g'(0)=1$، یعنی، به‌ازای هر v_0 دلخواه داریم

$$\lim_{u\to 0}(\sqrt{G})_u(u,\ v_0)=1 \qquad \blacksquare$$

شرایط اولیهٔ بالا نشان می‌دهند که درهر رویهٔ هندسی، پیشرفت ژئودزیکهای شعاعی در هنگام ترك قطب $\mathbf{P}$ به‌همان میزان مربوط به‌صفحهٔ اقلیدسی E^2 انجام می‌گیرد. زیرا در مورد E^2 به‌دست آوردیم که $\sqrt{G}=u$، بنابراین

$$\sqrt{G}(0,\ v)=0,\quad (\sqrt{G})_u(0,\ v)=1$$



شکل ۲۸.۷

اما چون معادلهٔ ژاکوبی به‌صورت $(\sqrt{G})_{uu} = -K\sqrt{G}$ نوشته شود، نشان می‌دهد که میزان پیشرفت ازاین نقطه به‌بعد به‌خمیدگی گاوسی بستگی دارد. به‌ازای $K > ۰$، پیشرفت ژئودزیکهای شعاعی از پیشرفت متناظر به E^2 سریعتر است. (این نکته را در مورد صفحهٔ هذلولوی قبلاً دیدیم.) به‌ازای $K > ۰$ میزان پیشرفت از پیشرفت متناظر به $\mathbf{E}^2$ کندتر است (چنان‌که در مورد کره دیده شد).

به‌ویژه، برای تعیین نقاط مزدوج، دیگر لازم نیست که مانند آنچه تاکنون انجام گرفت به‌ساختن صریح نگاشتهای قطبی ژئودزیکی بپردازیم. می‌توان $\sqrt{G}$ را روی یك ژئودزیك γ تنها با حل معادلهٔ ژاکوبی روی γ، و با توجه به‌شرایط اولیه به‌دست آورد. بالاخره، از قضیهٔ ۳.۶ نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

۴.۶. فرع. گیریم γ یك ژئودزیك با تندی واحد باشد که از نقطهٔ $\mathbf{p}$ در M آغاز می‌شود. گیریم g جواب یکتای معادلهٔ ژاکوبی روی γ، یعنی

$$g'' + K(\gamma)g = ۰$$

باشد، به‌طوری که $g(۰) = ۰$، $g'(۰) = ۱$. آنگاه نخستین نقطهٔ مزدوج $\mathbf{p} = \gamma(۰)$ روی γ (در صورت وجود) نقطهٔ $\gamma(s_1)$ است، که در آن s_1 کوچکترین عدد مثبتی است که به‌ازای آن داریم $g(s_1) = ۰$.

۵.۶. مثال. نقاط مزدوج

(۱) ژئودزیك γ با تندی واحد را که از یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ روی کرهٔ Σ به‌شعاع r آغاز می‌شود درنظرمی‌گیریم. معادلهٔ ژاکوبی γ به‌صورت $g'' + g/r^2 = ۰$ است که دارای جواب عمومی

$$g(s) = A\sin\frac{s}{r} + B\cos\frac{s}{r}$$

می‌باشد، وبا توجه به‌شرایط اولیهٔ $g(۰) = ۰$ و $g'(۰) = ۱$ داریم $g(s) = r\sin(s/r)$. نخستین صفر این تابع با قید $s_1 > ۰$ در $s_1 = \pi r$ حاصل می‌شود. بدینسان نخستین نقطهٔ مزدوج $\mathbf{p} = \gamma(۰)$ روی γ همان نقطهٔ متقاطر $\mathbf{p}$ است. (این مطلب با محاسبه‌ای که قبلاً با استفاده از نگاشتهای قطبی ژئودزیکی در مورد کرهٔ یکه انجام شد مطابقت دارد.)

(۲) گیریم γ یك نمایش پارامتری با تندی واحد استوای بیرونی چنبرهٔ دورانی T با شعاعهای $R > r > ۰$ باشد. می‌دانیم که γ یك ژئودزیك است و روی آن K دارای مقدار ثابت $1/r(R+r)$ می‌باشد. بدینسان بنابر فرع ۴.۶، $\gamma(s_1)$ نخستین نقطهٔ مزدوج $\mathbf{p} = \gamma(۰)$ روی γ دقیقاً در مسافتی در طول γ واقع است که گویی γ روی کره‌ای با خمیدگی K قرار دارد. در نتیجه $s_1 = \pi\sqrt{r(R+r)}$.

۶.۶. فرع. روی هیچ‌یك از ژئودزیکهای رویه‌ای با خمیدگی $K \leqslant ۰$ نقاط مزدوج

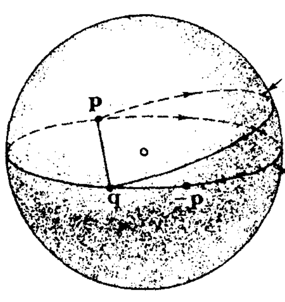
وجود ندارند. بنابراین هرقطعهٔ ژئودزیك روی چنین رویه‌ای به‌طور موضعی تابع طول قوس را مینیمم می‌کند.

برهان. با اعمال فرع ۴.۶ در مورد ژئودزیك γ در M و با توجه به $g(0)=0$ و $g'(0)=1$، نتیجه می‌شود که به‌ازای $s \geqslant 0$ دست‌کم تا نخستین نقطهٔ مزدوج (اگر وجود داشته باشد) خواهیم داشت $g(s) \geqslant 0$. اما از $K \leqslant 0$ نتیجه می‌شود که $g''=-Kg \geqslant 0$، بنابراین g' تابعی صعودی است، و $g' \geqslant 1$. بنابراین تا نخستین نقطهٔ مزدوج داریم $g(s) \geqslant s$ و بدینسان نقطهٔ مزدوجی وجود نخواهد داشت. حکم آخر نیز از قضیهٔ ۲.۶ نتیجه می‌شود. ∎

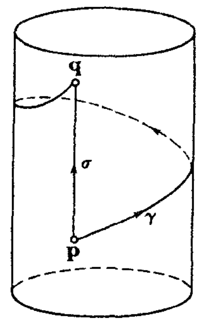
به عنوان مثال، روی استوانهٔ مستدیر C $(K=0)$ ژئودزیك مارپیچی γ از **p** به **q** که در شکل ۲۹.۷ دیده می‌شود همان‌طور که می‌توان با تجربهٔ مستقیم تحقیق کرد، پایدار است. گرچه به‌طور موضعی مینیمم‌کننده است، اما کلاً مینیمم‌کننده نیست. روشن است که برای رفتن از **p** به **q** قطعهٔ خط مستقیم σ مسیر بسیار کوتاهتری را به‌دست می‌دهد.

برای بررسی عمیقتر نقاط مزدوج، لازم است که از حساب تغییرات استفاده شود (کتاب میلنور [۷] را ببینید). ما تنها به ذکر یك نتیجه که مکمل قضیهٔ ۲.۶ است می‌پردازیم. ژئودزیك γ که از نقطهٔ **p** آغاز می‌شود، به‌مجرد آنکه از نخستین نقطهٔ مزدوج **p** روی γ عبورکند دیگرطول قوس را به‌طور موضعی مینیمم نخواهدکرد. این نکته را به‌آسانی روی کرهٔ Σ می‌توان دید. درشکل ۳۰.۷ ژئودزیك γ از **p** به **q** فقط اندکی از نخستین مسافت مزدوج یعنی πr بزرگتر است. اگر صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ γ را اندکی حول محور ماربر دوسر **p** و **q** بچرخانیم، کرهٔ Σ را در قطعه خم α قطع می‌کند، که می‌توان به‌طور تحلیلی تحقیق کرد که اکیداً از γ کوتاهتراست. (توجه شود که این تنها کوتاهترین ژئودزیك از **p** به **q**، به γ نزدیك نیست.)

با استفاده از قضیهٔ ۳.۶ می‌توان تعبیر روشنی برای خمیدگی گاوسی در رویه‌های هندسی دلخواه نیز به‌دست آورد.



شکل ۳۰.۷



شکل ۲۹.۷

۷.۶. لم. اگر $\mathbf{x}$ یك نگاشت قطبی ژئودزیکی با قطب $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه

$$\sqrt{G}\,(u, v) = u - K(\mathbf{p})\frac{u^3}{6} + o(u^3) \qquad (u \geqslant 0)$$

$o(u^n)$ همواره نمایشگر تابعی از u و v ($0 < u$) است بهطوری که $\lim_{u \to 0} o(u^n)/u^n = 0$. بدینسان اگر u بهقدر کافی کوچك باشد در این فرمول می‌توان از $o(u^3)$ در مقایسه با دو جملهٔ نخست صرفنظر کرد.

برهان. مانند قبل، $g(u) = \sqrt{G}(u, v)$ را روی یك ژئودزیك شعاعی $\gamma(u) = \mathbf{x}(u, v)$ درنظرمی‌گیریم. g به‌عنوان جواب معادلهٔ ژاکوبی‌روی γ، در $u = 0$ دیفرانسیلپذیر است. بدینسان دارای بسط تیلوری به‌صورت زیر می‌باشد

$$g(u) = g(0) + g'(0)u + g''(0)\frac{u^2}{2} + g'''(0)\frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

شرایط اولیهٔ مذکور در فرع ۶.۴ عبارت‌اند از $g(0) = 0$، $g'(0) = 1$، و بنابر معادلهٔ ژاکوبی داریم $g''(0) = 0$. با مشتقگیری از معادلهٔ ژاکوبی مذکور به‌دست می‌آید

$$g''' + K(\gamma)'g + K(\gamma)g' = 0$$

بنابراین

$$g'''(0) = -K(\gamma(0)) = -K(\mathbf{p})$$

که چون به‌جای آن در بسط تیلور قراردهیم، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ▮

فرض کنیم که ساکنین یك رویهٔ هندسی M بخواهند خمیدگی گاوسی M را در یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ تعیین کنند. نخست با اندازه‌گیری مسافت کوتاه ε درهمهٔ امتدادها از$\mathbf{p}$، دایرهٔقطبی C_ε به‌شعاع ε را به‌دست می‌آورند.

اکنون اگر$M = \mathbf{E}^2$، محیط دایرهٔ C_ε دقیقاً برابر$L(C_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon$ است. امابه‌ازای $0 < K$ ژئودزیکهای شعاعی از $\mathbf{p}$ دارای چنین سرعت پیشرفتی نیستند، بنابراین C_ε از $2\pi\varepsilon$ کوتاهتر خواهد بود، و به‌ازای $K < 0$ با سرعت بیشتری پیشرفت می‌نمایند، از این‌رو طول C_ε از $2\pi\varepsilon$ بیشتر است.

$L(C_\varepsilon)$ و K را می‌توان با دقت مناسبی مقایسه‌کرد. به‌ازای $0 < \varepsilon$ به‌قدرکافی کوچك، C_ε با $v \to \mathbf{x}(\varepsilon, v)$ به‌صورت پارامتری درمی‌آید، که در آن $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری قطبی ژئودزیکی در $\mathbf{p}$ می‌باشد، بدینسان

$$L(C_\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\,(\varepsilon, v)\, dv$$

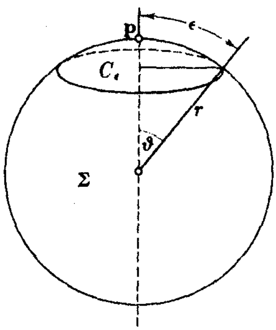
بنابراین از لم پیش حاصل می‌شود

$$L(C_\varepsilon)=2\pi\left(\varepsilon-K(\mathbf{p})\frac{\varepsilon^3}{6}+o(\varepsilon^3)\right) \qquad (*)$$

بدینسان اگر در M مساحان $L(C_\varepsilon)$ را به‌ازای ε کوچك به‌دقت اندازه بگیرند، می‌توانند خمیدگی گاوسی M در $\mathbf{p}$ را به‌طور تقریبی معین کنند. چون حد بگیریم خواهیم داشت:

۸.۶ فرع.

$$K(\mathbf{p})=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{\pi\varepsilon^3}\right)(2\pi\varepsilon-L(C_\varepsilon))$$



شکل۳۱.۷

به‌آسانی می‌توان فرمول (*) را در مورد یك کرهٔ Σ به شعاع r در $\mathbf{E}^3$ آزمود. چنان‌که در شکل۳۱.۷ دیده‌می‌شود، دایرهٔ قطبی C_ε به‌مرکز $\mathbf{p}$ در واقع یك دایرهٔ اقلیدسی به‌شعاع اقلیدسی $r\sin\vartheta$ است که در آن $\vartheta=\varepsilon/r$. بدینسان بنابرسری تیلور تابع سینوسی داریم

$$L(C_\varepsilon)=2\pi\left(r\sin\frac{\varepsilon}{r}\right)$$

$$=2\pi\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{6r^2}+o(\varepsilon^3)\right)$$

وازاینجا دلیل‌دیگری برای این نکته‌که خمیدگی گاوسی Σ برابر $K=1/r^2$ است، به‌دست می‌آید.

تمرینات

۱. گیریم $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری قطبی صفحهٔ هذلولوی داده شده درمثال ۵.۵ باشد. تساوی $\sqrt{G}(u,v)=\sinh u$ را به دو روش مختلف: یکی با محاسبهٔ $\mathbf{x}_v\circ\mathbf{x}_v$ ودیگری باحل معادلهٔ ژاکوبی به‌دست آورید.

۲. اگر C_ε یك دایرهٔ قطبی در حول نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M باشد، ناحیهٔ محصور بـه C_ε را قرص قطبی D_ε به‌شعاع ε می‌نامیم.

(الف) نشان دهید که مساحت قرص قطبی برابراست با

$$A(D_\varepsilon)=\pi\left[\varepsilon^2-K(\mathbf{p})\frac{\varepsilon^4}{12}+o(\varepsilon^4)\right]$$

بنابراین

$$K(\mathbf{p})=\frac{12}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi\varepsilon^2-A(D_\varepsilon)}{\varepsilon^4}$$

(ب) با استفاده از این فرمول، خمیدگی گاوسی کره‌ای به‌شعاع r را بیابید.

۰۳ درصفحهٔ هذلولوی در مبدأ o طول دایرهٔ قطبی C_ε و مساحت قرص قطبی D_ε $(۰ < \varepsilon < ۲)$ را بیابید. درهرمورد نتیجه بگیرید که $K(o) = -۱$.

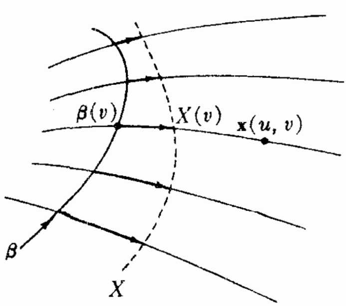
۰۴ گیریم M یك رویهٔ دورانی اضافه‌دار باشد (تمرین ۱۲، فصل ۴، بند ۱).
(الف) اگر M محور A را تنها دریك نقطهٔ $\mathbf{p}$ قطع کند (مانند سهمیگون دورانی)، نشان دهیدکه $\mathbf{p}$ روی هیچ ژئودزیکی دارای نقاط مزدوج نیست.
(ب) اگر M محور A را در دونقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ قطع کند (مانند بیضیگون دورانی)، نشان دهیدکه $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ روی هر ژئودزیکی که آنها را به هم بپیوندد مزدوج‌اند (راهنمایی: قضیهٔ ۳.۶ فصل ۵ جوابی برای معادلهٔ ژاکوبی به‌دست می‌دهد.)

درتمرینات زیرحالت مفیدی ازنمایش پارامتری ژئودزیکی قطبی که درآن خم منظم دلخواهی جایگزین قطب $\mathbf{p}$ شده است مطرح می‌شود.

۰۵ گیریم $\beta : I \to M$ خم منظمی در M، و X یك میدان برداری روی β باشد (که هیچ‌گاه صفر نشود) به طوری که β' و X در هر نقطه دارای استقلال خطی باشند. قرارمی‌دهیم

$$\mathbf{x}(u, v) = \gamma_{X(v)}(u)$$

بدینسان درنگاشت $\mathbf{x}$ خمهای پارامتر u ژئودزیکهایی هستند که β را با سرعتهای اولیهٔ ناشی از X قطع می‌کنند (شکل ۳۲۰۷). ثابت کنیدکه:
(الف) $\mathbf{x}$ نگاشتی منظم روی یك ناحیهٔ D است که شامل فاصلهٔ (o, v)، $v \in I$، می‌باشد.
(ب) با انتخاب مناسب β و X، می‌توان این نمایش پارامتری $\mathbf{x}$ را به صورتهای زیردرآورد:
(۱) نگاشت همانی $\mathbf{E}^۲$ (مختصات طبیعی)
(۲) نمایش پارامتری متعارف رویهٔ دورانی
(۳) نمایش‌پارامتری مخطط رویه‌های خطدار (فصل ۵، بند ۵)

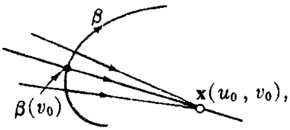


شکل ۳۲۰۷

۰۶ (ادامه). اگر β خمی با تندی واحد، و X قائم یکهٔ N از β (بند ۴) باشد، نشان دهید که برای $\mathbf{x}$ داریم، $E = ۱$، $F = o$ و $\sqrt{G}$ جواب‌معادلهٔژاکوبی $(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = o$ است به‌طوری که

$$\sqrt{G}(o, v) = ۱ \quad \text{و}$$
$$(\sqrt{G})_u(o, v) = -\kappa_g(v)$$

انتخاب طبیعی X درمثال پیش بدین معنی است که در این نمایش پارامتری G دارای تعبیرهندسی است. اگر $G(u_0, v_0) = 0$، آنگاه $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ (نظیر نقاط مزدوج) را یك نقطهٔ کانونی β درطول ژئودزیك قائم $v = v_0$ می‌نامند. اشعهٔ نورانی که از β به‌طور قائم خارج شوند در این نقطه متقارب‌اند. (شکل ۳۳.۷)



شکل ۳۳.۷

۷. (الف) اگر β روی کرهٔ Σ یك دایرهٔ عرض جغرافیایی باشد، نشان دهید که نقاط کانونی β تنها قطبهای شمالی وجنوبی Σ می‌باشند.
(ب) اگر β خمی درصفحهٔ اقلیدسی باشد، نشان‌دهید که نقاط کانونی β دقیقاً همان‌مراکز خمیدگی یعنی نقاط واقع بر گستردهٔ آن می‌باشند. (تمرین ۱۵، فصل ۲، بند ۴ را ببینید.)

۷. نگاشتهایی که حاصل ضرب داخلی را حفظ می‌کنند

چنانکه قبلاً دیدیم هر ایزومتری موضعی $F: M \to N$ ژئودزیکهای M را به ژئودزیکهای N تبدیل می‌کند. چون ژئودزیك با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ را با γ_v نشان دهیم، می‌توان این مطلب را به‌صورت واضحتری بیان کرد:

۱.۷ لم. اگر $F: M \to N$ یك ایزومتری موضعی و $\mathbf{v}$ یك بردار مماس بر M در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه

$$F(\gamma_v) = \gamma_{F_*(v)}$$

برهان. بنابرتوضیح بالا $\bar{\gamma} = F(\gamma_v)$ یك ژئودزیك N است. سرعت اولیهٔ آن بردارمماس

$$\bar{\gamma}'(0) = F_*(\gamma_v'(0)) = F_*(\mathbf{v})$$

بر N در $F(\mathbf{p})$ می‌باشد. بدینسان بنابر یکتایی ژئودزیکها (قضیهٔ ۳.۴)، $\bar{\gamma}$ دقیقاً همان $\gamma_{F_*(v)}$ خواهد بود. ∎

از اینجا نتیجه می‌شود که هر ایزومتری موضعی، فقط با تأثیر آن روی یك سه‌وجهی کاملاً معین می‌گردد.

۲.۷ قضیه. گیریم F و G دو ایزومتری موضعی از M به N باشند. اگر به‌ازای یك سه‌وجهی $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ درنقطهٔ $\mathbf{p}$ از M داشته باشیم

$$F_*(\mathbf{e}_1) = G_*(\mathbf{e}_1), \quad F_*(\mathbf{e}_2) = G_*(\mathbf{e}_2)$$

آنگاه $F = G$.

برهان. اگر M به‌طور ژئودزیکی کامل باشد، اثبات بسیار آسان است. اگـر $\mathbf{q}$ یك نقطهٔ دلخواهی از M باشد، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۹.۵ یك بردار $\mathbf{v}$ در نقطهٔ خـاص $\mathbf{p}$ وجـود دارد به‌طوری که $\mathbf{q}=\gamma_{\mathbf{v}}(r)$. بنا بر آنچه در بارهٔ F_* و G_* فرض شد، با تـوجه به‌خطی بـودن نتیجه می‌شود که F_* و G_* به‌ازای $\mathbf{v}=c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2$ دارای یك مقدارند. بدینسان، بنا بر لم پیش داریم

$$F(\gamma_{\mathbf{v}})=\gamma_{F_*(\mathbf{v})}=\gamma_{G_*(\mathbf{v})}=G(\gamma_{\mathbf{v}}).$$

از اینجا، به‌ویژه به‌ازای همهٔ نقاط $\mathbf{q}$ از M خواهیم داشت

$$F(\mathbf{q})=F(\gamma_{\mathbf{v}}(r))=G(\gamma_{\mathbf{v}}(r))=G(\mathbf{q})$$

درمورد یك رویهٔ دلخواه M باید روش بالا را دقیقترساخت. با استفاده ازلم ۳.۵ می‌توان یك ژئودزیك شکستهٔ β از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$ به‌دست آورد وتساوی $F(\beta)=G(\beta)$ را بـا به‌کاربردن برهان بالا برای هرقطعهٔ ناشکستهٔ β، ثابت کرد. ▌

اکنون ازاین نکته‌که ایزومتریهای موضعی ژئودزیکها را حفظ می‌کنند استفاده‌کرده وبه‌ساختن‌چندایزومتری موضعی می‌پردازیم. دراینجا هدف این‌است که وجود یك‌شباهت خانوادگی را دربین رویه‌های هندسی‌که دارای یك خمیدگی ثابت‌انـد نشان دهیم. بـه ازای هرعدد مفروض K، یك رویهٔ هندسی بسیارسادهٔ $M(K)$ وجـود داردکه خمیدگی گاوسی آن برابر مقدار ثابت K باشد.

