مقدمه ای جامع بر هندسه دیفرانسیل

جلد اول

مایکل اسپیواک

ترجمه استاد مهدی نجفی خواه

فصل ۱

منیفلد

۱.۱ تعریف و خواص اولیهٔ منیفلد

n–**فضای اقلیدسی** $\mathbb{R}^n$ جورترین مثال از فضای متری است، که از n–تایی‌های مرتب $x = (x^1, \cdots, x^n)$ با $x^i \in \mathbb{R}$ تشکیل می‌گردد و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است. هر گاه $\mathbb{R}^n$ را به عنوان فضای متری تلقی کنیم، فرض بر این است که **متر معمولی**

$$d(x,y) := \Big(\sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)^2 \Big)^{1/2}$$

بر آن وجود دارد، مگر اینکه خلاف آن را تصریح کنیم. در حالت $n = 0$، فضای $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ را مجموعهٔ تک عضوی از $0 \in \mathbb{R}$ تعبیر می‌کنیم.

منیفلد شی‌ای است که موضعاً با این فضاهای متریِ نمونه شبیه است. به بیان دقیقتر، **منیفلد** فضایی است متری M با ویژگی:

> اگر $x \in M$، آنگاه یک همسایگی U از x و یک عدد صحیح $n \geq 0$ چنان وجود دارند که U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است.

ساده‌ترین مثال از منیفلد، البته که خود $\mathbb{R}^n$ است؛ کافی است به ازاء هر $x \in \mathbb{R}^n$ ای مجموعهٔ U را خود $\mathbb{R}^n$ بگیریم. روشن است که $\mathbb{R}^n$ با هر متر معادل دلخواه (یعنی معادل با متر استاندارد) نیز یک منیفلد است. در حقیقت، از تعریف این گونه برداشت می‌شود که هر فضایی که با یک منیفلد همیومورف باشد، خودش منیفلد است. در

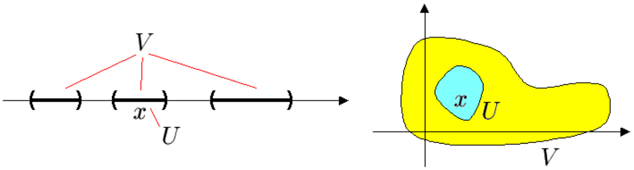
نتیجه، متری که برای M مطرح می‌شود نقش مهمی را ایفاء نمی‌کند، بلکه همهٔ مترهای معادل یکسانند. به همین دلیل است که اغلب آن را ذکر نمی‌کنیم.

چنانچه چیزی در خصوص فضاهای توپولوژی می‌دانید، می‌توانید در تعریف بالا از فضای توپولوژی به جای فضای متری استفاده کنید؛ این تعریف باعث طرح مواردی می‌شود که اساساً مترپذیر نیستند و لذا چنین فضاهایی ممکن است خواص مناسبی که می‌خواهیم فراهم باشد را ندارند. در ضمیمهٔ الف مباحثی در خصوص منیفلدهای متر ناپذیر وجود دارد.

گوی باز در $\mathbb{R}^n$ دومین مثال ساده از منیفلد است؛ در این حالت U را می‌توانیم کل گوی باز بگیریم، زیرا هر گوی باز در $\mathbb{R}^n$ با خود $\mathbb{R}^n$ همیومورف است:

$$f : B_r(x_\circ) \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_\circ}{r\|x - x_\circ\|} & \text{اگر } x \neq x_\circ \\ \circ & \text{اگر } x = x_\circ \end{cases}$$

از این مثال، بی‌درنگ نتیجه می‌گردد که هر زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$، منیفلد است؛ زیرا اگر $V \subseteq \mathbb{R}^n$ باز باشد و $x_\circ \in V$، آنگاه یک گوی باز U وجود دارد که $x \in U \subseteq V$. اما U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است. به شکل ۱.۱ توجه شود.



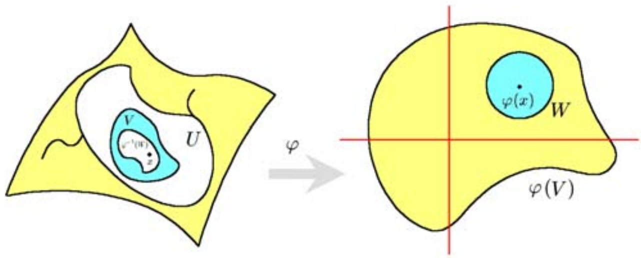
شکل ۱.۱: هر زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ منیفلد است.

سؤالی که با آن می‌توان هر ریاضیدانی را به چالش کشید، چنین است: چگونه هر زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد، خود نیز منیفلد است؟ (طبیعی است، که در این حالت آن را یک **زیر منیفلد باز** از منیفلد اولیه بنامیم.)

زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^n$ مثالهای متنوعی از منیفلدها را فراهم می‌سازند (این موضوع تمرین ۲۴ است) اما همهٔ منیفلدها نیستند. پیش از طرح مثالهای دیگر، لازم است موضوعاتی را مطرح کنیم که در خلال این فصل به کار می‌آیند.

اگر x نقطه‌ای از منیفلد M و U همسایگی‌ای از x باشد که با همیومورفیسمی چون $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ با $\varphi(V)$ همیومورف است، که $\varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ و شامل $\varphi(x)$ می‌باشد. (توجه شود که همسایگی V از x، یعنی یک همسایگی باز V

از x که $x \in V \subseteq U$) در این صورت، یک گوی باز W با $\varphi(x) \in W \subseteq \varphi(V)$ وجود دارد. در نتیجه $x \in \varphi^{-1}(W) \subseteq V \subseteq U$. چون $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ پیوسته است، مجموعهٔ $\varphi^{-1}(W)$ در V باز است، و لذا در M نیز باز می‌باشد؛ روشن است. به این ترتیب $\varphi^{-1}(W)$ با W همیومورف است و لذا با خود $\mathbb{R}^n$ همیومورف می‌باشد. این استدلال کمی پیچیده، نشان می‌دهد که در تعریف منیفلد می‌توان به جای همسایگی U، از همسایگی باز استفاده کرد. به شکل ۲.۱ توجه شود.



شکل ۲.۱: هر زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد، منیفلد است.

با کمی فکر روشت می‌شود که بایستی U باز باشد. اما، برای اثبات آن به قضیهٔ زیر نیاز است که صورت آن را بدون استدلال مطرح می‌کنیم. [1]

۱.۱.۱ قضیه. اگر $U \subseteq M$ باز و $f : U \to \mathbb{R}^n$ یک به یک و پیوسته باشد، آنگاه $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ باز است. (نتیجه اینکه به ازاء هر باز $V \subseteq U$، مجموعهٔ $f(V)$ باز است و بنابراین f^{-1} پیوسته است. در نتیجه، f همیومورفیسم است.)

قضیهٔ ۱.۱.۱ را می‌توان **ناوردایی دامنه** نامید، زیرا اساس آن این خاصیت است که « **دامنه** بودن (یعنی، مجموعهٔ باز همبند بودن) نسبت به نگاشتهای یکبیک پیوسته و بتوی $\mathbb{R}^n$ ناوردا می‌ماند». اثبات اینکه همسایگی U در تعریف ما باید باز باشد، نتیجه‌ای بلافصل از قضیهٔ ناوردایی دامنه است و آن را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. (به علاوه، به سادگی ملاحظه می‌شود که قضیهٔ ۱.۱.۱ غلط باشد، آنگاه مثالی از U وجود دارد که در تعریف مذکور می‌گنجد ولی باز نیست.)

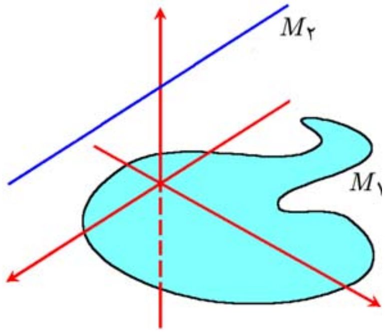
حال توجهمان را به عدد n در تعریف منیفلد معطوف می‌کنیم. توجه شود که n ممکن است به x بستگی داشته باشد. اگر $M \subseteq \mathbb{R}^3$ عبارت از اجتماع $M = M_1 \cup M_2$

[1] اثبات این حکم خیلی طولانی است و مثلاً در [?]، [?]، [?] و یا [?] می‌توان آن را یافت.

با باشد (به شکل ۳.۱ توجه شود) که در آن

$$M_1 := \{(x,y,z)\,|\,z=0\},\quad M_2 = \{(x,y,z)\,|\,z=1\,,\ x=0\}.$$

در این صورت، برای نقاط در M_1 می‌توانیم n را ۲ و برای نقاط در M_2 آنرا یک بگیریم. این مثال نشان می‌دهد که عمل اجتماع منیفلدها، عملی نامناسب است، زیرا در پی خود باعث مشکلات غیر لازم در بحث می‌گردد.



شکل ۳.۱: منیفلدی با بخشهایی که بعد مختلف دارند.

در کل، اگر M_1 و M_2 به ترتیب دارای متر d_1 و d_2 باشند، هر یک از مترهای d_1 و d_2 را با متری می‌توانیم عوض کنیم که اولاً با آن معادل است و در ثانی مقدارش همیشه کمتر از یک است: $\forall x,y \in M_j : \bar{d}_i(x,y) < 1$. مثلاً می‌توان تعریف کرد $\bar{d}_i = \min(d_i, 1)$ یا $\bar{d}_i = d_i/(1+d_i)$. اکنون بر $M = M_1 \cup M_2$ متری به شرح زیر می‌توان تعریف نمود. (در اینجا فرض شده است که M_1 و M_2 مجزا هستند، در غیر این صورت آنها را با کپی‌هایی از آنها که مجزا هستند، معاوضه می‌کنیم.)

$$d(x,y) := \begin{cases} \bar{d}_i(x,y) & x,y \in M_i \text{ اگر } i \text{ ای باشد که } \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

M_1 و M_2 در این فضای جدید، باز هستند. پس، اگر M_1 و M_2 منیفلد باشند، آنگاه M نیز هست. این ساختار را برای هر تعدادی از فضاها (حتی، ناشمارا) می‌توان تعمیم داد. فضاهای متری حاصل را **اجتماع مجزای** فضاهای M_i می‌نامیم. اجتماع مجزای منیفلدها، منیفلد است. به ویژه، چون فضای با تنها یک نقطه، منیفلد است پس هر مجموعهٔ گسسته‌ای، منیفلد است. کافی است بر آن از متر گسسته استفاده شود:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x=y \text{ اگر } \\ 1 & x\neq y \text{ اگر } \end{cases}$$

با اینکه ممکن است در نقاط مختلف یک منیفلد M، n های مختلفی وجود داشته باشد، در یک نقطهٔ خاص $x \in M$ امکان کار کرد بیش از یک n نیست. برای اثبات این دیدگاه شهودی باز هم به قضیهٔ ناوردایی بعد متوصل می‌شویم. به عنوان اولین قدم توجه می‌کنیم که هرگاه $n \neq m$، آنگاه $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^m$ همیومورف نیست، زیرا اگر $m < n$، آنگاه نگاشتی پیوسته و یک به یک بتوی زیر مجموعه‌ای غیر باز از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. ادامهٔ استدلال که منجر به اثبات یکتایی n در تعریف می‌گردد را به خواننده می‌سپاریم. این عدد n یکتا را **بعد** M **در** x می‌نامیم. در صورتی می‌گوییم یک منیفلد مفروض با **بعد** n است و یا n–بعدی است و یا به اختصار n–**منیفلد** است، که بعد آن در همهٔ نقاط n باشد. معمولاً وقتی می‌نویسیم M^n یعنی بعد منیفلد M برابر n است.

یک بار دیگر، فضایی گسسته را در نظر بگیرید، که منیفلدی ۰–بعدی. تنها زیر مجموعه‌های فشردهٔ این فضا زیر مجموعه‌های متناهی هستند. نتیجتاً، هر فضای گسستهٔ عملاً غیر σ–فشرده است (یعنی به صورت اجتماعی شمارا از زیر مجموعه‌های فشرده قابل نوشتن نیست.) با در نظر گرفتن اجتماعی مجزا از تعداد ناشمارا منیفلد همیومورف با $\mathbb{R}^n$، حکم مشابهی در مورد منیفلدهای با بعد بالاتر می‌توان طرح نمود. البته چنین مثالهایی، غیر همبند هستند. اغلب لازم است مطمئن شویم که این تنها حالتی است که برای آن σ–فشردگی رخ دهد.

۲.۱.۱ قضیه. اگر X فضایی متری، موضعاً فشرده و همبند باشد، آنگاه X فضایی σ–فشرده است.

اثبات: به ازاء هر $x \in X$، اعدادی $r > ۰$ ای را در نظر می‌گیریم که گوی بستهٔ $\{y \in X \,|\, d(x,y) \leq r\}$ زیر مجموعه‌ای فشرده باشد (چون X موضعاً فشرده است، حداقل یک r با این ویژگی وجود دارد.) مجموعهٔ همهٔ چنین $r > ۰$ هایی یک بازه است. زیرا اگر به ازاء یک x ای همهٔ $r > ۰$ ها دارای خاصیت بالا باشند، آنگاه X فضایی σ–فشرده است، زیرا

$$X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \{y \in X \,|\, (x,y) \leq n\}$$

پس اگر هیچ x ای با شرط بالا یافت نشود، به ازاء هر $x \in M$ ای $r(x)$ را نصف سوپریموم همهٔ r ها تعریف می‌کنیم. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌گردد که

$$\{y \in X \,|\, d(x_۱,y) \leq r\} \subseteq \{y \in X \,|\, d(x_۲,y) \leq r + d(x_۱,x_۲)\}$$

بنابراین

$$\{y \in X \,|\, d(x_1, y) \leq r - d(x_1, x_2)\} \subset \{y \in X \,|\, d(x_2, y) \leq r\}$$

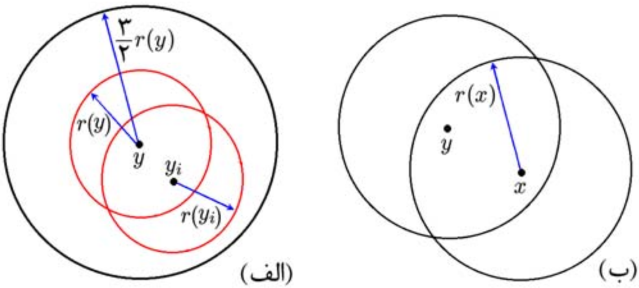
در نتیجه

$$r(x_1) \geq r(x_2) - \frac{1}{2} d(x_1, x_2) \tag{۱.۱}$$

با تعویض x_1 و x_2 در استدلال بالا، نتیجه می‌گیریم

$$|r(x_1) - r(x_2)| \leq \frac{1}{2} d(x_1, x_2) \tag{۲.۱}$$

در نتیجه، تابع $r : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است. این استدلال نتیجهٔ مهم زیر را دارد:



شکل ۴.۱

فرض کنید $A \subset X$ فشرده باشد. گیریم A' اجتماع همهٔ گوی‌های بستهٔ به شعاع $r(y)$ و به مرکز y باشد، که $y \in A$ دلخواه است. در این صورت A' نیز فشرده است. اثبات به شرح ذیل است:

گیریم $z_1, z_2, \cdots$ دنباله‌ای در A' باشد. اگر به ازاء هر i یک $y_i \in A$ ای وجود داشته باشد که z_i در گوی به مرکز y_i و شعاع $r(y_i)$ است، چون A فشرده است، زیر دنباله‌ای از y_i ها وجود دارد، که خودش هم یک دنباله به شمار می‌آید، و به نقطه‌ای $y \in A$ همگرا است. حال گوی بستهٔ B به شعاع $\frac{3}{2}r(y)$ و مرکز y فشرده است. چون $y_i \to y$ و تابع r پیوسته است، گویهای بستهٔ $\{y \in X \,|\, d(y, y_i) \leq r(y_i)\}$ عاقبت مشمول در B هستند. به قسمت (الف) از شکل ۴.۱ توجه شود. بنابراین، دنبالهٔ z_i عاقبت در مجموعهٔ فشردهٔ B قرار دارد، پ نتیجتاً، زیر دنباله‌ای همگرا دارد. به علاوه، نقطهٔ حدی این زیر دنباله عملاً در یک گوی بستهٔ به مرکز y و شعاع $r(y)$ قرار دارد

(مسألهٔ ۱۰). بنابراین، A' فشرده است. حال فرض کنیم $x_\circ \in X$ و مجموعه‌های فشردهٔ $A_۱ = \{x_\circ\}$ و $A_{n+۱} = A'_n$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح، اجتماع آنها باز است. بسته نیز هست. برای مشاهدهٔ این مطلب فرض می‌کنیم x نقطه‌ای در بستار A باشد. در این صورت، $y \in A$ ای وجود دارد که به ازای آن $d(x,y) < \frac{۲}{۳}r(x)$. اکنون بنا به (۱.۱)، داریم

$$\begin{aligned} r(y) &\geq r(x) - \frac{۱}{۲}d(x,y) > r(x) - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲}{۳}r(x) \\ &= \frac{۲}{۳}r(x) > d(x,y) \end{aligned}$$

به قسمت (ب) از شکل ۴.۱ توجه شود. این نشان می‌دهد که اگر $y \in A_n$، آنگاه $x \in A'_n$ و لذا $x \in A$.

چون X همبند است و $A \neq \emptyset$ هم باز است و هم بسته، لذا بایستی $X = A$ که σ فشرده است. $\square$

پس از این بحث مفصل در خصوص توپولوژی مجموعهٔ نقاط، زنجیره‌ای از مثالهای از منفلیدها مطرح می‌کنیم.

۲.۱ مثالهایی از منیفلدها

تنها ۱–منیفلدهای همبند $\mathbb{R}$، دایره، یا کرهٔ ۱–بعدی $\mathbb{S}^۱$ است، که مطابق تعریف عبارت است از $\mathbb{S}^۱ := \{x \in \mathbb{R}^۲ \,|\, d(x,\circ) = ۱\}$. تابع $f : (\circ, ۲\pi) \longrightarrow \mathbb{S}^۱$ با ضابطهٔ $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ همیومورفیسم است؛ حتی پیوسته نیز هست، در حالی که بر $[\circ, ۲\pi]$ یک به یک نیست. اغلب نقطهٔ $(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^۱$ را با نماد $\theta \in [\circ, ۲\pi]$ نشان می‌دهیم. تابع $g : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{S}^۱$ که با همان ضابطه تعریف می‌شود نیز همیومورفیسم است؛ پس f و g توئمان نشان می‌دهند که $\mathbb{S}^۱$ منیفلد است.

روش دیگری برای اثبات این مطلب وجود دارد، که برای تعمیم مناسبتر است. نگاشت تصویر از نقطهٔ $(\circ, ۱)$ به روی خط $\mathbb{R} \times \{-۱\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به صورتی که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است، همیومورفیسمی از $\mathbb{S}^۱ - \{(\circ, ۱)\}$ به روی $\mathbb{R} \times \{-۱\}$ تعریف می‌کند؛ این مطلب را خیلی ساده با محاسبهٔ ضابطهٔ نگاشت

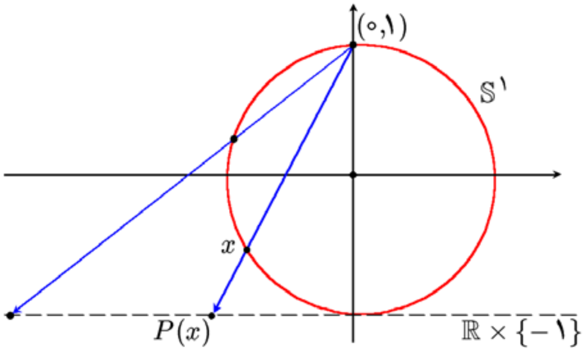
$$p : \mathbb{S}^۱ - \{(\circ, ۱)\} \to \mathbb{R} \times \{-۱\}$$

می‌توان نشان داد. با تعویض نقطهٔ $(\circ, ۱)$ با $(۱, \circ)$ و تصویر بر خط $\mathbb{R} \times \{۱\}$ می‌توان نقطهٔ $(\circ, ۱)$ را هم وارد تصاویر کرد. این کار را با توجه به اینکه $\mathbb{S}^۱$ همگن نیز هست،

می‌توان ملاحظه نمود. (یعنی دورانی مناسب از $\mathbb{R}^{۲}$ را اختیار کرد). به شکل ۵.۱ توجه شود. حال، به صورت مشابه، n−کره را در نظر می‌گیریم

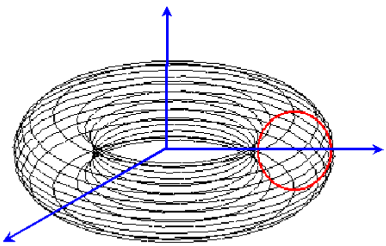
$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+۱} \mid d(x, ۰) = ۱\}$$

که یک n−منیفلد است. معمولاً ۲−کره را به طور ساده «کره» می‌نامند. این اولین مثال ما از یک ۲−منیفلد فشرده یا رویهٔ فشرده است.



شکل ۵.۱: نگاشت تصویر از نقطهٔ $(۰, ۱)$

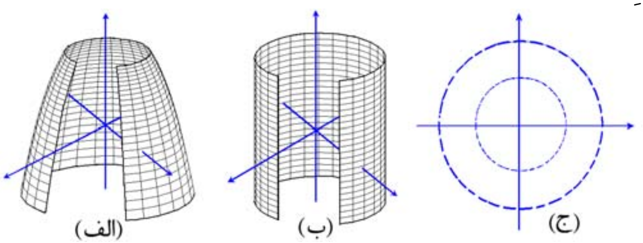
با توجه به اینکه اگر μ_i که $i = ۱, ۲$ دارای بعد n_i باشد، آنگاه $\mu_۲ \times \mu_۱$ منیفلدی $(n_۱ + n_۲)$−بعدی است، از این منیفلدها می‌توان منیفلدهای جدیدی را تولید نمود. به ویژه $\mathbb{S}^۱ \times \cdots \times \mathbb{S}^۱$ (n بار) که آنرا n−تیوب می‌نامیم. $\mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ را معمولاً تیوب می‌نامند. $\mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ را معمولاً تیوب می‌نامند. به شکل ۶.۱ توجه شود.



شکل ۶.۱: ۲−تیوب

این منیفلد با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{۴}$ همیومورف است. به علاوه، با زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{۳}$ نیز همیومورف است که آن را نیز مردم تیوب می‌نامند؛ این زیر مجموعه را دوران

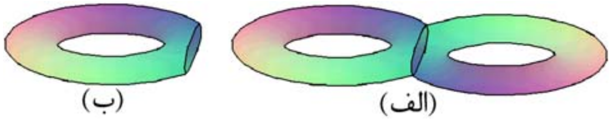
می‌توان به‌دست آورد. یعنی، با دوران $\{(\circ, y, z) \,|\, (y-۱)^۲+z^۲ = \frac{۱}{۴}\}$ حول z–محود. همین کار را با هر ۱–منیفلد جزء در $\{(\circ, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \,|\, y > \circ\}$ می‌توان انجام داد. رویهٔ حاصل را **رویهٔ دورانی** می‌نامند. حاصل یا با تیوب همیومورف است و یا اینکه با استوانهٔ $\mathbb{S}^۱ \times \mathbb{R}$، که آن هم با حلقهٔ توپر همیومورف است. یعنی با ناحیهٔ بین دو دایرهٔ متحدالمرکز. به شکل ۷.۱ توجه شود.



شکل ۷.۱: رویه‌های دورانی

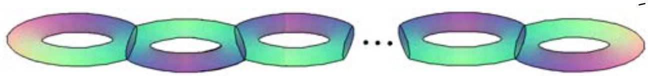
ساده‌ترین مثال بعدی از یک ۲–منیفلد فشرده، تیوب ۲–حلقه‌ای است. به شکل ۸.۱ توجه شود. برای ساخت صریح تیوب ۲–حلقه‌ای کافی است با یک «دسته» آغاز کنیم که با تیوب منهی یک قرس از سطحش همیومورف است. به بیان دقیق‌تر ابتدا یک دایره که کاملاً بر سطح تیوب قرار دارد را در نظر گرفته و سپس خود دایره و تمام داخلش از سطح جدا می‌کنیم. این دایره را مرزک حلقه می‌نامیم. اکنون از به هم پیوستن دو دستهٔ با هم، یک تیوب ۲–حلقه‌ای نتیجه می‌گردد؛ یعنی مرز آن دو را یکی می‌گیریم. به شکل ۹.۱ توجه شود.

شکل ۸.۱: تیوب ۲–حلقه‌ای

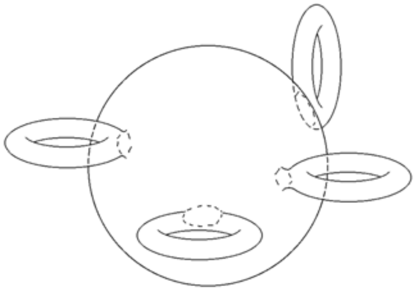


شکل ۹.۱: ساخت صریح تیوب ۲–حلقه‌ای

با تکرار این روند، می‌توان **تیوب** n–**حلقه‌ای** را ساخت. چنین فضایی با اجتماع مجرای n دسته و یک کرهٔ با n حفره که در آن مرز دستهٔ i ام را با نقاط مرزی حفرهٔ i ام بر سطح کره یکی گرفته‌ایم، همیومورف است. به شکلهای ۱۰.۱ و ۱۱.۱ توجه شود.



شکل ۱۰.۱: تیوب n–حلقه‌ای



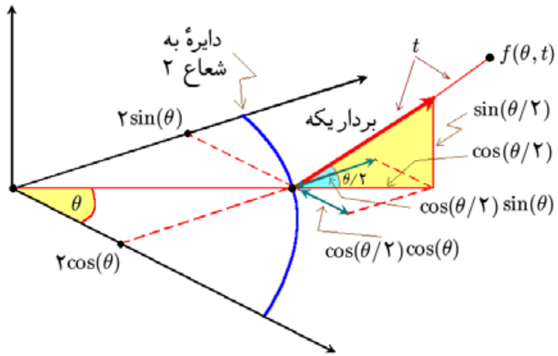
شکل ۱۱.۱: طرز ساخت تیوب n–حلقه‌ای

شکل ۱۲.۱: طرز ساخت نوار موبیوس

۲–منیفلدی وجود دارد که ریاضی‌دانان از زمانی که تنها با کاغذ و مواد آشنا بودند، روش ساخت آنرا می‌دانستند و نیازی به دانستن فضای متری نداشتند. یعنی، نوار

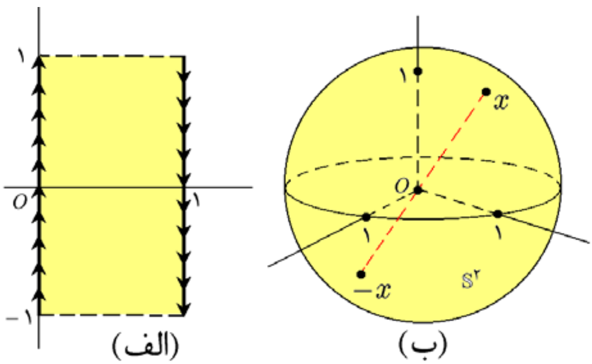
موبیوس که آنرا به کمک یک تکه نوار کاغذی می‌توان ساخت. به این ترتیب که، ابتدا آنرا یک نیم دور می‌چرخانیم و سپس دو سر آنرا بهم می‌چسبانیم. به شکل ۱۲.۱ توجه شود. این کار را به کمک تابع $f : [۰, ۲\pi] \times (-۱, ۱) \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ

$$f(\theta, t) = \Big(۲\cos\theta + t\cos(\theta/۲)\cos\theta, ۲\sin\theta + t\cos(\theta/۲)\sin\theta, t\sin(\theta/۲)\Big)$$



شکل ۱۳.۱

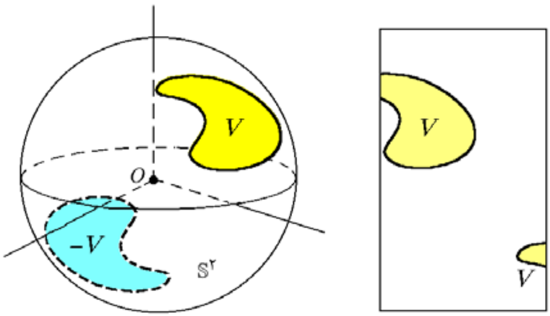
می‌توان توضیح داد. چنانچه f را بر کل $[۰, ۲\pi] \times [-۱, ۱]$ تعریف کنیم، به یک نوار موبیوس همراه با مرزش می‌رسیم؛ همان طوری که از روش ساخت به کمک کاغذ مشاهده می‌گردد، این مرز با یک دایره همیومورف است، نه با دو دایرهٔ از هم جدا! با اصطلاحاتی که اخیراً مطرح کردیم، **نوار موبیوس** را این طور نیز می‌توان ساخت که نقاط $(۰, t)$ و $(۱, -t)$ از فضای حاصلضربی $(-۱, ۱) \times [۰, ۱]$ را یکی بگیریم. به شکل ۱۳.۱ توجه شود. البته فعلاً قادر به توصیف دقیق روند یکی گیری نیستیم. با این حال مثال بعدی را هم به این روش معرفی می‌کنیم.



شکل ۱۴.۱: الف) روشی برای ساخت تیوب. ب) طرز ساخت $\mathbb{P}^۲$

می‌خواهیم که هر نقطهٔ $x \in \mathbb{S}^۲$ را با نقطهٔ متقاطرش، یعنی $-x \in \mathbb{S}^۲$ یکی بگیریم. فضای حاصل که **صفحهٔ تصویری** نامیده می‌شود $\mathbb{P}^۲$، از آن دسته مثالهایی است که کمی سخت به شهود در می‌آیند. زیرا هیچ زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ نیست که عملاً با آن همیومورف باشد. به قسمت (الف) از شکل ۱۴.۱ توجه شود.

تعریف دقیق $\mathbb{P}^۲$ نیز همین سرنوشت را دارد، زیرا در آن لازم است از چیزهای غیر برابر را برابر بدانیم! **نقاط** در $\mathbb{P}^۲$ را مجموعه‌های $\{-p, p\}$ با $p \in \mathbb{S}^۲$ تلقی می‌کنیم. به قسمت (ب) از شکل ۱۴.۱ توجه شود. این مجموعه را با نماد $[p] \in \mathbb{P}^۲$ نشان می‌دهیم، بنابراین $[p] = [-p]$. پس نگاشتی $f : \mathbb{S}^۲ \to \mathbb{P}^۲$ با ضابطهٔ $f(p) = [p]$ داریم، که از $f(p) = f(q)$ نتیجه می‌گردد $p = \pm q$. تا مدتی تعریف ساختار متری بر $\mathbb{P}^۲$ با معرفی فاصلهٔ بین نقاط $[p]$ و $[q]$ بر آن را به تعویق می‌اندازیم و به این بسنده می‌کنیم که زیر مجموعه‌های باز آن کدام هستند (این عملاً همهٔ آن چیزی است که نیاز داریم.) زیر مجموعهٔ $U \subseteq \mathbb{P}^۲$ وقتی و تنها وقتی باز است که زیر مجموعهٔ $f^{-۱}(U) \subseteq \mathbb{S}^۲$ باز باشد. این خود بدین معنی است که مجموعه‌های باز در $\mathbb{P}^۲$ به شکل $f(V)$ هستند که $V \subseteq \mathbb{S}^۲$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{S}^۲$ است، البته با این ویژگی که اگر $p \in V$، آنگاه بایستی $-p \in V$. به شکل ۱۵.۱ توجه شود.



شکل ۱۵.۱: مجموعه‌ای باز در $\mathbb{P}^۲$

این کار را به صورت دیگری، شبیه به حالت نوار موبیوس می‌توان انجام داد. فرض کنید در نوار موبیوس M نقاط $(۰, t)$ و $(۱, -t)$ را یکی بگیریم. به این ترتیب اگر نقاط $\{(۰, t), (۱, -t)\}$ را با $[(۰, t)]$ یا $[(۱, -t)]$ نمایش بدهیم، به یک نگاشت

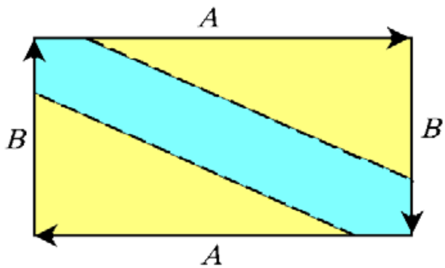
$$f : [۰, ۱] \times (-۱, ۱) \to M$$

$$f(s,t) = \begin{cases} (s,t) & \text{اگر } s \neq ۰, ۱ \\ [(s,t)] & \text{اگر } s = ۰ \text{ یا } ۱ \end{cases}$$

می‌رسیم و $U \subseteq M$ وقتی و تنها وقتی باز است که

$$f^{-۱}(U) \subseteq [۰, ۱] \times (-۱, ۱)$$

باز باشد. یعنی، مجموعه‌های باز در M به شکل $f(V)$ هستند که V باز است، مشروط به اینکه اگر $(s, -t)$ به V متعلق باشد، آنگاه (s,t) نیز به V متعلق باشد، که $s = ۰$ یا $s = ۱$.



شکل ۱۶.۱: طرز ساخت $\mathbb{P}^۲$

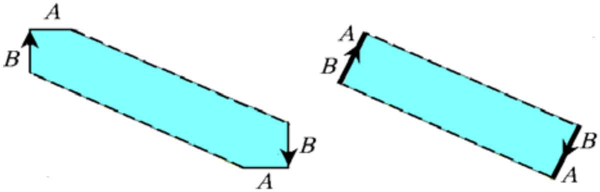
برای اینکه تصوری از ظاهر $\mathbb{P}^۲$ به دست بیاوریم، با حذف تمام نقاط زیر $xy-$صفحه در $\mathbb{S}^۲$ آغاز می‌کنیم. چرا که همهٔ آنها با نقاطی از نیمهٔ بالایی کره یکی گرفته می‌شوند. نتیجه یک نیم کره به همراه لبهٔ آن است، که با قرص بسته

$$D^۲ = \{x \in \mathbb{R}^۲ \mid d(x, ۰) \leq ۱\}$$

همیومورف است. اکنون بایستی $p \in \mathbb{S}^۱$ را با $-p \in \mathbb{S}^{-۱}$ یکی بگیریم.

این مطلب را با مربع نیز می‌توان توضیح داد. این یکی گیری معادل است با یکی گیری اضلاع مربع به شیوه‌ای که در شکل ۱۶.۱ نشان داده شده است. (نقاط بر اضلاع مقابل، با جهت برعکس بر هم منطبق می‌شوند.) خطوط نقطه چین کلید فهم $\mathbb{P}^۲$ هستند. با کمی دگردیس در دو انتهای این نوار ملاحظه می‌کنیم که بخش انتهایی B با جهت وارون به همین بخش در انتهای دیگر متناظر می‌گردد؛ یعنی A در گونهٔ بالا سمت راست به A در گوشهٔ پائین سمت چپ یکی گرفته می‌شود. به این ترتیب به یک نوار موبیوس مرزدار می‌رسیم (یعنی، خطوط خط‌چین مرز آن هستند که یک دایرهٔ واحد تشکیل می‌دهند). چنانچه این نوار موبیوس را از مربع اولیه حذف کنیم، به دو قطعهٔ مثلث شکل می‌رسیم که همراه هم با یک دیسک همیومورف هستند. بنابراین، صفحهٔ

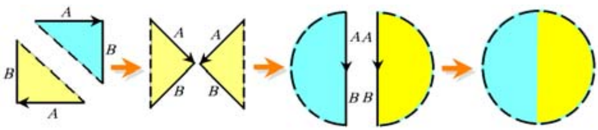
تصویری را می‌توان از اجتماعی مجزا از یک دیسک و یک نوار موبیوس به دست آورد، به این ترتیب که مرز نوار موبیوس را با مرز دیسک و با جهت سازگار، یکی گرفت. به شکل ۱۷.۱ توجه شود.



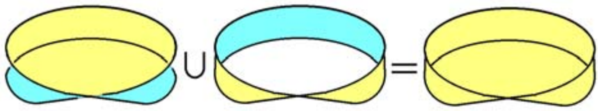
شکل ۱۷.۱: $\mathbb{P}^2$ از یک نوار موبیوس و یک دیسک ساخته شده است.

بنابراین می‌توان یک لباس به شکل دیسک که لبهٔ آن زیپ است و یک نوار موبیوس که لبهٔ آن زیپ است را تهیه کرد و سپس این دو تکه لباس را در امتداد زیپ به هم چسباند و به مدلی برای $\mathbb{P}^2$ رسید. متأسفانه آزمایش نشان می‌دهد که این مطلب محال است، مگر آنکه این دو تکه لباس بتوانند از لای هم رد شوند.

زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ که اجتماع نوار موبیوس و دیسک است، با $\mathbb{P}^2$ همیومورف نیست. با این حال با یک مفهوم ریاضی مناسب می‌توان آن را به $\mathbb{P}^2$ ربط داد. به وضوح تابعی پیوسته مانند $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ وجود دارد که برد آن برابر همین مجموعه است؛ به علاوه، اگر توجه شود، f یک به یک نیست، بلکه **موضعاً یکبیک** است. بدین معنی که هر نقطه $p \in \mathbb{P}^2$ همسایگی‌ای U دارد که f بر آن یک به یک است. چنین تابعی را **ایمرشن توپولوژیک** می‌نامند (البته تا فصل ۲ که نوع دیگری از ایمرشن تعریف می‌شود، می‌توان به آن تنها ایمرشن گفت.) به این ترتیب می‌توان گفت که $\mathbb{P}^2$ را از نظر توپولوژی به طور ایمرز در $\mathbb{R}^3$ می‌توان قرار داد، اما به طور نشانده شده خیر (یعنی، همیومورفیسمی از $\mathbb{P}^2$ بروی زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ وجود ندارد).

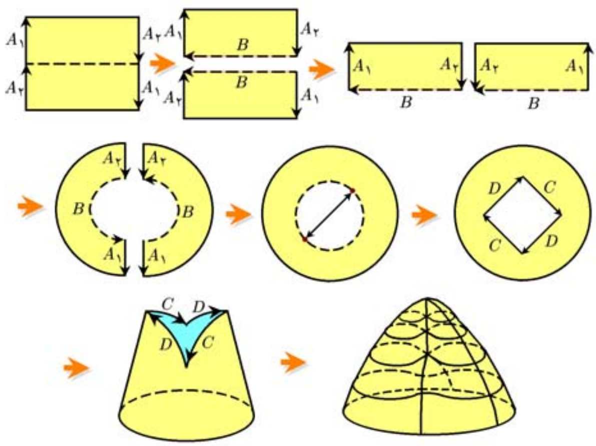


شکل ۱۸.۱



شکل ۱۹.۱: $\mathbb{P}^2$ از یک نوار موبیوس و یک دیسک ساخته شده است.

دومین ایمرشن توپولوژیک $\mathbb{P}^2$ در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان با ایمرز کردن نوار موبیوس در $\mathbb{R}^3$ طوری که لبهٔ آن دایره‌ای در یک صفحه شود، به ترتیب زیر آغاز نمود. شکل ۲۰.۱ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان نوار موبیوس را از روی حلقه (ناحیهٔ بین دو دایرهٔ متحدالمرکز) به دست آورد. یعنی کافی است در حلقهٔ ساخته شدهٔ آخر، اضلاع مقابل را با جهات مختلف بر هم منطبق نمود. (این عملاً همان بیان مجدد برای این واقعیت است که نوار موبیوس عبارت است از صفحهٔ تصویری منهی یک دیسک.) دایرهٔ درونی را با یک چها ضاعی می‌توان معاوضه نمود. چنانچه شکل حاصل را بتوی فضای $\mathbb{R}^3$ ببریم و یکی گیریهای لازم را انجام دهیم، به یک کلاه متقاطع می‌رسیم. به شکل زیر توجه شود. توجه شود که کلاه متقاطع به همراه دیسکی که بتواند لبهٔ پائین آن را پر کند، یک مجموعهٔ ایمرز توپولوژیک با $\mathbb{P}^2$ خواهد شد.



شکل ۲۰.۱: چگونگی بدست آوردن نوار موبیوس از روی حلقه

موضوعی که در بحث بالا جا ماند، تعریف متر بر $\mathbb{P}^2$ است. فقدان متر را با روند مشروح در تمرینات می‌توان مرتفع نمود. موضوعی که بعداً به دفعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. این بحث قبل از اینکه در فصل ۳ تشریح شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بخش بالا نشان می‌دهد که در $\mathbb{R}^۳$ چیزهایی شبیه $\mathbb{P}^۲$ وجود دارند که منیفلد نیستند. البته فعلاً می‌توانیم با نشاندن $\mathbb{P}^۲$ در $\mathbb{R}^۴$، یک متر بر آن معرفی کنیم. تابع

$$f : \mathbb{S}^۲ \to \mathbb{R}^۴ \qquad f(x,y,z) = \left(yz, xz, xy, x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲\right)$$

را در نظر بگیرید. به وضوح $f(p) = f(-p)$. به علاوه می‌توان نشان داد که از $f(p) = f(q)$ نتیجه می‌شود $p = \pm q$. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم که $f(x,y,z) = f(a,b,c)$. اول از همه ملاحظه می‌کنیم که

$$yz = bc \quad , \quad xz = ac \quad , \quad xy = ab \tag{۳.۱}$$

اگر $a,b,c \neq ۰$، نتیجه می‌گیریم که

$$y = bx/a \quad , \quad z = cx/a \tag{۴.۱}$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}(x+y+z)^۲ &= x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲(xy + xz + yz) \\ &= ۱ + ۲(xy + xz + yz)\end{aligned}$$

به علاوه، از (۳.۱) نتیجه می‌توان گرفت که به این ترتیب

$$(x+y+z)^۲ = (a+b+c)^۲$$

بنابراین

$$a + b + c = \pm(x + y + z) \tag{۵.۱}$$

اکنون به کمک (۴.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$a + b + c = \pm x(۱ + b/a + c/a) = \pm(a + b + c)/a$$

بنابراین $x = \pm a$. به صورت مشابه، داریم $y = \pm b$ و $z = \pm c$ (که البته در هر سه علامت یکسان است، چرا که هر سه از (۵.۱) نتیجه می‌شوند). در حالت منفی، کافی است با حفظ محور چهارم، جهت سه محور اول را عوض کنیم. حال فرض کنیم $a = ۰$. اگر $x \neq ۰$، آنگاه از (۳.۱) نتیجه می‌گردد که $y = z = ۰$ و بنابراین $(x,y,z) = (\pm ۱, ۰, ۰)$. اما $y = z = ۰$ با به کارگیری مجدد از (۳.۱) نتیجه می‌دهد که $bc = ۰$

لذا $b=0$ یا $c=0$. در نتیجه $(a,b,c)=(0,\pm 1,0)$ یا $(a,b,c)=(0,0,\pm 1)$. به وضوح این معادلات متناقض هستند:

$$x^2+2y^2+3z^2=a^2+2b^2+3c^2$$

پس $x=0$ و لذا داریم

$$\begin{aligned} yz &= bc && (6.1)\\ 2y^2+3z^2 &= 2b^2+3c^2 && (7.1)\\ y^2+z^2 &= b^2+c^2=1 && (8.1)\end{aligned}$$

از (۸.۱) نتیجه می‌گردد که

$$2y^2+3z^2=2y^2+3(1-y^2)=3-y^2$$

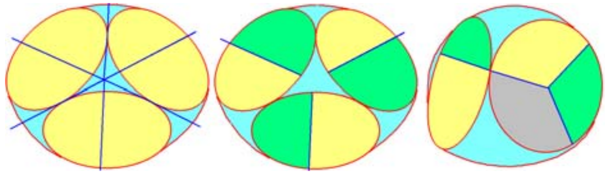
به مشابهاً در مورد b و c. اکنون از (۷.۱) نتیجه می‌شود که

$$3-y^2=3-b^2 \implies y=\pm b \qquad (9.1)$$

حال از (۶.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$z=\pm c \qquad (10.1)$$

(این حتی اگر که $y=b=0$ نیز برقرار است، زیرا در این صورت $z,c=\pm 1$). به وضوح (۶.۱) نیز نشان می‌دهد که همین موضوع در مورد (۹.۱) و (۱۰.۱) درست است و برهان تمام است.



شکل ۲۱.۱: رویهٔ رومن منتسب به استاینر

چون $f(p)=f(q)$ به معنی $p=\pm q$ است، می‌توانیم تعریف کنیم

$$\bar f:\mathbb{P}^2\longrightarrow\mathbb{R}^4 \quad \bar f([p]):=f(p)$$

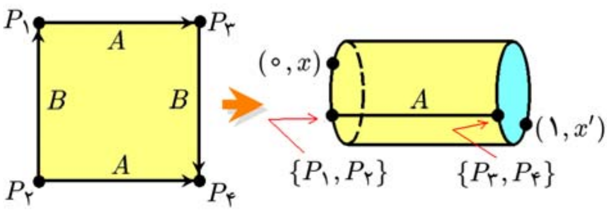
این نگاشت یک به یک است و از آن برای تعریف متر در $\mathbb{P}^2$ می‌توان استفاده کرد:

$$\bar{d}([p],[q]) := d(\bar{f}[p]),(\bar{f}[q]) = d(f(p),f(q))$$

می‌توان نشان داد که زیر مجموعه‌های باز آن، درست همانهایی هستند که قبلاً تشریح کردیم.

جالب است بدانید که نگاشت $g : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حاصل از سه مختص اول f یک ایمرشن توپولوژیک از $\mathbb{P}^2$ در $\mathbb{R}^3$ است: $g([x,y,z]) = (yz,xz,xy)$. تصویر g در $\mathbb{R}^3$ را **رویهٔ رومن** منتسب به استاینر نامیده می‌شود[۲].

با در دست داشتن رویهٔ $\mathbb{P}^2$ همچون روند ساخت تیوپ $n-$حفره‌ای، می‌توان رویه‌های جدیدی را تولید نمود. مثلاً با افزودن یک دسته به صفحهٔ تصویری آغاز می‌کنیم. برای این منظور ابتدا یک دیسک از صفحهٔ تصویری جدا می‌کنیم و به روی حاصل (که یک نوار موبیوس است) دسته‌ای که آن هم از برداشتن دیسکی بر سطح یک تیوپ حاصل شده است، به آن می‌افزاییم. نزدیک‌ترین راه برای تجسم این رویه، ترسیم یک کلاه متقاطع و یک دسته به پائین آن است. به علاوه، دو صفحهٔ تصویری را به یکدیگر می‌توانیم بدوزیم، برای این منظور کافی است دو نوار موبیوس را در امتداد لبه‌هایشان به هم بچسبانیم این کار را با به هم چسباندن دو کلاه متقاطع از سمت قاعدهٔ خود می‌توان انجام داد. این کار تمیزتر و شکل حاصل ملموستر است. به شکل ۲۳.۱ توجه شود.

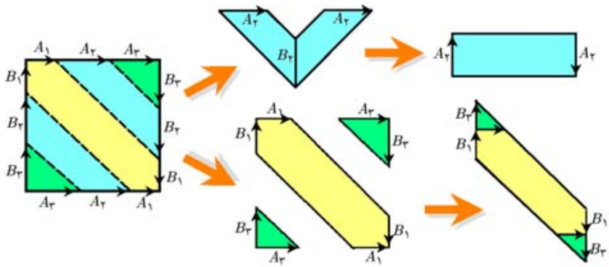


شکل ۲۲.۱

مربعی را در نظر بگیرید که لبه‌های آن را به شرح زیر یکی گرفته‌ایم؛ این شیء را از روی استوانهٔ $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ نیز می‌توان نتیجه گرفت. برای این منظور نقطهٔ $(0,x) \in [0,1] \times \mathbb{S}^1$ را با $(1,x')$ یکی بگیریم که x' نقطهٔ متقاطر x در $\mathbb{S}^1$ است، یعنی x را به مرکز وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا $\mathbb{S}^1$ را در x' قطع کند. توجه شود که در این یکی‌گیری نقاط p_1، p_2، p_3 و p_4 بر هم منطبق می‌شوند، و لذا چهارتایی $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ یک نقطه از فضای جدید ما خواهد بود.