(۱) اگر $K>0$، $M(K)$ راهمان کرهٔ Σ باخمیدگی K (بنابراین باشعاع $1/\sqrt{K}$) می‌گیریم.

(۲) اگر $K=0$، $M(K)$ را صفحهٔ اقلیدسی $\mathbf{E}^2$ اختیار می‌کنیم.

(۳) اگر $K<0$، $M(K)$ صفحهٔ هذلولوی H با خمیدگی K (بنابراین باشبه‌شعاع $1/\sqrt{-K}$: تمرین ۴، بند ۲ را ببینید) خواهد بود.

$M(K)$ را رویهٔ هندسی استاندارد باخمیدگی ثابت K می‌نامند. البته، رویـه‌های بسیاری با خمیدگی ثابت وجود دارند، مشخصهٔ آنها این است که به‌طور ژئودزیکی کامل و همبند ساده‌اند (صفحهٔ ۱۹۹).

۳.۷ قضیه. گیریم رویـهٔ هندسی N بـه‌طور ژئودزیکی کامل و دارای خمیدگی گـاوسی ثابت K باشد. آنگاه یك ایزومتری موضعی F از رویهٔ استاندارد $M(K)$ بـر روی N وجود دارد.

اولین نگاشت درمثال ۶.۴ فصل ۶که یك ایزومتری مـوضعی (تمـرین ۶، بند ۲) ازکره بر روی صفحهٔ تصویری است، نمونه‌ای ازاین قضیه می‌باشد.

برهان. حالت $K<0$. از روش مثال ۴.۲ کـه در آن $K=-1$، استفاده مـی‌کنیم.

تنها با یك تغییر مقیاس (تمرین ۴، بند ۲) می‌توان آن را درمورد $K > 0$ دلخواه تعمیم داد. همانند قسمت (۲) مثال ۵.۵، گیریم $\mathbf{p}$ مبدأ $H = M(-1)$ باشد و $\mathbf{e}_1 = U_1(\mathbf{p})$ و $\mathbf{e}_2 = U_2(\mathbf{p})$. گیریم $\bar{\mathbf{e}}_1$، $\bar{\mathbf{e}}_2$ یك سه وجهی در یك نقطهٔ دلخواه N است. بعدفرض کنیم که $\mathbf{x}$ و $\bar{\mathbf{x}}$ نگاشتهای قطبی ژئودزیکی حاصل از H و N باشند.

درمورد رویهٔ N داریم

(۱) $\bar{\mathbf{x}}$ روی تمام نیمصفحهٔ طرف راست $S: u > 0$ معین است (نتیجه‌ای ازکامل بودن ژئودزیکی).

(۲) نگارهٔ آن $\bar{\mathbf{x}}(S)$ تمام N بجز احتمالاً قطب $\bar{\mathbf{p}}$ را می‌پوشاند (نتیجه‌ای از قضیهٔ ۹.۵ و تعریف نگاشتهای قطبی ژئودزیکی).

(۳) نگاشت $\bar{\mathbf{x}}: S \to N$ منظم است. (بنا بر لم ۴.۵، $\bar{E} = 1$ و $\bar{F} = 0$، اما چنان که قبلاً دیدیم ازمعادلهٔ ژاکوبی و $K = -1$ نتیجه می‌شود $\sqrt{\bar{G}} = \sinh u$، بنابراین روی S داریم $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \sinh^2 u > 0$.)

بدینسان این نتیجهٔ کلی درمورد $\mathbf{x}: S \to H$ نیز صادق است، اما دراینجا اطلاعات بیشتری داریم. بنا بر مثال ۵.۵ کل رویهٔ H یك همسایگی عادی قطب $\mathbf{p}$ است، بنابراین $\mathbf{x}$ فقط دارای همان ابهامات معمولی مختصات قطبی می‌باشد، معادلهٔ $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{q}$، u را به‌طور یکتا معین می‌کند، و v نیز به‌طور یکتا فقط با تقریب مضارب 2π $(\mathbf{q} \neq \mathbf{p})$ معین می‌شود. ازاین اطلاع اضافی می‌توان نتیجه گرفت که فرمول

$$F(\mathbf{x}(u, v)) = \bar{\mathbf{x}}(u, v)$$

سازگار است و بدینسان یك نگاشت F از H را بر روی همهٔ N تعریف می‌کند.

(برای اثبات دیفرانسیلپذیری F در قطب $\mathbf{p}$ باید مانند برهان لم ۳.۵، به‌نگاشتهای $\mathbf{y}$ و $\bar{\mathbf{y}}$ متناظر به $\mathbf{x}$ و $\bar{\mathbf{x}}$ برگردیم.) با استفاده ازملاك لم ۵.۴ فصل ۶ به‌آسانی می‌توان نشان داد که F یك ایزومتری موضعی است. در واقع، بنابر قسمت (۳) بالا داریم

$$E = 1 = \bar{E}, \qquad F = 0 = \bar{F}, \qquad G = \sinh^2 u = \bar{G}, \qquad \text{به‌ازای } u > 0$$

و محفوظ ماندن حاصل‌ضرب داخلی درقطب $\mathbf{p}$ نتیجهٔ مستقیم پیوستگی است.

حالت $K = 0$. در اینجا نیز استدلال پیش عیناً به‌کار می‌رود، بجز آنکه

$$M(K) = \mathbf{E}^2 \quad \text{و} \quad G = \bar{G} = u^2$$

حالت $K > 0$. در اینجا به‌طرح دیگری نیازمندیم، زیرا به ازای هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ از کرهٔ $\Sigma = M(K)$، بزرگترین همسایگی عادی $\mathfrak{N}$ همهٔ Σ نخواهد بود: نقطهٔ متقاطر $-\mathbf{p}$ حذف شده است.

با استدلالی همانند حالت $K < 0$، یك ایزومتری موضعی $F_1: \mathfrak{N} \to N$ به‌دست

می‌آید. اکنون با تکرار همین استدلال درمورد یك نقطه $\mathbf{p}^*$ از Σ که با $\mathbf{p}$ و $-\mathbf{p}$ متفاوت باشد، یك ایزومتری موضعی دیگر $F_2:\mathfrak{N}^* \rightarrow N$ به دست می‌آوریم، که در آن $\mathfrak{N}^*$ همهٔ Σ بجز $-\mathbf{p}^*$ می‌باشد. سه وجهیهای مربوط به F_2 را طوری انتخاب می کنیم که نگاشتهای مشتق F_1 و F_2 در $\mathbf{p}^*$ سازگار باشند. بدینسان بنابر قضیهٔ ۲.۷، F_1 و F_2 روی فصل مشترك $\mathfrak{N}$ و $\mathfrak{N}^*$ متحدند. اما $\mathfrak{N}$ و $\mathfrak{N}^*$ تمام کرهٔ Σ را می‌پوشانند، بنابراین F_1 و F_2 توأماً یك ایزومتری موضعی تنهای $F:\Sigma \rightarrow N$ را تشکیل می‌دهند. چون Σ فشرده و N همبند است، تمرین ۶، بند۷، فصل۴ نشان می‌دهد که F پوشاست و Σ را روی تمام M می‌برد. ▌

هر ایزومتری $F:M \rightarrow M$ از یك رویهٔ هندسی روی خودش را می‌توان به‌عنوان یك تقارن از رویهٔ M درنظر گرفت. همهٔ خواص هندسی M در نقاط $\mathbf{p}$ و $F(\mathbf{p})$ یکسان هستند، زیرا این هندسه از تغییرناپذیرهای ایزومتریك تشکیل یافته است. نتایج تمرین ۹، بند ۴، فصل ۶، بلافاصله نشان می‌دهند که مجموعهٔ $\mathcal{J}(M)$ متشکل از همهٔ ایزومتریهای $F:M \rightarrow M$، درست مانند مجموعهٔ همهٔ ایزومتریهای فضای اقلیدسی (تمرین ۷، بند ۱، فصل ۳) تشکیل یك گروه می‌دهند. $\mathcal{J}(M)$ را گروه ایزومتری M می‌نامند.

البته این گروه $\mathcal{J}(M)$ گروه ذاتی برای M است، و هنگامی که M یك رویه در $\mathbf{E}^3$ باشد نباید آن را با $\mathcal{S}(M)$، گروه تقارنهای اقلیدسی M، اشتباه کرد (تمرین ۷، بند ۸، فصل ۶). هر تقارن اقلیدسی $\mathbf{F}$ از $M\subset\mathbf{E}^3$ یك ایزومتری $\mathbf{E}^3$ است به طوری که $\mathbf{F}(M)=M$، این گونه تقارنها هنگامی وجود دارند که شکل M در $\mathbf{E}^3$ به‌مفهوم معمول کلمهٔ متقارن باشد. هر تقارن اقلیدسی $\mathbf{F}$ از M یك ایزومتری $\mathbf{F}|M:M \rightarrow M$ به‌دست می‌دهد، اما عموماً با این روش همهٔ ایزومتریهای $M\subset\mathbf{E}^3$ به‌دست نمی‌آید (تمرین ۹).

در مورد هر رویهٔ هندسی دلخواه M، گروه ایزومتری $\mathcal{J}(M)$ بیان جبری جدیدی برای M به‌دست می‌دهد. به‌بیان اجمالی، هرچه M متقارن‌تر باشد، $\mathcal{J}(M)$ بزرگتر است. به‌عنوان مثال، گروه ایزومتری بیضیگون

$$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c)$$

پی آنکه اثبات کنیم، دقیقاً دارای هشت عنصراست و همهٔ آنها از تقارنهای اقلیدسی که در بالا گفته شد به‌دست می‌آیند: سه تقارن نسبت به‌صفحات مختصات، سه دوران 180° (حول هریك از محورهای مختصات)، ایزومتری $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$، و بالاخره نگاشت همانی M.

هنگامی رویهٔ M دارای کوچکترین گروه ایزومتری ممکن خواهد بود که M بجز نگاشت همانی دارای ایزومتری دیگری نباشد. مثلاً برای به‌دست آوردن یك چنین رویهٔ هندسی می‌توان با وارد آوردن ضربه‌ای به بیضیگون هر هفت ایزومتری دیگر را از بین برد.

برعکس، هنگامی رویهٔ هندسی M حداکثرتقارن را داراست که همهٔ ایزومتریهایی

که بنا بر قضیهٔ ۲.۷ مجازند، وجود داشته باشند. یعنی اگر سه وجهیهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\overline{\mathbf{e}}_1$، $\overline{\mathbf{e}}_2$ در هر دو نقطهٔ M داده شده باشند، یك ایزومتری $F{:}M \to M$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$F_*(\mathbf{e}_1)=\overline{\mathbf{e}}_1, \qquad F_*(\mathbf{e}_2)=\overline{\mathbf{e}}_2$$

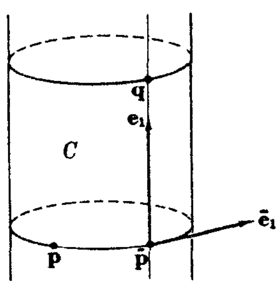
در این حالت، گفته می‌شود که M سه‌وجهیهمگن[1] است، هردو سه‌وجهی روی M دارای وضعیت متقارن می‌باشند.

بدینسان آنچه درقضیهٔ ۳.۲ فصل ۳ اثبات شد این است که $\mathbf{E}^3$ سه وجهیهمگن است، و همان اثبات درمورد $\mathbf{E}^n$ دلخواه و به‌ویژه درمورد $\mathbf{E}^2$ معتبر است. در تمرینات این بند، خواهیم دید که هر رویهٔ استاندارد با خمیدگی ثابت $M(K)$ سه‌وجهیهمگن است.

۴.۷ تعریف. رویهٔ هندسی M هنگامی همگن نقطه‌ای (یا به‌طور ساده همگن) است که به‌ازای هر دونقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ از M یك ایزومتری $F{:}M \to M$ وجود داشته باشد به‌طوری که $F(\mathbf{p})=\mathbf{q}$.

روشن است که هر رویه سه وجهیهمگن، همگن است، اما عکس این مطلب درست نیست. به‌عنوان مثال، استوانهٔ مستدیر C در $\mathbf{E}^3$ را درنظر می‌گیریم. در واقع اگر F دورانی از $\mathbf{E}^3$ حول محور C، یا انتقالی از $\mathbf{E}^3$ در امتداد این محور باشد، در این صورت F، C را بر روی C می‌برد، ویك ایزومتری C خواهد بود. بنابراین به‌ازای هر دو نقطهٔ $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ از C، می‌توان با یك دوران $\mathbf{p}$ را به $\overline{\mathbf{p}}$ واقع بر مولد ماربر $\mathbf{q}$ آورده و با یك انتقال $\overline{\mathbf{p}}$ را به $\mathbf{q}$ برد. از ترکیب این دوایزومتری یك ایزومتری حاصل می‌شود که $\mathbf{p}$ را به $\mathbf{q}$ بدل می‌کند. ازطرف دیگر، C سه‌وجهیهمگن نیست، همهٔ نقاط آن به‌طور هندسی هم‌ارزند، اما همهٔ سه‌وجهیهای آن چنین نیستند (برهان: به‌ازای بردارهای یکهٔ $\mathbf{e}_1$ و $\overline{\mathbf{e}}_1$ که در شکل ۳۴.۷ نشان داده شده‌اند هیچ ایزومتری نمی‌تواند $\mathbf{e}_1$ را به $\overline{\mathbf{e}}_1$ بدل کند. زیرا بنا بر لم ۱.۷، F باید ژئودزیك یك به یك $\gamma_{\mathbf{e}_1}$ را به‌ژئودزیك متناوب $\gamma_{\overline{\mathbf{e}}_1}$ تبدیل کند، و این امکان ندارد، زیرا F یك به‌یك است.)

قید همگنی، قید بسیار قوی است.



شکل ۳۴.۷

۵.۷ قضیه. اگر رویهٔ هندسی M همگن باشد، آنگاه M به‌طور ژئودزیکی کامل است ودارای خمیدگی گاوسی ثابت می‌باشد.

برهان. ثابت بودن خمیدگی مستقیماً از تعریف

---

1. Frame–homogeneous

همگنی و این نکته که ایزومتریها حافظ خمیدگی می‌باشند نتیجه می‌شود. اثبات همگنی آن جالبتر است. اگر M به طور ژئودزیکی کامل نباشد، یك ژئودزیك ماکسیمال α با تندی واحد وجود خواهد داشت که فقط روی یك فاصله، مثلاً $I:t < a$ که تمام محور حقیقی نیست، معین باشد. اکنون نشان می‌دهیم که این غیر ممکن است. بنابر لم ۳.۵، همهٔ ژئودزیکها که از یك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{p}$ از M خارج می‌شوند حداقل تا یك مسافت ثابت $\varepsilon > 0$ ادامه می‌یابند. t_0 را در I طوری انتخاب می‌کنیم که $a - t_0 < \varepsilon/2$. چون M همگن است، می‌توان ایزومتری $F:M \to M$ را طوری تعیین کرد که داشته باشیم $F(\mathbf{p}) = \alpha(t_0)$. اکنون به‌ازای یك بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ در $\mathbf{p}$ خواهیم داشت $F_*(\mathbf{u}) = \alpha'(t_0)$. بدینسان قطعهٔ ژئودزیکی $F(\gamma_u)$ دارای سرعت اولیه

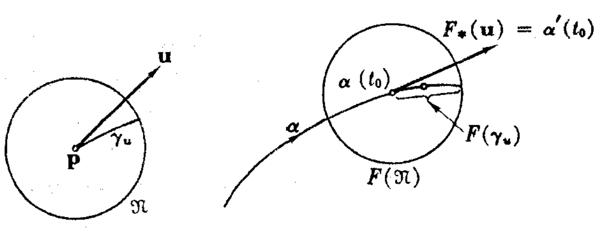
$$F_*(\gamma_u'(0)) = F_*(\mathbf{u}) = \alpha'(t_0)$$

خواهد بود، و با تندی واحد تا مسافت ε ادامه می‌یابد (شکل ۳۵.۷). اما با تعویض پارامتر می‌توان از قضیهٔ ۳.۴ استفاده کرد و α را روی فاصلهٔ $I^*:t < t_0 + \varepsilon$ تعریف نمود. اما $t_0 + \varepsilon > a$، و این بافرض ماکسیمال بودن فاصلهٔ I متناقض است، بدینسان کامل بودن ژئودزیکی M ثابت می‌شود. ∎

همان‌گونه که از عنوان این بند برمی‌آید، نگاشتهایی که حاصل‌ضرب داخلی را حفظ می‌کنند و در هندسه دارای اهمیت می‌باشند تنها از ایزومتریها (موضعی) تشکیل نمی‌شوند. دراینجا انواع اصلی دیگر را اجمالاً ازنظر می‌گذرانیم.

۶.۷ تعریف. گیریم $F:M \to \mathbf{E}^3$ نگاشتی ازیك رویهٔ هندسی در $\mathbf{E}^3$ باشد. اگر F_*، نگاشت مشتق، حاصل‌ضرب داخلی بردارهای مماس را حفظ کند، آنگاه F یك فروبری ایزومتریك است. اگر علاوه براین F یك به‌یك باشد، آنگاه F را یك جادهی ایزومتریك نامند. هنگامی که جادهی ایزومتریك F دارای تابع معکوس $F^{-1}:F(M) \to M$ پیوسته باشد آن را خاص می‌گویند.

محدودیت این تعریف زاید است. به‌وضوح می‌توان به‌جای $\mathbf{E}^3$ ویا حتی M هر خمینهٔ ریمانی را قرارداد (صفحهٔ ۳۴۷).



شکل ۳۵.۷

۷.۷، لم. اگر $F:M \to \mathbf{E}^3$ یك جادهی ایزومتریك خاص از یك رویهٔ هندسی M در $\mathbf{E}^3$ باشد، آنگاه $F(M)$ نگارهٔ حاصل، یك رویه در $\mathbf{E}^3$ است و تابع $F:M \to F(M)$ یك ایزومتری خواهد بود.

برهان. اگر $\mathbf{x}: D \to M$ یك قطعه مختصاتی خاص در M باشد، آنگاه نگاشت مرکب $F(\mathbf{x}): D \to \mathbf{E}^3$ یك قطعه مختصاتی واقع در $F(M)$ است. علاوه براین، $F(\mathbf{x})$ یك قطعه مختصاتی خاص است. در واقع، تابع معکوس $F(\mathbf{x}(D)) \to D$ دقیقاً $\mathbf{x}^{-1}F^{-1}$ است، وچون $\mathbf{x}^{-1}$ و F^{-1} پیوسته‌اند، پیوسته می‌باشد. بدینسان می‌توان به‌آسانی از تعریف ۲.۱ فصل ۴ استفاده کرد. اما برای $F(M)$ به‌عنوان یك رویهٔ هندسی ازهمان ضرب‌نقطه‌ای $\mathbf{E}^3$ استفاده می‌شود، وبنابر تعریف $F: M \to \mathbf{E}^3$ حافظ ضرب داخلی است. بنابراین به‌عنوان نگاشتی از M روی $F(M)$ نیز حاصل‌ضرب داخلی را حفظ می‌کند. ∎

بدینسان‌مطالعهٔ‌رویه‌های هندسی $\mathbf{E}^3$ دقیقاً‌همان مطالعهٔ‌جادهی‌های ایزومتریك خاص‌از رویه‌های هندسی در $\mathbf{E}^3$ می‌باشد. اهمیت این نکتهٔ نسبتاً فنی تنها دراین است که موجب می‌شود بررسیهای فصول ۵ و ۶ به‌طور وسیعی تعمیم یابند. به‌آسانی می‌توان طبقهٔ بسیار وسیعتر فروبری‌های ایزومتریك در $\mathbf{E}^3$ را با حذف قیود یك به‌یك بودن وخاص‌بودن بررسی کرد. این‌کار متضمن هیچ اشکال واقعی نیست، فقط نمادگذاریها پیچیده‌تر می‌شوند.

همانند حالت خاصی‌که درصفحهٔ ۳۴۷ بررسی‌شد امکان دارد $F(M)$ نگارهٔ حاصل از فروبری ایزومتریك $F: M \to \mathbf{E}^3$ با خود متقاطع باشد، با وجود این می‌توان آن‌را به‌عنوان یك رویهٔ ناقص در $\mathbf{E}^3$ تصورکرد. اگر برای چنین رویهٔ فروبری به‌تعریف عملگر شکلی بپردازیم چگونگی تعمیم بقیهٔ فصول ۵ و ۶ روشن می‌شود.

هر فروبری ایزومتریك F، به‌علت حفظ ضرب داخلی، منظم است. بدینسان $F_*(T_p(M))$ یك زیرفضای دوبعدی از $T_{F(p)}(\mathbf{E}^3)$ است و برای $F(M)$ همسان نقش صفحهٔ مماس در $F(\mathbf{p})$ را ایفا می‌کند. هر تابع قائم یکهٔ U به‌هر نقطهٔ $\mathbf{p}$ (درناحیه‌ای از M) یك بردار یکهٔ عمود بر $F_*(T_p(M))$ را متناظر قرار می‌دهد. اگر α خمی در M باشد، آنگاه U_α یك میدان برداری روی $F(\alpha)$ در $\mathbf{E}^3$ خواهد بود. دراین صورت اگر $\mathbf{v}$ سرعت اولیهٔ α باشد، $S(\mathbf{v})$ را با بردار یکتایی از $T_p(M)$ به‌طوری‌تعریف می‌کنیم که

$$F_*(S(\mathbf{v})) = -U'_\alpha(0)$$

این عملگر شکلی S همچنان یك عملگر خطی متقارن روی $T_p(M)$ است.