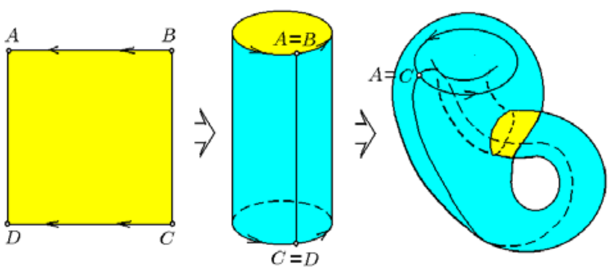
[۲] Steinev's Roman Surface

خطوط خطچین در مستطیل در شکل ۲۳.۱، آن را به دو تکه تقسیم می کنند. یکی از این نواحی را حاشور زده‌ایم و دیگری ساده است. ناحیهٔ حاشور خورده نوار موبیوس است که خطوط خطچین دایرهٔ لبهٔ آن است. با تجدید ترتیب این قطعات ملاحظه می‌گردد که به این ترتیب، رویهٔ مورد مطالعه به دو نوار موبیوس تقسیم شده است، که در امتداد لبه به هم متصل شده‌اند.



شکل ۲۳.۱

با اعمال این ساخت بر $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ به یک ایمرشن از رویهٔ مورد نظر می‌رسیم. برای این منظور کافی است نقطهٔ $(0, x)$ از انتهی سمت چپ استوانه را به نقطهٔ $(1, x')$ از سوی دیگر استوانه متصل نمود، که این کار با چرخیدن این استوانه به گونه‌ای است که لبهٔ سمت چپ از پائین بر لبهٔ دیگر منطبق گردد. رویهٔ حاصل، **بطری کلاین** نامیده می‌شود. به شکل ۲۴.۱ توجه شود.



شکل ۲۴.۱: بطری کلاین

دقیقاً با همین روش نمی‌توان منیفلدهای با بعد بالا را مطرح کرد. البته صرف نظر از n–منیفلدهای $\mathbb{S}^n$، خانوادهٔ فضاهای تصویری را نیز می‌توان مطرح نمود. n–**فضای تصویری** $\mathbb{P}^n$ را به صورت خانواده همهٔ هجموعه‌های به شکل $\{p, -p\}$ تعریف می کنیم که $p \in \mathbb{S}^n$. وضعیت مجموعه‌های باز در $\mathbb{P}^n$ کاملاً شبیه به حالت $\mathbb{P}^2$ است. البته

فضاهای تصویری شبیه خانوادهٔ $\mathbb{S}^۲$ ها نیست و تا آن حد خوش رفتار نیستند. بعداً خواهید دید که فضاهای $\mathbb{P}^n$ با n زوج کاملاً متفاوت از فضاهای $\mathbb{P}^n$ با n فرد هستند.
برای تکمیل این مقدمه از منیفلدها، به تعریف دیگری نیاز داریم. می‌خواهیم منیفلدهایی را معرفی کنیم که «مرز» دارند، نظیر نوار موبیوس و یا دیسک. نقاط روی مرز دارای همسایگیهای باز همیومورف با $\mathbb{R}^n$ نیستند، اما با زیر مجموعه‌ای مشخص از $\mathbb{R}^n$ همیومورف هستند. نیم فضای بستهٔ $\mathbb{H}^n$ را به صورت

$$\mathbb{H}^n := \{(x^۱, \cdots, x^n) \,|\, x^i \in \mathbb{R}, x^n \geq ۰\}$$

تعریف می‌کنیم. منظور از **منیفلد مرزدار**، فضایی است متری M با خاصیت زیر:
اگر $x \in M$، یک همسایگی باز U از x و یک عدد صحیح $n \geq ۰$ چنان یافت می‌شود که U یا با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است و یا با $\mathbb{H}^n$.
هیچ نقطه‌ای از یک منیفلد لبه‌دار یا مرزدار، همسایگی‌ای ندارد که هم با $\mathbb{R}^n$ همیومورف باشد و هم با $\mathbb{H}^n$ (ناوردایی بعد)؛ نقاطی $x \in M$ که دارای همسایگی همیومورف با $\mathbb{H}^n$ هستند، را از سایر نقاط مجزا می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ چنین نقاطی را **مرز** یا **لبهٔ** M نامیده و با نماد ∂M نشان می‌دهیم. چنانچه منیفلدی M به مفهوم قبلی منیفلد باشد، آنگاه داریم $\partial M = \emptyset$. توجه شود که اگر M زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه مرز M به عنوان یک منیفلد لبره‌دار در حالت کلی با مرز M به عنوان زیر مجموعه‌ای تز فضای توپولوژی $\mathbb{R}^n$ متفاوت است؛ چرا که اگر مثلاً M منیفلدی لبه‌دار با بعد $n >$ باشد، آنگاه تمام نقاط M نقاط مرزی (به معنی توپولوژی) هستند.
چنانچه بخواهیم بحث در خصوص بحث در خصوص منیفلدها و نیز منیفلدهای مرزدار متناوباً دنبال کنیم، بحث به درازا می‌کشد. اغلب اصطلاح «منیفلد» به معنی منیفلد مرزدار است. منیفلد بدون مرز فشرده را اصطلاحاً منیفلد بسته می‌نامند. برای اشاره به منیفلد مرزدار، ترجیه می‌دهیم از اصطلاح منیفلد — با مرز استفاده نکنیم.

۳.۱ تمرینات

۱. نشان دهید که اگر d یک متر بر X باشد، در این صورت $d/(۱+d)$ و $\min\{۱, d\}$ نیز متر هستند. به علاوه، این مترها با d هم‌ارزند (به بیان دیگر، نگاشت همانی $\mathrm{Id} : (X, d) \to (X, \bar{d})$ همیومورفیسم است).

۲. نشان دهید که اگر به ازاء هر $i \in I$ ای (X_i, d_i) فضایی متری با $d_i < ۱$ باشد و به ازاء هر $i \neq j$ ای $X_i \cap X_j = \emptyset$ آنگاه (X, d) یک فضای متری است، که در آن $X := \bigcup_i X_i$ و اگر به ازاء یک $i \in I$ ای $x, y \in X_i$، آنگاه $d(x, y) = d_i(x, y)$ و در غیر این صورت $d(x, y) = ۱$. هر یک از X_i ها زیر مجموعه‌ای باز از X است و $Y \subseteq X$ وقتی و تنها وقتی با X همیومورف است که $Y = \bigcup_i Y_i$ که مجموعه‌های مجزای Y_i با X_i همیومورفند $(i \in I)$. فضای (X, d) و با هر فضای همیومورف با آن را اجتماع مجزای فضاهای X_i می‌نامیم.

۳. الف) نشان دهید که هر منیفلدی موضعاً فشرده است.

ب) نشان دهید که هر منیفلدی موضعاً همبند راهی است و هر منیفلد همبندی، موضعاً همبند است.

ج) نشان دهید که هر منیفلد همبند، همبند قوسی است. (راه عبارت است از تصویر پیوستهٔ $[۰, ۱]$، اما قوس تصویر پیوسته و یک به یک است. حکم مشکلتر این است که هر راهی یک قوس بین دو انتهایش دارد، اما اثبات همبند راهی بودن در مورد منیفلدها کار دشواری نیست.)

۴. فضای X را در صورتی موضعاً همبند گویند که به ازاء هر $x \in X$ ای، هر همسایگی از x یک همسایگی همبند در برداشته باشد. ثابت کنید:

الف) همبندی، همبندی موضعی را نتیجه نمی‌دهد.

ب) هر زیر مجموعهٔ باز از یک فضای همبند موضعی، همبند موضعی است.

ج) X وقتی و تنها وقتی همبند موضعی است که مؤلفه‌های باز آن، باز باشند. در نتیجه، هر همسایگی از هر نقطه از یک فضای همبند موضعی، یک همسایگی همبند باز در بر دارد.

د) هر فضای همبند موضعی با اجتماعی مجزا از مؤلفه‌ها همیومورف است.

ه) هر منیفلدی همبند موضعی است، و لذا با اجتماعی مجزا از مؤلفه‌هایش همیومورف است، که هر یک از آنها یک زیر منیفلد باز هستند.

۵. الف) نشان دهید که همسایگی U در تعریف ما از منیفلد، باز است.

ب) نشان دهید که عدد صحیح n در تعریف ما از منیفلد، به ازاء هر $x \in M$ ای منحصر به فرد است.

۶. الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه زیر مجموعه‌ای از یک n−منیفلد، n−منیفلد باشد، این است که باز باشد.

ب) نشان دهید که اگر M همبند باشد، آنگاه بعد M در کلیهٔ نقاطش $x \in M$ ثابت است.

۷. الف) نشان دهید که اگر $U \subseteq \mathbb{R}$ بازه بوده و $f : U \to \mathbb{R}$ پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه یا f صعودی است و یا اینکه f نزولی است.

ب) نشان دهید که تصویر $f(U)$ باز است.

ج) نشان دهید که نگاشت f همیومورفیسم است.

۸. در مورد این مسأله فرض کنید که

۱. (تعمیم قضیهٔ منحنی ژردان). اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ با $\mathbb{S}^{n-۱}$ همیمورف باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - A$ دو مؤلفه دارد، و A مرز هر دو مؤلفهٔ آن است.

۲. اگر $B \subset \mathbb{R}^n$ با دیسک $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x, ۰) \leq ۱\}$ همیومورف باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - B$ همبند است. به این ترتیب، ثابت کنید:

الف) یکی از مؤلفه‌های $\mathbb{R}^n - A$ (خارج A با نماد $\mathrm{Ext}(A)$) نامحدود است و دیگری (درون A با نماد $\mathrm{Int}(A)$) محدود است.

ب) اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، $A \subset U$ با $\mathbb{S}^{n-۱}$ همیومورف باشد و $f : U \to A$ یک به یک و پیوسته باشد (و لذا f همیومورفیسمی بر A است)، در این صورت $f(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int} f(A)$.

ج) ناوردایی دامنه را ثابت کنید. **راهنمایی:** ابتدا (ج) را ثابت کنید.

۹. الف) اثباتی مقدماتی برای این حکم بیاورید که $\mathbb{R}^۱$ با $\mathbb{R}^n$ که $۱ < n$ همیومورف نیست.

ب) مستقیماً از تعمیم قضیهٔ منحنی ژردان ثابت کنید که اگر $m \neq n$ آنگاه $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ غیر همیومورفند.

۱۰. در اثبات قضیهٔ ۲.۱.۱، لازم است نشان دهید که حد هر زیر دنبالهٔ همگرا از z_i ها عملاً در گوی بستهٔ به مرکز y و شعاع $r(y)$ قرار دارد.

۱۱. نشان دهید که هر منیفلد همبند (که فضایی متری است) پایه‌ای شمارا برای توپولوژی‌اش دارد و لذا زیر مجموعه‌ای چگال و شمارا دارد.

۱۲. تابع مرکب $f = \mathbb{S}^1 - \{(0,1)\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^1 \times \{-1\} \to \mathbb{R}^1$ را صراحتاً بیان کرده، و نشان دهید که یک هیمومورفیم است.

کار مشابهی در مورد تابع $f : \mathbb{S}^{n-1} - \{(0, \cdots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ انجام دهید.

۱۳. الف) در متن آمده است که زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{P}^2$، مجموعه‌هایی به شکل $f(V)$ هستند که $V \subset \mathbb{S}^2$ باز است و اگر $p \in V$ آنگاه $-p \in V$. نشان دهید، شرط آخر لازم نیست.

ب) در مورد نوار موبیوس شرط مشابهی وجود دارد که ذکر آن الزامی است. توضیح دهید که تفاوت از کجا است.

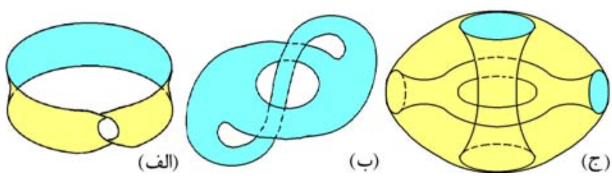
۱۴. الف) نشان دهید که متر تعریف شده در متن برای $\mathbb{P}^2$، مجموعه‌های باز معرفی شده را می‌سازد.

ب) نشان دهید $\mathbb{P}^2$ یک رویه است.

۱۵. الف) نشان دهید $\mathbb{P}^2$ با $\mathbb{S}^1$ همیومورف است.

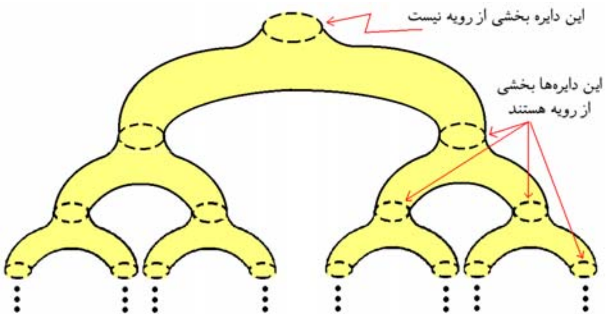
ب) چون می‌توانیم $\mathbb{S}^{n-1}$ را زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{S}^n$ قلمداد کنیم و چون در این یکی گیری، نقاط متقاطر در $\mathbb{S}^{n-1}$ به نقاط متقاطر در $\mathbb{S}^n$ برده می‌شوند، پس به طور طبیعی می‌توان $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ را در نظر گرفت. نشان دهید که در این صورت $\mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1}$ با درون دیسک D^n (به عبارت دیگر $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, 0) < 1\}$) همیومورف است.

۱۶. قضیه‌ای کلاسیک از توپولوژی اذعان می‌دارد که هر رویهٔ فشردهٔ در $\mathbb{R}^3$ به جز $\mathbb{S}^2$ با فضایی حاصل از متصل نمودن تعدادی دسته به تیوپ با فضای تصویری همیومورف است و به علاوه هر فضایی که رویه‌ای مرزدار و فشرده باشد، با فضایی همیومورف است که از برداشتن داخل تعدادی متناهی دیسک از سطح این خانواده حاصل شده است. این فضاها را استاندارد می‌نامند. فضاهای زیر با کدام فضای استاندارد همیومورفند؟



شکل ۲۵.۱

۱۷. فرض کنید $C \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^۲$ مجموعهٔ کانتور است. نشان دهید $\mathbb{R}^۲ - C$ با رویهٔ زیرهمیومورف است.



شکل ۲۶.۱

۱۸. در صورتی می‌گوییم یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ غیر فشرده X **انتهی دارد** که به ازاء هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $C \subseteq X$، مجموعهٔ فشرده‌ای K چنان یافت گردد که $C \subset K \subset X$ و $X - K$ همبند باشد.

الف) نشان دهید که اگر $n > ۱$ آنگاه $\mathbb{R}^n$ انتهی دارد، ولی $\mathbb{R}^۱$ خیر.

ب) $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ انتها ندارد، لذا $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ با $\mathbb{R}^m$ که $n \neq m$ یا حتی $m = n$ همیومورف نیست.

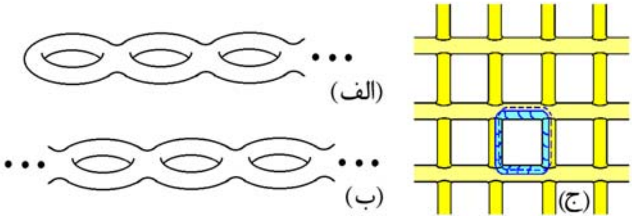
۱۹. این مسأله، نتیجه‌ای از مسألهٔ قبل است؛ در مسألهٔ ۲۴ از آن استفاده می‌شود. انتهی فضای توپولوژی X تابعی ε است که به هر زیر مجموعهٔ فشرده $C \subseteq X$ یک مؤلفهٔ غیر تهی $\epsilon(C)$ از $X - C$ را نسبت می‌دهد، به طریقی که از $C_۱ \subseteq C_۲$ نتیجه می‌شود $\epsilon(C_۲) \subseteq \epsilon(C_۱)$.

الف) اگر $\mathbb{R} - C$ فشرده باشد، آنگاه $\mathbb{R} - C$ دقیقاً دو مؤلفهٔ بی‌کران دارد، مؤلفهٔ سمت چپ که از همهٔ اعداد کوچکتر از یک N ای تشکیل می‌شود و مؤلفهٔ سمت راست که از همهٔ اعداد بزرگتر از M ای تشکیل می‌گردد. پس $\mathbb{R}$ دو انتهی دارد.

ب) نشان دهید که به ازاء هر $n > ۱$ ای، $\mathbb{R}^n$ تنها یک انتهی ϵ دارد. به طور کلی، شرط لازم و کافی برای اینکه فضایی تنها یک انتهی داشته باشد این است که به تعبیر مسألهٔ ۱۸ انتهی داشته باشد.

ج) این قسمت به اطلاعاتی از فضاهای توپولوژی نیاز دارد. گیریم $\mathcal{E}(X)$ مجموعهٔ همهٔ انتهی‌های یک فضای موضعاً فشردهٔ همبند X است. توپولوژی‌ای بر $X \cup$

$\mathcal{E}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: همسایگیهای $N_C(\epsilon_\circ)$ یک انتها $\epsilon_\circ$ و همهٔ مجموعه‌های به شکل $\{\epsilon \text{ انتهاهای} \mid \epsilon(C) = \epsilon_\circ(C)\}$ $X - C \cup$ که $C \subset X$ فشرده است را مجموعه‌های باز آن می‌گیریم. نشان دهید $X \cup \epsilon(X)$ فشرده است. به ازاء $n > ۱$، فضاهای $\mathbb{R} \cup \mathcal{E}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^n \cup \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ کدامند؟



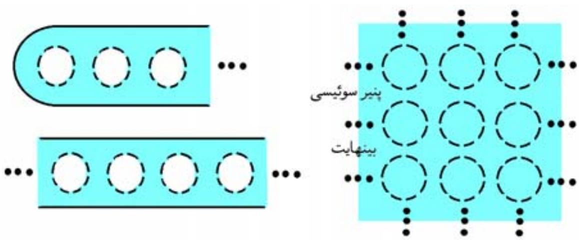
شکل ۲۷.۱

۲۰. سه رویهٔ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

الف) رویه‌های (الف) و (ب) انتها دارند، ولی رویه (ج) خیر.

ب) رویه‌های (الف) و (ج) همیومورفند! **راهنمایی:** ناحیهٔ برش خورده در شکل (ج) یک استوانه است، این استوانه در منتهی‌الیه سمت چپ (الف) ظاهر شده است. اکنون برشهایی مشابه در حفره‌های مجاور انجام دهید و ناحیه‌های نظیر به آنها در رویهٔ (الف) را بیابید.

۲۱. الف) سه زیر مجموعهٔ به شرح زیر از $\mathbb{R}^۲$ را در نظر گرفته و نشان دهید که همیومورفند:



شکل ۲۸.۱

ب) ثابت کنید نقاط داخلی هر سه رویه با هم همیومورفند.

۲۲. الف) ثابت کنید که هر زیر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}$ با اجتماعی مجزا از بازه‌ها همیومورف است.

ب) تنها به تعدا شمارا زیر مجموعهٔ باز غیر همیومورف در $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۲۳. برای این مسأله به نتیجه‌ای از قضیهٔ متری سازی اوریزن نیاز داریم که می‌گوید به ازاء هر منیفلد همبند M، یک همیومورفیسم f از M به زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب شمارای $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ وجود دارد. نشان دهید:

الف) اگر M منیفلدی همبند و غیر فشرده باشد، آنگاه تابعی پیوسته $f : M \to \mathbb{R}$ وجود دارد که f در ∞ به ∞ می‌رود. به عبارت دیگر، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که عاقبت در متمم هر مجموعهٔ فشرده قرار می‌گیرد، در این صورت $f(x_n) \to \infty$ با مسألهٔ ۲—۳۰ مقایسه شود.

ب) با داشتن همیومورفیسم $f : M \to \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots)$ و همچنین $g : M \to \mathbb{R}$ که در ∞ به ∞ می‌رود، تابع جدید $\bar{f} : M \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots)$ را با ضابطهٔ $\bar{f}(x) = (g(x), f(x))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\bar{f}(M)$ بسته است.

ج) حداکثر X_p تا منیفلد همبند غیر همیومورف وجود دارد (X_1 کارد دینالیتی $\mathbb{R}$ است).

۲۴. الف) نشان دهید که حتی اگر A و B دو زیر مجموعهٔ بستهٔ غیر همیومورف باشند، باز هم امکان دارد که $\mathbb{R}^n - A$ و $\mathbb{R}^n - B$ همیومورف باشند.

ب) اگر $A \subset \mathbb{R}^2$ بسته و کاملاً ناهمبند باشد (تنها مؤلفه‌های همبندی آن، نقاط باشند)، آنگاه $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2 - A)$ با A همیومورف است. در نتیجه $\mathbb{R}^2 - A$ و $\mathbb{R}^2 - B$ در صورتی که A و B دو مجموعهٔ کاملاً غیر همبند بستهٔ غیر همیومورف باشند، غیر همیومورفند.

ج) مجموعهٔ **مشتق** A' مجموعهٔ مفروض A عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط غیر تنها در A. مجموعه‌های $A^{(n)}$ را به صورت استقرایی $A^{(1)} = A'$ و $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ تعریف می‌کنیم. به ازاء هر n ای یک زیر مجموعه A_n از $\mathbb{R}$ وجود دارد به گونه‌ای که $A_n^{(n)}$ تک نقطه‌ای است.

*د) X_1 زیر مجموعهٔ کاملاً غیر همبند بستهٔ همیومورف در $\mathbb{R}^2$ وجود دارد.

راهنمایی: گیریم C مجموعهٔ کانتور است و $C_1 < C_2 < C_3 < \cdots$ دنباله‌ای از نقاط در C است. به ازاء هر دنباله $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ از اعداد طبیعی، مجموعه‌ای A_{n_i} می‌توانیم بسازیم که مشتق n_i ام آن دقیقاً $\{c_i\}$ باشد.

ه) X_i تا زیر مجموعهٔ باز همبند غیر همیومورف در $\mathbb{R}^۲$ وجود دارد.

۲۵. الف) منیفلد مرزدار را می‌توان فضایی متری M تعریف کرد که به ازاء هر $x \in M$ ای یک همسایگی U از x و یک عدد طبیعی $n \leq ۰$ چنان وجود دارد که U باز زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{H}^n$ همیومورف است.
ب) اگر M منیفلدی مرزدار باشد، آنگاه ∂M زیر مجموعه‌ای بسته از M است و ∂M و $M - \partial M$ منیفلد هستند.
ج) اگر به ازاء هر $i \in I$ ای C_i ها مؤلفه‌های ∂M باشند و $I' \subseteq I$، در این صورت $M - \bigcup_{i\in I} C_i$ منیفلدی مرزدار است.

۲۶. اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای بسته بوده و همزمان یک منیفلد مرزدار $n-$بعدی باشد، آنگاه مرز (توپولوژیک) M برابر ∂M است. چنانچه M زیر مجموعهٔ بسته نباشد، این حکم ممکن است درست نباشد.

۲۷. الف) هر نقطهٔ (a,b,c) واقع بر رویهٔ استانیر در رابطهٔ $a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲$ صدق می‌کند.
ب) اگر (a,b,c) در این معادله صدق کند و بعلاوه فرض کنیم $D \neq ۰$ برابر $\sqrt{b^۲c^۲+a^۲c^۲+a^۲b^۲}$ است، در این صورت نقطهٔ (a,b,c) بر رویهٔ استانیر قرار دارد. **راهنمایی:** فرض کنید $x = bc/D$ و . . .
ج) مجموعهٔ $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^۳ \,|\, b^۲c^۲+a^۲c^۲+a^۲b^۲ = abc\}$ اجتماع رویهٔ استانیر و بازه‌های باز $(-\infty, -۱/۲)$ و $(۱/۲, \infty)$ از هر یک از سه کوز در $\mathbb{R}^۳$ است.

فصل ۲

ساختار دیفرانسیلپذیر

۱.۲ C^∞–ساختار

اکنون برآنیم که آنالیز را هم به مطالعهٔ منیفلدها وارد کنیم. ابزار لازم برای این کار «حساب دیفرانسیل و انتگرال» است، که احتمالاً شما آن را مطالعه نموده‌اید. فی‌المثل، در خصوص فصول ۲ و ۳ از حساب بر منیفلدها (اثر اسپیواک)، از احکام و نمادهای این دو فصل آزادانه استفاده می‌کنیم. همچنین از مسایل ۲—۹، ۲—۱۵، ۲—۲۵، ۲—۲۶، ۲—۲۹، ۳—۳۲ و ۳—۳۵ نیز استفاده می‌کنیم. نگاشت همانی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ را با نماد Id و نه π نشان می‌دهیم. سپس $\mathrm{Id}^i(x) = x^i$

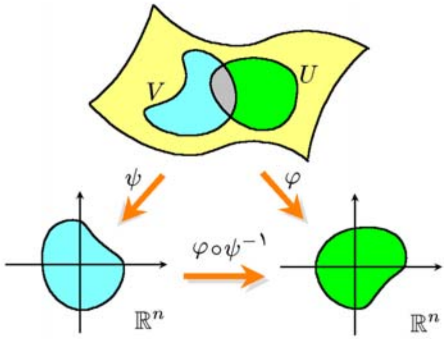
مفهوم تابع پیوسته $f : M \to \mathbb{R}$ در مورد منیفلد دلخواه M با معنی است، اما تابع دیفرانسیلپذیر $f : M \to \mathbb{R}$ چنین نیست. با وجود موضعاً شبیه بودن M با $\mathbb{R}^n$ امکان تعریف دیفرانسیلپذیری توابع وجود دارد.

اگر $U \subseteq M$ مجموعه‌ای باز بوده و همئومورفیسمی $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ در اختیار باشد، f را در صورتی بر U **دیفرانسیلپذیر** گوئیم که $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. متأسفانه اگر $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ هومورفیسم دیگری باشد و $U \cap V \neq \emptyset$، آنگاه لزومی ندارد که $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیز دیفرانسیلپذیر باشد. چرا که

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

و تنها دیفرانسیلپذیری $f \circ \varphi^{-1}$ را داریم. پس اگر $\varphi \circ \psi^{-1}$ دیفرانسیلپذیر فرض شود، آنگاه $f \circ \psi^{-1}$ نیز دیفرانیلپذیر خواهد بود. اما این کار مشکل را حل نمی‌کند

و هیومورفیسمهای دیگر پیش می‌آیند.



شکل ۱.۲: سازگاری چارتها

برای رفع این مشکل لازم است از بین همهٔ همیومورفیسمهای ممکن برای منیفلد، آنهایی را در نظر بگیریم (یعنی، دسته‌ای بخصوص از آن) که به ازاء هر φ و ψ در آن خانواده، $\varphi\circ\psi^{-1}$ دیفرانسیلپذیر باشد. این دقیقاً همهٔ آن چیزی است که انجام می‌دهیم، منتهی با کمی تفصیل بیشتر (به شکل ۱.۲ توجه شود).

اول از همه تقریباً در همهٔ موارد به توابعی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ توجه می‌کنیم که C^∞ هستند (یعنی، هر یک از f^i ها تا هر مرتبه‌ای مشتق جزیی پیوسته دارند)؛ اغلب از اصطلاح «دیفرانسیلپذیر» یا «هموار» به معنی C^∞ استفاده می‌کنیم.

بجای در نظر گرفتن همیومورفیسمهای از زیر مجموعه‌های باز U در M بر روی $\mathbb{R}^n$، کافی است همیومورفیسمهایی $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم که بروی زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ هستند. از حروف x، y و ... برای نمایش این گونه همیومورفیسمها استفاده می‌کنیم. نقاط را با نماد $p \in M$ نشان می‌دهیم که $x(p) \in \mathbb{R}^n$ و مختصات آنها $x^1(p)$، . . . و $x^n(p)$ هستند.

تنها در حالت منیفلد $\mathbb{R}^n$ ممکن است این نماد گذاری ایجاد ابهام کند. در این حالت اعضاء $\mathbb{R}^n$ را با x و y نشان می‌دهیم. اغلب بجای اینکه فقط x را ذکر کنیم، اغلب از زوج (x, U) استفاده می‌کنیم و دامنهٔ آنرا معرفی می‌کنیم.

اگر U و V زیر مجموعه‌های بازی از M باشند، در صورتی دو همیومورفیسم

$x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ و $y : V \to y(V) \subseteq \mathbb{R}^n$

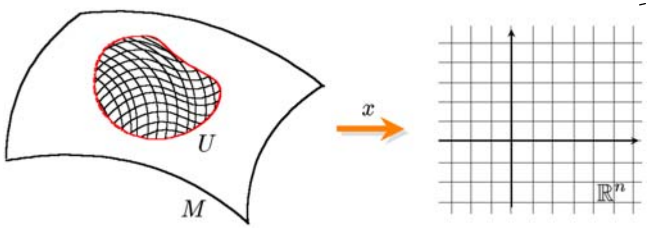
را C^∞–**مرتبط** گوئیم که نگاشتهای

$$y\circ x^{-1} : x(U\cap V) \to y(U\cap V)$$
$$x\circ y^{-1} : y(U\cap V) \to x(U\cap V)$$

C^∞ باشند. این با معنی است، زیرا $x(U\cap V)$ و $y(U\cap V)$ در $\mathbb{R}^n$ بازند. همچنین، اگر $U\cap V=\emptyset$ این شرط با معنی است و خود به خود بر قرار است.

خانواده‌ای از همیومورفیسمهای دو به دو C^∞–مرتبط که دامنهٔ آنها M را بپوشاند، **اطلسی برای** M نامیده می شود. هر عضو از یک اطلس $\mathcal{A}$ $(x,U)\in$ را **چارت** یا **دستگاه مختصاتی بر** U می‌نامیم.

دلیل اسم گذاری مذکور این است که به هر $p\in U$ ای مختصات $(x^1(p),\cdots,x^n(p))$ نظیر می‌گردد. بعلاوه، با تصویر کردن مجموعهٔ خطوط موازی محورهای در $\mathbb{R}^n$ بر روی U، با تصویر نمودن دستگاه مختصات، به شبکه‌ای بر کل U دست می‌یابیم (به شکل ۲.۲ توجه شود).



شکل ۲.۲: دستگاه مختصات

ساده‌ترین مثال از منیفلد به همراه اطلس، خود $\mathbb{R}^n$ به همراه اطلسی تک عضوی است که شامل نگاشت همانی $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ می‌باشد. به سادگی می‌توان اطلسهای بزرگی هم از روی آن ساخت. اگر U و V زیر مجموعه‌های بازی از $\mathbb{R}^n$ باشند که با هم همیومورفند، عضو $x:U\to V$ را به اطلس می‌توانیم اضافه کنیم، مشروط به اینکه x و x^{-1} نگاشتهایی C^∞ باشند. به هر تعدادی که بخواهیم می‌توانیم چنین x هایی را بیافزائیم، زیرا به سادگی می‌توان C^∞–مرتبط بودن آنها را تحقیق نمود. مزیت این اطلس بزگتر $\mathcal{U}$ این است که سخن گفتن در مورد اطلس تک عضوی $\mathcal{A}$ ابهام برانگیز است و استفاده از $\mathcal{U}$ مناسبتر می‌باشد. سوای این مطلب، تفاوت $\mathcal{U}$ و $\mathcal{A}$ سطحی است؛ به سهولت می‌توان $\mathcal{U}$ را از $\mathcal{A}$ ساخت.

آنچه در مورد $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\}$ گفتیم، در مورد هر اطلسی می‌توان گفت.

۱.۱.۲ لم. اگر $\mathcal{A}$ اطلسی از چارتهای C^∞–مرتبط بر M باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ در اطلسی ماکسیمال $\mathcal{A}'$ برای M قرار دارد.

اثبات: گیریم $\mathcal{A}'$ مجموعهٔ همهٔ چارتهای y است که با همهٔ چارتهای در $x\in\mathcal{A}$ C^∞–مرتبطند. بسادگی می‌توان تحقیق نمود که همهٔ چارتهای در $\mathcal{A}'$ با هم C^∞–مرتبط

هستند و لذا $\mathcal{A}'$ هم یک اطلس است. یکتایی این اطلس ماکسیمال $\mathcal{A}'$ شامل $\mathcal{A}$ بدیهی است. □

اکنون، C^∞–منیفلد (یا منیفلد دیفرانسیلپذیر یا منیفلد هموار) را به صورت زوج مرتب $(M, \mathcal{A})$ تعریف می‌کنیم که $\mathcal{A}$ یک اطلس ماکسیمال برای M می‌باشد.
بنابراین، ساده‌ترین منیفلد هموار $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ است، که $\mathcal{A}$ (ساختار C^∞ معمولی بر $\mathbb{R}^n$) اطلس ماکسیمال شامل $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ می‌باشد.
مثال دیگر، $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ است که در آن $\mathcal{V}$ از همیومورفیسم $x \longrightarrow x^3$ (که وارونش C^∞ نیست) به همراه با چارتهای C^∞–مرتبط با آن تشکیل می‌شود. با اینکه $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ و $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ یکی نیستند، تابعی یکبیک و برو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$x \in \mathcal{A} \text{ اگر و فقط اگر } x \circ f \in \mathcal{V}$$

یعنی، نگاشت $f(x) = x^3$. بنابراین، $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ و $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ از آن دسته ساختارهایی هستند که مایلیم آنها را ایزومورف بدانیم؛ البته اصطلاح مشهور، دیفئومورف است:
دو C^∞–منیفلد $(M, \mathcal{A})$ و $(N, \mathcal{B})$ را در صورتی **دیفئومورف** گوئیم که تابعی یکبیک و برو $f : M \to N$ طوری یافت گردد که

شکل ۳.۲: منیفلدهای دیفیومورف

$$x \in \mathcal{B} \quad \text{ اگر و فقط اگر } \quad x \circ f \in \mathcal{A}$$

نگاشت f را **دیفئومورفیسم** می‌نامیم (به شکل ۳.۲ توجه شود). روشن است که در این صورت، f^{-1} نیز دیفیپوموفیسم است. چنانچه از اطلسهای ماکسیمال در استفاده نکنیم، تعریف دیفیئومورفیسم بسیار پیچیده می‌گردد.

در عمل، غالباً از ذکر اطلس خودداری می‌کنیم و M را منیفلد دیفرانسیلپذیر خطاب می‌کنیم؛ اغلب، اطلس مربوط به M را تحت عنوان ساختار دیفرانسیلپذیر برای M معرفی می‌کنیم. در بسیاری از اوقات $\mathbb{R}^n$ را بجای $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$ خطاب می‌کنیم.

بسادگی ملاحظه می‌گردد که هر دیفئوموفیسمی الزاماً پیوسته است. نتیجتاً، وارونش نیز پیوسته است و لذا دیفئومورفیسم بطور خودکار همیوموفیسم است.

طبیعی است که این سوال مطرح شود که

«آیا دو منیفلد همیومورف، الزاماً دیفیئومورفند؟»

بعداً (در مسالهٔ ۹—۲۴) قادریم ثابت کنیم که $\mathbb{R}$ با هر اطلسی با $(\mathbb{R},\mathcal{A})$ استاندارد، دیفیئومورف است.

اثبات حکم مشابهی برای $\mathbb{R}^2$ بسیار مشکتر است و اثبات برای حالت $\mathbb{R}^3$ مشکتر از آن است که بتوان در اینجا مطرح نمود. حالت $\mathbb{R}^4$ هنوز مشخص نیست و حکم برای $n \geq 5$ صحیح است. یعنی C^∞–ساختار بر $\mathbb{R}^n$ که $n \geq 5$ منحصر بفرد است، اما به تکنیکهای پیچیده‌ای از توپولوژیِ نیاز دارد.

در مورد کره‌ها وضعیت کاملاً متفاوت است. به وضوح تصاویر p_1 و p_2 بترتیب از نقاط $(0,\cdots,0,1)$ و $(0,\cdots,0,-1)$ از $\mathbb{S}^{n-1}$ به روی $\mathbb{R}^{n-1}$ با هم C^∞–مرتبط هستند. لذا اطلسی برای $\mathbb{S}^{n-1}$ می‌سازند. این اطلس را اطلس C^∞ یا C^∞–ساختار استاندارد بر $\mathbb{S}^{n-1}$ می‌نامیم. این اطلس را با $2n$ همیومورفیسم به شرح زیر نیز می‌توان معرفی نمود:

$$f_i : \mathbb{S}^{n-1} - \{(0,\cdots,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$
$$f_i(x) = (x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$$
$$g_i : \mathbb{S}^{n-1} - \{(0,\cdots,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$
$$g_i(x) = (x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^n)$$

که با p_1 و p_1 C^∞–مرتبط هستند. به ازای $n \leq 6$ در حد دیفیپومورفیسم یک و تنها یک C^∞–ساختار بر $\mathbb{S}^n$ وجود دارد. اما بر $\mathbb{S}^7$ در حد دیفیئومورفیسم دقیقاً ۲۸ دستهٔ متفاوت از C^∞–ساختارها وجود دارد و بر $\mathbb{S}^{31}$ بیش از ۱۶ میلیون C^∞–ساختار متفاوت وجود دارد. البته، حتی به اثبات این احکام نزدیک نیز نمی‌شویم، چرا که به بخشی از هندسه بنام توپولوژی دیفرانسیل متعلقند، نه به هندسهٔ دیفرانسیل!

مثالهای بیشتری از منیفلدهای دیفرانسیلپذیر خواهیم آورد، قبل از آن بر هر زیر مجموعهٔ باز N از یک منفیلد دیفرانسیلپذیر مفروض $(M,\mathcal{A})$، اطلس دیفرانسیلپذیری

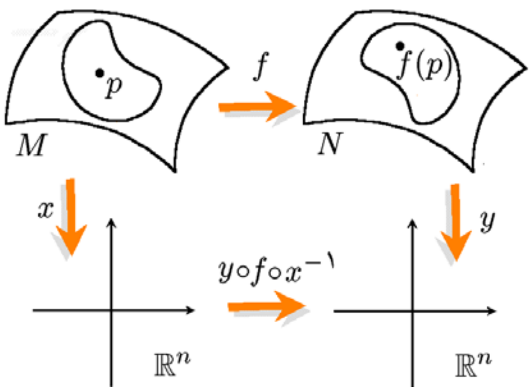
A' را معرفی می‌کنیم: اعضاء A' همه‌ی (x,U) هایی از A هستند که $U \subseteq N$.

۲.۲ C^∞–تابع

درست، همان طور که در مقابل همیومورفیسم بین فضاهای توپولوژی، دیفیئومورفیسم بین ساختارهای C^∞ مطرح می‌شود، در مقایسه با توابع پیوسته هم، توابع دیفرانسیلپذیر مطرح می‌گردد.

تابع $f : M \to N$ را در صورتی دیفرانسیلپذیر گوئیم که به ازاء هر دستگاه مختصات دلخواه (x,U) برای M و (y,V) برای N، نگاشت $y \circ f x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دیفرانسیلپذیر باشد. بخصوص، در صورتی f در $p \in M$ **دیفرانسیلپذیر** است که به ازاء هر دستگاه مختصاتی (x,U) با $p \in U$ و هر دستگاه مختصاتی (y,V) با $f(p) \in V$، $y \circ f \circ x^{-1}$ در نقطهٔ $x(p)$ دیفرانسیلپذیر باشد (به شکل ۴.۲ توجه شود).

اگر این حکم برای یک جفت از دستگاههای مختصاتی درست باشد، آنگاه برای هر جفت دیگری نیز درست خواهد بود. پس می‌توانیم دیفرانسیلپذیری f را بر هر زیر مجموعهٔ باز $M' \subseteq M$ تعریف کنیم؛ در واقع این موضوع با دیفرانسیلپذیری تحدید $f|_{M'} : M' \to M$ معادل است؛ و به وضوح، هر نگاشت دیفرانسیلپذیر، هموار است.



شکل ۴.۲: تابع دیفرانسیلپذیر

روشن است که وقتی از یک (نگاشت) تابع دیفرانسیلپذیر $f : M \to \mathbb{R}$ سخن می‌گوئیم، منظور این است که بر $\mathbb{R}$ ساختار دیفرانسیلپذیر استاندارد وجود دارد، و لذا وقتی f دیفرانسیلپذیر است که به ازاء هر چارت x ای $f \circ x^{-1}$ دیفرانسیلپذیر باشد. بسادگی ملاحظه می‌گردد که

(۱) تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ به عنوان نگاشتی بین C^∞–منیفلدها وقتی و تنها وقتی دیفرانسیلپذیر است که به معنی معمولی دیفرانسیلپذیر باشد.

(۲) وقتی و تنها وقتی تابع $f:M\to\mathbb{R}^m$ دیفرانسیلپذیر است که به ازاء هر i ای تابع مختصاتی $f^i:M\to\mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشد.

(۳) اگر (x,U) یک دستگاه مختصاتی باشد، x دیفیئوموفیسمی از U و $x(U)$ است.

(۴) تابع $f:M\to N$ وقتی و تنها وقتی دیفرانسیلپذیر است که به ازاء هر دستگاه مختصاتی y از N و هر i ای تابع $y^i\circ f:M\to\mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشد.

(۵) تابع $f:M\to N$ وقتی و تنها وقتی دیفیئومورفیسم است که f یکبیک و برو بوده و $f^{-۱}$ دیفرانسیلپذیر باشد.

در بسیاری از موارد، ساختار دیفرانسیلپذیر بر منیفلدها را به گونه‌ای مطرح می‌کنند که طی آنها توابع بخصوصی دیفرانسیلپذیرند. برای نمونه، حاصلضرب $M_۱\times M_۲$ دو منیفلد دیفرانسیلپذیر $M_۱$ و $M_۲$ را در نظر بگیرید: $M_۱\times M_۲$. در این صورت، تصاویر $\varphi_i:M_۱\times M_۲\to M_i$ به شکل $\varphi_i(p_۱,p_۲)=p_i$ تعریف می‌شوند که $i=۱,۲$. به سادگی می‌توان ساختاری بر $M_۱\times M_۲$ تعریف نمود که به واسطهٔ آن $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ دیفرانسیلپذیر شوند. به ازاء هر دو دستگاه مختصات (x_i,U_i) بر M_i (که $i=۱,۲$)، همیومورفیسم

$$x_۱\times x_۲:U_۱\times U_۲\to\mathbb{R}^{n_۱+n_۲}$$
$$(x_۱,x_۲)(p_۱,p_۲):=(x_۱(p_۱),x_۲(p_۲))$$

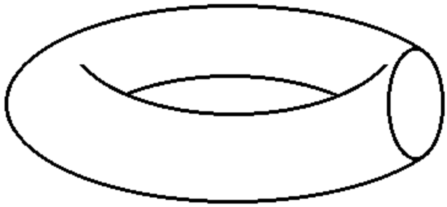
را در نظر می‌گیریم. یعنی، $x_۱\times x_۲=(x_۱\circ\varphi_۱,x_۲\circ\varphi_۲)$. سپس، این اطلس را به اطلسی کامل توسیع می‌دهیم.

بطور مشابه، بر $\mathbb{P}^n$ ساختاری دیفرانسیلپذیر وجود دارد که به واسطهٔ آن نگاشت $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{P}^n$ (با ضابطهٔ $f(p)=[p]=\{p,-p\}$) دیفرانسیلپذیر می‌شود. به ازاء هر دستگاه مختصات (x,U) برای $\mathbb{S}^n$، که U دارای این ویژگی باشد که اگر $p\in U$ آنگاه $-p\notin U$ (یعنی $f|_U$ یکبیک باشد)، نگاشت $x\circ(f|_U)^{-۱}$ همیومورفیسمی بروی $f(U)\subset\mathbb{P}^n$ است و هر دو چنین همیومورفیسمی با هم C^∞–مرتبط می‌باشند. گردایهٔ این همیومورفیسمها را به اطلسی ماکسیمال برای $\mathbb{P}^n$ گسترش می‌دهیم.

برای حصول به ساختارهای دیفرانسیلپذیر بر اغلب رویه‌های موجود، ابتدا باید بتوان منیفلد مرزدار C^∞ را معرفی کرد. برای این منظور کافی است بدانیم که نگاشت مفروض

$f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$ در صورتی دیفرانسیلپذیر شمرده می‌شود که قابل توسیع به نگاشتی دیفرانسیلپذیر بر یک همسایگی از $\mathbb{H}^n$ در $\mathbb{R}^n$ باشد. پس، مثلاً یک دسته، نمونه‌ای از یک منیفلد مرزدار است.

ساختار دیفرانسیلپذیر بر تیوب دو—دسته‌ای (یا دو حرفه‌ای) را با متصل کردن ساختار دیفرانسیلپذیر بر دو دسته‌اش می‌توان بدست آورد. جزئیات این بحث را در مسالهٔ ۱۴ می‌توانید ملاحظه کنید (به شکل ۵.۲ توجه شود).



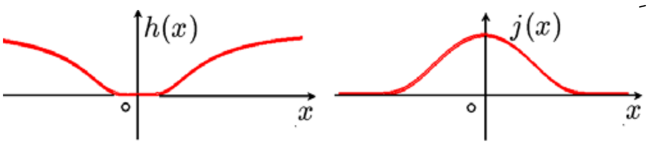
شکل ۵.۲: یک دسته

برای استفادهٔ بهینه از توابع C^∞، لازم است کمی بیشتر آنها را بشناسیم. وجود توابع C^∞ بر یک منیفلد مفروض به وجود توابع $C\infty$ بر $\mathbb{R}^n$ که در خارج یک مجموعهٔ فشرده صفرند، بستگی دارد. ذیلاً، به بیان حکم لازم در خصوص این گونه توابع C^∞ (از مثلاً صفحهٔ ۲۹ از حساب بر منیفلدها) می‌پردازیم.

(۱) تابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

هموار است و به ازای هر n ای $h^{(n)}(0) = 0$.



شکل ۶.۲

(۲) تابع $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

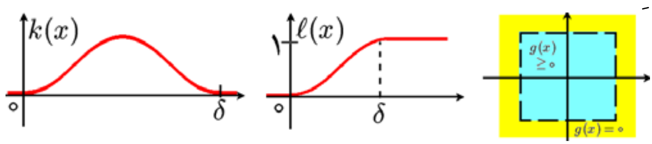
$$j(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^2} . e^{-(x+1)^2} & x \in (-1; 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

هموار است. به صورت مشابه، به ازای هر $\delta > 0$، تابع هموار $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ای وجود دارد که بر $(0; \delta)$ مثبت است و در خارج از آن صفر می‌باشد.

(۳) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با صابطهٔ

$$f(x) = \left(\int_0^x k(t)\,dt\right) \div \left(\int_0^\delta k(t)\,dt\right)$$

هموار است. به ازای $x \leq 0$ ها صفر است و به ازای $x \geq \delta$ ها یک است و کلاً صعودی می‌باشد.



شکل ۷.۲

(۴) تابع $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

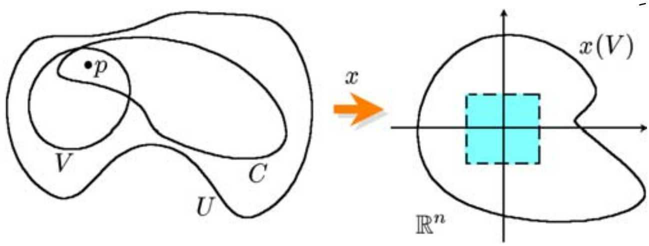
$$g(x) = j\left(\frac{x^1}{\varepsilon}\right) \bullet \cdots \bullet j\left(\frac{x^n}{\varepsilon}\right)$$

هموار است، بر $(-\varepsilon; \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon; \varepsilon)$ مثبت است و در سایر جاها صفر می‌باشد.

۱.۲.۲ لم. گیریم $C \subset U \subset M$ که C فشرده و U باز می‌باشد. در این صورت، تابعی C^∞ مانند $f : M \to [0; 1]$ چنان وجود دارد که f بر U برابر یک است و $\mathrm{Supp}(f) \subset U$، که $\mathrm{Supp}(f) := \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$ محمل تابع f می‌باشد. (با حالت ۲ از اثبات قضیهٔ ۱۵ مقایسه گردد).