بسیاری ازنتایج پیش دراین تعمیم برقرار می‌مانند. مثلاً، اگر K خمیدگی گاوسی M را همانند بند ۲ به‌طور ذاتی تعریف کنیم، آنگاه با عکس‌کردن استدلال موجود در بند ۲ فصل ۶ می‌توان نشان داد که $K = \det S$.

بدینسان اطلاعات موجود درقضایایی ازقبیل قضیهٔ ۷.۳ فصل ۶، افزایش می‌یابد: اگر M یك رویهٔ فشرده با خمیدگی ثابت K (مثبت)، و $F: M \to \mathbf{E}^3$ یك فروبری

ایزومتریك باشد، آنگاه F یك ایزومتری از M بر روی کرهٔ اقلیدسی Σ به‌شعاع $1/\sqrt{K}$ در $\mathbf{E}^3$ خواهد بود.

به‌عبارت دیگر، حتی اگر به $F(M)$ اجازه دهیم که بـا خود متقاطع گردد، امکان آن وجود نخواهد داشت: $F(M)$ تنها می‌تواند یك کرهٔ گرد معمولی در $\mathbf{E}^3$ باشد.

چنان‌که قبلاً دیدیم رویه‌هایی هندسی مانند M یافت می‌شوند که نمی‌توانند به‌طور ایزومتریك در $\mathbf{E}^3$ جا داده شوند، مثل چنبرهٔ هموار (مثال ۵.۲) یا صفحهٔ تصویری، تمرین ۶ بند ۲. دراین حالت طبیعی است که سعی شود M را دریك فضای اقلیدسی $\mathbf{E}^n$ با بعد بیشتر جادهیم. هرچه n بزرگتر باشد، دشواری این کارکمتر است. (به‌بیان اجمالی، هرچه برای خمانیدن M ابعاد بیشتری در دسترس باشد امکان بیشتری وجود خواهد داشت کـه بتوانیم برای M شکلی‌سازگار باهندسهٔ ذاتی آن به‌دست بیاوریم. فصل ۶ بند ۹ را ببینید.)

بدینسان، گرچه در $\mathbf{E}^3$ چنبره‌های هموار وجود ندارند، می‌توان آنهـا را در $\mathbf{E}^4$ به‌دست آورد.

۸.۷. مثال. جادهی ایـزومتریك چنبرهٔ هموار در $\mathbf{E}^4$. ابتدا نگاشت $\bar{\mathbf{x}}:\mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^4$ را به‌طوری که

$$\bar{\mathbf{x}}(u,v)=(\cos u,\ \sin u,\ \cos v,\ \sin v)$$

درنظر می‌گیریم. اگـر $\mathbf{x}$ نمایش پارامتری چنبرهٔ هموار T مذکور درمثال ۵.۲ بـاشد، آنگاه فرمول

$$F(\mathbf{x}(u,v))=\bar{\mathbf{x}}(u,v)$$

سازگاراست، در واقع این رابطه یك نگاشت یك به‌یك $F:T\to\mathbf{E}^4$ را تعریف‌می‌کند. برای اثبات کافی است توجه شود که

$$\mathbf{x}(u,v)=\mathbf{x}(u_1,v_1)\iff u_1=u+2\pi m,\ v_1=v+2\pi n\iff \bar{\mathbf{x}}(u,v)=\bar{\mathbf{x}}(u_1,v_1)$$

اگر پیکانهای استلزام را ازچپ بـه راست بخوانیم، همان سازگاری مطلوب بـه دست می‌آید، خواندن آنها درجهت عکس، اثبات یك به‌یك بودن F است.

اگر F_* حاصل‌ضربهای داخلی را حفظ کند F یك جادهی ایزومتریك خواهد بود. با محاسبات معمولی داریم

$$\bar{\mathbf{x}}_u=(-\sin u,\ \cos u,\ 0,\ 0)$$
$$\bar{\mathbf{x}}_v=(0,\ 0,\ -\sin v,\ \cos v)$$

بنابراین

$$\bar{E}=1,\quad \bar{F}=0,\quad \bar{G}=1$$

این توابع با E، F و G مربوط به $\mathbf{x}$ مطابقت دارنـد، بنابراین دقیقاً با استفاده ازهمان

استدلالی که در اثبات لم ۵.۴، فصل ۶ به‌کار رفت ثابت می‌شود که F_* حافظ ضرب داخلی است.

وضعیت عمومی در اینجا به‌خوبی معلوم نیست. گرچه برای هر رویهٔ هندسی فشرده یک جادهی ایزومتریک در $\mathbf{E}^{17}$ وجود دارد، اما امکان دارد که به‌جای ۱۷، بعد کمتری مانند ۴ را بگذاریم.

تمرینات

۱. ایزومتری موضعی $F: M \to N$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که M به‌طور ژئودزیکی کامل باشد. نشان دهید که F پوشاست اگر، وفقط اگر، N نیز به‌طور ژئودزیکی کامل باشد.[1]

۲. ثابت‌کنید که هر رویهٔ هندسی که به‌طور ژئودزیکی کامل و دارای خمیدگی مثبت ثابت باشد فشرده است. (این نتیجه درحالت کلیتر $K \geqslant c > 0$ نیز برقرار است. قضیهٔ مایر را درکتاب هیکس [۵] ببینید.)

۳. فرض‌کنیم که، هردونقطه را بتوان در M حداقل به‌وسیلهٔ یک ژئودزیک، و در N حداکثر به‌وسیلهٔ یک ژئودزیک به هم‌پیوست. ثابت‌کنید که هرایزومتری موضعی $F: M \to N$ چنین رویه‌هایی یک به‌یک است.

۴. گیریم $F: M \to M$ یک ایزومتری ومتمایز از نگاشت همانی باشد. اگر یک خم با تندی واحد تحت F ثابت بماند، یعنی اگر

$$F(\alpha(s)) = \alpha(s) \qquad \text{به‌ازای هر } s$$

نشان دهید که α یک ژئودزیک M است.

۵. گیریم $\mathbf{x}$ و $\bar{\mathbf{x}}$ نمایشهای پارامترقطبی ژئودزیکی همسایگیهای عادی $\mathfrak{N}_\varepsilon$ و $\bar{\mathfrak{N}}_\varepsilon$ (به‌ازای یک ε)در دو رویهٔ هندسی باشند. اگر روی S_ε، حوزهٔ مشترک $\mathbf{x}$ و $\bar{\mathbf{x}}$، داشته باشیم $K(\mathbf{x}) = \bar{K}(\bar{\mathbf{x}})$، ثابت‌کنید که $\mathfrak{N}_\varepsilon$ و $\bar{\mathfrak{N}}_\varepsilon$ ایزومتریک می‌باشند.

۶. ثابت‌کنید که کرهٔ Σ وصفحهٔ هذلولوی H سه وجهیهمگن‌اند. (راهنمایی: ایزومتریهای مطلوب را درمورد Σ ازتبدیلات متعامد $\mathbf{E}^3$، و درمورد H ازقضیهٔ ۳.۷ و تمرین پیش به‌دست آورید.)

۷. نشان دهید که چنبرهٔ هموار (مثال ۵.۲) همگن است، اما سه‌وجهیهمگن نیست، و چنبرهٔ معمولی دورانی در $\mathbf{E}^3$ همگن نمی‌باشد.

---

۱. گرچه اثبات این مطلب مقدماتی نیست، اما می‌توان نشان داد که هر دو ویژگی از کامل‌بودن ژئودزیکی M نتیجه می‌شوند.

۸. ثابت کنید که:

(الف) درمورد استوانهٔ مستدیر قائم $C: x^۲+y^۲=r^۲$ در $\mathbf{E}^۳$، هر ایزومتری $F: C \to C$ به‌صورت زیرخواهد بود

$$F(\mathbf{p})=(p_۱ \cos\vartheta \pm p_۲ \sin\vartheta,\ p_۱ \sin\vartheta \pm p_۲ \cos\vartheta,\ \varepsilon p_۳+a)$$

که درآن $\varepsilon=\pm ۱$.

(ب) هر ایزومتری کره یا استوانهٔ مستدیر قائم در $\mathbf{E}^۳$ تخصیص یك ایزومتری $\mathbf{E}^۳$ می‌باشد.

۹. گیریم M استوانه‌ای در $\mathbf{E}^۳$ است که خم مقطع عرضی‌آن بیضی $۴x^۲+y^۲=۴$ می‌باشد. (هرخم بستهٔ غیرمستدیر دیگر را می‌توان درنظر گرفت.) نشان دهیدکه یك ایزومتری M وجود داردکه تخصیص هیچ یك از ایزومتریهای $\mathbf{E}^۳$ نمی‌باشد. (راهنمایی: برای M نمایش پارامتری $\mathbf{x}(u, v)=\alpha(u)+vU_۳$ را به‌کار بگیرید، که درآن α یك نمایش پارامتری متناوب با تندی واحد بیضی مزبوراست.)

۱۰. روی کرهٔ Σ به‌شعاع r، مثلث T را که اضلاع آن قطعه‌های ژئودزیك به‌طولهای a، b و c (همه کمتر از πr) می‌باشند در نظر می‌گیریم. گیریم که زاویهٔ T دررأس $\mathbf{p}$ مقابل به‌ضلع a برابر ϑ باشد.

(الف) قانون کسینوسها را ثابت کنید:

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\vartheta$$

(ب) نشان دهیدکه این فرمول هنگامی که r درمقایسه با a، b، c بزرگ باشدقانون کسینوسهای معمولی اقلیدسی را تقریب می‌زند.

(راهنمایی: برای تعیین $\cos\vartheta$ بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_b$، $\mathbf{u}_c$ راکه در $\mathbf{p}$ براضلاع b و c مماس‌اند بیابید.)

۱۱. ثابت کنیدکه صفحهٔ تصویری (تمرین ۶، بند ۲) سه وجهیهمگن است. (راهنمایی: اگر $F: \Sigma \to \Sigma$ یك ایزومتری کره $\Sigma \subset \mathbf{E}^۳$ باشد، آنگاه $F(-\mathbf{p})=-F(\mathbf{p})$، بنابراین یك نگاشت $\bar{F}: \bar{\Sigma} \to \bar{\Sigma}$ وجود دارد به‌طوری که $PF=\bar{F}P$.)

۱۲. نشان دهیدکه گروههای ایزومتری رویه‌های ایزومتریك، ایزومرف‌اند.

۱۳. اگر در $\mathbf{E}^۳$ رویهٔ M دریك صفحه واقع نباشد، نشان دهیدکه تابع $\mathbf{F} \to \mathbf{F}|M$ یك ایزومرفیسم ازگروه تقارن اقلیدسی $\mathcal{S}(M)$ روی یك زیرگروه ازگروه ایزومتری $\mathcal{J}(M)$ می‌باشد.

ایزومتریهای صفحهٔ هذلولوی را می‌توان صریحاً با متناظر قراردادن هر نقطهٔ آن با عدد مختلط

$$z = u + iv = (u, v)$$

و استفاده از تمرینات بند ۱ ساخت. بدینسان اگر $|z|$ راکه با

$$|z|^{۲} = z\bar{z} = u^{۲} + v^{۲}$$

تعریف می‌شود در نظر بگیریم: صفحهٔ هذلولوی را می‌توان با قرص $|z| < ۲$ و ساختار هندسی همشکلی که در مثال ۳.۱ با $g(z) = ۱ - |z|^{۲}/۴$ داده شده است نمایش داد.

۱۴. (تعبیر صفحهٔ هذلولوی.) به‌ازای عدد حقیقی ثابت $c = (c, ۰)$ در H، نگاشت T را روی H با $T(z) = ۴[(z + c)/(cz + ۴)]$ تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهیدکه $T(H) \subset H$ ، و $T: H \to H$ یك به‌یك و پوشاست.

اگر H' همان قرص $|z| < ۲$ را با ساختار اقلیدسی معمولی نمایش دهد، آنگاه از تمرین ۷ بند ۱ نتیجه می‌شود که $T: H' \to H'$ یك نگاشت همشکلی با سازهٔ مقیاس $\lambda(z) = |dT/dz|$ است.

(ب) نشان دهیدکه این سازهٔ مقیاس برابر است با

$$\lambda(z) = ۴\frac{۴ - c^{۲}}{|cz + ۴|^{۲}}$$

(ج) نتیجه بگیرید که $T: H \to H$ یك ایزومتری از صفحهٔ هذلولوی است.

(راهنمایی: تمرین ۹، بند ۱ فصل ۷ را به‌کار ببرید.)

با استفاده ازاین روشها می‌توان نشان دادکه H سه‌وجهیهمگن‌است، وحتی‌باطرز جالبی ژئودزیکهای H را به‌دست آورد.

۱۵. (نیمصفحهٔ پوانکارهٔ P با صفحهٔ هذلولوی H ایزومتریك است.) برحسب اعدادمختلط، P عبارت است ازنیمصفحهٔ $\operatorname{Im} z > ۰$ با ساختارهندسی همشکلی $g(z) = \operatorname{Im} z$. ($\operatorname{Im} z$ قسمت انگاری v را در $z = u + iv$ نشان می‌دهد.) گیریم F نگاشت

$$F(z) = \frac{z + ۲i}{iz + ۲}$$

باشدکه روی H تعریف شده است. نشان دهیدکه

(الف) $\operatorname{Im} F(z) = (۴ - |z|^{۲})/|iz + ۲|^{۲}$

(ب) F یك نگاشت یك به‌یك از H روی P است. ($F^{-۱}$ را صریحاً محاسبه کنید.)

(ج) برحسب‌ساختارهای‌اقلیدسی، F یك‌همشکلی باسازهٔ‌مقیاس $\lambda(z) = ۴/|iz + ۲|^{۲}$ است.

(د) $F: H \to P$ یك ایزومتری است.

طرحی اجمالی از H و P رسم کنید وتصاویرهریك ازچهارربع H را در P معین کنید.

۸. قضیهٔ گاوس ـ بونه

چنان که دیدیم K، خمیدگی گاوسی رویهٔ هندسی M، تأثیر شدیدی بر سایر ویژگیهای هندسی، ازقبیل انتقال موازی، ژئودزیکها، ایزومتریها وهمچنین برشکل آن، درصورتی که M در$\mathbf{E}^3$ باشد، دارد. دراینجامی‌خواهیم نشان دهیم که خمیدگی گاوسی حتی برساخت نهایی توپولوژیایی M، یعنی برخواصی که ازساختارهندسی ویژهٔ M کاملاً مستقل‌اند، اثر می‌کند.

گام اصلی دراثبات این‌مطلب قضیه‌ای است که خمیدگی کل هر ۲ـ قطعه‌ای را به مقدارکل چرخش‌خم مرزی مرتبط می‌سازد.

در مورد هر خم دلخواه α درM، خمیدگی ژئودزیکی مبین میزان چرخش آن نسبت به‌طول قوس می باشد. بدینسان برای تعیین مقدارکل چرخش α، برحسب طول‌قوس از آن انتگرال می گیریم:

۱.۸. تعریف. گیریم $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ قطعه خمی منظم بریك رویهٔ هندسی جهتدار M باشد. خمیدگی ژئودزیکی کل یعنی $\int_\alpha \kappa_g\, ds$ برای خم α عبارت است از

$$\int_{s(a)}^{s(b)} \kappa_g(s)\, ds$$

که درآن $\kappa_g(s)$ خمیدگی‌ژئودزیکی یك تعویض‌پارامتر دلخواه α باتندی واحد می باشد.

بدینسان خمیدگی ژئودزیکی کل α در M نظیرهمان خمیدگی گاوسی کل رویه در $\mathbf{E}^3$ می باشد. به‌عنوان مثال، گیریم C دایره‌ای به‌شعاع r در $\mathbf{E}^2$ و$\mathbf{E}^2$ دارای جهت طبیعی خود باشد. اگر α خمی باشدکه درجهت مثلثاتی یك دور C را بپیماید، آنگاه α دارای خمیدگی ژئودزیکی ثابت $\kappa_g = ۱/r$ خواهد بود. بدینسان اندازهٔ دایره هرچه باشدداریم

$$\int_\alpha \kappa_g\, ds = \frac{۱}{r} ۲\pi r = ۲\pi$$

اگر C را در خلاف جهت مثلثاتی بپیماییم خمیدگی کل برابر $۲\pi-$ خواهد بود، زیرا به‌طورکلی: اگر جهتدهی M را ثابت نگهداریم، آنگاه خمیدگی ژئودزیکی کل هرقطعه خم α تحت تعویض پارامترهای سونگهدار تغییرنمی کند، وتحت تعویض پارامترهای سوبرگردان علامت آن تغییرمی کند. (نکتهٔ اول‌را مستقیماً ازتعریف، ونکتهٔ دوم را می‌توان مثلاً، ازلم زیرنتیجه گرفت.)

۲.۸. لم. گیریم $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ قطعه خمی منظم درناحیه‌ای از M باشدکه با میدان سه وجهی $E_۱$، $E_۲$ جهتدار شده است. آنگاه

$$\int_\alpha \kappa_g ds = \varphi(b) - \varphi(a) + \int_\alpha \omega_{۱۲}$$

که درآن φ یك تابع زاویه‌ای α' با E_1 روی α، و ω_{12} فرم همبندی E_1، E_2 است.

برهان. هیچ یك از این جمله‌ها تحت تعویض پارامتری سونگهدار تغییر نمی‌کند، بدینسان می‌توان α را خمی با تندی واحد فرض نمود. اما دراین صورت نتیجهٔ مطلوب مستقیماً از انتگرالگیری فرمول لم ۵.۴ حاصل می‌شود. ∎

درنظریهٔ انتگرالگیری درفصل ۶، بند ۷، از ۲- قطعه‌ای‌های $\mathbf{x}: R \to M$ که روی ناحیهٔ داخلی R° از R منظم و یك به‌یك بودند استفاده شد. دراینجا قید شدیدتری را در نظرمی‌گیریم و آن اینکه $\mathbf{x}$ روی مرز R نیز یك به‌یك ومنظم باشد. (این مطلب هم‌ارز با آن است که بگوییم $\mathbf{x}: R \to M$ تخصیصی است به R ازیك قطعه مختصاتی که روی یك مجموعهٔ بازشامل R تعریف شده است.)

هنگامی کــه $\mathbf{x}$ یك ۲- قطعه‌ای منظم یك به‌یك باشد، خمهای کناری آن α، β، γ، δ (تعریف ۴.۶، فصل ۴) منظم و یك به‌یك خواهند بود، و مرز $\partial\mathbf{x} = \alpha + \beta - \gamma - \delta$ را به‌عنوان یك‌خم شکستهٔ تنها که ناحیهٔ مستطیلی $\mathbf{x}(R)$ را محصورمی‌کند درنظرمی گیریم. اکنون به‌تعریف‌خمیدگی‌ژئودزیکی کل $\partial\mathbf{x}$ می‌پردازیم. ازتوجه به‌تعریف‌خمیدگی‌ژئودزیکی دیده می‌شود که خمیدگی ژئودزیکی کل هرخم برابراست باکل زاویه‌ای که T، مماس یکهٔ آن، چرخیده است (نسبت به‌طول قوس). اما برای آنکه تمام دور

$$\partial\mathbf{x} = \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

را بپیماییم باید علاوه برچرخش کل روی خمهای حاشیه‌ای یعنی

$$\int_{\partial\mathbf{x}} \kappa_g ds = \int_\alpha \kappa_g ds + \int_\beta \kappa_g ds + \int_{-\gamma} \kappa_g ds + \int_{-\delta} \kappa_g ds$$

$$= \int_\alpha \kappa_g ds + \int_\beta \kappa_g ds - \int_\gamma \kappa_g ds - \int_\delta \kappa_g ds$$

زوایایی را هم‌که لازم است یك بردار ممــاس یکهٔ T روی $\partial\mathbf{x}$ درچهارگوشهٔ ناحیهٔ مستطیلی $\mathbf{x}(R)$ بچرخد درنظرگرفت (شکل ۳۷.۷). درمورد

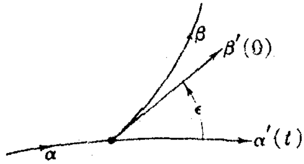
$$R: a \leqslant u \leqslant b, \quad c \leqslant v \leqslant d$$

این «گوشه‌ها»ی

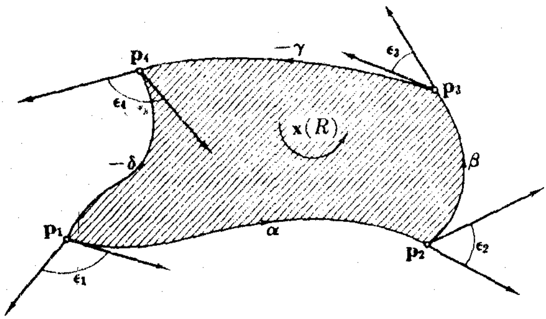
$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{x}(a, c), \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{x}(b, c), \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{x}(b, d), \quad \mathbf{p}_4 = \mathbf{x}(a, d)$$

را رئوس $\mathbf{x}(R)$ می‌نامند.

به‌طورکلی، اگریك قطعه خم منظم α درناحیه‌ای جهتدار به‌نقطهٔ آغازقطعه خم دیگر β، مثلاً $\alpha(1) = \beta(0)$، ختم شود آنگاه ε، زاویهٔ چرخش β با α برابراست با آن زاویهٔ جهتدار $\alpha'(1)$ با $\beta'(0)$ که دارای کوچکترین قدرمطلق باشد (شکل ۳۶.۷). درمورد هر ۲ قطعه‌ای از جهتدهی کــه با $\mathbf{x}$ معین می‌شود، یعنی فــرم مساحتی dM بــه طوری کــه



شکل ۳۶.۷



شکل ۳۷.۷

$dM(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) > 0$، استفاده می‌کنیم تا اصطلاحاتی را که در مورد چند ضلعیهای مسطح متداول است تعمیم دهیم.