اثبات: به ازای هر $p \in C$، دستگاهی مختصاتی (x, V) با $\bar{V} \subset U$ و $x(p) = 0$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، بازاء یک $\varepsilon > 0$ ای $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq x(V)$. اکنون تابع $g \circ x$ (که g در قسمت (۴) از بالا تعریف شد) هموار است بر V. به وضوح چنانچه آنرا در خارج از V برابر صفر تعریف کنیم، همچنان هموار می‌نامند. گیریم f_p توسیع آن به این طریق باشد. به ازاء هر $p \in C \subset M$ ای تابع f_p را می‌توان

ساخت؛ این تابع بر یک همسایگی از p که بستارش در U قرار دارد، مثبت است. چون C فشرده است، تعدادی متناهی از آنها برای پوشش دادن C کافی است (یعنی دامنهٔ مثبت بودن f_p ها می‌توانند C را با تنها تعدادی متناهی p بپوشاند) و بعلاوه، مجموع ای توابع $f_{p_1} + \cdots + f_{p_n}$ که به همسایگی‌های مورد نظر، وابسته‌اند و محملشان در U قرار دارد، قابل ساخت می‌باشد. این تابع بر C مثبت است و لذا به ازاء یک $\delta > 0$ ای به ازاء هر $p \in C$ ای از δ بزرگتر است. گیریم $f := \ell \circ (f_{p_1} + \cdots + f_{p_n})$، که ℓ در قسمت (۳) از بالا ساخته شد. این همان تابع مورد نظر در صورت قضیه است.



شکل ۸.۲

از نظر تکنیکی به ازاء هر $1 \leq r$ ای قادر به تعریف منیفلدهای C^r هستیم، نه تنها حالت منحصر بفرد $r = \infty$. ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را در صورتی C^r گوئیم که تمام مشتقات جزئی تا مرتبهٔ r ام آن پیوسته باشند). C^0–تابع را همان تابع پیوسته می دانیم و لذا C^0–منیفلد دقیقاً به معنی منیفلد به تعبیر در فصل یک است. منیفلد تحلیلی را نیز می‌توان تعریف نمود. (در صورتی می‌گوئیم $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}^n$ تحلیلی است که f را در یک همسایگی از a به صورت یک سری توان از عناصر به شکل $(x^i - a^i)$ به گونه‌ای بتوان بسط داده که در آن همسایگی به f همگرا باشد.) از نماد C^ω برای حالت تحلیلی استفاده می کنیم، بعلاوه به ازاء هر $0 \leq$ ای داریم $r < \infty < \omega$.

چنانچه $\alpha < \beta$، آنگاه کلیهٔ چارتهای در یک C^β–اطلس ماکسیمال با هم C^α–مرتبط هستند و بنا به لم ۱.۱.۲ چنین خانواده‌ای را می‌توان به یک اطلس ماکسیمال گسترش داد و به یک C^α–ساختار رسید. پس هر C^β–ساختار بر M به طور منحصر بفردی به یک C^α–ساختار بر M قابل گسترش است؛ ساختار کوچکتر، قویتر است. در نتیجه، C^0–ساختار (که از همهٔ همیومورفیسم‌های بشکل $x : U \to \mathbb{R}^n$ تشکیل می گردد) بزرگترین ساختار بر M است. عکس این حکم بدیهی، قضیه‌ای بسیار دشوار است: به ازاء هر $1 \leq \alpha$، هر C^α–ساختار دارای یک C^β–ساختار است که $\beta > \alpha$ دلخواه است؛ البته این ساختار منحصر بفرد نیست، اما در حد دیفیئومورفیسمها منحصر بفرد

است. این حکم را در اینجا اثبات نمی‌کنیم. در حقیقت معرفی مجدد C^α–منیفلدها که $\alpha \neq \infty$ در بحث، کار دشواری است. تنها مطلبی که به ذکر آن بسنده می‌کنیم این است که اثبات لم ۱.۲.۲ برای تابع C^α بر منیفلدی C^α که $0 \leq \alpha \leq \infty$ کفایت می‌کند؛ ولی برای حالت $\alpha = \omega$ بکلی غلط است. تابعی تحلیلی که بر یک همسایگی باز صفر شود، صفر است.

۳.۲ مشتقات جزئی

اکنون که به قدر کافی توابع دیفرانسیلپذیر در اختیار داریم، جای آن دارد که به چگونگی دیفرانسیلگیری از آنها بپردازیم. آنچه که به دنبال آن هستیم، تعریف مشتقات جزئی یک تابع دیفرانسیلپذیر دلخواه $f : M \to \mathbb{R}$، نسبت به یک دستگاه مختصات دلخواه (x, U) است.

در این وضعیت نیز از نماد گذاری کلاسیک به وفور استفاده می‌شود، و لذا بجا که منطق استفاده از این نماد گذاری برای مشتقات جزیی توابع به شکل $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ روشن شود. عدد

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a^1, \cdots, a^i + h, \cdots, a^n) - f(a)}{h}$$

را با نماد $D_i f(a)$ نشان می‌دهیم. بنا به قضیهٔ مشتق زنجیره‌ای، اگر $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشند، در این صورت

$$D_j(f \circ g)(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(g(a)).D_j g^i(a)$$

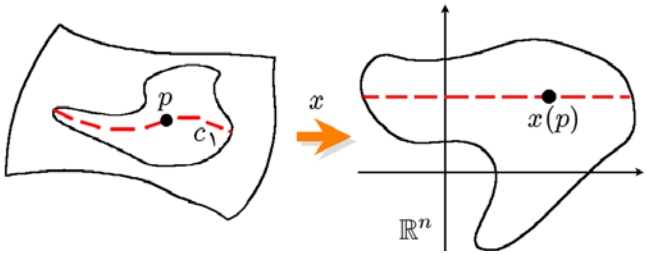
حال به ازاء هر تابع $f : M \to \mathbb{R}$ و هر دستگاه مختصات (x, U) تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = D_i(f \circ x^{-1})(x(p))$$

اگر منحنی $c_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ را با ضابطهٔ $c_i(h) = x^{-1}(x(p) + (0, \cdots, h, \cdots, 0))$ تعریف کنیم آنگاه ملاحظه خواهیم کرد که $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ دقیقاً $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(c_i(h)) - f(p))$ است. پس $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ میزان تغییرات f در امتداد منحنی c_i را می‌سنجد؛ در واقع، با $(f \circ c_i)'(0)$ برابر است. توجه شود که

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

چنانچه منحنی c_i و تصویرش در $\mathbb{R}^n$ را ترسیم کنیم، به شکل ۹.۲ می‌رسیم. اگر x نگاشت همانی $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت $D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$، که همان نماد مشتق جزئی کلاسیک است.



شکل ۹.۲

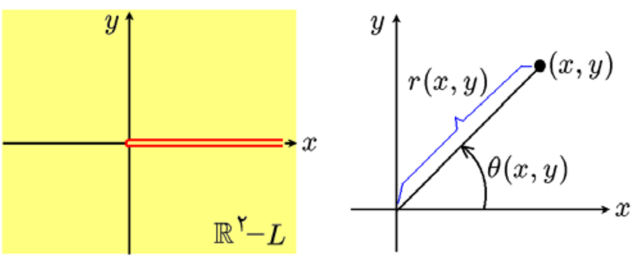
یک وضعیت کلاسیک دیگر از این نماد، وقتی پدیدار می‌شود که از نمادهای $\partial/\partial r$ و یا $\partial/\partial\theta$ در مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. بر زیر مجموعهٔ

$$A := \mathbb{R}^2 - L := \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, x \geq 0\}$$

از $\mathbb{R}^2$ دستگاه مختصات $P : A \to \mathbb{R}^2$ را به صورت

$$P(x,y) := (r(x,y), \theta(x,y))$$

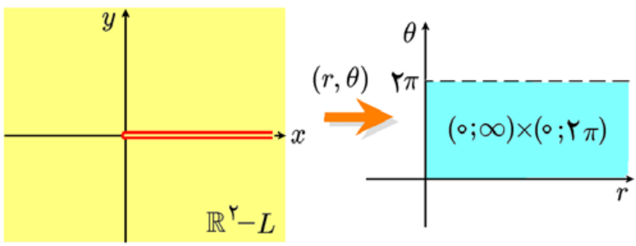
تعریف می کنیم، که $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$، $\theta(x,y)$ عددی منحصر بفرد در $(0;2\pi)$ است که



شکل ۱۰.۲

$$\begin{array}{lll} y/x = \tan(\theta(x,y)) & x \neq ۰ & \text{اگر} \\ \theta(x,y) = \pi/۲ & x = ۰ < y & \text{اگر} \\ \theta(x,y) = ۳\pi/۲ & x = ۰ > y & \text{اگر} \end{array}$$

به این ترتیب به یک دستگاه مختصات بر A به تعبیر بالا می‌رسیم (به شکل ۱۰.۲ توجه شود)؛ تصویر آن $(۰;۲\pi) \times \{r|r > ۰\}$ است. (شایان ذکر است که دستگاه مختصات موضعی ممکن است به A محدود نشود. بجای L می‌توان هر شعاع دیگری را در نظر گرفت و به دستگاهی با تصویر $(\theta_۰;\theta_۰ + ۲\pi) \times \{r|r > ۰\}$ رسید. به شکل ۱۱.۲ توجه شود.)

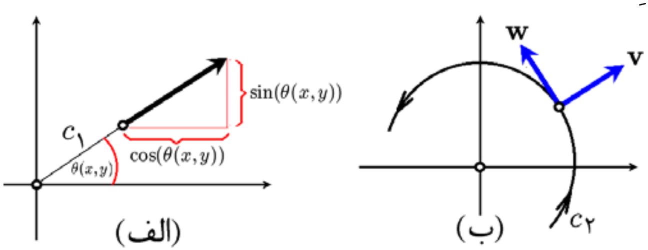


شکل ۱۱.۲

تابع وارون $P^{-۱}$ از خود P معروف تر است، چرا که آنرا به راحتی می‌توان تعریف نمود: $P^{-۱}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. از این فرمول $\partial f/\partial r$ را به صورت صریح می‌توان بدست آورد: $(f \circ P^{-۱})(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}(x,y) &= D_۱(f \circ P^{-۱})(P(x,y)) \\ &= D_۱ f(p^{-۱}(p(x,y))) \cdot D_۱((P^{-۱})^۱(x,y)) \\ &\quad + D_۲ f(p^{-۱}(p(x,y)) \cdot D_۲((P^{-۱})^۲(x,y)) \\ &= D_۱ f(x,y) \cdot \cos(\theta(x,y)) + D_۲ f(x,y) \cdot \sin(\theta(x,y)) \end{aligned}$$

بر اساس این فرمول، مقدار مشتق امتدادی تابع f در نقطهٔ (x,y) و در امتداد بردار $\mathbf{v}$ هادی $(\cos(\theta(x,y)), \sin(\theta(x,y)))$ با آغاز از نقطهٔ (x,y) محاسبه می‌کند. بردار $\mathbf{v}$ برداری است که از مبداء به (x,y) متصل می‌گردد. منحنی $c_۱$ آغازی از (x,y) با بردار هادی $\mathbf{v}$ تصویر یک خط موازی r-محور توسط $P^{-۱}$ است. به همین دلیل، این مشتق را با نماد $\partial f/\partial r$ می‌توان نشان داد. به قسمت (الف) از شکل ۱۲.۲ توجه گردد.



شکل ۱۲.۲

با محاسبهٔ مشابه می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta}(x,y) &= D_1 f(x,y)[-r(x,y)\sin(\theta(x,y))]\\ &\quad +D_2 f(x,y)[r(x,y)\cos(\theta(x,y))]\end{aligned}$$

بردار $\mathbf{w}=(-\sin(\theta(x,y)),\cos(\theta(x,y)))$ به $\mathbf{v}$ عمود است و لذا جهت آن در نقطهٔ (x,y) برابر بردار c_2 است که تصویر عکس منحنی موازی $\theta-$محور توسط P است. دلیل ظهور ضریب $r(x,y)$ این است که اگر θ از ۰ تا 2π حرکت کند، دایره به شعاع $r(x,y)$ است و هموار باندازهٔ $r(x,y)$ برابر تندتر حرکت می‌کند. بنابراین مشتق جزئی f در امتداد $\mathbf{w}$ به اندازهٔ $r(x,y)$ برابر مشتق جزئی f در امتداد $\mathbf{v}$ است. به قسمت (ب) از شکل ۱۲.۲ توجه گردد.

با استفاده از نماد $\partial f/\partial x$ بجای $D_1 f$ و نظایر آن، و حذف تکرار متغیرهای (x,y) در همهٔ فرمولهای بالا آنها را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\end{aligned}$$

از این فرمولها، بخصوص برای محاسبهٔ $\partial x/\partial r$ و . . . می‌توان استفاده نمود که (x,y) نمایشگر دستگاه مختصات همانی $\mathbb{R}^2$ است. در این صورت، $\partial x/\partial r=\cos\theta$ و . . . و لذا این فرمولها را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\end{aligned}$$

در نمادگذاری کلاسیک، اغلب قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق را به این طریق بیان می‌کنند. در ادامه، از این حکم استفاده می‌شود و بنابراین بجا است که آنرا به صورت زیر مجدداً مطرح کنیم:

۱.۳.۲ گزاره. اگر (x,U) و (y,V) دو دستگاه مختصات بر منیفلد M باشند، و $f: M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشد، در این صورت بر $U \cap V$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \tag{۱.۲}$$

اثبات: اگر خونسردی خود را حفظ کنید، خواهید دید که این حکم همان قاعدهٔ (کلاسیک) زنجیره‌ای مشتق است:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) &= D_i(f\circ y^{-1})(y(p))\\
&= D_i([f\circ x^{-1}]\circ[x^{-1}\circ y^{-1}])(y(p))\\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j(f\circ x^{-1})([x\circ y^{-1}](y(p))\bullet D_i[x\circ y^{-1}]^j(y(p))\\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j(f\circ x^{-1})(x(p)\bullet D_i[x\circ y^{-1}]^j(y(p))\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

در ادامه، لازم است **نمادگذاری انیشتن** را مطرح می‌کنیم. توجه شود که در فرمول آخر، اندیس j در بالای $\partial f/\partial x^j$ و در پائین $\partial x^j/\partial y^i$ ظاهار شد. در بعضی مواقع فرمولهایی از این نوع ظاهار می‌شود که نوشتن آنها جاگیر است. در چنین مواردی می‌توان نماد $\sum$ را حذف کرد و قرار داد کرد که باید جملات از این نوع را روی اندیسی که در بالا و پائین همزمان آمده است، جمع زد. من از این نماد استفاده نمی‌کنم، زیرا یادم می‌رود جمع بزنم و تنها حسن آن کوتاهتر شده طول این فرمولها است.

فرمول (۱.۲) را به صورت

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

می‌نویسیم که $\partial/\partial y^i$ عملگری است که تابع f را به $\partial f/\partial y^i$ می‌نگارد. عملگری که f را به $(\partial f/\partial y^i)(p)$ می‌نگارد، با نماد $\partial/\partial y^i|_p$ نشان می‌دهیم. در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

۴.۲ نقطهٔ بحرانی

عملگر $\ell = \partial/\partial x^i\big|_p$ دارای ویژگی به شرح زیر بنام «مشتق—نقطه‌ای» است، که بعداً بکار می آید.

۱.۴.۲ گزاره. به ازاء هر دو تابع دیفرانسیلپذیر $f, g : M \to \mathbb{R}$ و هر دستگاه مختصات (x, U) با $p \in U$، عملگر $\ell = \partial/\partial x^i\big|_p$ در رابطهٔ زیر صدق می کند

$$\ell(fg) = f(p)\ell(g) + \ell(f)g(p)$$

اثبات: بر عهدهٔ خواننده. $\square$

اگر (x, U) و (x', U') دو دستگاه مختصاتی بر M باشند، $n\times n$—ماتریس $\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)(p)$ درست برابر ژاکوبی نگاشت $x'\circ x^{-۱}$ در $x(p)$ است. این ماتریس نامفرد است. در واقع، معکوس آن $(\partial x^i/\partial x'^j)(p)$ می‌باشد.

حال اگر $f : M^n \to N^m$ نگاشتی هموار و (y, V) یک دستگاه مختصات حول $f(p)$ باشد، رتبهٔ $m \times n$—ماتریس

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)\right)$$

به انتخاب دستگاه مختصاتی (x, U) یا (y, V) بستگی ندارد. این عدد مشترک را **رتبهٔ f در p** می‌نامند.

نقطهٔ p را در صورتی یک **نقطهٔ تکین** f گوئیم که رتبهٔ f در p کمتر از m (بعد تصویر N) باشد، چنانچه نقطهٔ p تکین نباشد، آنرا نقطهٔ منظم f نامیده و $f(p)$ را یک **مقدار منظم** f می‌گوئیم. سایر نقاط در N را **مقادیر تکین** f می‌نامیم.

پس اگر $q \in N$، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه q یک مقدار منظم f است که به ازای هر $p \notin f(q)$ ای p یک نقطهٔ منظم f باشد. این شرط در حالت خاص $q \notin f(M)$ صحیح است. یعنی، هر نامقدار f، یک مقدار منظم آن می‌باشد.

اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، آنگاه وقتی و تنها وقتی x نقطهٔ تکین f است که $f'(x) = 0$. احتمال دارد که همهٔ نقاط در بازهٔ $[a;b]$ تکین باشند، که البته این حالت تنها در صورتی ممکن است که f بر $[a;b]$ ثابت باشد. اگر همهٔ مقادیر تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تکین باشد، در این صورت در همه جا $D_1 f = D_2 f = 0$ و لذا باز هم f ثابت است. از سوی دیگر این امکان وجود دارد که همهٔ نقاط $\mathbb{R}^2$ نقاط تکین $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ باشند، اما تابع ثابت نباشد؛ مثلاً تابع $f(x,y) = x$. البته در این حالت تصویر $f(\mathbb{R}^2)$ برابر $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ است که زیر مجموعه‌ای بسیار کوچک از $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. قضیه‌ای بسیار مهم در خصوص نقاط تکین وجود دارد که این حکم را تعمیم می‌دهد. برای معرفی آن به چند اصطلاح نیاز داریم.

یادآور می‌شویم که زیر مجموعهٔ $A \subset \mathbb{R}^n$ در صورتی **باندازهٔ صفر** است که به ازاء هر $\omega > 0$ ای یک دنباله $B_1, B_2, B_3, \cdots$ از مستطیلهای (باز یا بسته) چنان یافت شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(B_n) < \omega \quad , \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

که (B_n) حجم B_n است. مفهوم مشابهی در خصوص زیر مجموعه‌های یم منیفلد می‌خواهم تعریف کنیم. برای این منظور به لمی نیاز داریم که خود به لمی از کتاب حساب بر منیفلدها بستگی دارد، که صورت آنرا مطرح می‌کنیم.

۲.۴.۲ لم. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مستطیل است و $f : A \to \mathbb{R}^n$ تابعی است که بازاء هر j, i با $i, j = 1, \cdots, n$، نا مساوی $\|D_j f^i 1 \leq M\|$ بر قرار است. در این صورت، بازاء هر $x, y \in A$ ای $\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|$.

۳.۴.۲ لم. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 بوده و $A \subset \mathbb{R}^n$ باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A)$ نیز باندازهٔ صفر است.

اثبات: چون $\mathbb{R}^n$ اجتماعی شما را از مجموعه‌های فشرده است، می‌توانیم فرض کنیم که A در مجموعه‌ای فشرده C قرار دارد. لم ۵ ایجاب می‌کند که M ای با این ویژگی وجود دارد که بازاء هر $y \in C$ و x ای

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|$$

بنابراین، F مستطیل با قطر d را به مجموعه‌ای تصویر می‌کند که قطر آن $\leq n^2 M d$ است. از این نتیجه می‌شود که اگر A باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A)$ نیز هست. $\square$

زیر مجموعهٔ A از منیفلد هموار n بعدی M را در صورتی باندازهٔ صفر گوئیم که دنباله‌ای از چارتها (x_i, U_i) با $A \subset \bigcup U_i$ چنان یافت شود که هر یک از مجموعه‌های $x_i(A \cup U_i) \subset \mathbb{R}^n$ باندازهٔ صفر باشد باشند. به کمک لم ۳.۴.۲ بسادگی ملاحظه می‌گردد که اگر $A \subset M$ باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $x(A \cup U) \subset \mathbb{R}^n$ نیز باندازهٔ صفر است، که (x, U) دستگاه مختصاتی دلخواه است. بالعکس، اگر این شرط بر قرار باشد، M همبند باشد، و یا اینکه تعداد مولفه‌های آن شما را باشد، آنگاه بسادگی از قضیهٔ ۲.۱.۱ نتیجه می‌شود که A باندازهٔ صفر است. (اما، اگر M اجتماعی مجزا از تعداد نا شما را کپی $\mathbb{R}$ باشد و A مجموعه‌ای باشد که از هر کپی $\mathbb{R}$ تنها یک نقطه در بر دارد، آنگاه A باندازهٔ صفر نیست). به این ترتیب از لم ۳.۴.۲، حکم زیر نتیجه می‌گردد:

۴.۴.۲ نتیجه. اگر $f : M \to N$ تابعی از کلاس C^1 بین منیفلدهای n بعدی باشد و $A \subset M$ باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A) \subset N$ نیز باندازهٔ صفر است.

اثبات: دنباله‌ای از چارتها (x_i, U_i) با $A \subset \bigcup_i U_i$ چنان وجود دارد که هر مجموعهٔ $x_i(A \cap U_i)$ باندازهٔ صفر است. اگر (y, V) چارتی بر N باشد، آنگاه $f(A) \cap V = \bigcup_i f(A \cap U_i) \cap V$. بنابه لم ۳.۴.۲، هر یک از مجموعه‌های

$$y(f(A \cap U_i) \cap V) = y \circ f \circ x^{-1}(x(A \cap U_i))$$

باندازهٔ صفر است. بنابراین $y(f(A) \cap V)$ نیز باندازهٔ صفر است. چون $f(U_i, u_i)$ در اجتماعی حداکثر شما را از مولفه‌های N قرار دارد، نتیجه می‌گیریم که $f(A)$ باندازهٔ صفر است. □

۵.۴.۲ قضیه (قضیهٔ سارد). اگر $f : M \to N$ تابعی از کلاس C^1 بین $n-$منیفلدها باشد و M به تعداد حداکثر شما را مولفهٔ داشته باشد، آنگاه مقادیر تکین f مجموعه‌ای باندازهٔ صفر در N تشکیل می‌دهند.

اثبات: چون حکم موضعی است، کافی است حکم را در صورتی در نظر بگیریم که N, M برابر $\mathbb{R}^n$ هستند. اما این حالت دقیقاً همان قضیهٔ ۳–۱۴ از کتاب حساب بر منیفلدها است.

۵.۲ قضیه‌های ایمرشن

نوع قویتر از قضیهٔ سارد وجود دارد که ما از آن استفاده نمی‌کنیم (مگر در مسالهٔ ۸–۲۴) که اذعان می‌دارد مقادیر تکین هر C^k–نگاشت $f : M^n \to N^m$، مشروط به آنکه $k \geq \max\{m-n, 0\} + 1$، باندازهٔ صفر است. قضیهٔ ۵.۴.۲ حالت ساده‌ای از این حکم کلی است و حالت $n < m$ بدیهی است (مسالهٔ ۲۰)[1] با اینکه قضیهٔ ۵.۴.۲ در آینده بسیار مفید خواهد بود، در حال حاضر توجهمان را بر این موضوع معطوف می‌کنیم که با داشتن رتبهٔ K تابع $f : M \to N$ در یک نقطه $p \in M$ تصویر آن چگونه است هنگامی که رتبهٔ f در یک همسایگی از p ثابت است، اطلاعات دقیق‌تری می‌توان بدست بدست آورد. توجه شود که اگر رتبهٔ f در p برابر k باشد، آنگاه در یک همسایگی از p رتبهٔ آن $\leq k$ خواهد بود. زیرا حداقل یک زیر ماتریس $k \times k$ از $(\partial(y^i \circ f)/\partial x^i)$ در نقطهٔ p دترمینان مخالف صفر دارد، و چون تابع دترمینان پیوسته است، پس در یک همسایگی از p مخالف صفر است.

۱.۵.۲ قضیه. اگر $f : M^n \to N^m$ در p با رتبهٔ k باشد، آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی (x, U) حول p و یک دستگاه مختصات موضعی (y, V) حول $f(p)$ به گونه‌ای وجود دارد که $y \circ f \circ x^{-1}$ به صورت

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^k, \psi^{k+1}(a), \cdots, \psi^m(a))$$

است. بعلاوه، اگر y دستگاه مختصات دلخواهی بر N گرد $f(p)$ باشد، آنگاه با تعویض مناسب مولفه‌های آن می‌توان دستگاه مختصات مناسب حکم اخیر را بدست آورد.