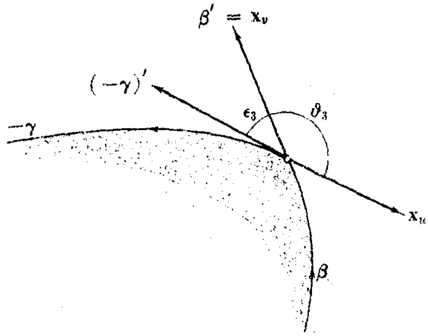
۳.۸. تعریف. گیریم $\mathbf{x}: R \to M$ یك ۲- قطعه‌ای منظم یك به‌یك با رئوس $\mathbf{p}_1$، $\mathbf{p}_2$، $\mathbf{p}_3$، $\mathbf{p}_4$ باشد. ε_j زاویهٔ خارجی $\mathbf{x}$ در $\mathbf{p}_j$ $(4 \geqslant j \geqslant 1)$، برابر است با زاویهٔ چرخش در $\mathbf{p}_j$ که از خمها (یا لها)ی α، β، $-\gamma$، $-\delta$، α، ... به‌ترتیبی که در $\partial\mathbf{x}$ وجود دارند حاصل می‌شود. ι_j زاویهٔ داخلی $\mathbf{x}$ در $\mathbf{p}_j$ برابراست با $\pi - \varepsilon_j$ (شکل ۳۷.۷).

این تعریف با درنظرگرفتن کاربردهای کلیتری بیان شده است، برای حالتی که مورد بحث است زوایای خارجی را می‌توان به‌آسانی برحسب زاویه مختصاتی معمول ϑ از $\mathbf{x}_u$ به $\mathbf{x}_v$ $(0 < \vartheta < \pi)$ با

$$\varepsilon_1 = \pi - \vartheta_1 \qquad \varepsilon_2 = \vartheta_2 \qquad \varepsilon_3 = \pi - \vartheta_3 \qquad \varepsilon_4 = \vartheta_4$$

بیان کرد، که در آن ϑ_j زاویهٔ مختصاتی در رأس $\mathbf{p}_j$ است. به‌عنوان مثال، وضعیتی را که نقطهٔ $\mathbf{p}_3$ درشکل ۳۸.۷ دارا می‌باشد درنظرمی گیریم. بنابر تعریف این خمها (یالها)، β' برابر $\mathbf{x}_v$، و $(-\gamma)'$ برابر $-\mathbf{x}_u$ است، زیرا $-\gamma$ یك تعویض پارامتر سوبرگردان γ است. بدینسان $\varepsilon_3 + \vartheta_3 = \pi$. (براهین تحلیلی را می‌توان براساس تعریف زاویهٔ جهتدار دربند ۷، فصل۶ به‌دست داد.)

اکنون می‌توان به‌اثبات نتیجهٔ اساسی این بند پرداخت.



شکل ۳۸۰۷

۴۰۸. قضیه. گیریم $\mathbf{x}: R \rightarrow M$ یك ۲ـقطعه‌ای منظم یك به‌یك در رویهٔ هندسی M باشد. اگر dM فرم مساحتی روی $\mathbf{x}(R)$ باشد که به‌وسیلهٔ $\mathbf{x}$ معین شده است، آنگاه

$$\underbrace{\iint_{\mathbf{x}} K\, dM}_{\text{خمیدگی گاوسی کل } \mathbf{x}} + \underbrace{\int_{\partial \mathbf{x}} \kappa_g\, ds + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}_{\text{خمیدگی ژئودزیکی کل } \partial\mathbf{x}} = 2\pi$$

(درخمیدگی ژئودزیکی وزوایای خارجی ازجهتدهی $\mathbf{x}(R)$ که با dM و $0 < dM(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$ معین می گردد استفاده می‌شود. توجه شود که لزومی‌ندارد که خود M جهتدار شده، یا حتی جهتپذیر باشد.)

این نتیجه را فرمول گاوس-بونه بازوایای خارجی می‌نامند. چون به‌ازای $1 \leqslant j \leqslant 4$ داریم $\varepsilon_j = \pi - \iota_j$، فرمول مزبور را می‌توان برحسب زوایای داخلی $\mathbf{x}(R)$ به‌صورت زیر نوشت

$$\iint_{\mathbf{x}} K\, dM + \int_{\partial \mathbf{x}} \kappa_g\, ds = (\iota_1 + \iota_2 + \iota_3 + \iota_4) - 2\pi$$

برهان. گیریم $E_1 = \mathbf{x}_u / \sqrt{E}$ و E_2 میدان برداری یکتایی باشد به‌طوری که E_1، E_2 یك میدان سه‌وجهی با $dM(E_1, E_2) = +1$ روی ناحیهٔ $\mathbf{x}(R)$ تشکیل دهند. دراین حالت (به‌صفحهٔ ۳۲۷ رجوع شود) معادلهٔ ساختاری دوم به‌صورت زیر درمی‌آید

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2 = -K\, dM$$

این برهان مبتنی برقضیهٔ استوکس (۵.۶ فصل۴) است و بنابراین داریم

$$\iint_{\mathbf{x}} K\, dM + \int_{\partial \mathbf{x}} \omega_{12} = 0 \qquad (1)$$

اکنون با استفاده از لم ۲۰۸ به‌محاسبهٔ انتگرال دوم می‌پردازیم

$$\int_{\partial x}\omega_{12}=\int_{\alpha}\omega_{12}+\int_{\beta}\omega_{12}-\int_{\gamma}\omega_{12}-\int_{\delta}\omega_{12} \qquad (۲)$$

چون روی α داریم $\alpha'=\mathbf{x}_u=\sqrt{E}\,E_1$، بنابراین φ، زاویهٔ α' با E_1، متحداً صفر است. بدینسان بنابر لم ۲.۸ خواهیم داشت

$$\int_{\alpha}\omega_{12}=\int_{\alpha}\kappa_g\,ds \qquad (۳)$$

محاسبهٔ انتگرال روی $\int_{\delta}\omega_{12}$ دشوارتر است، در اینجا φ، زاویهٔ

$$E_1=\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \text{ با } \delta'=\mathbf{x}_v$$

دقیقاً همان ϑ زاویهٔ مختصاتی $\mathbf{x}_v$، $\mathbf{x}_u$ می‌باشد (شکل ۳۹.۷ را ببینید). بدینسان بنابر لم ۲.۸ خواهیم داشت

$$\int_{\delta}\kappa_g\,ds=\vartheta_4-\vartheta_1+\int_{\delta}\omega_{12}$$

که در آن مانند بالا $0<\vartheta_j<\pi$ زاویهٔ مختصاتی در رأس $\mathbf{p}_j$ $(1\leqslant j\leqslant 4)$ ۲-قطعه‌ای $\mathbf{x}$ می‌باشد. اما چون

$$\vartheta_1=\pi-\varepsilon_1 \quad \text{و} \quad \vartheta_4=\varepsilon_4$$

بنابراین داریم

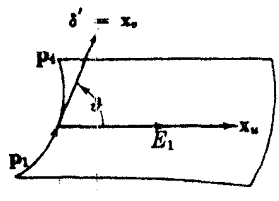
$$\int_{\delta}\omega_{12}=\pi-\varepsilon_1-\varepsilon_4+\int_{\delta}\kappa_g\,ds \qquad (۴)$$

به‌همین طریق خواهیم داشت

$$\int_{\beta}\omega_{12}=-\pi+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\int_{\beta}\kappa_g\,ds \qquad (۵)$$

و

$$\int_{\gamma}\omega_{12}=\int_{\gamma}\kappa_g\,ds \qquad (۶)$$



شکل ۳۹.۷

بدینسان (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{\partial x} \omega_{12} =$$

$$\int_{\alpha} \kappa_g\, ds + \int_{\beta} \kappa_g\, ds - \int_{\gamma} \kappa_g\, ds - \int_{\delta} \kappa_g\, ds - 2\pi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

$$= \int_{\partial x} \kappa_g\, ds - 2\pi + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

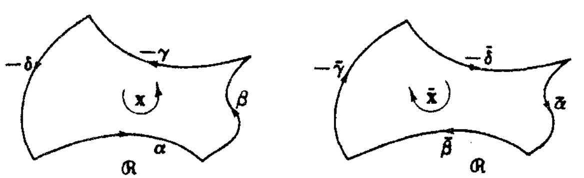
که با قراردادن آن در (۱) فرمول مطلوب حاصل می‌شود. ∎

فرمول گاوس-بونه در واقع به‌نگاشت خاص $\mathbf{x} : R \to M$ بستگی نـدارد، وفقط به‌نگارهٔ آن $\mathcal{R} = \mathbf{x}(R)$ وابسته است. توضیح آنکه اگر $\overline{\mathbf{x}}$ یك ۲-قطعه‌ای منظم یك به‌یك دیگر بـا همان نگارهٔ $\mathcal{R}$ باشد، آنگاه هریك از شش جملهٔ فرمول گاوس-بونه به‌ازای $\overline{\mathbf{x}}$ دقیقاً دارای همان مقدارعددی جملهٔ متناظر به‌ازای $\mathbf{x}$ می‌باشد. این‌امر، اگر $\mathbf{x}$ و $\overline{\mathbf{x}}$ دارای یك جهت باشند، یعنی یك فرم مساحتی روی $\mathcal{R}$ را معین‌کنند، تعجب‌آور نخواهد بود. اما فرض‌کنیم‌که جهت آنها یکی نباشد (مانند شکل ۴۰.۷) به‌طوری که $dM_x = -dM_{\bar{x}}$. برای بررسی پیچیده‌ترین حالت، خمها (یالها)ی متناظر از قبیل α و $\overline{\beta}$ درشکل ۴۰.۷ را درنظر می‌گیریم. در اینجـا α و $\overline{\beta}$ در دوجهت مختلف پیموده می‌شوند: $\overline{\beta}$ یـك تعویض پارامتر سوبرگردان α است. اما از طرف دیـگر خمیدگیهای ژئودزیکی α و $\overline{\beta}$ برحسب فرمهای مساحتی مختلف dM_x و $dM_{\bar{x}}$ محاسبه می‌شوند. بدینسان دو تغییر علامت به‌وجود می‌آید و در نتیجه

$$\int_{\alpha} \kappa_g\, ds = \int_{\overline{\beta}} \kappa_g\, ds$$

بقیهٔ این بند به‌کاربردهای فرمول گاوس-بونه اختصاص داده می‌شود. هدف اصلی، تعمیم این فرمول به‌نواحی کلیتر به‌ویژه به‌تمامی رویه‌هـای هندسی می‌باشد. برای این‌کار باید در مورد رویه‌ها برخی ازخواص اساسی راکه دارای جنبهٔ هندسی نیستند متذکرشد.

یك تجزیهٔ مستطیلی $\mathcal{D}$ برای رویـهٔ M عبارت است از یـك مجموعـهٔ متناهـی ۲-قطعه‌ایهای منظم یك به‌یك $\mathbf{x}_1$، . . . ، $\mathbf{x}_f$ که نگاره‌های آنها M را طوری بپوشانندکـه



شکل ۴۰.۷

اگر هردوتایی ازآنها همپوش باشند، یا در یك تك رأس مشترك ویا دریك تك‌یال مشترك نیز همپوش باشند.

روشن است که تجزیهٔ مستطیلی حالت خاصـی از پوشش فرشی (تعریف ۳.۷، فصل ۶) است، فقط نواحی $\mathbf{x}_i(R_i)$ دراینجا واقعاً «مستطیلی» بوده (چون $\mathbf{x}_i$ روی تمام R_i یك به‌یك و منظم است) و لازم است که با هم دارای برازندگی دقیقی مانند شکل ۴۱.۷ (با پوشش فرشی درشکل ۱۷.۶ مقایسه شود) باشند.

۵.۸. قضیه. هر رویهٔ فشردهٔ M دارای یك تجزیهٔ مستطیلی است.

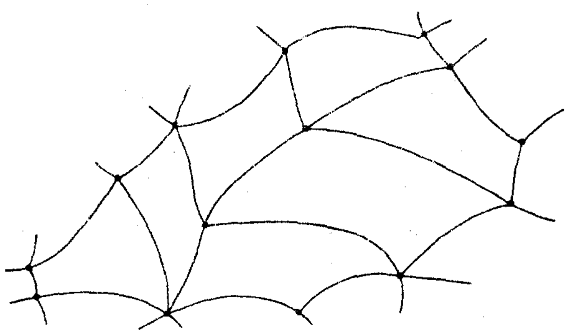
(بنابراین M به‌ویـژه دارای پوشش فرشی است.) این نتیجه مسلماً موجه است، زیرا اگر M ازکاغذ ساخته شده باشد، می‌توان با قیچی متوالیاً قطعه‌های مستطیلی شکلی از آن برید تا تمام شود. برهان کلی درکتاب لفشتز [۸] آمده است (ازتمرین ۱۰ استفاده کنید).

روشن‌است کـه با داشتن یك تجزیهٔ مستطیلی $\mathscr{D}$ نه‌تنها نواحی مستطیلی $\mathbf{x}_i(R_i)$، که وجوه نامیده می‌شوند، بلکه رئوس و یالهای این نواحی نیز تعیین می‌شوند.

۶.۸. قضیه. اگر $\mathscr{D}$ یك تجزیهٔ مستطیلی‌رویهٔ فشردهٔ M و v، e و f به‌ترتیب تعداد رئوس، یالها و وجوه $\mathscr{D}$ باشند، آنگاه عدد صحیح $v-e+f$ برای همهٔ تجزیه‌های مستطیلی M یکی است. این‌عدد صحیح را مشخصهٔ اویلر-پوانکارهٔ M می‌نامند و آن را با $\chi(M)$ نشان می‌دهند.

برهان طبیعی‌این‌قضیهٔ مشهور، برهان توپولوژیایی محض‌است، اما به‌آسانی‌می‌توان آن را از قضیهٔ ۸.۸ نتیجه گرفت.

این نتایج را می‌توان به‌آسانی‌تعمیم داد. نخست، به‌جای تمامی یك رویه، می‌توان یك ناحیهٔ چندبری از آن را درنظر گرفت، چنین‌ناحیه‌ای را می‌توان (مانندبالا) به‌نواحی مستطیلی برازندهٔ $\mathbf{x}_i(R_i)$ تجزیه‌کرد. دیگرآنکه همواره می‌توان به‌جای مستطیلهای R از



شکل ۴۱.۷

چندبرها استفاده‌کرد. (یك چندبر P عبارت است از ناحیهٔ محدودی در $\mathbf{E}^2$ که با یك خم چندبری ساده محصور شود، P شامل ایـن خم نیز می‌باشد.) از تـرکیب این دو تعمیم، مفهوم تجزیهٔ چندبری $\mathscr{D}$ بـرای هرناحیهٔ (چندبری) $\mathscr{R}$ در M به‌دست مـی‌آید. $\chi(\mathscr{R})$، مشخصهٔ اویلر-پوانکاره، از انتخاب تجزیهٔ چندبری $\mathscr{D}$ نیز مستقل است.

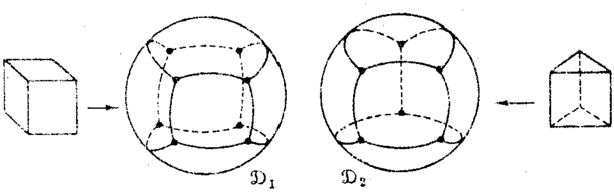
۷.۸. مثال. مشخصهٔ اویلر-پوانکاره.

(۱) درمورد کرهٔ Σ داریم $\chi(\Sigma) = 2$. چون مکعبی را مانند شکل ۴۲.۷ «باد کنیم» یك تجزیهٔ مستطیلی $\mathscr{D}_1$ برای Σ به‌دست مـی‌آید. $\mathscr{D}_1$ دارای $v = 8$، $e = 12$، $f = 6$ می‌باشد و بدینسان $\chi = 2$. اگر منشوری را باد کنیم یك تجزیهٔ چندبری $\mathscr{D}_2$ با $v = 6$، $e = 9$، $f = 5$ حاصل می‌شود و دراینجا نیز $\chi = 2$ (شکل ۴۲.۷).

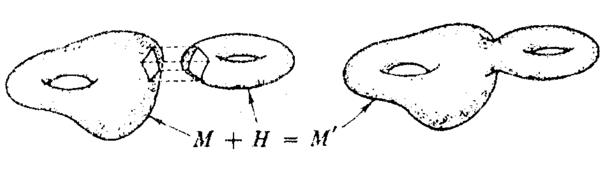
(۲) چنبرهٔ T دارای $\chi(T) = 0$ است. T را به‌صورت یك‌چنبرهٔ دورانی ترسیم کنید و آن‌را درطول سه نصف‌النهار وسه مدار دلخواه قطع کنید. بدینسان یك تجزیهٔ‌مستطیلی $\mathscr{D}$ به‌دست می‌آید که درمورد آن داریم $v = 9$، $e = 18$، $f = 9$، و درنتیجه $\chi = 0$.

(۳) اگر به‌یك رویهٔ فشرده یك دسته اضافه شود مشخصهٔ اویلر-پوانکارهٔ آن ۲واحد تقلیل می‌یابد.

به‌بیان اجمالی یك «دسته» عبارت است از چنبره‌ای‌که قسمت داخلی یکی‌از وجوه آن حذف شده است. (فرض می‌کنیم‌که M و چنبره قبلاً تجزیهٔ مستطیلی شده‌اند.) برای افزودن یك دسته به M، قسمت داخلی یکی از وجوه M را حذف می‌کنیم، و لبهٔ حاصل را به لبهٔ دسته به‌طور هموار می‌چسبانیم، به‌گونه‌ای‌که رئوس و یالهای دولبه برهم‌منطبق شوند (شکل ۴۳.۷).



شکل ۴۲.۷



شکل ۴۳.۷

با این عمل یك رویهٔ جدید M' به‌وجود می‌آید که به‌یك تجزیهٔ مستطیلی مجهز است. مشخصهٔ اویلر ـ پوانکارهٔ M' برابر است با

$$\chi(M)-۲$$

زیرا تجزیهٔ آن از مجموع وجوه M وچنبره، دقیقاً دو وجه کمتر دارد. (چسباندن لبه‌ها موجب حذف چهار رأس و چهار یال‌هم می‌شود، اما این تأثیری در χ ندارد.)

به‌آسانی می‌توان دید که رویه‌های دیفئومرف دارای یك مشخصهٔ اویلر ـ پوانکاره می‌باشند، زیرا اگر $\mathbf{x}_۱$ ، ... ، $\mathbf{x}_f$ یك تجزیهٔ رویهٔ M و $F: M \to M$ یك دیفئومرفیسم باشد، آنگاه $F(\mathbf{x}_۱)$ ، ... ، $F(\mathbf{x}_f)$ یك تجزیهٔ M می‌باشد و دقیقاً دارای‌همان v ، e و f خواهد بود.

به‌عنوان مثال، هرقدر درکرهٔ

$$\Sigma: x^۲+y^۲+z^۲=۱$$

اعوجاج ایجاد کنیم رویهٔ حاصل M همچنان دارای مشخصهٔ اویلر ـ پوانکارهٔ ۲ می‌باشد. مادامی که ساختارهای هندسی مورد بحث نباشند، می‌توان از واژهٔ «کـره» به‌همان معنی «هررویهٔ دیفئومرف با Σ» استفاده کـرد، اما برای اجتناب از هراشتباه احتمالی ما همان اصطلاح طولانیتر را به‌کار خواهیم برد.

فرض می‌کنیم که از یك کرهٔ Σ شروع و متوالیاً h دسته $(h=۰, ۱, ۲, \ldots)$ به‌آن اضافه کنیم ، تا رویهٔ جدید $\Sigma(h)$ به‌دست آید. نکتهٔ جالب درایـن عمل افزودن دسته‌ها آن است که هر رویهٔ فشردهٔ جهتپذیر M با یکی‌از $\Sigma(h)$ ها دیفئومرف می‌باشد. دراین‌حالت گفته می‌شود که خود M دارای h دسته است. بنابر (۳) مثال ۷.۸ داریم

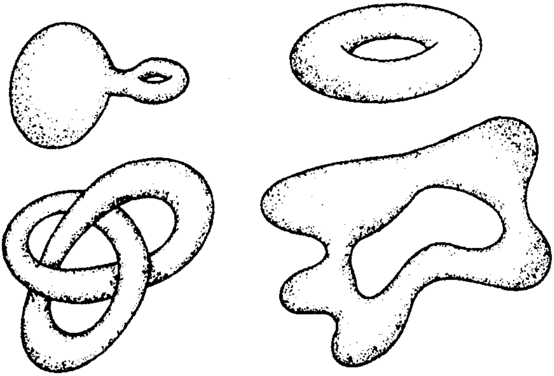
$$\chi(M)=\chi(\Sigma(h))=\chi(\Sigma)-۲h=۲-۲h$$

به‌عنوان مثال، هریك ازچهار رویه درشکل ۴۴.۷ دارای یـك دسته است، وبدینسان همهٔ آنها دارای $\chi=۰$ می‌باشند.

گـرچه در ایـن بـررسی مختصر دربارهٔ مشخصهٔ اویلر ـ پوانکاره از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کردیم، اما نتایج آن درصورت قرار دادن پیوستگی به‌جای دیفرانسیلپذیری نیز همچنان معتبر می‌ماند. در واقع مشخصهٔ اویلر ـ پوانکاره یك تغییرناپذیر توپولوژیایی است.[۱]

---

۱. یك تغییرناپذیر توپولوژیایی، عبارت است از خصوصیتی که تحت هر «همئومرفیسم (یعنی ، هـر تابع پیوسته‌ای کـه دارای معکوس پیوسته باشد) محفوظ بماند. هـر دیفئومرفیسم یـك همئومرفیسم است، اما عکس آن درست نیست. به‌هرحال یکی از ویژگیهای ابعاد کم آن است که دو رویه دیفئومرف‌اند اگر، (وفقط اگر) هومئومرف باشند.