اگر f در یک همسایگی از نقطهٔ p با رتبهٔ k باشد، آنگاه دستگاههای مختصاتی (x, U) و (y, V) چنان یافت خواهند شد که

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^k, \cdots, 0)$$

۲.۵.۲ یادداشت. حالت خاص $M = \mathbb{R}^n$ و $N = \mathbb{R}^m$ با قضیهٔ کلی معادل است، چرا که حکم این قضیه موضعی است. چنانچه y چارت همانی $\mathbb{R}^m$ باشد، قسمت

[1] به کتاب توپولوژی از دیدگاه دیفرانسیلپذیری اثر میلنر یا کتاب درسهایی در هندسه دیفرانسیل اثر استرنبرگ مراجعه شود.

(۱) از قضیهٔ بالا اذعان می‌دارد که با اعمال دیفیئوموفیسمی بر $\mathbb{R}^n$ و سپس اعمال جایگشتی در مختصات $\mathbb{R}^m$، می‌توانیم مطمئن باشیم که f و k مولبهٔ اول را ثابت نگه دارد. روشن است که این دیفیئومورفیسم‌های بر $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$، زیرا ممکن است حتی f بر $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^k \times \{۰\}$ یکبیک هم نباشد، و مثلاً تصویر آن تنها نقاطی را شامل باشد که اولین مولفهٔ آنها صفرند.

در حالت (۲) در انتخاب y اختیار کمتری وجود دارد، زیرا ممکن است $f(\mathbb{R}^n)$ در هیچ زیر فضای k−بعدی از $\mathbb{R}^n$ قرار نگیرد.

اثبات: (۱) یک دستگا مختصات u گرد p انتخاب می‌کنیم. با اعمال جایگشت در توابع مختصاتی u^i و y^i در صورت لزوم، می‌توانیم آنها را طوری مرتب کنیم که

$$\det\left(\frac{\partial(y^\alpha\circ f)}{\partial u^\beta}(p)\right)\neq ۰ \qquad \alpha,\beta=۱,\cdots,k \tag{۲.۲}$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$x^\alpha := y^\alpha\circ f \qquad \alpha=۱,\cdots,k$$

$$x^r := u^r \qquad r=k+۱,\cdots,n$$

در این صورت، (۲.۲) ایجاب می کند که

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}(p)\right)=\det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial(y^i\circ f)}{\partial u^\beta} & \begin{matrix} & X & \\ ۱ & \cdots & ۱ \\ \vdots & & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰\end{matrix} \\ \hline \qquad O & \end{array}\right)\neq ۰ \tag{۳.۲}$$

این نشان می‌دهد که $x=(x\circ u^{-۱})\circ u$ دستگاهی مختصاتی در یک همسایگی از p است، زیرا به دلیل (۳.۲) و قضیهٔ تابع وارون، نگاشت $x\circ u^{-۱}$ در یک همسایگی از $u(p)$ دیفیئومورفیسم است. اکنون $q=x^{-۱}(a^۱,\cdots,a^n)$ به معنی $x(q)=(a^۱,\cdots,a^n)$ است. بنابراین $x^i(q)=a^i$ و در نتیجه

$$y^\alpha\circ f(q)=a^\alpha \qquad \alpha=۱,\cdots,k$$

$$u^r(q)=a^r \qquad r=k+۱,\cdots,n$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$y\circ f\circ x^{-۱}(a^۱,\cdots,a^n)=y\circ f(q)=(a^۱,\cdots,a^k,\cdots)$$

که در آن $q = x^{-1}(a^1, \cdots, a^n)$.

(۲) دستگاههای مختصاتی x و v را طوری انتخاب می‌کنیم که $v \circ f \circ x^{-1}$ به شکل (۲.۲) باشد. چون در یک همسایگی از p رتبهٔ f برابر k است، ماتریس مربعی پائین و سمت چپ X در ماتریس

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & O \\ \rule{3cm}{0.4pt}\; X & \begin{matrix} D_{k+1}\psi^{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & D_m\psi^m \end{matrix} \end{array} \right) \neq 0$$

بایستی در یک همسایگی از p صفر باشد. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\psi^r(a) = \bar{\psi}^r(a^1, \cdots, a^k) \qquad r = k+1, \cdots, m$$

اکنون، تعریف می‌کنیم

$$y^\alpha := v^\alpha \qquad y^r := v^k - \bar{\psi}r \circ (v^1, \cdots, v^k)$$

اگر $v(q) = (b^1, \cdots, b^m)$، آنگاه

$$y \circ v^{-1}(b^1, \cdots, b^m) = y(q) \tag{۴.۲}$$

$$= \Big(b^1, \cdots, b^k, b^{k+1} - \bar{\psi}^{k+1}(b^1, \cdots, b^k), \cdots \tag{۵.۲}$$

$$\cdots, b^m - \bar{\psi}^m(b^1, \cdots, b^k)\Big) \tag{۶.۲}$$

و در نتیجه، دترمینان ماتریس ژاکوبی

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial v^j}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & O \\ \rule{3cm}{0.4pt}\; X & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array} \right)$$

مخالف صفر است، و لذا y یک دستگاه مختصاتی در همسایگی $f(p)$ تشکیل می‌دهد. بعلاوه

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) =$$

$$\begin{aligned}
&= y\circ v^{-1}\circ v\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)\\
&= y\circ v^{-1}\Big(a^1,\cdots,a^n,\psi^{k+1}(a),\cdots,\psi^m(a)\Big)\\
&\stackrel{(1)}{=} y\circ v^{-1}\Big(a^1,\cdots,a^n,\\
&\qquad \psi^{k+1}(a)-\bar\psi^{k+1}(a^1,\cdots,a^n),\cdots\\
&\qquad \cdots,\psi^m(a)-\bar\psi^m(a^1,\cdots,a^n)\Big)\\
&= (a^1,\cdots,a^n,0,\cdots,0)
\end{aligned}$$

که در (۱) از (۶.۲) استفاده شده است. □

وقتی رتبهٔ f در قضیهٔ ۱.۵.۲ برابر n یا m می‌شود، حکم آن صورت خاصی پیدا می‌یابد.

۳.۵.۲ قضیه.

۱) اگر $m\le n$ و $f:M^n\to N^m$ در p با رتبهٔ m باشد، آنگاه به ازاء هر دستگاه مختصات (y,V) حول $f(p)$، دستگاهی مختصاتی (x,U) حول p وجود دارد که

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)=(a^1,\cdots,a^m)$$

۲) اگر $n\le m$ و $f:M^n\to N^m$ در p با رتبهٔ n باشد، آنگاه به ازاء هر دستگاه مختصات (x,U) حول p، دستگاهی مختصاتی (y,V) حول $f(p)$ وجود دارد که

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)=(a^1,\cdots,a^n,0,\cdots,0)$$

اثبات (۱): حالت خاصی از حالت (۱) از قضیهٔ ۱.۵.۲ است. تنها کافی است توجه شود که اگر $k=m$، آنگاه به وضوح در اثبات این حالت نیازی به اعمال جایگشت در مختصات y^i نیست تا ثابت شود که

$$\det\left(\frac{\partial(y^\alpha\circ f)}{\partial u^\beta}(p)\right)\neq 0\qquad \alpha,\beta=1,\cdots,m$$

بلکه، اعمال جایگشت بر u^i ها کافی است.

اثبات (۲): چون می بایستی رتبهٔ f در همهٔ نقاط $n \geq$ باشد، پس رتبهٔ f در یک همسایگی از p برابر n است. بهتر است حالت $M = \mathbb{R}^n$ و $N = \mathbb{R}^m$ را در نظر گرفته دستگاه مختصاتی y را برای $\mathbb{R}^m$ به گونه‌ای بسازیم که دستگاه مختصات نظیر به آن بر $\mathbb{R}^n$ به شکل همانی باشد. اکنون قسمت (۲) از قضیهٔ ۱.۵.۲ دستگاههای مختصاتی φ برای $\mathbb{R}^n$ و ψ برای $\mathbb{R}^m$ را به گونه‌ای فراهم می‌کند که

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^n, 0, \cdots, 0)$$

حتی اگر φ^{-1} را اعمال نکنیم، هنوز هم نگاشت f فضای $\mathbb{R}^n$ را به زیر مجموعه‌ای از $f(\mathbb{R}^n)$ می‌نگارد که ψ بر آن مقادیرش را در $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ اختیار می‌کند. یعنی، نقاط $\mathbb{R}^n$ به جاهایی در $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ تصویر می‌شوند، که احتمالاً مورد نظر ما نیست. این مشکل را با نگاشت دیگری بر $\mathbb{R}^m$ می‌توان اصلاح کرد. λ را به صورت

$$\lambda(b^1, \cdots, b^m) = (\varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^n), b^{n+1}, \cdots, b^m)$$

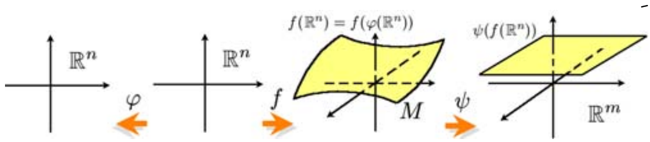
تعریف می‌کنیم. در این صورت چون $\varphi(a) = (b^1, \cdots, b^n)$، داریم

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi \circ f(a^1, \cdots, a^n) &= \lambda \circ \psi \circ \varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^n) \\
&= \lambda(b^1, \cdots, b^n, 0, \cdots, 0) \\
&= (\varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^n), 0, \cdots, 0) \\
&= (a^1, \cdots, a^n, 0, \cdots, 0)
\end{aligned}$$

و لذا $\lambda\psi$ همان y مورد انتظار است. چنانچه دستگاهی مختصاتی x بجز دستگاه همانی بر $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم، کافی است تعریف کنیم

$$\lambda(b^1, \cdots, b^m) = \Big(x(\varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^m)), b^{n+1}, \cdots, b^m\Big)$$

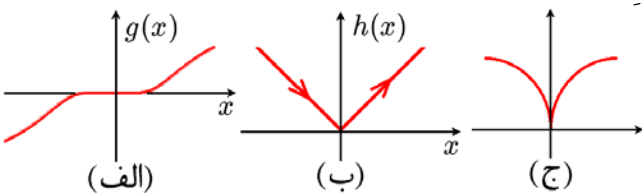
و در این صورت، به سهولت می‌توان نشان داد که باز هم $y = \lambda \circ \psi$ همان y مورد نظر است. به شکل ۱۳.۲ توجه شود. □



شکل ۱۳.۲

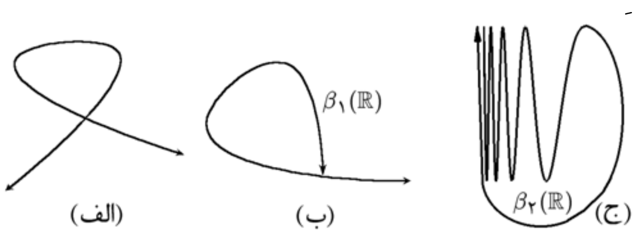
با اینکه در حالت (۱) از قضیهٔ ۳.۵.۲ نقطهٔ p یک نقطهٔ منظم f است، در حالت (۲) یک نقطهٔ تکین آن می‌باشد (چنانچه $n < m$)، اما حالت (۲) برای ما مهمتر است. تابع دیفرانسیلپذیر $f : M^n \to N^m$ را در صورتی **ایمرشن** گوئیم که رتبهٔ آن در تمام نقاط M برابر n بعد N باشد. البته در چنین وضعیتی لازم است $n \leq m$، و بعلاوه بنابه قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۵.۲، هر ایمرشن موضعاً یکبیک است (یعنی، نظر به فصل ۱، یک ایمرشن توپولوژی است). از سوی دیگر، لزومی ندارد که هر نگاشت دیفرانسیلپذیر f حتماً ایمرشن باشد، حتی اگر بطور فراگیر یکبیک باشد. ساده‌ترین مثال از این دست، تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = x^۳$ است که در آن $f'(۰) = ۰$. مثال دیگر، عبارت است از تابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باضابطهٔ $h(x) := (g(x), |g(x)|)$ می‌باشد، که در آن

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^۲} & \text{اگر } x > ۰ \\ ۰ & \text{اگر } x = ۰ \\ -e^{-x^۲} & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$



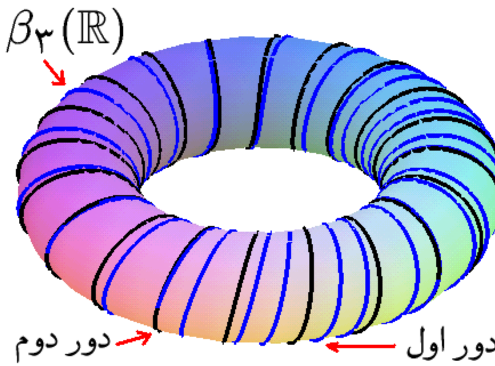
شکل ۲.۱۴

با اینکه بنظر نمودارش به نمودار تابعی غیر دیفرانسیلپذیر می آید (که این طور نیز هست!)، ولی خود این منحنی دیفرانسیلپذیر می‌باشد. در واقع می‌توان نشان داد که سرعت آن در نقطهٔ $(۰, ۰)$ برابر ۰ است. بسادگی می‌توان منحنی‌ای را ساخت که تصویر آن شبیه شکل زیر است.



شکل ۱۵.۲

در شکل ۱۵.۲ سه ایمرشن از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^2$ ملاحظه می‌شود. با اینکه دومین و سومین ایمرشن (β_2, β_1) یکبیک هستند، تصاویر آنها با $\mathbb{R}$ همیومورف نیستند. البته، حتی اگر ایمرشن یکبیک $f : P \to M$ همیومورفیسمی بروی تصویرش نباشد، می‌توان مترو ساختار دیفرانسیلپذیری بر $f(p)$ یافت که به واسطهٔ آنها، نگاشت احتوی $i : f(p)$ ایمرشن شود. در کل، زیر مجموعه‌ای M_1 از m با یک ساختار دیفرانسیلپذیر (البته، نه لزوماً سازگاری متر بر M_1 و M شرط شود) را در صورتی زیر منیفلد ایمرزد گوئیم که نگاشت احتوی $i : M_1 \to M$ ایمرشن باشد. در شکل زیر، تصویر ایمرشن $\beta_3\mathbb{R} \to$ $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ نشان داده شده است.



شکل ۱۶.۲

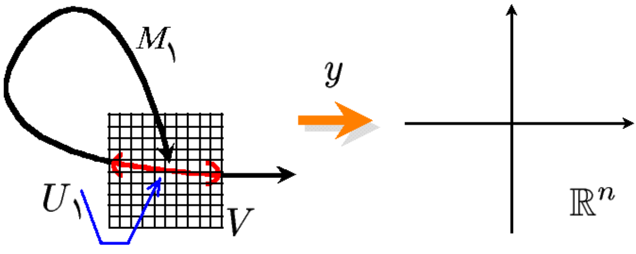
این شکل نشان می‌دهد که حتی ممکن است M_1 زیر مجموعه‌ای چگال از M باشد.

با وجود این همه مشکلات، چنانچه M_1 زیر منیفلدی $k-$بعدی و ایمرز از M^n بوده و U_1 همسایگی‌ای از نقطهٔ $p \in M_1$ در M_1 باشد، آنگاه یک دستگاه مختصات (y, V) از M حول p چنان یافت می‌شود که

$$U_1 \cap V = \{q \in M | y^{k+1}(q) = \cdots = y^n(q) = 0\}$$

این حکم، نتیجه‌ای مستقیم از قسمت (۲) از قضیهٔ ؟؟ با $f = i$ است. بنابراین، اگر $g : M_1 \to N$ (به عنوان تابعی بر منیفلد M_1) در یک همسایگی از نقطهٔ $p \in M_1$ هموار باشد، آنگاه تابع هموار $\bar{g}$ بر یک همسایگی $V \subset M$ از p چنان وجود دارد که $g = \bar{g} \circ i$ بر $V \cap M_1$. در واقع، می‌توانیم تعریف کنیم

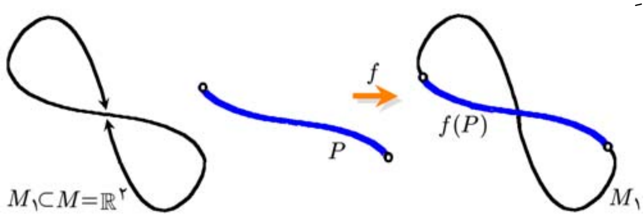
$$\tilde{g} = g(q') \quad \text{که} \quad \begin{array}{ll} y^\alpha(q) = y^\alpha(q) & \alpha = 1, \cdots, k \\ y^r(q') = 0 & r = k+1, \cdots, n \end{array}$$



شکل ۱۷.۲

از سوی دیگر، حتی اگر g بر کل M_1 هموار باشد، قادر به تعریف $\tilde{g}$ بر M نیستیم. مثلاً، اگر g یکی از توابع $\beta_i^{-1} : \beta_i(M) \to \mathbb{R}$ با $i = 1, 2, 3$ باشد، این کار ممکن نیست.

مشکل دیگری نیز در مورد زیر منیفلدهای ایمرز وجود دارد. اگر $M_1 \subset M$ زیر منیفلد ایمرزد باشد و $f : p \to M$ تابعی هموار با $f(p) \subset M_1$، آنگاه لزومی ندارد که وقتی f را به عنوان نگاشتی بتوی M_1 (ساختار C^∞) در نظر می‌گیریم، این نگاشت f هموار باشد. مشکل زیر نشان می‌دهد که حتی اگر f به عنوان نگاشتی بتوی M_1 پیوسته باشد، باز هم این مشکل وجود دارد. گزارهٔ بعدی تنها چیزی است که می‌توان مطرح کرد.

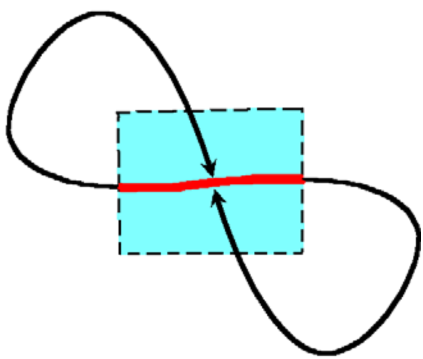


شکل ۱۸.۲

۴.۵.۲ گزاره. اگر $M_1 \subset M$ منیفلد ایمرزد، $f : P \to M$ تابعی C^∞ با $f(P) \subset M_1$، و f بعنوان تابعی به توی M_1 پیوسته باشد، آنگاه f به عنوان تابعی بتوی M_1 نیز پیوسته است.

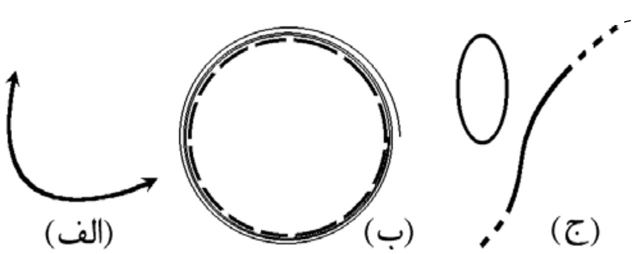
اثبات: گیریم $i : M_1 \to M$ نگاشت احتوی است. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $i^{-1} \circ f$ پیوسته باشد، آنگاه C^∞ نیز است. به ازاء هر $p \in P$ مفروض، دستگاهی مختصاتی y, V برای M حول $f(p)$ چنان انتخاب می‌کنیم که $U_1 = \{q \in V | y^{k+1}(q) = \cdots y^n(q) = 0\}$ یک همسایگی از p در M_1 باشد و $(y^1|U_1, \cdots, y^k|U_1)$ یک دستگاه مختصات موضعی برای M_1 روی U_1 باشد.

بنابه فرض، $i^{-1} \circ f$ پیوسته است، و بنمابراین به ازاء هر زیر مجموعهٔ باز $S \subset M_1$، زیر مجموعهٔ $f^{-1} \circ i(S) \subseteq P$ باز است. بنابراین، f یک همسایگی از $p \in P$ را بتوی U_1 می‌نگارد. چون همهٔ توابع $y^j \circ f$ هموارند و $y^k, \cdots, y^1$ تشکیل یک دستگاه مختصات بر U_1 می‌دهند. چنانچه f به عنوان تابعی بتوی M_1 در نظر گرفته شود، هموار است. □



شکل ۱۹.۲

وقتی ایمرشن یکبیکی که بروی تصویرشان همیومورفیسم هستند را در نظر می‌گیریم، بسیاری از این مشکلات مرتفع می‌شود. چنین ایمرشنی را **نشاننده** می‌نامیم. زیر منیفلد ایمرزد $i : M_1 \to M$ نشاننده باشد. M_1 را در صورتی یک زیر منیفلد بسته M گوئیم که بعنوان زیر مجموعه‌ای از M بسته باشد.



شکل ۲۰.۲

طریقی مهم برای حصول به زیر منیفلدها وجود دارد. کره $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ که به صورت $\{x \mid \|x\|^2 = 1\}$ مطرح می‌گردد، نمونه‌ای خاص از این بحث است.

۵.۵.۲ گزاره. اگر $f : M^n \to N^m$ بر یک همسایگی از $f^{-1}(y)$ با رتبهٔ ثلبت k باشد، آنگاه $f^{-1}(y)$ زیر منیفلد بسته‌ای از M با بعد $n-k$ (و یا تهی) است. به ویژه، اگر y یک مقدار منظم نگاشت $f : M^n \to N^m$ باشد، در این صورت $f^{-1}(y)$ یک زیر منیفلد $(n-m)$–بعدی از M (یا تهی) است.

اثبات: بر عهدهٔ خواننده. □

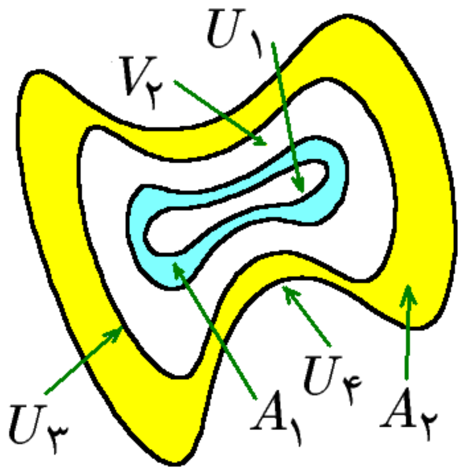
با اینکه طرح مفهوم منیفلد C^∞ به شکل مجرد خود که سابقاً آورده شد مزایایی دارد، اما چنانچه آنها را بعنوان زیر منیفلدهایی از فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ مطرح کنیم، درک شهودی آنها ملموستر خواهد بود. اکنون بر آنیم تا ثابت کنیم که هر منیفلد هموار (و همبند) را در یک $\mathbb{R}^N$ای می‌توان نشاند، و لذا هر منیفلدی را به عنوان زیر مجموعه‌ای از فضای اقلیدسی می‌توان تصور کرد (البته، این تجسم در بسیاری از موارد فایده‌ای در بر ندارد). این حکم را تنها در مورد منیفلدهای فشرده اثبات می‌کنیم، با این حال در شروع کار ابزاری که برای اثبات حالت کلی‌تر لازم است را مطرح می‌کنیم، چرا که در ادامه نیز به دفعات از این مقدمات استفاده می‌کنیم.

۶.۲ افراز یکانی

اگر $\mathcal{O}$ پوششی برای فضای M باشد، در صورتی پوشش $\mathcal{O}'$ را یک تظریف $\mathcal{O}$ گوئیم که به ازاء هر U در $\mathcal{O}'$ یک V ای در $\mathcal{O}$ یافت گردد که $U \subset V$ (مجموعه‌های در $\mathcal{O}'$ از مجموعه‌های در $\mathcal{O}$ کوچکتر باشند). هر تظریف از یک پوشش را **زیر پوشش** می‌نامند. پوشش $\mathcal{O}$ را در صورتی **موضعاً متناهی** گوئیم که به ازاء هر $p \in M$ یک همسایگی W داشته باشد که تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{O}$ را قطع کند.

۱.۶.۲ قضیه. اگر $\mathcal{O}$ پوشش بازی برای منیفلد M باشد، آنگاه پوشش بازی $\mathcal{O}'$ برای M وجود دارد که موضعاً متناهی است و تظریف $\mathcal{O}$ می‌باشد. بعلاوه، همهٔ اعضاء $\mathcal{O}'$ را مجموعه‌های باز دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ می‌توان گرفت.