شکل ۴۴.۷

اکنون به‌موضوع رویه‌های هندسی برمی‌گردیم، و یك نتیجهٔ بسیار جالبی را برای قضیهٔ ۴.۸ اثبات می‌کنیم.

۸.۸. قضیه (گاوس- بونه) اگر M یك رویهٔ هندسی فشرده جهتپذیر باشد، آنگاه خمیدگی گاوسی کل M برابر است با $2\pi\chi(M)$، که در آن $\chi(M)$ مشخصهٔ اویلر- پوانکارهٔ M می‌باشد.

برهان. برای M یك جهت ثابت با فرم مساحتی dM درنظرمی گیریم، و فرض می‌کنیم که $\mathscr{D}$ یك تجزیهٔ مستطیلی M با ۲- قطعه‌ایهای $\mathbf{x}_1$ ، ... ، $\mathbf{x}_f$ باشد که همهٔ آنها به‌طورمثبت جهتدار شده‌اند. بدینسان $\mathscr{D}$ به‌ویژه یك پوشش فرشی M به‌صورتی که در فصل ۶ ، بند ۷ آمده خواهد بود. بنابر تعریف، خمیدگی کل M عبارت است از

$$\iint_M K\,dM=\sum_{i=1}^{f}\iint_{\mathbf{x}_i} K\,dM \tag{1}$$

فرمول گاوس - بونه‌را درمورد هریك ازاین عوامل جمع اعمال می‌کنیم. (این عمل مجاز است، زیرا روی هرناحیهٔ $\mathbf{x}_i(R_i)$ ، فرم مساحتی dM همان است که با $\mathbf{x}_i$ معین می‌شود.) این فرمول برحسب زوایای داخلی به‌صورت زیر می‌باشد

$$\iint_{\mathbf{x}_i} K\,dM=-\int_{\partial \mathbf{x}_i}\kappa_g\,ds-2\pi+(\iota_1+\iota_2+\iota_3+\iota_4) \tag{2}$$

اکنون به‌بررسی قرار دادن (۲) در (۱) می‌پردازیم.

چون M یك‌رویه است، ازلحاظ موضعی‌مانند $\mathbf{E}^2$ می‌باشد، هریال متعلق به‌تجزیهٔ $\mathscr{D}$،

دقیقاً به دو وجه مثلاً $\mathbf{x}_i(R_i)$ و $\mathbf{x}_j(R_j)$ تعلق خواهد داشت. گیریم α_i و α_j نمایشهای پارامتری یالی باشند که به‌ترتیب در $\partial\mathbf{x}_i$ و $\partial\mathbf{x}_j$ واقع‌اند.

چون جهتدهی دراین‌نواحی باجهتدهی درخود M یکی است، α_i و α_j، همان‌گونه که درشکل ۴۵.۷ دیده می‌شود، تعویض پارامتر سوبرگردان یکدیگرند. بدینسان

$$\int_{\alpha_i}\kappa_g\,ds+\int_{\alpha_j}\kappa_g\,ds=0$$

درنتیجه

$$\sum_{i=1}^{f}\int_{\partial\mathbf{x}_i}\kappa_g\,ds=0 \tag{۳}$$

زیرا چنان که دیدیم انتگرالهای روی خمهای یالها دو به دو حذف می‌شوند. (مطابق معمول، تعداد رئوس، یالها و وجوه موجود درتجزیه را با v، e و f نشان می‌دهیم.)

بدینسان از قرار دادن (۲) در (۱) خواهیم داشت

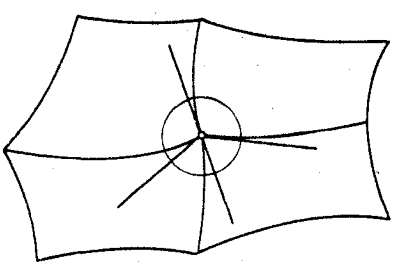
$$\iint_M K\,dM=-2\pi f+\mathcal{J} \tag{۴}$$

که‌درآن $\mathcal{J}$ مجموع زوایای داخلی همهٔ وجوه درتجزیهٔ مزبور است. اما مجموع زوایای داخلی درهر رأس درست برابر 2π می‌باشد (شکل ۴۶.۷)، بنابراین $2\pi v=\mathcal{J}$. بدینسان

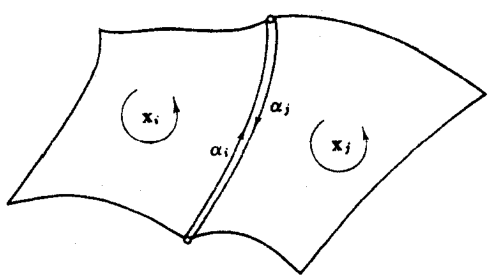
$$\iint_M K\,dM=-2\pi f+2\pi v \tag{۵}$$

با بررسی ساده‌ای از آنالیز ترکیبی برهان کامل می‌شود. وجوه موجود درتجزیهٔ $\mathcal{D}$ مستطیلی می‌باشند: هر وجه دارای چهار یال است. اما هریال دقیقاً به دو وجه متعلق است. بدینسان $4f$ معادل دو برابر e خواهد بود، یعنی $2e=4f$. از آنجا $-f=f-e$، بنابراین (۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\iint_M K\,dM=2\pi(v-e+f)=2\pi\chi(M) \qquad \blacksquare$$



شکل ۴۶.۷



شکل ۴۵.۷

چون مشخصهٔ اویلر - پوانکاره یك تغییرناپذیر توپولوژیایی است، این قضیه نشان می‌دهد که خمیدگی کل نیز یك تغییرناپذیر توپولوژیایی است.

به‌عنوان توضیح گیریم M و $\bar{M}$ دو رویهٔ هندسی‌اند که فقط دیفئومرف می‌باشند[1]، دراین‌صورت امکان دارد که K و $\bar{K}$ خمیدگیهای گاوسی M و $\bar{M}$ کاملاً متفاوت باشند، اما خمیدگی کل آنها یکی است، زیرا (چون دیفئومرف‌اند) M و $\bar{M}$ دارای یك مشخصهٔ اویلر - پوانکاره می‌باشند، و ازآنجا

$$\iint_M K\,dM = 2\pi\chi(M) = 2\pi\chi(\bar{M}) = \iint_{\bar{M}} \bar{K}\,d\bar{M}$$

قبلاً مثالهایی ازاین قضیه را دیده‌ایم. مثلاً، درچنبرهٔ مثال ۵.۲ داریم $K = 0$، بنابراین خمیدگی کل صفر است. ازطرف دیگر، همین رویه به‌عنوان یك چنبرهٔ دورانی دارای ساختار هندسی معمولی در $\mathbf{E}^3$ می‌باشد، و خمیدگی آن متغیر است، اما چنان‌که درفصل ۶، بند۷ دیدیم، خمیدگی کل آن نیز صفر است. (دراین حالت دیفئومرفیسم همان نگاشت همانی است.)

عموماً برای تعیین خمیدگی کل کافی است دسته‌های رویه را بشماریم.

۹.۸. فرع. اگر M یك‌رویهٔ فشردهٔ جهتپذیر با h دسته $(h = 0, 1, 2, \ldots)$ باشد، آنگاه به‌ازای هرساختار هندسی روی M، خمیدگی کل برابر است با $4\pi(1-h)$.

برهان. قبلاً دیدیم که M دارای مشخصهٔ اویلر - پوانکارهٔ $2 - 2h$ است. ▌

با استفاده از قضیهٔ گاوس - بونه (قضیهٔ ۸.۸ یا ۹.۸) می‌توان برخی مسائل را که به‌نظر دشوار می‌آیند مورد بررسی قرار داد. به‌عنوان مثال، ازقسمت(۱) مثال ۳.۲ نتیجه می‌شود که اگر از کرهٔ Σ تنها یك نقطه حذف شود، روی کرهٔ روزنه‌دار حاصل یك ساختار هندسی‌با $K = 0$ وجود خواهد داشت. اما روی تمام کرهٔ Σ نمی‌توان یك ساختار هندسی با $K \leqslant 0$ تعریف کرد، زیرا دراین‌صورت

$$\iint_\Sigma K\,d\Sigma \leqslant 0$$

با $2\pi\chi(\Sigma) = 4\pi$ درتناقض است. با معکوس کردن این استدلال دیده می‌شود که هررویهٔ هندسی فشردهٔ جهتپذیر با $K > 0$، باید با کرهٔ دیفئومرف باشد. خمیدگی کل آن مثبت است، اما h درفرع ۹.۸ عدد صحیح نامنفی است، بنابراین باید صفر باشد. بدینسان رویهٔ مزبور دارای دسته نیست، وباکرهٔ $\Sigma = \Sigma(0)$ دیفئومرف است. نتایج دیگری ازاین نوع را درتمرینات می‌آوریم.

---

۱. زیرنویس صفحهٔ ۴۲۶ را ببینید.

قضیهٔ گاوس-بونه با استفاده از برش M به نواحی مستطیلی، واعمال فرمول گاوس-بونه برهریك از این نواحی اثبات شد. علت موفقیت این طرح آن است که با یك‌جهت‌دهی رویهٔ M همهٔ نواحی مزبور به‌طور سازگار جهتدار می‌شوند، ودرنتیجه روی مرزهای این نواحی انتگرالهای $\int \kappa_g ds$ دو به‌دو حذف می‌گردند. در این نکته اندیشهٔ بنیادی توپولوژی جبری نهفته است، و در واقع ملاحظاتی از این قبیل، پوانکاره را به‌کشف توپولوژی جبری راهنمایی کرد (کتاب لفشتز [۸] را ببینید). با اعمال این طرح درمورد نواحی مناسبی از M می‌توان قضیهٔ گاوس-بونه را به‌صورتی عامتربیان کرد (تمرین ۸). قضیهٔ ۴.۸ راکه مربوط به‌نواحی مستطیلی است می‌توان با استفاده از یك فرع (تمرین ۱۱) به نواحی چندبری دلخواه تعمیم داد. برای آنکه تعمیم مفهوم مرز در چنین وضعیتی روشن شود، اثبات مستقیم (و منطقاً غیر ضروری) تمرین ۱۱ را درحالت خاص، درمورد مثلث، یعنی‌دربارهٔ نگارهٔ منظم یك به‌یك Δ ازمثلث معمولی T در$\mathbf{E}^2$ بیان می‌کنیم (شکل ۴۷.۷).

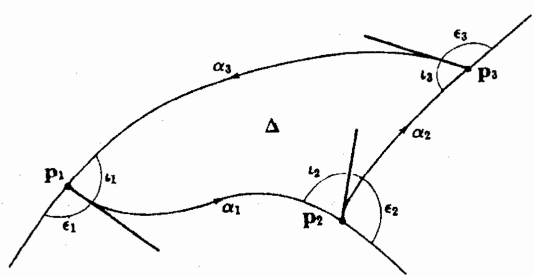
۱۰.۸. **فرع.** اگر Δ یك مثلث دررویهٔ هندسی M باشد، آنگاه

$$\iint_{\Delta} K\, dM + \int_{\partial\Delta} \kappa_g ds = 2\pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (\iota_1 + \iota_2 + \iota_3) - \pi$$

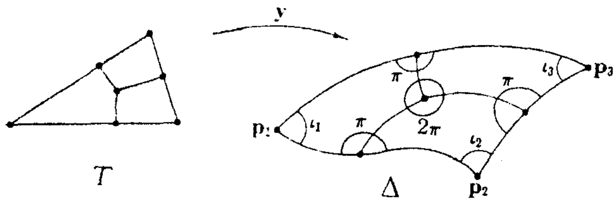
(درضمن اثبات، این نمادگذاری را توضیح خواهیم داد.)

برهان. گیریم dM یك فرم مساحتی دلخواه روی ناحیهٔ Δ باشد.

به‌طریق زیر یك تجزیهٔ مستطیلی برای $\Delta = y(T)$ به‌دست می‌آوریم. مثلث T را چنان‌که درشکل ۴۸.۷ نشان داده شده است، به‌سه‌چهار ضلعی تقسیم می‌کنیم؛ آنگاه با استفاده ازتغییر متغیرهایی در $\mathbf{y}$ نگاره‌های آنها را به عنوان نواحی مستطیلی $\mathbf{x}_1(R_1)$، $\mathbf{x}_2(R_2)$، $\mathbf{x}_3(R_3)$ مشخص می‌کنیم، وبدینسان یك تجزیهٔ مستطیلی برای Δ تشکیل می‌شود. مطابق معمول ترتیبی می‌دهیم که هر $\mathbf{x}_i$ دارای جهت مثبت باشد. بدینسان، بنابرفرمول گاوس-بونه با زوایای داخلی، خمیدگی کل Δ برابراست با



شکل ۴۷.۷



شکل ۴۸.۷

$$\iint_{\Delta} K\,dM=\sum_{i=1}^{3}\iint_{\partial x_i} K\,dM=-\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial x_i}\kappa_g ds-6\pi+\vartheta$$

که در آن ϑ مجموع همهٔ زوایای داخلی است.

از دوازده یال موجود در $\partial\mathbf{x}_1$ ، $\partial\mathbf{x}_2$ و $\partial\mathbf{x}_3$، شش یـال داخلی دو بـه دو حذف می‌شوند (حداقل $\int\kappa_g ds$ روی آنها صفر می‌شود). شش یال باقی مـانده دو به‌دو ترکیب شده وخمهای α_1 ، α_2 ، α_3 (شکل ۴۷.۷) را ایجاد می‌کنند که مرز $\partial\Delta$ ی مثلث جهتدار Δ را تشکیل می‌دهند. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial x_i}\kappa_g ds=\int_{\partial\Delta}\kappa_g\,ds=\int_{\alpha_1}\kappa_g\,ds+\int_{\alpha_2}\kappa_g\,ds+\int_{\alpha_3}\kappa_g\,ds$$

درمجموع ϑ، زوایای داخلی ι_1 ، ι_2 ، ι_3 در $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، $\mathbf{p}_3$ همان زوایـای مثلث Δ می‌باشند. روشن است که مجموعهای دیگر، که با دخالت دررئوس، موقتی به‌وجودآمده‌اند، برابر با 5π می‌باشند؛ بدینسان داریم

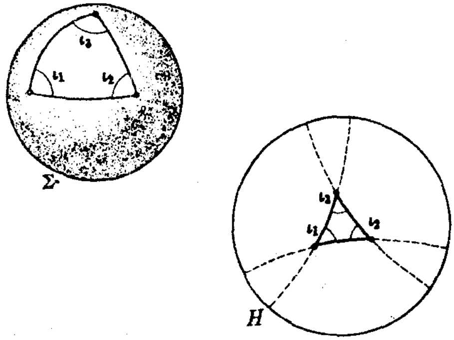
$$\iint_{\Delta} K\,dM+\int_{\partial\Delta}\kappa_g ds=(\iota_1+\ {}_2+\iota_3)-\ \ .$$

در اینجا از تعاریف ۳.۸ درمورد مثلث استفاده کرده‌ایم. بدینسان فـرمول $\iota_j+\varepsilon_j=\pi$ برای زوایای خارجی به‌دست می‌آید. ∎

اگر یالهای مثلث ژئودزیك باشند، آنگاه جملهٔ خمیدگی ژئودزیکی حذف خواهد شد. به‌ویژه، درمورد هر مثلث ژئودزیکی دریك رویهٔ با خمیدگی ثابت K داریم

$$\iota_1+\iota_2+\iota_3=\pi+KA$$

که در آن A مساحت مثلث است. بدینسان قضیهٔ مشهورهندسهٔ مسطحه که براساس آن مجموع زوایای داخلی هرمثلث برابر π است، مبتنی براین نکته است که $\mathbf{E}^2$ هموار می‌باشد. بـا مثالهایی به‌آسانی می‌توان نشان داد که $\iota_1+\iota_2+\iota_3$ درمورد مثلث ژئودزیکی روی کـره $(K>0)$ بزرگتر از π و روی صفحهٔ هذلولوی $(K<0)$ کوچکتر از π است (شکل ۴۹.۷).



شکل ۴۹.۷

تمرینات

۱. خمیدگی گاوسی کل هریك از رویه‌های زیر را بیابید:
(الف) بیضیگون
(ب) رویهٔ شکل ۱۰.۴
(ج) $M: x^{۲}+y^{۴}+z^{۶}=۱$

۲. ثابت کنید که درمورد هر رویهٔ هندسی فشردهٔ جهتپذیر M داریم:

M با یك کره دیفئومرف است (متن درس) $\Longleftarrow K>۰$

M با یك چنبره دیفئومرف است $\Longleftarrow K=۰$

M یك کره با $h\geqslant ۲$ دسته است $\Longleftarrow K<۰$

۳. (الف) گیریم M یك رویهٔ هندسی فشردهٔ جهتپذیر با h دسته باشد.
ثابت کنید که روی M یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ وجود دارد به‌طوری که

$K(\mathbf{p})>۰$، اگر $h=۰$

$K(\mathbf{p})=۰$، اگر $h=۱$

$K(\mathbf{p})<۰$، اگر $h\geqslant ۲$

(ب) اگر M یك رویهٔ فشردهٔ جهتپذیر در $\mathbf{E}^{۳}$ باشد، که با کره دیفئومرف نیست، نشان دهید که روی M یك نقطهٔ $\mathbf{p}$ وجود دارد که در آن $K(\mathbf{p})<۰$ (با قضیهٔ ۵.۳، فصل ۶ مقایسه شود).

۴. (الف) در مورد هر قطعه خم منظم $\alpha:[a, b]\rightarrow M$، نشان دهید که خمیدگی

ژئودزیکی کل $\int_\alpha \kappa_g\, ds$ برابر است با

$$\int_\alpha \frac{\alpha'' \cdot J(\alpha')}{\alpha' \cdot \alpha'} dt$$

(راهنمایی: تمرین ۹، بند ۴.)
(ب) گیریم $\mathbf{x}$ یك قطعه مختصاتی متعامد (با جهت مثبت) در M باشد. فرمولهای زیر را درمورد خمیدگیهای ژئودزیکی کل خمهای پارامتر ثابت کنید:

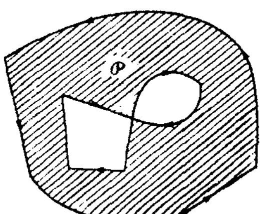
$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG}}(u, v_0)du, \qquad -\int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u}{\sqrt{EG}}(u_0, v)dv$$

(توجه شود که $(1/2)E_v = -\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v$ و $(1/2)G_u = -\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u$) واگر M در $\mathbf{E}^3$ باشد از مشتق اقلیدسی یا ذاتی همین نتایج حاصل می‌شود.)

۵. گیریم $\mathbf{x} : R \to \Sigma$ قطعه مختصاتی جغرافیایی (مثال ۲.۲، فصل ۴) باشد که به مستطیل $R : 0 \leqslant u, v \leqslant \pi/4$ تخصیص یافته است. هریك از جمله‌های فرمول گاوس-بونه را جداگانه درمورد $\mathbf{x}$ محاسبه کنید.

۶. اگر $F : M \to N$ یك نگاشت از رویه‌های فشردهٔ جهتدار باشد، بنابـرتعریف، d_F، درجهٔ F، عبارت است ازخارج قسمت مساحت جبری $F(M)$ بر مساحت N. بدینسان d_F نمایشگرمجموع جبری تعداد دفعاتی است که F رویهٔ M را به دور N مـی‌پیچد. اگر M یك رویهٔ فشردهٔ جهتدار در $\mathbf{E}^3$ باشد، قضیهٔ هوپف را ثابت کنید: d_G، درجهٔ نگاشت گاوسی، برابر است با عدد صحیح $\chi(M)/2$. (می‌توان نشان داد کـه درجهٔ همواره یك عدد صحیح است.)

یك ناحیهٔ چندبری جهتدار $\mathcal{P}$ دریك رویهٔ M ناحیه‌ای است جهتدار که دارای تجزیهٔ مستطیلی $\mathbf{x}_1$، ... $\mathbf{x}_k$ می‌باشد، وهمواره آنها را باجهت مثبت در نظرمی گیریم. دراین صورت $\partial\mathcal{P}$ ی مرز $\mathcal{P}$ عبارت‌است‌ازمجموع صوری یالهایی که درمرزهای $\partial\mathbf{x}_1$، ...، $\partial\mathbf{x}_k$ دقیقاً یك بار پدید می‌آیند. وضعیتی را کـه در شکل ۵۰.۷ نشان داده شده است کنار می‌گذاریم، بدینسان $\partial\mathcal{P}$ از خمهای (شکسته) بستهٔ ساده تشکیل می‌شود. ایـن تعاریف به طوری هستند که اگر α یکی از یـالهای مـوجود در $\partial\mathcal{P}$ باشد، آنگاه $J(\alpha')$ همواره متوجه داخل ناحیهٔ $\mathcal{P}$ است. (ایـن نکته بیان دقیق قاعدهٔ اجمالی زیر است: «طوری روی مرز حرکت کنید کـه این نـاحیه همواره در طرف چپ واقع باشد.»)



شکل ۵۰.۷

۷. (الف) اگر ϕ یك ۱-فرمی روی ناحیهٔ چندبری

جهتدار $\mathcal{P}$ باشد، تعمیم قضیهٔ استوکس را ثابت کنید

$$\iint_{\mathcal{P}} d\phi = \int_{\partial\mathcal{P}} \phi$$

(اگر $\partial\mathcal{P}=\sum \alpha_i$، آنگاه $\int_{\mathcal{P}} \phi$ به‌معنی $\sum\int_{\alpha_i}\phi$ خواهد بود.) (راهنمایی: لم ۶.۶، فصل ۴ موجب می‌شود که برخی از زوجها را همانند آنچه‌که در برهان قضیهٔ ۸.۸ دیدیم حذف کنیم.)

(ب) نتیجه بگیرید که اگر ϕ یك ۱- فرمی دلخواه روی رویهٔ فشردهٔ جهتدار M باشد، آنگاه $\iint_{M} d\phi = 0$.

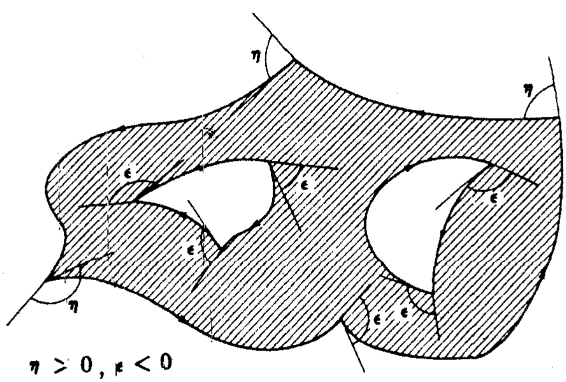
(ج) اگر برای یك ناحیهٔ $\mathcal{P}$ دو تجزیهٔ مستطیلی متمایز (با جهت مثبت) درنظربگیریم، عملاً مرزهای متفاوتی برای $\mathcal{P}$ به‌وجود می‌آیند، اما مجموعهٔ نقاط آنها یکی است. ثابت کنید که بــه ازای هر ۱- فرمی روی $\mathcal{P}$، $\int_{\partial\mathcal{P}} \phi$ درهر دوحالت یکی است.

۸. (تعمیم قضیهٔ گاوس-بونه). اگر $\mathcal{P}$ یك ناحیهٔ چندبری جهتدار دریك رویهٔ هندسی باشد، ثابت کنید که

$$\iint_{\mathcal{P}} K\,dM + \int_{\partial\mathcal{P}} \kappa_g\,ds + \sum \varepsilon_j = 2\pi\chi(\mathcal{P})$$

که در آن $\sum\varepsilon_j$ مجموع زوایای خارجی $\mathcal{P}$ است که درحالت خاص، در مورد ناحیهٔ مستطیلی، درتعریف ۳.۸ بیان شد (شکل ۵۱.۷).

(راهنمایی: با طبقه‌بندی یالها ورئوس برحسب تعلق آنها به $\partial\mathcal{P}$ وناحیهٔ داخلی $\mathcal{P}$ برهان قضیهٔ ۸.۸ را دقیقتر بیان کنید. توجه شود که روی هرخم مرزی بستهٔ ساده، تعداد یالها با تعداد رئوس یکی است.)

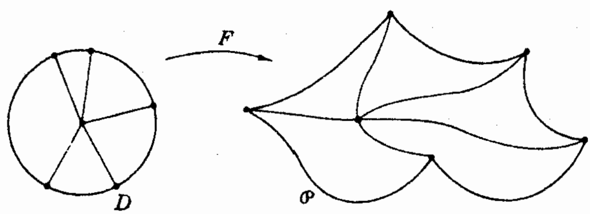


شکل ۵۱.۷

۹. ثابت کنید که خواص زیر در مورد یك رویهٔ فشردهٔ جهتپذیر M هم‌ارزند:
(الف) روی M یك میدان برداری مماس وجود دارد که هیچ گاه صفر نمی‌شود.
(ب) $\chi(M)=0$.
(ج) M با یك چنبرهٔ دیفئومرف است.
(راهنمایی: برای اثبات (ب) $\Rightarrow$ (الف)، یك ساختار هندسی درنظر گرفته، از تمرین ۷ استفاده کنید.) خواص (الف) و (ب) در واقع برای هرخمینهٔ فشرده هم‌ارزند.

۱۰. (الف) اگر ناحیهٔ $\mathcal{R}$ دارای یك تجزیهٔ مستطیلی باشد، یك تجزیهٔ مثلثی از آن به‌دست آورده، ونشان دهید که در هردو مورد $v-e+f$ یکی است.
(ب) در قسمت (الف) جای تجزیهٔ «مستطیلی» و«تجزیهٔ مثلثی» را با هم تعویض کرده، و همان نتیجه را اثبات کنید.

مفهوم ناحیهٔ ساده (تمرین ۱۲، فصل ۶، بند ۷) را می‌توان بـا فراهم ساختن این امکان که نگاشت $F:D\rightarrow M$ در n نقطه ازدایرهٔ $u^2+v^2=1$ دیفرانسیلپذیر نباشد (اما همچنان پیوسته باشد) تعمیم داد. بدینسان امکان دارد که در $\partial\mathcal{P}$ مرز $\mathcal{P}=F(D)$، n گوشه به‌وجود آیـد. در این حالت $\mathcal{P}$ را یك n ضلعی $(n\geqslant 0)$ می‌نامند، مشخصهٔ اویلر-پوانکاره برای هر n ضلعی برابر $1+$ است، زیرا بـا تجزیهٔ مثلثی آن، مطابق شکل ۵۲۰۷، داریم $v-1=f=e/2$.



شکل ۵۲۰۷

۱۱. اگر $\mathcal{P}$ یـك n ضلعی ژئودزیکی جهتدار (یالهای آن ژئودزیك است) دریك رویـهٔ هندسی باشد، نشان دهید که

$$\iint_{\mathcal{P}} K\,dM = 2\pi-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_k=(2-n)\pi+\sum_{j=1}^{n}\iota_j$$

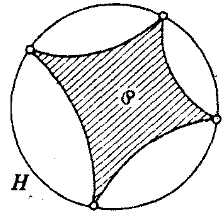
که درآن ε_j و ι_j به‌ترتیب، زوایای خارجی و داخلی $\mathcal{P}$ می‌باشند.

۱۲. (ادامه). (الف) اگر $\mathcal{P}$ یك n ضلعی ژئودزیکی درصفحه باشد، ثابت کنید که $n\geqslant 3$، و مجموع زوایای خارجی $\mathcal{P}$ برابر 2π است.
(ب) اگر M یك رویه باخمیدگی گاوسی ثابت $K\neq 0$ باشد، نشان دهید که مساحت هرچند ضلعی ژئودزیکی به‌وسیلهٔ زوایای خارجی یا داخلی آن معین می‌گردد.

(ج) در کرهٔ Σ به‌شعاع r، یك ۳ ضلعی ژئودزیك $\mathcal{P}$ را طوری تعیین کنید که هریك از زوایای داخلی آن برابر $3\pi/2$ باشد. مساحت $\mathcal{P}$ را بیابید.

۱۳. (الف) ثابت کنید که در یك رویهٔ M با $K \leqslant 0$ هیچ n ضلعی ژئودزیکی با $n \leqslant 2$ وجود ندارد. بدینسان، به‌ویژه‌هیچ دو ژئودزیکی در M نمی‌توانند طوری متقاطع باشند که مرز یك ناحیهٔ چند ضلعی ساده را تشکیل دهند.

(ب) روی یك کرهٔ Σ، به‌ازای چه مقادیری از $n \geqslant 0$، n ضلعی ژئودزیکی وجود دارد؟ («رئوس قابل حذف» یعنی رئوسی را که زاویهٔ خارجی آنها ۰ است به‌حساب نیاورید.)



شکل ۵۳.۷

۱۴. گیریم $\mathcal{P}_n\,(n \geqslant 3)$ یك «nضلعی ژئودزیکی» در صفحهٔ هذلولوی باشد، که رئوس آن روی لبهٔ $u^2+v^2=4$ قرار داشته، وبنابراین در H واقع نباشند (شکل ۵۳.۷). مساحت $\mathcal{P}_n$ را بیابید.

۱۵. (قضیهٔ چرخش هوپف). اگر β خم بستهٔ ساده‌ای در $\mathbf{E}^2$ باشد، آنگاه خمیدگی ژئودزیکی کل β، برابر $\pm 2\pi$ است. بدینسان مماس یکهٔ T در پیمودن β یك دور کامل می‌چرخد. این نتیجه را با فرض آنکه β خم مرزی یك ناحیهٔ سادهٔ $\mathcal{S}$ باشد اثبات کنید. (راهنمایی: $\mathcal{S}$ یك ۰ ضلعی مطابق تعریف بند قبل تمرین ۱۱ می‌باشد.)

فرض بالا همواره صادق است، اما اثبات آن مستلزم روشهای توپولوژیکی نسبتاً عمیق می‌باشد.

۹. خلاصه

رویهٔ هندسی، یعنی‌خمینهٔ ریمانی ۲ بعدی، تعمیم صفحهٔ اقلیدسی است که درآن به‌جای $\mathbf{E}^2$ یك رویهٔ دلخواه، و به‌جای حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای مماس، حاصل‌ضرب داخلی دلخواهی جایگزین شده است. در هندسهٔ ریمانی حاصل، طول یك خم مانند پیش تعریف می‌شود، و مفهوم مسافت ذاتی راکه مستقیماً تعمیم مسافت اقلیدسی معمولی در صفحه است به‌دست می‌دهد. شتاب خم نیز یك مفهوم هندسی است، اما چندان روشن نیست که چگونه از ضرب داخلی روی بردارهای مماس می‌توان به‌اندازه‌گیری چرخش خم رسید. این مطلب ۷۰ یا ۸۰ سال بعد از ریمان با فرمولهای نسبتاً پیچیده‌ای برحسب قطعه‌های مختصاتی تکمیل شد (۲.۴ یك نمونهٔ آن است). در روش کارتان حاصل‌ضرب داخلی برای تعریف مفهوم میدان سه‌وجهی به‌کار می‌رود، و میزان چرخش میدان سه‌وجهی برحسب فرم همبندی آن بیان می‌شود. دراین صورت معادلهٔ همبندی $\nabla_V E_1 = \omega_{12}(V)E_2$ معرف مشتق کوواریانی است و شتاب را به‌عنوان حالت خاص در برمی‌گیرد.

درهندسهٔ ریمانی، همانند هندسهٔ اقلیدسی، ژئودزیکها همان خمهای باشتاب صفرند. ژئودزیکها نه‌تنها مستقیمترین خمها می‌باشند، بلکه به‌مفهومی که در بندهای ۵ و ۶ مورد بحث قرار گرفت کوتاهترین خمها نیز هستند. این قاعدهٔ سادهٔ اقلیدسی که «خط مستقیم کوتاهترین مسافت بین دو نقطه است» در بررسی رفتار جدید و پیچیدهٔ ژئودزیکها روی یك رویهٔ هندسی دلخواه، و حتی در مورد رویه‌هایی به‌سادگی کره یا استوانه چندان مفید نیست. نظرهایی در این باب که تحلیل ژئودزیکها را تاکجا می‌توان پیش برد، در کتاب میلنور [۷] داده شده است.

لازم است تأکید شود که خمیدگی گاوسی K مهمترین ویژگی هندسی رویهٔ هندسی M می‌باشد، زیرا چنان‌که دیدیم تقریباً در هر بررسی هندسی، خمیدگی به‌هرحال دخالت دارد. در واقع K را می‌توان، مثلاً برحسب میدانهای برداری متوازی (هولونومی) یا ژئودزیکهای شعاعی (معادلهٔ ژاکوبی) یا دوایر قطبی تعریف‌کرد. (در مورد رویه‌های متعلق به $\mathbf{E}^3$ از عملگرشکلی استفاده‌کردیم و توانستیم نگاشت گاوسی را به‌کار گیریم.) اما در روش کارتان خمیدگی با معادلهٔ ساختاری $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$ تعریف می‌شود و K را (به‌مفهومی که قبلاً بحث شد) به‌عنوان «مشتق دوم» معمولی میدانهای سه‌وجهی روی M ارائه می‌کند. همین تعریف مستقیماً ما را به‌نتیجهٔ مهم و اساسی هندسهٔ ریمانی دوبعدی، یعنی قضیهٔ گاوس-بونه هدایت می‌کند. علاوه برنتایج مثلثاتی ازقبیل فرع ۱۰.۸، محتوای این قضیه این است که توپولوژی رویه‌ها حداقل در حالت فشردهٔ جهتپذیر با خمیدگی معین می‌گردد.

به‌طورکلی، نتایج این فصل در مورد خمینه‌های ریمانی با بعد دلخواه n معتبرند، و تعاریف و دلایل در اکثر موارد نیازی به‌اصلاح ندارند. در حالت ۲ بعدی اثبات برخی از سازگاریها مانند قضایای ۱.۲ و ۲.۳ ساده شده است، اما با روشهای پیشرفته‌ترمی‌توان از آنها صرفنظر کرد. همان‌گونه‌که انتظار می‌رود، بیشترین دشواریها در تعمیم قضیهٔ گاوس- بونه پیش می‌آید (کتاب هیکس [۵] را ببینید)، و در ابعاد (زوج) بالاتر خمیدگی M در آرایش توپولوژیکی M مؤثر است، اما نقش تعیین‌کننده ندارد.

مراجع و مآخذ

1. H. Flanders, "Differential Forms: With Applications to the Physical Sciences." Academic Press, New York, 1963.
2. G. Birkhoff and S. MacLane, "A Survey of Modern Algebra." Macmillan, New York, 1953.
3. T. J. Willmore, "An Introduction to Differential Geometry." Oxford Univ. Press, London and New York, 1959.
4. R. Courant and H. Robbins, "What is Mathematics?" Oxford Univ. Press, London and New York, 1941.
5. N. J. Hicks, "Notes on Differential Geometry." Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1965.
6. D. J. Struik, "Lectures on Classical Differential Geometry." Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1961.
7. J. W. Milnor, "Morse Theory." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.
8. S. Lefschetz, "Introduction to Topology." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1949.

کتابهای ویلمور و استروك ازلحاظ دشواری با همین‌کتاب در یك سطح‌اند. کتاب هیکس درسطحی مطابق فصل هفتم ما آغازمی‌کند وگفتار بسیارمختصری ازهندسهٔ ریمانی چند بعدی می‌آورد، درفهرست مأخذ آن تعدادی از بررسیهای دقیقتر دربارهٔ این‌موضوع مندرج است.

جوابهای تمرینات شمارهٔ فرد

(این جوابها کامل نیستند و در حالتهایی که مستلزم برهان بوده فقط به‌راهنمایی اکتفا شده است.)

فصل ۱

بند ۱

۱. (الف) $x^2 y^3 \sin^2 z$، (ج) $2x^2 y \cos z$

۳. (ب) $2xe^h \cos(e^h)$، $h = x^2 + y^2 + z^2$

بند ۲

۱. (الف) $-6U_1(\mathbf{p}) + U_2(\mathbf{p}) - 9U_3(\mathbf{p})$

۳. (الف) $V = (2z^2/7)U_1 - (xy/7)U_3$

(ج) $V = xU_1 + 2yU_2 + xy^2U_3$

۵. (ب) از دستور کرامر استفاده کنید.

بند ۳

۱. (الف) ۰، (ب) $7 \cdot 2^7$، (ج) $2e^2$

۳. (الف) y^3، (ج) $yz^2(y^2z - 3x^2)$ (د) $2x(y^4 - 3z^5)$

۵. از تمرین ۴ استفاده کنید.

بند ۴

۱. $\alpha'(\pi/۴)=(-۲,\ ۰,\ \sqrt{۲})_p$، که در آن $p=(۱,\ ۱,\ \sqrt{۲})$

۳. $\beta(s)=(۲(۱-s^۲),\ ۲s\sqrt{۱-s^۲},\ ۲s)$

۵. خطوط در $(۱۱,\ ۷,\ ۳)$ متقاطع‌اند.

۷. $\mathbf{v}_p=(۱,\ ۰,\ ۱)_p$

۹. در $\alpha(۰): t \to (۲,\ ۲t\ ,t)$

بند ۵

۱. (الف) ۴، (ب) ۴ —، (ج) ۲ —

۵. (ب) $(x\,dy-y\,dx)/(x^۲+y^۲)$

۷. (الف) $dx-dz$، (ب) ۱-فرمی نیست، (ج) $z\,dx+x\,dy$، (د) $۲(x\,dx+y\,dy)$،
(ه) ۰، (ز) ۱-فرمی نیست.

۹. $\pm\left(۰,\ ۱,\ \frac{۱}{۲}\right)$

۱۱. (الف) از تقریب تیلر برای تابع $t \to f(\mathbf{p}+t\mathbf{v})$ استفاده کنید.
(ب) دقیق: ۴۲۰ر۰ —، تقریبی: $-\frac{۱}{۲}$

بند ۶

۱. (الف) $\phi\wedge\psi=yz\cos z\,dx\,dy-\sin z\,dx\,dz-\cos z\,dy\,dz$
(ب) $d\phi=-z\,dx\,dy-y\,dx\,dz$. توجه شود که بنابر ۳.۶.۰۱،
$d(dz)=d(۱\cdot dz)=۰$

۷. این تعریف را دربارهٔ فرمول ذیل ۳.۶.۰۱ به‌کاربندید.

۹. در فرمول قراردهید، $f=y$، $g=x$.

بند ۷

۱. (الف) $(۰,\ ۰)$، (ب) $(-۳,\ ۱)$، $(۳,\ -۱)$، (ج) $(۰,\ ۰)$، $(۱,\ ۰)$

۵. (الف) $(۲,\ ۰,\ ۳)$ در $(۰,\ ۰,\ ۰)$، (ب) $(۲,\ ۲,\ ۳)$ در $(۰,\ ۲,\ \pi)$

۷. $GF=(g_۱(f_۱,\ f_۲),\ g_۲(f_۱,\ f_۲))$

۱۱. (الف) $F^{-1}=(v, ue^{-v})$، (ب) $F^{-1}=(u^{1/3}, v+u^{1/3})$،
(ج) $F^{-1}=((9-u-2v)/2,\ 5-u-v)$. F فقط درحالتهای (الف) و (ج) دیفئومرفیسم است، زیرا در (ب)، F^{-1} مشتقپذیر نیست (بهازای $u=0$).

فصل ۲

بند ۱

۱. (الف) -4، (ب) $(6,-2,2)$، (ج) $(1,2,-1)/\sqrt{6}$، $(-1,0,3)/\sqrt{10}$، $(-$
(د) $2\sqrt{11}$، (ه) $-2/\sqrt{15}$

۵. اگر $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$، آنگاه بهازای هر $\mathbf{u}$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$؛ از تمرین۴ استفاده کنید.

۷. $\mathbf{v}_2=\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$

بند ۲

۳. $\beta(s)=(\sqrt{1+s^2/2},\ s/\sqrt{2},\ \sinh^{-1}(s/\sqrt{2}))$

۵. اگر β_i پایه در t_i $(i=1,2)$ باشد، آنگاه s_0 برابرطول کمان α از t_1 تا t_2 با علامت مثبت یا منفی است.

۹. (ب) لزوم شرط واضح است، برای کفایت آن نشان دهید که تعویض پارامتر با تندی واحد α دارای شتاب صفر است.

۱۱. (ب) $L(\alpha)\geqslant\int_a^b \alpha'\cdot\mathbf{u}\,dt=\sum\int_a^b \frac{d\alpha_i}{dt}u_i\,dt=(\mathbf{q}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}=d(\mathbf{p},\mathbf{q})$

بند ۳

۱. $\kappa=1$، $\tau=0$، $B=\left(-\frac{3}{5},0,-\frac{4}{5}\right)$، مرکز $(0,1,0)$؛ شعاع ۱.

۷. (الف) $|h'|=\|\alpha'(h)h'\|=\|\alpha(h)'\|=1$، از ایندرو $h=\pm 1$
(ب) گیریم $\varepsilon=\pm1$، آنگاه از $\bar{\alpha}=\alpha(h)$ نتیجه میشود $T=\alpha'(h)h'=\varepsilon T(h)$؛ از اینرو $\bar{\kappa}\bar{N}=\kappa(h)N(h)$، و غیره.

۹. تصویر قائم روی صفحه N_0B_0 (صفحهٔ نرمال خم β در $\beta(0)$) عبارت است از $s\to\kappa_0(s^2/2)N_0+\kappa_0\tau_0(s^3/6)B_0$ (در $s=0$ بازگشت دارد).

۱۱. از $B=\bar{B}$، $\tau N=\bar{\tau}\bar{N}$، از اینرو یا (۱) $\bar{\tau}=\tau$ و $\bar{N}=N$، یا (۲) $\bar{\tau}=-\tau$ و $\bar{N}=-N$.

بند ۴

۱. گیریم $f=t^{۲}+۲$؛ آنگاه $\kappa=\tau=۲/f^{۲}$؛ $B=(t^{۲},-۲t,\ ۲)/f$

۳. (الف) $N(\circ)=(\circ\ ,-۱,\ \circ)$، $\tau(\circ)=\frac{۳}{۴}$

۹. (الف) $\vartheta=\pi/۴$، $\mathbf{u}=(۱,\circ,۱)/\sqrt{۲}$، $\gamma(t)=(t-(t^{۳}/۶),\ t^{۲},-t+(t^{۳}/۶))$

۱۵. (ج) گسترده نیز یك سیکلوئید است.

۱۷. $\alpha'(t)=(f(t)\sin t,\ f(t)\cos t,\ f(t)g(t))$

بند ۵

۱. (الف) $۲U_{۱}(\mathbf{p})-U_{۲}(\mathbf{p})$، (ب) $U_{۱}(\mathbf{p})+۲U_{۲}(\mathbf{p})+۴U_{۳}(\mathbf{p})$

۵. (الف) $۸U_{۱}(\mathbf{p})-۴U_{۳}(\mathbf{p})$

بند ۶

۱. نشان دهید که $\tilde{W}\cdot V=\circ$، و از ۸.۱.۲ استفاده کنید.

۳. به‌عنوان نمونه، $E_{۲}=-\sin z\,U_{۲}+\cos z\,U_{۳}$، و $E_{۳}=E_{۱}\times E_{۲}$.

بند ۷

۱. $\omega_{۱۲}=\circ$، $\omega_{۱۳}=\omega_{۲۳}=(df)/\sqrt{۲}$

۳. $\omega_{۱۲}=-df$، $\omega_{۱۳}=\cos f\ df$، $\omega_{۲۳}=\sin f\ df$

۵. بنابر (۳) از ۴.۵.۲، $\nabla_{V}(\sum f_{i}E_{i})=\sum V[f_{i}]\,E_{i}+\sum f_{i}\nabla_{V}E_{i}$

۷. در یك نقطهٔ دلخواه $\mathbf{p}$، $\alpha(t)=t\mathbf{p}$ خمی است با $\alpha'=\|\mathbf{p}\|F_{۱}$. نشان دهید که

$$\|\mathbf{p}\|F_{۱}[p]=\|\mathbf{p}\|$$

فصل ۳

بند ۱

۳. $(T_{a})^{-۱}=T_{-a}$ ، $C^{-۱}={}^{t}C$ ، از ایـــن رو $F^{-۱}=(T_{a}C)^{-۱}=C^{-۱}T_{-a}$
$=T_{-C^{-۱}(a)}C^{-۱}$.