اثبات: به وضوح می‌توانیم فرض کنیم که M همبند است. بنابه قضیه ۲.۱.۱، مجموعه‌های فشردهٔ $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و . . . به گونه‌ای وجود دارند که $M = C_۱ \cup C_۲ \cup C_۳ \cup \cdots$. به وضوح $C_۱$ همسایگی بازی $U_۱$ با بستار فشرده دارد. در این صورت، $\bar{U}_۱ \cup C_۲$ همسایگی بازی $U_۲$ با بستار فشرده دارد. با ادامهٔ این روند، زنجیره‌ای از مجموعه‌های باز U_i بدست می‌آوریم که هر $\bar{U}_i$ فشرده است و $\bar{U}_i \subseteq U_{i+۱}$، اجتماع همهٔ آنها، همهٔ C_i ها را در بر دارد و لذا M را می‌پوشاند. گیریم $U_{-۱} = U_۰ = \emptyset$.



شکل ۲۱.۲

اکنون M اجتماعی از مناطق حلقه‌ای شکل $A_i := \bar{U}_i - U_{i-۱}$ با $i > ۱$ است. چون هر یک از A_i ها فشرده‌اند، به وضوح A_i را به تعدای متناهی از مجموعه‌های باز، که هر یک در عضوی از $\mathcal{O}$ قرار دارند، و بعلاوه، هر یک در یک $V_i = U_{i+۱} - U_{i-۲}$ ای قرار دارند، می‌توان پوشاند. همچنین، این مجموعه‌ها را چنان می‌توانیم بگیریم که با $\mathbb{R}^n$ همئومورف باشند. به این طریق، پوششی $\mathcal{O}'$ بدست می‌آوریم که تظریف $\mathcal{O}$ است و موضعاً متناهی می‌باشد؛ زیرا هر، نقطه از U_i در هیچ V_j ای که $j > ۲ + i$ قرار ندارد.
$\square$

توجه شود که اگر $\mathcal{O}$ پوشش موضعاً متناهی و باز برای فضای M باشد و $C \subset M$ فشرده باشد، آنگاه C تنها تعدادی متناهی از اعضاء $\mathcal{O}$ را قطع می‌کند. این نشان می‌دهد که هر پوشش باز و موضعاً متناهی از یک منیفلد همبند، الزاماً شمارا است (نظیر پوششی که در اثبات قضیهٔ ۱.۶.۲ ساختیم).

۲.۶.۲ قضیه (لم کوچک شدن). گیریم $\mathcal{O}$ یک پوشش باز موضعاً متناهی برای منیفلد M است. در این صورت، به ازاء هر $U \in \mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز U' چنان می‌توان انتخاب نمود که $\bar{U} \subset U$ و گردایهٔ همهٔ U' ها نیز یک پوشش باز برای M است.

اثبات: به وضوح، می‌توانیم فرض کنیم که M همبند است. گیریم $\mathcal{O} = \{U_۱, U_۲, U_۳, \cdots\}$. در این صورت $C_۱ := U_۱ - (U_۲ \cup U_۳ \cup \cdots)$ مجموعه‌ای بسته و مشمول در $U_۱$ است و بعلاوه $C_۱ \cup U_۲ \cup U_۳ \cup \cdots$ برابر M می‌باشد. گیریم $U'_۲$ مجموعه‌ای باز با $C_۱ \subset U'_۱ \subset \bar{U}'_۱ \subset U_۱$ است. در این صورت

$$C_۲ := U_۲ - (U'_۱ \cup U_۳ \cup \cdots)$$

مجموعه‌ای بسته است که مشمول در $U_۲$ می‌باشد و $M = U'_۱ \cup C_۲ \cup U_۳ \cup \cdots$. گیریم $U'_۲$ مجموعه‌ای باز است که $C_۲ \cup U'_۳ \subset \bar{U}'_۲ \subset U_۲$. این روند را ادامه می‌دهیم.

به ازاء هر $p \in M$، n ای باندازهٔ کافی بزرگ وجود دارد که $p \in U_n$؛ زیرا $\mathcal{O}$ موضعاً متناهی است. اکنون

$$p \in U'_۱ \cup U'_۲ \cup \cdots \cup U'_n \cup (U_{n+۱} \cup U_{n+۲} \cup \cdots)$$

چون با تعویض U_{n+i} یا $U'_{n+۱}$ موجب حذف P نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم که

$$p \in U'_۱ \cup U'_۲ \cup \cdots$$

و برهان تمام است. □

۳.۶.۲ قضیه. گیریم $\mathcal{O}$ یک پوشش باز موضعا متناهی برای منیفلد M است. در این صورت، گردایه‌ای از توابع هموار $\varphi_U : M \to [۰, ۱]$، که $U \in \mathcal{O}$ دلخواه است، چنان وجود دارد که

۱) به ازاء هر U ای $\mathrm{Supp}\varphi_U$.

۲) به ازاء هر $p \in M$ ای $\sum_U \varphi_U(p) = ۱$ (چون بنا به (۱) این مجموع در یک همسایگی از p با تعدادی متناهی جمع صورت می‌پذیرد، این مجموع با معنی است).

اثبات: **حالت ۱:** هر یک از $U \in \mathcal{O}$ ها دارای بستار فشرده باشد. بنابراین، U' را مانند در قضیهٔ ۲.۶.۲ انتخاب می‌کنیم. با بکار گیری لم ۱.۲.۲ در مورد $\bar{U}' \subset U \subset M$، به تابعی هموار $\psi_U : M \to [۰, ۱]$ می‌رسیم که بر $\bar{U}'$ برابر یک است و محمل

آن زیر مجموعه‌ای از U است. چون U' ها M را می‌پوشانند، پس در همه جا داریم $\sum_{U\in\mathcal{O}'}\psi_U > 0$. اکنون کافی است تعریف کنیم

$$\varphi_U := \psi_U / \sum_{U\in\mathcal{O}} \psi_U$$

حالت ۲: حالت کلی. به شرط آنکه لم ۱.۲.۲ برای $C \subset U \subset M$ که C بسته (ولی نه لزوماً فشرده) و U باز است درست باشد، این حالت را نیز مثل قبل می‌توان اثبات نمود.

به ازاء هر $p \in C$، مجموعه‌ای باز $U_p \subset U$ با بستار فشرده انتخاب می‌کنیم. $M-C$ را با مجموعه‌های بازی V_α می‌پوشانیم که بستار فشرده دارند و مشمول در $M - C$ هستند. اکنون، پوشش باز $\{U_p, V_p\}$ دارای یک تظریف باز و موضعاً متناهی $\mathcal{O}$ است که حالت ۱ در مورد آن قابل اجرا است. گیریم

$$\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{O} | U \subset U_p \text{ به ازاء یک } p \text{ ای}\} \quad \text{که} \quad f = \sum_{U\in\mathcal{O}'} \varphi_U$$

این حاصل جمع هموار است، زیرا به ازای هر نقطه، همسایگی‌ای از آن وجود دارد که بر آن به صورت یک مجموع متناهی است؛ چرا که به ازاء همهٔ p ها داریم $\sum_U \varphi_U(p) =$ ۱ و هر گاه $U \subset V_\alpha$ داریم $\mathrm{Supp} f \subset U$. □

۴.۶.۲ نتیجه. اگر $\mathcal{O}$ یک پوشش باز برای منیفلد M باشد، آنگاه گردایه‌ای از توابع هموار $\varphi_i M \to [0, 1]$ چنان وجود دارد که

۱) گردایهٔ مجموعه‌های $\{p | \varphi_i(p) \neq 0, i \in \mathbb{N}\}$ موضعاً متناهی است.

۲) به ازاء هر $p \in M$ ای $\sum_i \varphi_i(p)$.

۳) به ازاء هر i یک $U \in \mathcal{O}$ ای وجود دارد که $\mathrm{Supp}\varphi_i \subset U$. □

گردایهٔ $\{\varphi_i : M \to [0, 1]\}$ صادق در خواص (۱) و (۲) از نتیجهٔ بالا را **یک افراز یکانی** می‌نامند. اگر این گردایه در (۳) نیز صدق کند، آنرا **افراز یکانی زیر دست** $\mathcal{O}$ می‌نامیم.

اکنون به راحتی آخرین قضیهٔ این فصل را می‌توان اثبات نمود.

۵.۶.۲ قضیه. اگر M^n منیفلد هموار فشرده باشد، آنگاه نشاننده‌ای $f : M \to \mathbb{R}^N$ با یک N مناسب وجود دارد.

اثبات: تعدادی متناهی دستگاه مختصاتی (x_1, U_1) و $\cdots$ (x_k, U_k) با $M = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ وجود دارد. U_i' ها را مثل قضیهٔ ۲.۶.۲ انتخاب کرده و توابع $\psi_i : M \to [0, 1]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که بر U_i' برابر یک است و محمل آن در U_i قرار دارد. برای $N = nk + k$، تابع $f : M \to \mathbb{R}^N$ را به صورت

$$f := (\psi_1 \bullet x_1, \cdots, \psi_k \bullet x_k, \psi_1, \cdots, \psi_k)$$

تعریف می‌کنیم. چون هر نقطه p به ازاء یک i ای در U_i' قرار دارد و چون ψ_i بر U_i' برابر است، پس تابع f ایمرشن می‌باشد؛ چرا که $N \times n$−ماتریس ژاکوبی $(\partial f^\alpha / \partial x_i^\beta)$ ماتریس $n \times n$ همانی $(\partial x_i^\alpha / \partial x_i^\beta)$ را در بر دارد. همچنین، f یکبیک است؛ زیرا، اگر فرض شود $f(p) = f(q)$، آنگاه یک i ای وجود دارد که $p \in U_i'$. در این صورت $\psi_i(p) = 1$ و بنابراین $\psi_i(q) = 1$. این نشان می دهد که $q \in U_i$. بعلاوه $\psi_i \bullet x_i(p) = \psi_i \bullet x_i(q)$ و بنابراین $p = q$، زیرا x_i بر U_i یکبیک است. $\square$

مساله ۳−۳۳ نشان می‌دهد که عملاً همیشه می‌شود N را $2n + 1$ اختیار نمود.

۷.۲ تمرینات

۱. (الف) نشان دهید که C^∞−مرتبط بودن، رابطهٔ هم‌ارزی نیست.

(ب) در اثبات لم ؟؟، نشان دهید که (همان طور که انتظار می‌رفت) همهٔ چارتهای در A' با هم C^∞−مرتبطند.

۲. (الف) اگر M فضایی متری با گردایه‌ای از همئومورفیسم‌ها $x : U \to \mathbb{R}^n$ باشد، که دامنهٔ آنها M را می‌پوشاند و همگی با هم C^∞−مرتبط هستند. (بدون استفاده از ناوردایی بعد) نشان دهید که در هر نقطه‌ای n منحصر به فرد است.

(ب) به صورت مشابه، نشان دهید که ∂M برای هر منیفلد مرزدار هموار M خوشتعریف است.

۳. (الف) نشان دهید که هر تابع هموار، پیوسته است، و ترکیب توابع هموار، هموار است.

(ب) نشان دهید که تابع $f : M \to N$ وقتی و تنها وقتی هموار است که به ازاء هر تابع هموار $g : N \to \mathbb{R}$ ای $g \circ f$ هموار باشد.

۴. بر $\mathbb{R}$ چند ساختار هموار متمایز وجود دارد؟ (در حد دیفئومورفیسم، تنها یکی وجود دارد؛ اما سؤال این نیست.)

۵. (الف) اگر $M \subset N$ باز و $\mathcal{A}'$ گردایه همهٔ (x,U) های در $\mathcal{A}$ باشد که $U \subset N$، نشان دهید $\mathcal{A}'$ برای N ماکسیمال است، به شرطی که $\mathcal{A}$ برای M ماکسیمال باشد.

(ب) نشان دهید که $\mathcal{A}'$ را به صورت مجموعهٔ همهٔ $(x|_{V\cap N}, V\cap N)$ که $(x,V) \in \mathcal{A}$ تعریف نمود.

(ج) نشان دهید نگاشت احتوی $i : N \to M$ هموار است و $\mathcal{A}'$ اطلس منحصر بفردی بر N است که این خاصیت را دارد.

٦. نشان دهید که دو تصویر $p_۱$ و $p_۲$ بر $\mathbb{S}^{n-۱}$ با $۲n$ همیومورفیسم f_i و g_i به طور هموار مرتبط هستند.

۷. (الف) اگر M منیفلد هموار باشد و $p,q \in M$، در این صورت نشان دهید که یک خم هموار $c : [\circ;۱] \to M$ با $c(\circ) = p$ و $c(۱) = q$ وجود دارد.

(ب) نشان دهید که حتی c را یک به یک می‌توان در نظر گرفت.

۸. (الف) نشان دهید که $M_۱ \times (M_۲ \times M_۳)$ و $(M_۱ \times M_۲) \times M_۳$ دیفئومورفند. همچنین نشان دهید که $M_۱ \times M_۲$ و $M_۲ \times M_۱$ نیز دیفئومورفند.

(ب) فرض کنید به ازاء $\bar{p}_۱ \in M_۱$ و $\bar{p}_۲ \in M_۲$ نگاشتهای $S_{\bar{p}_۲} : M_۱ \to M_۱ \times M_۲$ و $S_{\bar{p}_۱} : M_۲ \to M_۱ \times M_۲$ با ضابطهٔ به ترتیب $p \mapsto (p,\bar{p}_۲)$ و $p \mapsto (\bar{p}_۱, p)$ تعریف کنیم. این نگاشتها را «برش» می‌نامیم. نشان دهید برشها هموارند.

(ج) کلی‌تر نشان دهید که نگاشت $f : N \to M_۱ \times M_۲$ وقتی و تنها وقتی هموار است که نگاشت‌های مرکب $\pi_۱ \circ f : N \to M_۱$ و $\pi_۲ \circ f : N \to M_۲$ هموار باشند. به علاوه،ساختار هموارى که بر $M_۱ \times M_۲$ تعریف کردیم، تنها ساختاری است که این ویژگی را دارد.

(د) اگر $f_i : N \to M_i$ که $i = ۱,۲$ هموار باشند، آیا می‌توان رتبهٔ نگاشت $(f_۱,f_۲) : N \to M_۱ \times M_۲$ در p را بر حسب رتبهٔ f_i ها در p مشخص کرد؟ برای توابع $f_i : N_i \to M_i$ که $i = ۱,۲$، نگاشت $f_۱ \times f_۲ : N_۱ \times N_۲ \to M_۱ \times M_۲$ را با ضابطهٔ $(f_۱ \times f_۲)(p_۱,p_۲) = (f_۱(p_۱), f_۲(p_۲))$ تعریف می‌کنیم. آیا رتبهٔ آن را بر حسب رتبهٔ f_i ها می‌توان بیان نمود.

۹. گیریم $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ نگاشت با ضابطهٔ $p \mapsto [p]$ است. نشان دهید که $f : \mathbb{P}^n \to M$ وقتی و تنها وقتی هموار است که $f \circ g : \mathbb{S}^n \to M$ هموار باشد. رتبهٔ f و رتبهٔ $f \circ g$ را مقایسه کنید.

۱۰. (الف) اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز و $f : U \to \mathbb{R}$ موضعاً هموار باشد (یعنی، هر نقطه همسایگی‌ای دارد که f بر آن هموار است)، در این صورت نشان دهید که f هموار است. (بدیهی)

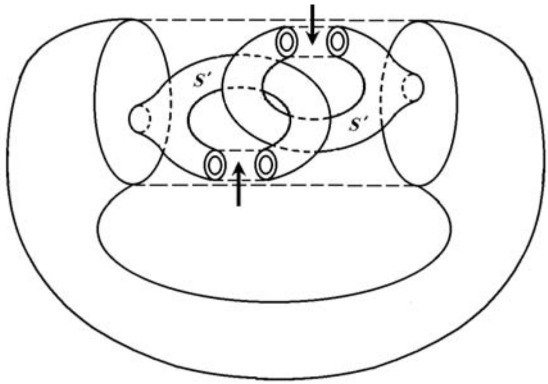
(ب) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ موضعاً هموار باشد، آنگاه ثابت کنید که f هموار است. به عبارت دیگر، f را به تابعی هموار بر یک همسایگی از $\mathbb{R}^n$ می‌توان گسترش داد. (نه چندان بدیهی)

۱۱. (الف) اگر $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ دارای دو تابع توسیع هموار g و h در یک همسایگی از $\mathbb{H}^n$ باشد، آنگاه توابع $D_j\, g$ و $D_j\, h$ در همهٔ نقاط $\mathbb{R}^{n-۱} \times \{۰\}$ یکی‌اند (و لذا می‌توان $D_j\, f$ را در این نقاط تعریف نمود).

(ب) اگر f بر بستار
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : ۰ < x\ ,\ ۰ < y < e^{-۱/x^۲}\right\}$$
تعریف شود، نشان دهید که حکم (الف) درست نیست.

۱۲. اگر M منیفلد مرزدار هموار باشد، آنگاه ساختار هموار منحصر بفردی بر ∂M وجود دارد که نگاشت احتوی $i : \partial M \to M$ نشاننده است.

۱۳. (الف) گیریم $U \subset M^n$ مجموعه‌ای باز است که مرز U زیر منیفلدی $-(n-$ ۱)بعدی هموار می‌باشد. نشان دهید که $\bar{U}$ یک منیفلد مرزدار $n-$بعدی است. (خوب است مثال زیر را در نظر بگیرید: اگر
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, ۰) < ۱ \text{ یا } ۱ < d(x, ۰) < ۲\}$$
آنگاه $\bar{U}$ منیفلدی مرزدار است، ولی $\partial\bar{U}$ با مرز U متفاوت است).



شکل ۲۲.۲

(ب) شکل ۲۲.۲ را در نظر بگیرید. این شکل را با اضافه کردن کپیهای S' در نواحی مشخص شده توسط $\uparrow$ می‌توان کامل کرد، و آن را تا ابد ادامه داد. شکل حاصل از گرفتن بستار S_1 را **کرهٔ شاخه‌دار الکساندر** S می‌نامند. نشان دهید S با $\mathbb{S}^2$ همیومورف است.

راهنمایی: نقاط اضافه‌ای که در بستار وجود دارند، با مجموعهٔ کانتور همیومورف است.

اگر U مؤلفهٔ بی‌کران $\mathbb{R}^3 - S$ باشد، آنگاه S با مرز U برابر است اما $\bar{U}$ منیفلد مرزدار ۲—بعدی است. بنابراین قسمت الف تنها برای زیر منیفلدهای هموار درست است.

۱۴. (الف) نشان دهید نگاشتی $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ وجود دارد که

(۱) به ازاء هر x ای $f(x, 0) = (x, 0)$.

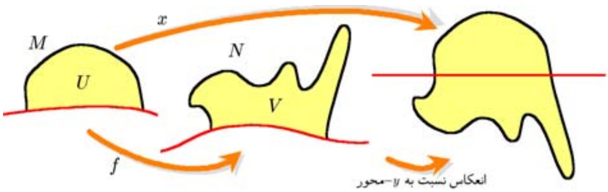
(۲) به ازاء هر $y > 0$ ای $f(x, y) \in \mathbb{H}$.

(۳) به ازاء هر $y < 0$ ای $f(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{H}^2$.

(۴) اگر f به نیم صفحهٔ بالا و یا نیم صفحهٔ پایین تحدید شود، هموار است، ولی خود f هموار است.

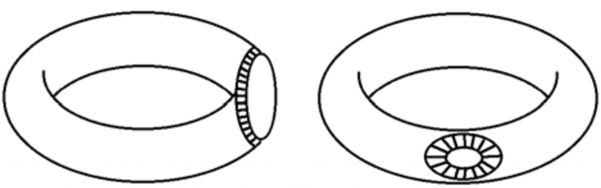
(ب) فرض کنید M و N منیفلد مرزدار هموارند و $f : \partial M \to \partial N$ دیفئومورفیسم است. گیریم $P = M \cup_f N$ مجموعهٔ حاصل از یکی‌گیری $x \in \partial M$ با $f(x) \in \partial N$ در اجتماع مجزای M و N است. اگر (x, U) دستگاه مختصاتی حول $p \in \partial M$ و (y, V) دستگاهی مختصاتی حول $f(p)$ باشند به گونه‌ای که $f(U \cap \partial M) =$

$V\cap\partial N$ و $(y\circ f)|_{U\cap\partial M}=x|_{U\cap\partial M}$، آنگاه هیمومورفیسمی از $U\cup V\subset P$ به $\mathbb{R}^n$ با فرستادن U به $\mathbb{H}^n$ توسط x و V به نیمهٔ پائینی صفحه به وسیلهٔ منعکس y، تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این روش، یک ساختار هموار بر P تعریف نمی‌کند.



شکل ۲۳.۲

(ج) حال فرض کنید همسایگی‌ای U از ∂M در M و دیفئومورفیسمی $\alpha:U\to\partial M\times[0;1)$ چنان وجود دارد که به ازاء هر $p\in\partial M$ ای $\alpha(p)=(p,0)$ و به صورت مشابه دیفئومورفیسم $\beta:V\to\partial N\times[0;1)$ را در نظر می‌گیریم. (بعداً، قادریم ثابت کنیم که چنین دیفئومورفیسم‌هایی همواره وجود دارند). نشان دهید ساختاری هموار و منحصر بفرد بر P چنان وجود دارد که نگاشتهای احتوای M و N در P هموارند و نگاشت القایی توسط α و β از $U\cup V$ به $\partial M\times(-1;1)$ دیفئومورفیسم است.



شکل ۲۴.۲

(د) فرض کنید $\mathbb{R}^2$ را به صورت اجتماعی از دو کپی از $\mathbb{H}^2$ در نظر بگیریم که نقاط بر $\partial\mathbb{H}^2$ از آن دو را یکی گرفته‌ایم. همچنین، فرض کنید با دو جفت مختلف (α,β) به صورت (ج) بر $\mathbb{R}^2$ ساختار هموار تعریف کرده‌ایم. نشان دهید منیفلدهای هموار حاصل با هم دیفئومورفند، اما این دیفئومورفیسم نگاشت همانی نیست.

۱۵. (الف) ساختار هموارى بر $\mathbb{H}^1\times\mathbb{H}^1$ تعریف کنید که به واسطهٔ آن نگاشت احتوی بتوی $\mathbb{R}^2$ هموار باشد. آیا احتوی می‌تواند نشاننده باشد؟ آیا تصاویر بر هر یک از مؤلفه‌ها، هموارند؟

(ب) اگر M و N منیفلد مرزدار باشند، ساختاری هموار بر $M\times N$ به گونه‌ای بیابید که همهٔ نگاشت‌های برشی (تعریف شده در مسألهٔ ۸) هموار باشند.

۱۶. نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

هموار است (البته می‌توان تابعی معرفی کرد که برای $x>0$ ها e^{-1/x^2} است و برای $x<0$ ها $e^{-1/|x|}$ است).

۱۷. به کمک لم ؟؟ و ضمیمه‌ای که در قضیهٔ ؟؟ آورده شده، نشان دهید که اگر C_1 و C_2 مجموعه‌های بستهٔ مجزا در M باشند، آنگاه تابعی هموار $f:M\to[0,1]$ چنان وجود دارد که $C_1\subset f^{-1}(0)$ و $C_2\subset f^{-1}(1)$. در واقع f ای می‌توان یافت که $C_1=f^{-1}(0)$ و $C_2=f^{-1}(1)$. اثبات ساده است، به شرطی که نکته‌اش را درک کنید:

(الف) کافی است به ازاء هر مجموعهٔ بستهٔ $C\subset M$ تابعی هموار f با $C=f^{-1}(0)$ تعریف کنیم.

(ب) گیریم $\{U_i\}$ پوششی شمارا برای $M-C$ است، هر U_i ای به شکل $U_i=x^{-1}(\{a\in\mathbb{R}^n:|a|<1\})$ است، و x دستگاهی مختصاتی است که زیر مجموعهٔ بازی از $M-C$ را بروی $\mathbb{R}^n$ می‌نگارد. گیریم $f_i:M\to[0,1]$ تابعی هموار با $f_i>0$ بر U_i و $f_i=0$ بر $M-U_i$ است. توابع نظیر به $\partial f_i/\partial x^j$، $\partial^2 f_i/\partial x^j\partial x^k$ و $\cdots$ را مشتقات جزئی مرکب f از رتبهٔ ۱، ۲ و $\cdots$ می‌نامیم. فرض کنیم α_i سوپریموم همهٔ مشتقات جزئی مرکب f_1، $\cdots$ و f_i تا مرتبهٔ $\leq i$ است. نشان دهید $f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i/(\alpha_i 2^i)$ هموار است و $C=f^{-1}(0)$.