۵. با استفاده از تمرین ۳، خواهیم داشت $F^{-۱}(\mathbf{p})=(۵\sqrt{۲},-۵,\ ۴\sqrt{۲})$

بند ۳

۱. اگر F و G دارای قسمتهای متعامد A و B باشند، آنگاه بنابر ۲.۱.۳، $\operatorname{sgn}(FG) = \det(AB) = \det A \cdot \det B$.

۵. C دورانی است بدزاویهٔ $\pi/2$ حول محور $\mathbf{a}$.

۷. برای $\mathbf{E}^1: F(s) = \varepsilon s + s_0$؛ برای $\mathbf{E}^2: F = TC$، که در آن

$$C = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varepsilon\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \varepsilon\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

بند ۴

۱. (ب) بنابر تعریف، $\tilde{\beta}(s)$ نقطهٔ متناظر متعارف $T(s)$ است، از این‌رو بنابر ۱.۲.۳، $\widetilde{C(\tilde{\beta})}$ با $F_*(T)$ بردار یکهٔ مماس $F(\beta)$ متناظر می‌گردد.

۵. به‌ازای بردار مماس $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$، $F_*(\nabla_v W) = \bar{W}(F(\mathbf{p}) + tC(\mathbf{v}))'(0) = \nabla_{F_*(v)} W$

بند ۵

۱. $\beta = T_p(C(\alpha))$، که در آن $C(\mathbf{u}_i) = \mathbf{e}_i$

۳. نتیجه‌ای است از ۷.۵.۳

۵. اگر τ متحد صفر نباشد، فرض می‌کنیم $\tau(0) \neq 0$ و از اثبات ۳.۵ استفاده شود.

۷. فرض کنیم $F = TC$، که در آن T انتقال به‌وسیلهٔ $(0, 0, bs_0/c)$ است و

$$C = \begin{pmatrix} \cos(s_0/c) & -\varepsilon\sin(s_0/c) & 0 \\ \sin(s_0/c) & \varepsilon\cos(s_0/c) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

که در آن $\varepsilon = \pm 1$. آنگاه $F(\beta) = \beta(\varepsilon s + s_0)$

۹. $\alpha(s) = (\int\cos\varphi(s)ds, \int\sin\varphi(s)ds)$، که در آن $\varphi(s) = \int\kappa(s)ds$

۱۱. از تمرین ۹ استفاده کنید.

فصل ۴

بند ۱

۱. (الف) رأس، ۰، (ب) همهٔ نقاطی که روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ واقع‌اند، (ج) همهٔ

نقاطی که روی محور z واقع‌اند.

۵. (ب) $c \neq -1$

۹. از تمرین ۷ استفاده شود.

۱۱. $\mathbf{q}$ در $F(M)$ واقع است اگر، و فقط اگر، $F^{-1}(\mathbf{q})$ در M باشد، یعنی $g(F^{-1}(\mathbf{q}))=c$. با توجه به‌راهنمایی از قضیهٔ ۴.۱.۴ استفاده کنید.

بند ۲

۱. (ج) یکی از امکانات $\mathbf{x}(u, v)=(u, v, u^2+v^2)$؛ نمایش پارامتری مبتنی بر ۵.۲.۴ یك نقطه از رویه را حذف می‌کند.

۵. $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = v\delta' \times \delta$

۷. (ب) خطوط مستقیم (مولدها) و مارپیچها، (ج) $M\colon x\sin(z/b)=y\cos(z/b)$

۹. $\mathbf{x}(u, v)=(\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)$

۱۳. (الف) اگر g' هیچ‌گاه ۰ نشود، با تعویض پارامترخم نیمرخ، $u \to (u, f(u), 0)$ به‌دست آورده و از ۵.۲.۴ استفاده کنید.

بند ۳

۱. (الف) $r^2\cos^2 v$، (ب) $r^2(1-2\cos^2 v\cos u\sin u)$

۳. (الف) $\bar{u}$ و $\bar{v}$ توابع مختصاتی اقلیدسی $\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ هستند.
(ب) $\mathbf{y}=\mathbf{x}(\bar{u}, \bar{v})$ را برحسب مختصات اقلیدسی بیان کنید، و مشتق بگیرید.

۵. (الف) معادلهٔ M به‌صورت $g=z-f(x,y)=0$ است، و $\nabla g=(-f_x, -f_y, 1)$، و $\mathbf{v}$ بر M در $\mathbf{p}$ مماس است اگر، و فقط اگر، $\mathbf{v}\cdot\nabla g(\mathbf{p})=0$.

۷. $\nabla g=(-y, -x, 1)$ یك میدان برداری قائم است؛ V یك میدان برداری مماس است اگر، و فقط اگر، $V\cdot\nabla g=0$، به‌عنوان مثال، $V=(x, 0, z)$.

۹. (الف) $\bar{T}_p(M)$ شامل همهٔ نقاط $\mathbf{r}$ است به‌طوری که $(\mathbf{r}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{z}=0$؛ بنابراین $\mathbf{v}_p$ در $T_p(M)$ است (یعنی، $\mathbf{v}\cdot\mathbf{z}=0$) اگر، و فقط اگر، $\mathbf{p}+\mathbf{v}$ در $\bar{T}_p(M)$ باشد.

۱۱. (الف) 2π

بند ۴

۳. $$d(f\phi)(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)=\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial u}\phi(\mathbf{x}_v)-\frac{\partial(f(\mathbf{x}))}{\partial v}\phi(\mathbf{x}_u)+$$

$$f(\mathbf{x})\left[\frac{\partial}{\partial u}\phi(\mathbf{x}_v)-\frac{\partial}{\partial v}\phi(\mathbf{x}_u)\right]$$
$$=(df\wedge\phi+fd\phi)(\mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v)$$

۵. اگر α خمی با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه

$$\mathbf{v}_p[g(f)]=(gf\alpha)'(\circ)=g'(f\alpha)(\circ)(f\alpha)'(\circ)=g'(f(\mathbf{p}))\mathbf{v}_p[f]$$

۷. روی فصل مشترک $\mathcal{U}_i$ و $\mathcal{U}_j$، $df_i-df_j=d(f_i-f_j)=\circ$

۹. (ب) $d\tilde{u}(\mathbf{x}_u)=\mathbf{x}_u[\tilde{u}]=\dfrac{\partial(\tilde{u}(\mathbf{x}))}{\partial u}=\dfrac{\partial u}{\partial u}=۱$

بند ۵

۱. اگر $\mathbf{x}:D\to M$ یك قطعه مختصاتی باشد، آنگاه $F(\mathbf{x}):D\to N$ (بنا بر ۲.۳) یك نگاشت مشتقپذیر است. بنابراین $\mathbf{y}^{-۱}F\mathbf{x}$ به‌ازای هر قطعه مختصاتی $\mathbf{y}$ در N مشتقپذیر است.

۳. اگر $\bar{\mathbf{x}}$ و $\bar{\mathbf{y}}$ به ترتیب قطعه‌های مختصاتی در M و N باشند، آنگاه $\bar{\mathbf{y}}^{-۱}F\bar{\mathbf{x}}=(\bar{\mathbf{y}}^{-۱}\mathbf{y})(\mathbf{x}^{-۱}\bar{\mathbf{x}})$ دیفرانسیلپذیر است، زیرا ترکیب توابع دیفرانسیلپذیر است.

۷. (ب) $\mathbf{x}^*(\nu)=r^۳\sin^۲v\cos v\,du dv$.

۱۱. تنها (الف) دیفئومرفیسم نیست.

۱۳. (ب) $F_*(a\mathbf{x}_u+b\mathbf{x}_v)=a\mathbf{y}_u+b\mathbf{y}_v$ مستلزم خطی بودن است.

بند ۶

۷. (الف) $۲\pi m$، (ب) $۲\pi n$

۱۳. (ب) نشان دهید که به ازای هر $\mathbf{x}$ مناسب، $\int_{\mathbf{x}} d\phi=\int_\alpha \phi$.

۱۵. بااستفاده ازخاصیت همبندی‌ساده فرمولی راکه در راهنمایی آمده است اثبات کنید. شکل ۴۶.۴ را ببینید.

بند ۷

۱. (الف) همبند، فشرده نیست، (ج) همبند وفشرده، (ه) همبند، فشرده نیست.

۳. اگر ν روی N صفر نشود، نشان دهید که $F^*\nu$ روی M صفر نمی‌شود.

۰۵ (الف) اگر Z قائمی باشد که صفر نشود، آنگاه قرار دهید $\pm U = \pm Z/\|Z\|$.
اگر V یك قائم یکهٔ دلخواه باشد، بنویسید $V = (V \cdot U)U$ و از تمرین ۴ (ب) استفاده کنید.
(ب) نگارهٔ $\mathbf{x}(D)$ یك قطعه مختصاتی است، با فرض همبندی D.

۰۹ (ج) از تمرین ۷ استفاده کنید.

بند ۸

۰۱ وجه دیگری از این برهان در ۷.۴ برای نوار موبیوس آمده است.

۰۹ $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})^{-1}(\bar{\mathbf{x}}\times\bar{\mathbf{y}}) = (\mathbf{x}^{-1}\bar{\mathbf{x}})\times(\mathbf{y}^{-1}\bar{\mathbf{y}})$، تابعی دیفرانسیلپذیر است.

فصل ۵

بند ۱

۰۱ از روش ۱ متن استفاده کنید.

۰۳ (الف) ۲، (ج) ۱

بند ۲

۰۱ (ب) اگر $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = (\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{u}_2)/\sqrt{2}$، آنگاه $S(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ و $S(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2$

بند ۳

۰۵ (ب) یك بیضی دریك طرف، و درطرف دیگر نقطه‌ای نیست؛ دو شاخه یك هذلولی (مجانبهای آن همان دوخط قسمت (الف) است)؛ دوخط موازی در یك طرف، و در طرف دیگرنقطه‌ای نیست.

۰۷ (الف) اگر α خمی در M با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه در $F(\mathbf{p})$،
$F_*(\mathbf{v}) = F(\alpha)'(0) = (\alpha + \varepsilon U_\alpha)'(0) = \mathbf{v} - \varepsilon S(\mathbf{v})$

بند ۴

۰۵ $K = -36r^2/(1+9r^4)^2$؛ مینیمال نیست

۰۷ تندی را از $\alpha' = a_1'\mathbf{x}_u + a_2'\mathbf{x}_v$

۰۱۳ $\mathbf{p} = \mathbf{x}(u, v)$ نافی است اگروفقط اگر،در (u, v)، $S(\mathbf{x}_u) = k\mathbf{x}_u$ و $S(\mathbf{x}_v) = k\mathbf{x}_v$.
در $\mathbf{x}_u$ و $\mathbf{x}_v$ ضرب نقطه‌ای کنید.

۱۵. (الف) هیچ، زیرا $K < \circ$، (ب) مبدأ (نقطه‌ای مسطح)

(ج) $\left(\circ, \pm\frac{b}{۲}\sqrt{a^۲-b^۲}, \frac{a^۲-b^۲}{۴}\right)$ به‌ازای $a \geqslant b$

بند ۵

۳. نصف‌النهار α درصفحهٔ عمود بر M درطول α واقع است، بنابراین α'' بر این صفحه مماس است، و (با نمایش پارامتری با تندی ثابت) بر α' عمود است؛ بدینسان α'' عمود بر M می‌باشد.

۷. $S(T) = -U'$؛ازاین‌رو بنا بر بسط متعامد یکانی، $U' = -S(T).T\,T - S(T).V\,V$. ادامه مانند برهان فرمول فرنه است.

۱۵. روی مولد مار بر $\sigma(u)$، ازفرمول K درتمرین ۱۴ نتیجه می‌شود که یا K متحد با صفراست، یا $K < \circ$ دارای مقدارمینیمم $-۱/p(u)^۲$ در $\sigma(u)$ می‌باشد و هنگامی که $v \to \pm\infty$، K به‌طور متقارن به‌صفرمی‌گراید.

۱۷. (الف) به‌ازای $(u, \circ, \circ)+v(\circ, ۱, u)$: محور x، با $p(u)=۱+u^۲$. (ب) از تمرین ۱۵ استفاده کنید. به‌ازای u ثابت، $K=-(۱+u^۲+v^۲)^{-۲}$ متناظر با $v=\circ$ مینیمم است.

۱۹. (ج) $\mathbf{x}=\alpha+v\delta$ استوانه‌ای نیست، ومی‌توان فرض کردکه α یك خم تنجش است (با تندی واحد). اما $\alpha' . \delta\times\delta'=\circ$ (زیرا $K=\circ$) و $\alpha' . \delta'=\circ$ (تنجش)، بنابراین $T=\alpha'$ و δ همخط‌اند.

بند ۶

۱. $K=(۱-x^۲)(۱+x^۲\exp(-x^۲))^{-۲}$

۳. ازنتایج ۲.۵ استفاده کنید. توجه شودکه نصف‌النهارها مقاطع قائم هستند.

۵. M دارای نمایش پارامتری $\mathbf{x}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, f(u))$ است.

۷. با نمایش پارامتری معمول، استدلال مشابه با ۲.۶.۵ به‌حالتهای نهایی منجر می‌شود: یا g' همواره صفر است، یا g' هیچ‌گاه صفر نیست. درحالت اول، M بخشی ازصفحه (حالت خاصی ازمخروط) است.

۹. (ج) اگر $y=f(x)$ دارای نمایش پارامتری با تندی واحد (g, h) باشد،که در آن $h(u)=ce^{-u/c}$، نشان دهید که f (نه h!) درمعادلهٔ دیفرانسیل ۶.۶.۶ صدق می‌کند.

فصل ۶

بند ۱

۱. (الف) $\alpha''=\omega_{12}(T)E_2+\omega_{13}(T)E_3$، بنا بر این α'' عمود بر M است اگر، و فقط اگر، $\omega_{12}(T)=0$.

۵. اگر میدان سه‌وجهی استوانه‌ای را به M تخصیص دهیم و اندیسهای ۱ و ۳ معکوس شوند، میدان سه وجهی (۱) از ۳.۱.۶ به‌دست می‌آید. با محاسبات موجود در ۷.۲،

$$\omega_{12}=\omega_{13}=0, \quad \omega_{23}=-d\vartheta$$

بند ۲

۳. (الف) $\psi=\psi(E_1)\theta_1+\psi(E_2)\theta_2=-h_2\theta_1+h_1\theta_2$

(ب) $\zeta=h_1\omega_{23}-h_2\omega_{13}$

بند ۳

۱. اگر $K=H=0$، آنگاه $k_1k_2=k_1+k_2=0$. بدینسان $k_1=k_2=0$، و $S=0$.

۳. فرض کنیم $k_1\neq k_2$، و با استفاده از لم هیلبرت (۶.۳) به‌یك تناقض می‌رسیم.

۵. درحالت $k_1\neq k_2$، با استفاده از ۷.۲.۶ نشان دهید که، مثلاً $k_1=0$. بنا بر تمرین ۲، k_1 خمهای اصلی خطوط مستقیم هستند. نشان دهید که k_2 خمهای اصلی دایره می‌باشند، و (k_1) خطوط مستقیم موازی در $\mathbf{E}^3$ هستند.

بند ۴

۱. $(b) \Longrightarrow (d)$: اگر $\mathbf{u}$ یك بردار مماس دلخواه در $\mathbf{p}$ باشد، آنگاه $\mathbf{u}=a\mathbf{v}+b\mathbf{w}$، بنا بر این

$$\|F_*\mathbf{u}\|^2=a^2\|F_*\mathbf{v}\|^2+2abF_*\mathbf{v}\cdot F_*\mathbf{w}+b^2\|F_*\mathbf{w}\|^2=$$
$$a^2\|\mathbf{v}\|^2+2ab\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+b^2\|\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2$$

۳. اگر α قطعه خمی از $(-1, 0, 0)$ به $(1, 0, 0)$ به‌طول ۲ باشد، آنگاه بنا بر تمرین مذکور، α نمایش پارامتری یك قطعه خط مستقیم است و این غیرممکن است، چون α باید در M باشد.

۵. (الف) تعریف می‌کنیم $F(\alpha(u)+vT_\alpha(u))=\beta(u)+vT_\beta(u)$

(ب) β را در $\mathbf{E}^2$ با همان تابع خمیدگی انتخاب می‌کنیم.

۷. (الف) ملاك (الف) به صورت $F_*(\mathbf{v})\cdot F_*(\mathbf{w})=\lambda^2(\mathbf{p})\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ درمی‌آید؛ ملاك (ج)

به‌صورت $F_*(\mathbf{e}_i)\cdot F_*(\mathbf{e}_j)=\lambda^2(\mathbf{p})\delta_{ij}$ درمی آید.

۱۱. برای انتخاب پارامترمناسب بنویسید $F(\mathbf{x}(u,v))=\bar{\mathbf{x}}(a(u),b(v))$.

۱۳. برای $\mathbf{y}$، نشان دهید که شرایط $E=G$ و $F=0$ هم‌ارز با $g'=\cos g$ هستند، که دارای جواب $g(v)=2\tan^{-1}(e^v)-(\pi/2)$ است به‌طوری که $g(0)=0$. از تمرین ۷ استفاده کنید.

۱۵. $F(\mathbf{x}(u,v))=(f(u)\cos v, f(u)\sin v)$، که در آن $\mathbf{x}$ یك نمایش پارامتری متعارف است و $f(u)=\exp(\int_1^u (dt/h(t)))$.

بند ۵

۱. اگر $\alpha'=E_1$ در طول α، آنگاه $F(\alpha)'=F_*(E_1)=\bar{E}_1$ در طول $F(\alpha)$. از ۳.۵.۶ استفاده کنید.

۳. ایزومتری موضعی از رویهٔ زینی $M(-1\leqslant K<0)$ روی یك کاتنوئید با $-1\leqslant \bar{K}<0$ وجود ندارد، زیرا K یك نقطهٔ مینیمم منفرد (در ۰) دارد اما $\bar{K}$ همهٔ مقادیر خود را روی تمام دوایر اختیارمی‌کند. (مثالهای بسیاری وجود دارد.)

۵. (ب) از ۵.۴.۶ نتیجه می‌شود، زیرا برای $\mathbf{x}_t$ داریم $E_t=\cosh^2 u=G_t$، و $F_t=0$ (مستقل از t).

(د) برای $M_t: U_t=(s,-c,S)/C$، مختصات اقلیدسی U_t از t مستقل‌اند.

بند ۶

۱. (ب) $\theta_1=\sqrt{1+u^2}\,du$، $\theta_2=u\,dv$، $\omega_{12}=dv/\sqrt{1+u^2}$، $K=1/(1+u^2)^2$.

۳. $\omega_{12}=-v_u du$

بند ۷

۳. (الف) $A=(2\pi/3)\{(1+c^2)^{3/2}-1\}$، (ب) ∞

۵. (الف) از نمایش پارامتری متعارف استفاده کنید؛ آنگاه $\mathbf{x}^*(K\,dM)=(-h''/h)(h\,du\,dv)=-h''du\,dv$. یادآوری می‌کنیم که $h'=\sin\varphi$.

(ج) برای رویهٔ شیپوری، $\lim_{a\to 0}\varphi_a=-1$، $\lim_{b\to\infty}\varphi_b=0$.

۷. از تمرین ۵ استفاده کنید. درلبهٔ همهٔ این‌رویه‌ها $h'=\sin\varphi\to\pm 1$. برای $K=1/c^2$ (۵.۶.۵): درحالت (۲)، $TC=4\pi a/c$، $A=4\pi ac$؛ در حالت (۳)،

$TC = ۴\pi$، $A = ۴\pi c^۲$. برای $K = -۱/c^۲$ (تمرین ۹ از ۶.۵): M_a دارای $TC = ۲\pi(a-c)/c$، M_b دارای $TC = -۴\pi$.

۰۹. (الف) از تمرین ۱۴ در ۵.۵ استفاده کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^۲}{(p^۲+v^۲)^{۳/۲}} dv = ۲$$

۰۱۱. تعریف می‌کنیم $\mathbf{x}(u, v) = F((۱-u)\cos v, (۱-u)\sin v)$ روی $۰ \leqslant v \leqslant ۲\pi$، $R: ۰ \leqslant u \leqslant ۱$.

۰۱۳. قائم برون سوی، $H = -۱/r$، و $h = r$.

۰۱۵. درصورت لزوم V و W را برطولشان تقسیم می‌کنیم، می‌توان فرض کرد که میدانهای برداری یکه‌اند. بدینسان V، $U \times V$ یك میدان سه‌وجهی مماسی روی α است. از بسط متعامد نتیجه می‌شود که اگر $f = W \cdot V$ و $g = W \cdot U \times V$، آنگاه $f^۲ + g^۲ = ۱$.

۰۱۷. (الف) از $\|F_* \mathbf{v} \times F_* \mathbf{w}\| = |J|\, \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ استفاده کنید.

۰۱۹. (الف) F هرتقسیم M راکه دارای جهت مثبت باشد به‌یك تقسیم رویهٔ N با جهت مثبت بدل می‌کند.

(ب) اگر $F: M \to \bar{M}$ یك ایزومتری باشد، M و $\bar{M}$ را طوری جهتدار کنید که F جهت را حفظ کند (توضیح زیر تمرین ۴ را ببینید). آنگاه

$$\iint_{\bar{M}} \bar{K}\, d\bar{M} = \iint_M F^*(\bar{K}\, d\bar{M}) = \iint_M \bar{K}(F) F^*(d\bar{M}) = \iint_M K\, dM$$

بند ۸

۰۱. اگر N با کرهٔ Σ به‌شعاع r ایزومتریك باشد، نشان دهید که N فشرده است و دارای $K = ۱/r^۲$. بدینسان بنا برقضیهٔ لیبمن، N نیز یك کره به‌شعاع r است، از این‌رو با یك انتقال ثابت می‌شود که N با Σ قابل انطباق است.

۰۳. جز در مورد ژئودزیکها، نتیجه فوراً با استفاده از عوامل شکلی به دست می‌آید. تنها خمیدگیهای گاوسی و ژئودزیکها باید به وسیلهٔ ایزومتریهای دلخواه حفظ شود (تمرین ۱، ۵.۶، و قضیهٔ فوق‌العاده).

۰۵. (ب) جهتی که با U— مشخص می‌شود.

۰۹. از قضیهٔ فوق‌العاده نتیجه بگیرید که تقارن اقلیدسی $\mathbf{F}$ از M باید مبدأ را حفظ کند، بنابراین $\mathbf{F}$ متعامد است. اثر آن را روی سه وجهی طبیعی بررسی کنید.

فصل ۷

بند ۱

۰۱ (ب) $\alpha' \circ \alpha' = \alpha' \cdot \alpha' / g^{2}(\alpha)$ مربع تندی است.

۰۳ (ب) فرض کنیم E_1 و E_2 میدانهای برداری روی $\mathbf{x}(D)$ که به‌وسیلهٔ $\mathbf{x}_u/\sqrt{E}$ و $V/\|V\|$ تعیین می‌شوند باشد، که در آن $V = \mathbf{x}_v - (F/E)\mathbf{x}_u$ (روش گرام-اشمیت).

۰۵ (الف) نشان دهید که تعریف $J(E_1) = E_2$ ، $J(E_2) = -E_1$ مستقل از جهت مثبت انتخابی میدان سه‌وجهی است. (هردوتای آنها دارای یك جهت‌اند به‌مفهومی که پیش از ۴.۱.۷ تعریف شد.)

(ب) به‌ازای $J^{2} = -I$ نشان دهید که $J(J(E_i)) = -E_i$.

۰۷ (الف) $F_*U_1 = f_u U_1 + g_u U_2$ ، $F_*U_2 = f_v U_1 + g_v U_2$ (از تمرین ۶ استفاده کنید).

(ب) مشتق تابع مختلط $F = f + ig$ برابر است با $dF/dz = f_u + ig_u$. بدینسان اندازهٔ $|dF/dz|$ برابراست با $(f_u^{2} + g_u^{2})^{1/2}$ که با استفاده ازمعادلات کوشی ـ ریمان به‌صورتهای مختلفی نوشته می‌شود.

بند ۲

۰۱ $\theta_1 = du/v$ ، $\theta_2 = dv/v$

۰۳ $A = \pi r^{2} / \left(1 - \frac{r^{2}}{4}\right)$ ، (محاسبهٔ E ، F ، G مانند مثال ۱۱.۴ است)؛ $A(H) = \infty$

۰۵ $E = G = 1$ و $F = 0$ ، بنابراین $A = 4\pi^{2}$. می‌توان بادرنظر گرفتن ساختار هندسی دیگر E و G را برابر هرعدد مثبتی گرفت.

۰۷ نشان دهید که نمایش پارامتری $\mathbf{x}_0$ درتمرین ۵ از ۵.۶ یك ایزومتری است.

بند ۳

۰۱ توجه شود که تخصیص $E_i = tU_i$ به α برابر است با $r \sin t U_i$ ، بدینسان $\alpha' = -E_1 + \cot(t) E_2$. چون مقدار $\omega_{12} = du/v$ روی α' برابر ۱ ـ است، از فرمول مشتق کوواریان نتیجه می‌شود که $\alpha'' = \cot(t) E_1 - \cot^{2}(t) E_2$.

۰۳ توجه شود که‌در برهان‌مذکور داریم $E_1 E_3 = S(V) \cdot E_1 E_3 = -\nabla_V E_3 \cdot E_1 E_3$ $\omega_{13}(V) E_3$.

۰۵ (الف) از اثبات ۶.۳.۷ نتیجه می‌شود که زاویهٔ هولونومی α برابر است با

$$-\int_a^b \omega_{12}(\alpha')\,dt = -\int_\alpha \omega_{12}$$

از قضیهٔ استوکس استفاده کنید، یادآوری می‌کنیم که $d\omega_{12} = -K\,dM$ (نخستین معادلهٔ ساختاری).

۷. $Y' = f'E_1 + f\omega_{21}(\alpha')E_2$ ، بنابراین
$F_*Y = \bar{Y} = f\bar{E}_1$ ، $F_*(Y') = f'\bar{E}_1 + f\omega_{21}(\alpha')\bar{E}_2$ ، بنابراین
$\bar{Y}' = f'\bar{E}_1 + f\bar{\omega}_{21}(F_*\alpha')\bar{E}_1$. از ۳.۵.۶ استفاده کنید.

۱۱. W روی هرناحیهٔ جهتپذیر دارای طول ثابت c است، نشان دهید که میدان سه‌وجهی $E_1 = W/c$ ، $E_2 = J(E_1)$ دارای فرم همبندی صفر، و درنتیجه دارای خمیدگی صفر است.

بند ۴

۱. چون $\alpha'' = 0$ است، $\alpha(h)'' = \alpha'(h)h''$.

۳. از تمرین ۶ بند ۳ استفاده کنید.

۵. همهٔ دوایر اقلیدسی ازقطب شمال می‌گذرند، چون درتصویر منظری باخطوط مستقیم صفحه متناظرند.

۹. بااستفاده ازمعادلات α' و α'' که درمتن آمده است، داریم $J(\alpha') = J(vT) = vN$، از این‌رو $J(\alpha') = \kappa_g v^3$. α''.

۱۱. (الف) به‌ازای $u_0 \leqslant u \leqslant u_1 - \epsilon$ ، $a_1' = \dfrac{\sqrt{G-c^2}}{\sqrt{EG}} \geqslant A_\epsilon > 0$.
(ب) اگر متقاطع باشند، آنگاه α' و β' همخط‌اند، از این‌رو بنابر ۲.۴.۷ ، α و β مساوی‌اند (تنها اختلاف درنمایش پارامتری است) ـ واین غیرممکن است.

۱۳. (الف) بـا نمایش پارامتری معمولی رویـهٔ دورانی، $G = h^2$ (h مسافت از محـور دوران)، و خمهای پارامتر u نصف‌النهارند، بنابراین $c = h\sin\varphi$.
(ب) از تمرینات ۱۱ و ۱۲ نتیجه می‌شود، زیرا چنین مداری یك خم مرزی است.

۱۵. آشکار است که نصف‌النهارات به لبه نزدیك مـی‌شوند (دریك جهت). بااستفاده از تمرین ۱۳ نشان دهید کـه هر ژئودزیك دیگر یك خم مرزی را قطع مـی‌کند و از هردوجهت به‌لبه نزدیك می‌شود.

۱۷. $|\sin\varphi_0| < 1/\cosh u_0$.

۱۹. (الف) از ۴.۲.۶ استفاده کنید، (ب) $\kappa_1 = 0$ ، $\kappa_2 = h'/h$.

بند ۵

۱. $\rho(0\,,\,\mathbf{p}) = \tanh^{-1}(\|\mathbf{p}\|/2)$ ، نرم اقلیدسی.

۳. ژئودزیکها مارپیچ‌اند، و $\mathbf{y}(u, v) = \gamma_{ue_1+re_2}(1) = (r\cos u/r, r\sin u/r, v)$.
بزرگترین‌همسایگی نرمال $\eta_{\pi r}$ است؛ $\mathbf{y}$ به‌ازای‌هر ϵ منظم است، اما شرط یك به یك بودن به‌ازای $\epsilon > \pi r$ برقرار نمی‌شود.

۵. (الف) اگر $\mathbf{q}$ از η_ϵ باشد، آنگاه بنا بر ۵.۵، $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \epsilon$. اگر $\mathbf{q}$ از η_ϵ نباشد، خمی از $\mathbf{p}$ به $\mathbf{q}$، C_δ را به‌ازای هر $\epsilon > \delta$ قطع می‌کند.
(ب) اگر $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$، ازاصل موضوع هاسدورف نتیجه می‌شودکه یك همسایگی نرمال از $\mathbf{p}$ وجود دارد که شامل $\mathbf{q}$ نیست، ازاین‌رو $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0$.

۷. L طول α از ۰ تا $r+\epsilon$ با‌طول خم شکسته: β از ۰ تا r، آنگاه α از r تا $r+\epsilon$ برابر است. از این‌رو $L > \rho(\alpha(0), \alpha(r+\epsilon))$ بنابر توضیحات بالای لم ۸.۵.

۹. $D: u^2+v^2 < 1$ با ساختار هندسهٔ اقلیدسی.

۱۱. (الف) تنها یك قطعه ژئودزیك (نصف‌النهار) از $\mathbf{p}$ به هرنقطهٔ دیگر وجود دارد.

بند ۶

۵. (الف) $\mathbf{x}_u(0, v) = X(v)$، و چـون $\mathbf{x}(0, v) = \gamma_{X(u)}(0) = \beta(v)$، داریـم $\mathbf{x}_v(0, v) = \beta'(v)$. بدینسان $EG - F^2$ بـه ازای $u = 0$، مخالف صفـر است، و همچنین بنا برپیوستگی به‌ازای $|u|$ کوچك.
(ب) (۳) β یك خم پایه، $X = \delta$.

۷. (الف) خمهای پارامتر v نصف‌النهارات طولی‌اند.
(ب) چون $K = 0$، معادلهٔ ژاکوبی به‌صورت $(\sqrt{G})_{uu} = 0$ درمی‌آید، بنابرایـن $\sqrt{G}$ برحسب u خطی است، و درنتیجه $G(u, v) = 1 - \kappa_g(v)u$.

بند ۷

۱. اگر N به‌طور ژئودزیك کامل باشد، نقطهٔ $\mathbf{p}$ از M را به‌طورثابت انتخاب می‌کنیم، آنگاه یك قطعه ژئودزیك γ_w از $F(\mathbf{p})$ به هرنقطهٔ دلخواه $\mathbf{q}$ از N وجود دارد. اما به‌ازای $\mathbf{v}$ به‌طوری که $F_*(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$، داریـم $F(\gamma_v) = \gamma_w$، بنابراین $\mathbf{q}$ متعلق بـه $F(M)$ است.

۳. اگـر $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ از M، آنگاه هـرقطعه ژئودزیك σ از $\mathbf{p}$ تا $\mathbf{q}$ دارای تندی مخالف صفراست. ازاین‌رو $F(\sigma)$ یك ژئودزیك غیرثابت از $F(\mathbf{p})$ تا $F(\mathbf{q})$ است، ونتیجه می‌شود که $F(\mathbf{p}) \neq F(\mathbf{q})$، حتی اگر درخاصیت یکتایی مربوط به N، «دونقطه» را به‌عنوان «دونقطهٔ متمایز» تعبیر کنیم.

۵. حالتی از ۳.۷.۷

۰۷ برای اثبات آنکه یك رویهٔ M دارای سه‌وجهی همگن نیست کافی است (بنا بر دلیلی که درمتن برای استوانه داده شد) نشان دهیم که M دارای ژئودزیکهایی است که برخی یك به یك‌اند و برخی نیستند. توجه شود که $\mathbf{x}$ در ۵.۲.۷ یك ایزومتری موضعی است.

۰۹ اگر L طول کمان بیضی باشد، نشان دهید که $F(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{x}(u+(L/۴), v)$ یك ایزومتری M است که مسافت اقلیدسی را حفظ نمی‌کند.

۰۱۱ بنا بر تمرین ۸ (ب)، F تخصیص یك تبدیل خطی (متعامد) به Σ است، بنا براین $F(-\mathbf{p}) = -F(\mathbf{p})$. بدینسان می‌توان قرار داد $F\{\mathbf{p}, -\mathbf{p}\} = \{F(\mathbf{p}), F(-\mathbf{p})\}$، و همگنی سه‌وجهی $\bar{\Sigma}$ را ازهمین خاصیت Σ نتیجه گرفت.

۰۱۳ این تابع یك همسانی است، بنا براین کافی است یك به یك بودن آن‌را اثبات کنیم. اما دراثبات ۳.۸.۶، اگر M درصفحه واقع نباشد (پس $S \neq ۰$)، آنگاه $\mathbf{F}$ یکتاست.

بند ۸

۰۱ در (الف) و (ج) رویهٔ باکره دیفئومرف است، بنابراین $TC = ۴\pi$. در (ب) چهار دسته وجود دارد، بنابراین $TC = -۱۲\pi$.

۰۳ (الف) به‌ازای $h = ۱$: اگر K هیچ‌گاه صفر نباشد، آنگاه بنا بر یکی‌از تمرینات قبل یا $K > ۰$ یا $K < ۰$؛ که هر دو غیر ممکن است، زیرا بنا بر ۹.۸.۷، $\iint_M K\, dM = ۰$.
(ب) بنا بر ۵.۳.۶، K درناحیه‌ای مثبت است. اما M دارای حداقل یك دسته است، بنا براین

$$\iint_M K\, dM \leqslant ۰$$

ازاین‌رو K درناحیه‌ای منفی است.

۰۵
$$\iint_{\mathbf{x}} K\, dM = -\int_{\partial \mathbf{x}} k_g\, ds = \pi/۴\sqrt{۲}$$

۰۷ (الف) اگر $\mathbf{x}_۱$ ، ... ، $\mathbf{x}_k$ یك تجزیهٔ جهتدار مثبت باشد، آنگاه بنا بر قضیهٔ استوکس (۵.۶.۴) داریم $\int_{\mathscr{P}} d\phi = \Sigma \iint_{\mathbf{x}_i} d\phi = \Sigma \int_{\partial \mathbf{x}_i} \phi$. اما به‌ازای یالهایی که در $\partial \mathscr{P}$ نیستند، از ۶.۶.۴ نتیجه می‌شود که دو به دو حذف می‌گردند.
(ج) اگر $\mathbf{x}_i$ و $\mathbf{y}_j$ دوتجزیهٔ جهتدار مثبت باشند، آنگاه بنا بر توضیح ذیل ۵.۷.۶، داریم

$$\Sigma \int_{\partial \mathbf{y}_j} \phi = \Sigma \iint_{\partial \mathbf{y}_j} d\phi = \Sigma \iint_{\partial \mathbf{x}_i} d\phi = \Sigma \int_{\partial \mathbf{x}_i} \phi$$

۹. (ب) $\Leftarrow$ (الف): هرساختار هندسی روی M (که وجـود داشته باشد) را می‌تـوان طوری تغییر داد که میدان برداری E_1 که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود دارای طول واحد باشد، آنگاه E_1 ، $J(E_1)$ یك میدان سه‌وجهی است. فـرم همبندی آن روی تمام رویه معین است، ازاین‌رو $2\pi\chi(M)=\iint_M K\,dM=-\iint_M d\omega_{12}=0$

۱۱. نتیجه‌ای است از تمرین ۸.

۱۳. بنا بر یکتایی ژئودزیکها، زوایای داخلی چندضلعی ژئودزیکی نمی‌تواند $\pm\pi$ باشد (یعنی، نقطهٔ بازگشت وجـود ندارد) . بنابراین $-\pi<\epsilon<\pi$. از تمـرین ۱۱ استفاده کنید.

(ب) به‌ازای هر $n\neq 1$ (به‌ازای $n=0$ ، یك دایرهٔ عظیمه).

واژه‌نامه

اتحاد لاگرانژ	Lagrange identity
اصل موضوع توازی	parallel postulate
اصل نقطه‌ای	pointwise principle
امتداد اصلی	principal direction
امتدادهای مجانبی	asymptotic directions
انتقال موازی	parallel translation
انتگرال ناسره	improper integral
انطباق خمها	congruence of curves
ایزومتری موضعی	local isometry
ایزومرفیسم متعارف	canonical isomorphism
بردار یکه	unite vector
بردارهای اصلی	principal vectors
بردارهای متعامد	orthogonal vectors
برگشت	pullback
بسط متعامد	orthogonal expansion
بیضیگون	ellipsoid
بی‌نرمال	binormal
پوشش فرشی	paving
پیچش ← تاب	
پیش ژئودزیک	pre-geodesic

تاب	tortsion
مت: پیچش	
تابع زاویه‌ای	angle function
تبدیل متعامد	orthogonal transformation
تجزیهٔ مستطیلی	rectangular decomposition
تصویرمنظری	stereographic projection
تعویض پارامتر	reparametrization
تغییرمکان ← حرکت صلب	
تقارن محوری	reflection
تقریب درجهٔ دوم	quadratic approximation
تقریب فرنه	Frenet opproximation
تندی	speed
توابع مختصاتی اقلیدسی	Euclidean coordinate functions
توابع مختصاتی طبیعی	natural coordinate functions
جادهی ایزومتریك	isometric imbedding
جهتدهی	orientation
چنبرهٔ هموار	flat torus
حاصلضرب اسکالرسه‌گانه	triple scalar product
ـ داخلی	inner product
ـ داخلی القایی	induced inner product
ـ دکارتی	cartesian product
ـ گوه‌ای	wedge product
ـ نقطه‌ای	dot product
حرکت صلب	rigid motion
مت: تغییرمکان	
خم اصلی	principal curve
ـ با تندی واحد	unit speed curve
ـ کروی	spherical curve
ـ مرزی	edge curve
ـ مقطع عرضی	cross-sectional curve
ـ هادی	director curve

خمش	bending
خمهای مجانبی	asymptotic curves
خمهای موازی	parallel curves
خمیدگی ژئودزیك	Geodesic curvature
ـ قائم	normal curvature
ـ کلی	total curvature
ـ گاوسی	Gaussian curvature
ـ متوسط	mean curvature
خمیدگیهای اصلی	principal curvatures
خمینه	manifold
دایرهٔ بوسان	osculating circle
دستگاه فرنه	Frenet apparatus
دسته	handle
دسته مماس	tangent bundle
دلتای کرونکر	Kronecker delta
دوران	rotation
رویهٔ به‌طور ژئودزیکی کامل	geodesically complete surface
ـ جهتپذیر	orientable surface
ـ خطکشی	ruled surface
ـ درجهٔ دوم	quadric surface
ـ دورانی	surface of revolution
ـ زینی	saddle surface
ـ سه وجهیهمگن	frame-homogeneous surface
ـ شیپوری	bugle surface
ـ فرشپذیر	pavable surface
ـ فروبرده شده	immersed surface
ـ فشرده	compact surface
ـ کلاً نافی	all umbilic surface
ـ همبند	connected surface
ـ هموار	flat surface
رویه‌های موازی	parallel surfaces
زاویهٔ جهتدار	oriented angle

زاویهٔ مختصاتی	coordinate angle
زین میمون	monkey saddle
سازهٔ مقیاس	scale factor
سرعت اولیه	initial velocity
سهمیگون بیضوی	elliptic paraboloid
سه وجهی متعامد	orthogonal frame
سوبرگردان	orientation - reversing
سونگهدار	orientation - preserving
شبه قطعهٔ مختصاتی	patchlike
شبه کره	pseudosphere
شتاب	acceleration
صفحهٔ بوسان	osculating plane
صفحهٔ تصویری	projective plane
صفحهٔ هذلولوی	hyperbolic plane
طول ← نرم	
طول قوس	arc length
عامل شکلی	shape operation
عدد چرخش	winding number
فاصلهٔ باز	open interval
فروبری ایزومتریك	isometric immersion
فرمهای همبند	connection forms
فرمهای دیفرانسیل	differential forms
۱-فرمیهای دوگان	dual 1-forms
قائم اصلی	principal normal
قاعدهٔ تناوبی	alternation rule
قسمت برداری	vector part
قطعه مختصاتی	coordinate patch
قطعه جغرافیایی	geographical patch

ــ مونژ	Monge patch
قلمرو	domain
گسترده	evolute
لوله	tube
ماتریس ایستاری	attitude matrix
ــ ژاکوبی	Jacobian matrix
ــ متعامد	orthogonal matrix
مارپیچ استوانه‌ای	cylindrical helix
مجموعهٔ باز	open set
مختصات متعامد	orthogonal coordinates
مرز	boundary
مسافت اقلیدسی	Euclidean distance
مسافت ذاتی	intrinsic distance
مشتق امتدادی	directional derivative
مشخصهٔ اویلر-پوانکاره	Euler-Poincaré characteristic
معادلات ساختاری	structural equations
معادلات همبندی	connection equations
مقطع قائم	normal section
مماس یکانی	unit tangent
مولد	ruling
میل	slant
میدان برداری	vector field
ــ قائم	normal vector field
ــ قائم یکه	unit normal vector field
ــ موازی	parallel vector field
میدان سه‌وجهی	frame field
ــ اصلی	principal frame field
ــ انتقالی	transferred frame field
ــ برازنده	adapted frame field
ــ چنبره‌ای	toroidal frame field
ــ فرنه	Frenet frame field
ــ کروی	spherical frame field

polygonal region	ناحیهٔ چند بری
norm	نرم
	مت : طول
antipodal points	نقاط متقاطر
conjugate points	نقاط مزدوج
point of application	نقطهٔ اثر
umbilic point	نقطهٔ نافی
planar point	نقطهٔ هامنی
onto mapping	نگاشت پوشا
area-preserving mapping	ـ حافظ مساحت
regular mapping	ـ منظم
antipodal mapping	ـ نقاط متقاطر
identity mapping	ـ همانی
conformal mapping	ـ همشکل
one-to-one mapping	ـ یک به یک
Halmos symbol	نماد هالموس
parametrization	نمایش پارامتری
Clairaut parametrization	نمایش پارامتری کلرو
canonical parametrization	نمایش پارامتری متعارف
Möbius band	نوار موبیوس
elliptic hyperboloid	هذلولیگون بیضوی
neighborhood	همسایگی
intrinsic geometry	هندسهٔ ذاتی

فهرست راهنما