۱۸. دستگاه مختصاتی (y^1,y^2) بر $\mathbb{R}^2$ با تعریف $y^1(a,b)=a$ و $y^2(a,b)=a+b$ را در نظر بگیرید.

(الف) $\partial f/\partial y^1(a,b)$ را به کمک تعریف محاسبه کنید.

(ب) آن را از گزارهٔ ؟؟ نیز محاسبه کنید. (برای محاسبهٔ $\partial I^i/\partial y^j$، هر یک از I^i ها را بر حسب y^1 و y^2 بیان کنید.) توجه شود که $\partial f/\partial y^1\neq\partial f/\partial I^1$ حتی

اگر $I^1 = y^1$؛ عملگر $\partial/\partial y^j$ به y و i بستگی دارد ولی به y^i ها خیر.

۱۹. لاپلاسین $\partial/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ را در مختصات قطبی بنویسید. (ابتدا $\partial/\partial x$ را بر حسب $\partial/\partial r$ و $\partial/\partial\theta$ محاسبه کنید؛ سپس، $\partial^2/\partial x^2$ را از روی آن محاسبه کنید). پاسخ $\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$ است.

۲۰. اگر $f : M^n \to N^m$ هموار از کلاس C^1 باشد و $n < m$، آنگاه $f(M)$ با اندازهٔ صفر است (البته، به شرطی که تعداد مؤلفه‌های M شمارا باشد).

۲۱. در شکل زیر روش تقسیم مربع $[0,1] \times [0,1]$ به 2^{2n} مربع $A_{n,1}, \cdots, A_{n,2}$ به ازاء $n = 1, 2, 3$ نشان داده شده است؛ در آنها مربع $A_{n,k}$ با اندیس k نشان داده شده است. شماره‌گزاری به صورت زیر است:

(الف) مربع پائین و دست چپ $A_{n.1}$ است.

(ب) مربع بالا و دست چپ $A_{n,2^{2n}}$ است.

(ج) مربعهای $A_{n,k}$ و $A_{n,k+1}$ وجه مشترک دارند.

(د) مربعهای $A_{n,4\ell+1}$، $A_{n,4\ell+2}$، $A_{n,4\ell+3}$ و $A_{n,4\ell+4}$ در مربع $A_{n-1,\ell+1}$ فرار دارند.

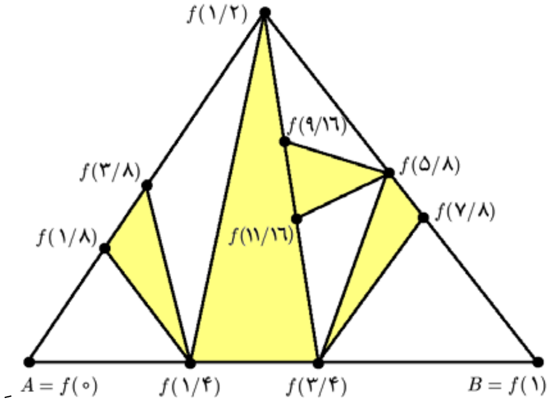
شکل ۲۵.۲

تابع $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ را با شرط

$$(k-1)/2^{2n} \leq t \leq k/2^{2n} \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \in A_{n,k}$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید f پیوسته، یک به یک و بروی $[0,1]\times[0,1]$ است.

۲۲. به ازاء $p/2^n \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم $f(p/2^n) \in \mathbb{R}^2$ به ترتیبی که در شکل زیر مشهود است.



شکل ۲۶.۲

(الف) نشان دهید f پیوستهٔ یکشکل است، و لذا دارای توسیعی پیوسته $g : [۰, ۱] \to \mathbb{R}^۲$ است. نشان دهید g یکبیک است و تصویرش با اندازهٔ صفر نیست. این کار را با انتخاب مناسب مثلثهای هاشور خورده نشان دهید.

(ب) با افزودن دایره‌ای در پائین تصویر g با قطر AB، تصویری همیومورف با $\mathbb{S}^۱$ به دست آورید. داخل این منحنی شبیه چه است؟

۲۳. گیریم $c : [۰, ۱] \to \mathbb{R}^n$ پیوسته است. به ازاء هر افراز $P = \{t_۱, \cdots, t_k\}$ از $[۰, ۱]$ تعریف می‌کنیم $\ell(c, P) := \sum_{i=۱}^{k} (c(t_i), c(t_{i-۱}))$. منحنی C را در صورتی **اصلاح‌پذیر** گوئیم که مجموعهٔ $\{\ell(c, P)\}$ از بالا کراندار باشد. $\sup_P\{\ell(c, P)\}$ را **طول** c می‌نامیم. نشان دهید که تصویر هر منحنی اصلاح شدنی، با اندازهٔ صفر است.

۲۴. (الف) اگر M منیفلد هموار باشد، ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعهٔ $M_۱ \subset M$ یک زیر منیفلد $k-$بعدی M است که گرد هر نقطه از $M_۱$ دستگاهی مختصاتی (x, U) بر M به گونه‌ای یافت گردد که $M_۱ \cap U = \{p : x^{k+۱}(p) = \cdots = x^n(p) = ۰\}$.

(ب) نشان دهید $M_۱$ در صورتی زیر منیفلد بستهٔ M است که چنین دستگاه مختصاتی گرد هر نقطه از M یافت شود.

۲۵. نشان دهید مجموعهٔ $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ تصویر هیچ ایمرشنی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^۲$ نیست.

۲۶. (الف) اگر $U \subset \mathbb{R}^k$ باز و $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ هموار باشد، ثابت کنید نمودار f بر U که به صورت $\Gamma_f = \{p, f(p) : p \in U\}$ تعریف می‌گردد، زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^n$ است.

(ب) ثابت کنید پس از تغییر مرتبهٔ مختصات (در صورت لزوم) هر زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^n$ به شکل (الف) به صورت موضعی قابل بیان است. (نه قضیهٔ ؟؟ و نه قضیهٔ ؟؟ به اندازهٔ کافی قوی نیستند؛ شما به قضیهٔ تابع ضمنی نیاز دارید (صفحهٔ ۴۱ از کتاب حساب منیفلدها.) قضیهٔ ؟؟ اساساً همان قضیهٔ ۲—۱۳ از کتاب حساب بر منیفلدها است؛ با مقایسهٔ آن با قضیهٔ تابع ضمنی نشان دهید که چگونه از ذکر برخی مطالب می‌توان دوری جست.)

۲۷. (الف) ثابت کنید که هر ایمرشن بین منیفلدها، نگاشتی باز است. (تصویر هر مجموعهٔ باز، باز است.)

(ب) اگر M منیفلد n—بعدی فشرده و N منیفلد n—بعدی همبند باشد، و $f : M \to N$ ایمرشن باشد. ثابت کنید f برو است.

۲۸. گزاره ؟؟ را ثابت کنید: اگر $f : M^n \to N$ بر همسایگی‌ای از $f^{-1}(y)$ با رتبهٔ k باشد، آنگاه $f^{-1}(y)$ زیر منیفلدی بسته با بعد $n-k$ (و یا تهی) است.

۲۹. گیریم $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ نگاشت $g([x, y, z]) = (yz, xz, xy)$ معرفی شده در فصل ۱ است، که تصویرش رویهٔ استانیر بود. نشان دهید که g در شش نقطه ایمرشن نیست (نقاط تصویری، نقاطی هستند که به فاصلهٔ $\pm$ ۱/۲ ار هر محور قرار دارند). روشی برای ایمرز کردن $\mathbb{P}^2$ در $\mathbb{R}^3$ تحت نام رویهٔ بوی وجود دارد. به صفحات ۳۱۷ تا ۳۲۱ از کتاب هندسه و تخیل اثر هیلبرت و کوهن—وزوت مراجعه شود.

۳۰. تابع پیوسته $f : X \to Y$ را در صورتی **سره** گوئیم که به ازاء هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $C \subset Y$، مجموعهٔ $f^{-1}(C)$ فشرده باشد. **مجموعهٔ حدی** $L(f)$ تابع f، مجموعهٔ همهٔ $y \in Y$ هایی است که به ازاء یک دنباله x_n با هیچ زیر دنبالهٔ همگرای در X، داشته باشیم $y = \lim f(x_n)$. ثابت کنید:

(الف) شرط لازم و کافی برای سره بودن f آن است که $L(f) = \emptyset$.

(ب) $f(X) \subset Y$ وقتی و تنها وقتی بسته است که $L(f) \subset f(X)$.

(ج) تابعی پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ با $f(\mathbb{R})$ بسته وجود دارد که $L(f) \neq \emptyset$.

(د) تابع پیوسته یک به یک $f: X \to Y$ وقتی و تنها وقتی همیومورفیسم است که $L(f) \cap f(M) = \emptyset$.

(ه) زیر منیفلد $M_1 \subset M$ وقتی و تنها وقتی زیر منیفلد بسته است که نگاشت احتوای $i: M_1 \to M_2$ سره باشد.

(و) اگر M منیفلد باشد، نگاشتی سره $f: M \to \mathbb{R}$ وجود دارد؛ تابع f در صورتی می‌تواند هموار باشد که M منیفلد هموار باشد.

۳۱. (الف) پوششی برای $[0, 1]$ بیابید که موضعاً متناهی است ولی نقطه متناهی نیست (یعنی، هر نقطه از $[0, 1]$ در تنها تعدادی متناهی عضو از پوشش قرار دارد).

(ب) لم کوچک شدن را در حالتی پوشش $\mathcal{O}$ شمارا و نقطه متناهی است، ثابت کنید (توجه شود که حقیقتاً از موضعاً متناهی بودن استفاده نمی‌شود).

(ج) لم کوچک شدن را در حالتی که $\mathcal{O}$ یک پوشش نقطه متناهی (نه لزوماً شمارا) برای فضایی دلخواه است، ثابت کنید. (شما به **لم زرن** نیاز دارید؛ گردایه‌های $\mathcal{C}$ از زوجهای (U, U') که $U \in \mathcal{O}$ و $U' \subset U$ و نیز اجتماع همهٔ U' هایی که $(U, U') \in \mathcal{C}$، همراه همهٔ $U \in \mathcal{O}$ هایی که فضا را می‌پوشانند، در نظر بگیرید.)

۳۲. (الف) اگر $M_1 \subset M$ زیر منیفلدی بسته، $U \supset M_1$ همسایگی‌ای دلخواه، و $f: M_1 \to \mathbb{R}$ هموار باشد، نشان دهید تابعی هموار $\tilde{f}: M \to \mathbb{R}$ وجود دارد که بر M_1 در شرط $\tilde{f} = f$ صدق می‌کند و $\mathrm{Supp}\tilde{f} \subset U$.

(ب) نشان دهید که اگر $M = \mathbb{R}$ و $M_1 = (0, 1)$، آنگاه حکم الف غلط است.

(ج) نشان دهید که اگر $\mathbb{R}$ را با منیفلد ناگسسته‌ای عوض کنیم، آنگاه حکم الف غلط است.

یادداشت: همچنین اگر $M = \mathbb{R}^2$، $M_1 = N = \mathbb{S}^1$ و f نگاشت همانی باشد، آنگاه حکم الف غلط است؛ در واقع، در این حالت f توسیعی پیوسته به نگاشتی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{S}^1$ وجود ندارد، اما اثبات به کمی توپولوژی نیاز دارد. اما، f را به تابعی هموار بر همسایگی‌ای از M_1 می‌توان گسترش داد (به صورت موضعی گسترش داده و سپس از افرازیکانی استفاده کنید).

۳۳. (الف) مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ نامنفرد با درآیه‌های حقیقی را **گروه خطی عمومی** نامیده و با نماد $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. چون $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{n^2}$ است، منیفلدی هموار است. **گروه خطی خاص** $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$ یا گروه **تک روندی**، زیر گروه همهٔ ماتریس‌های با دترمینان یک است. به کمک

فرمول در صفحهٔ ۲۴ از کتاب حساب بر منیفلدها در مورد $D(\det)$، نشان دهید که گروه $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ زیر منیفلد بسته‌ای با بعد $n^{۲} - ۱$ در $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ است.

(ب) مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ متقارن را به صورت $\mathbb{R}^{n(n+۱)/۲}$ می‌توان تصور کرد. نگاشت ψ از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ به مجموعهٔ ماتریس‌های متقارن را به ضابطهٔ $\psi(A) = A.A^t$ تعریف می‌کنیم، که A^t ترانهاد A است. زیر گروه $\psi^{-۱}(I)$ از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ را **گروه متعامد** $O(n)$ می‌نامیم. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای $A \in O(n)$ آن است که سطرهای A (یا ستون‌های آن) متعامد باشند.

(ج) نشان دهید $O(n)$ فشرده است.

(د) به ازاء هر $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ مفروض، نگاشت $R_A : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ را با ضابطهٔ $R_A(B) = BA$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که R_A دیفئومورفیسم است و به ازاء هر $A \in O(n)$ ای $\psi \circ R_A = \psi$. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، نشان دهید که به ازاء هر $A \in O(n)$ ای ماتریس $(\partial\psi^{ij}/\partial x^{k\ell}(A))$ هم رتبهٔ ماتریس $(\partial\psi^{ij}/\partial x^{k\ell}(I))$ است. (در اینجا $x^{k\ell}$ ها توابع مختصاتی در $\mathbb{R}^{n^۲}$ هستند و ψ^{ij} ها $n(n+۱)/۲$ تابع مؤلفه‌ای ψ هستند.) از گزارهٔ ؟؟ نتیجه بگیرید که $O(n)$ زیر منیفلد $\mathrm{GL}(n:\mathbb{R})$ است.

(هـ) با استفاده از فرمول

$$\psi^{ij}(A) = \sum_k a_{ik}\, a_{jk} \qquad (A = (a_{ij}))$$

نشان دهید

$$\frac{\partial\psi^{ij}}{\partial x^{k\ell}}(A) = \begin{cases} a_{j\ell} & k = i \neq j \\ a_{i\ell} & k = j \neq i \\ ۲a_{i\ell} & k = i = j \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که رتبهٔ این ماتریس $n(n+۱)/۲$ است (در نقطهٔ I و لذا در هر $A \in O(n)$ ای). نتیجه بگیرید که $O(n)$ با بعد $n(n-۱)/۲$ است.

(و) نشان دهید که به ازاء هر $A \in O(n)$ ای $\det A = \pm ۱$. گروه $O(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ را **گروه متعامد خاص** $\mathrm{SO}(n)$ یا **گروه دورانها** $R(n)$ می‌نامند.

۳۴. گیریم $\mathrm{Mat}(m,n)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ است و $\mathrm{Mat}(m,n;k)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m \times n$ با رتبهٔ k است. نشان دهید:

(الف) به ازاء هر $X_\circ \in \mathrm{Mat}(m,n;k)$، ماتریس‌های جایگشتی P و G چنان وجود دارند که $PX_\circ G = \begin{pmatrix} A_\circ & B_\circ \\ C_\circ & D_\circ \end{pmatrix}$، که $A_\circ$ یک ماتریس ناتکین $k \times k$ است.

(ب) $\varepsilon > \circ$ ای چنان وجود دارد که اگر همهٔ درآیه‌های $A - A_\circ$ کمتر از ε باشند، آنگاه A ناتکین است.

(ج) اگر $PXG = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ که درآیه‌های $A - A_\circ$ کمتر از ε هستند، آنگاه وقتی و تنها وقتی X با رتبهٔ K است که $D = CA^{-1}B$. راهنمایی: اگر I_k نمایشگر ماتریس همانی $k \times k$ باشد، آنگاه

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ X & I_{p-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{pmatrix}$$

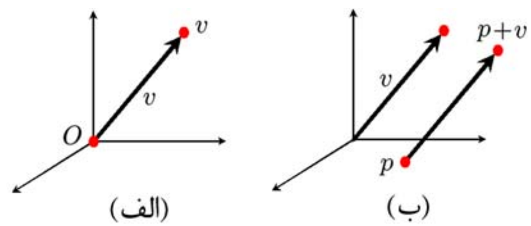
(د) $M(m,n;k) \subset M(m,n)$ زیر منیفلدی با بعد $k(m+n-k)$ است که $k \le m, n$.

فصل ۳

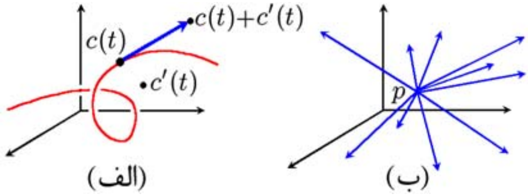
کلاف مماس

۱.۳ فضای مماس به فضای اقلیدسی

در بسیاری جاها، نقطهٔ $v \in \mathbb{R}^n$ را به عنوان پیکانی از o به v در نظر می‌گیرند. وضعیاتی نیز وجود دارد که مایلیم آن را به صورت پیکانی با شروع از نقطهٔ دلخواه $p \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم. به شکل ۱.۳ توجه شود. مثلاً، فرض کنید $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ خمی دیفرانسیلپذیر است. در این صورت $c'(t) = (c'(t), \cdots, c^n(t))$ نیز نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، اما بین $c(t)$ و $c(t)+c'(t)$ است و بر منحنی مماس می‌باشد. آن را **بردار سرعت** یا **بردار مماس** $c'(t)$ **به خم** c نامیده و به صورت پیکانی که از $c(t)$ به $c(t)+c'(t)$ امتداد دارد، در نظر می‌گیریم.



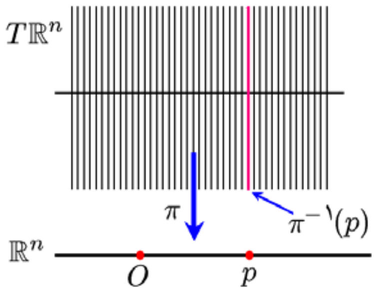
شکل ۱.۳



شکل ۲.۳

به منظور مدل سازی این تصور به شکل ریاضی، کافی است پیکان از p به $p+v$ را با زوج (p,v) توصیف کنیم. مجموعهٔ همهٔ چنین زوجهایی درست $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ است، که آنرا با نماد $T\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم، و **فضای مماس** $\mathbb{R}^n$ نامیده و اعضاء آنرا **بردارهای مماس به** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم (به شکل ۲.۳ توجه شود).

معمولاً $(p,v) \in T\mathbb{R}^n$ را با نماد v_p (بردار v در p) نشان می‌دهیم، نظر به این نماد گذاری، مجموعهٔ همهٔ (p,v) های با $v \in \mathbb{R}^n$ را با نماد $T_p\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم. فعلاً، بهتر است که هر عضو از $T\mathbb{R}^n$ را با تنها یک حرف v نشان دهیم.



شکل ۳.۳

برای حصول به اولین عضو از $v \in T\mathbb{R}^n$، نگاشت تصویر $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $\varphi(a,b) = a$ را در نظر می‌گیریم. به ازاء هر بردار مماس v، $\varphi(v)$ نقطه‌ای است که v بر آن استوار می‌باشد. از سوی دیگر، $\varphi^{-1}(p)$ را به عنوان زیر مجموعه‌ای بخصوص از $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ می‌توان در نظر گرفت؛ که برای حالت $n = 1$، به صورت در شکل ۳.۳ می‌توان آنرا نشان داد. این شکل انگیزه‌ای است برای اینکه $\varphi^{-1}(p)$ را **تار بر** p بنامیم. این تار را به طریق زیر به یک فضای برداری می‌توان تبدیل نمود: کافی است تعریف شود

$$
\begin{aligned}
(p,v) \oplus (p,w) &:= (p, v+w) \\
a \odot (p,v) &:= (p, av)
\end{aligned}
$$

(اعمال $\oplus$ و $\odot$) عملاً بترتیب بر $\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n}\varphi^{-1}(p)\times\varphi^{-1}(p)$ و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شوند. معمولاً $\oplus$ و $\odot$ را بترتیب با $+$ و $\bullet$ معمول نشان می‌دهند.)

اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ نگاشتی دیفرانسیلپذیر بوده و $p\in\mathbb{R}^n$، آنگاه از نگاشت خطی $Df(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$، نگاشتی خطی از $T_p\mathbb{R}^n$ به $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ با ضابطهٔ $v_p\mapsto[Df(p)(v)]_{f(p)}$ می‌توان تعریف نمود. این نگاشت خواص ظاهراً غیر عادی‌ای دارد که به تشریح آن خواهیم پرداخت. این نگاشت را با نماد f_{*p} نشان می‌دهیم؛ نگاشت $T\mathbb{R}^n\to T\mathbb{R}^m$ حاصل از اجتماع همهٔ f_{*p} ها را با نماد f_* نشان می‌دهیم. چون $f_{*p}(v)$ برداری در $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ تعریف می‌کند، دیاگرام زیر تعویض‌پذیر است (یعنی، دو ترکیب ممکن از $T\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ برابرند):

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{R}^n \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi"'] & T\mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \pi\circ f_* = f\circ\pi$$

بنابراین f_* نه تنها از روی f، بلکه از روی $Df(p)$ نیز ساخته می‌شود. این تنها دلیل تعریف f_* در این حالت خاص نیست. فرض کنید $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ تابع دیفرانسیلپذیر دیگری است؛ در نتیجه، بنابه قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$D(g\circ f)(p)=Dg(f(p))\circ Df(p) \tag{۱.۳}$$

بنابه تعریف، داریم

$$g_*\Big([Df(p)(v)]_{f(p)}\Big)=\Big(D_g(f(p))(Df(p)(v))\Big)_{g(f(p))}$$

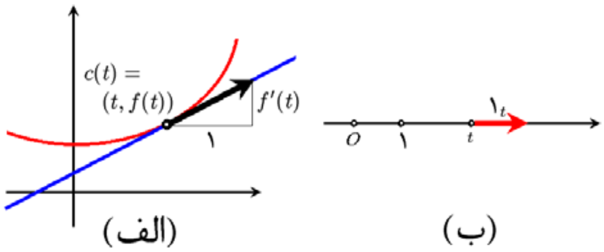
این فرمول را به کمک (۱.۳) به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$g_*(f_*(v_p)) \quad = \quad (g\circ f)_*(v_p)$$

بنابراین

$$g_*\circ f_* \quad = \quad (g\circ f)_*$$

چنانچه $f_*(v_p)$ در $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ نبود، این فرمول کاملاً بی معنی می‌شد؛ البته، تا اینجا استفاده از f_* صرفاً بیان مجدد قاعدهٔ زنجیره‌ای را در برداشت.



شکل ۴.۳

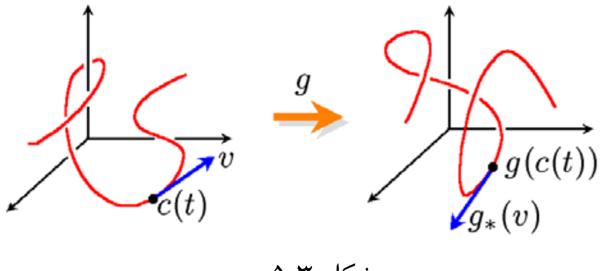
از این پس، همواره خواص و مفاهیم در ارتباط با ماتریس ژاکوبی، نظیر رتبه یا تکینگی را بر اساس f_* بیان می‌کنیم نه بر حسب Df. بردار مماس به منحنی $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ را بر اساس این مفهوم نیز می‌توان بیان نمود. بردار مماس به c در t را به صورت $c'(t)_{c(t)} \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم. (اگر، منحنی به شکل $c(t) = (t, f(t))$ باشد که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، آنگاه $c'(t)_{c(t)} = (۱, f'(t))_{(t)}$؛ این بردار در امتداد خط مماس به نمودار f در $(t, f(t))$ است. به قسمت (الف) از شکل ۴.۳ توجه شود.) توجه کنید که بردار مماس به نمودار c در لحظهٔ t دقیقاً عبارت است از

$$\begin{aligned} c_*(۱_t) &= [Dc(t)(۱)]_{c(t)} \\ &= (c^{۱\prime}(t), \cdots, c^{n\prime}(t))_{c(t)} \end{aligned}$$

که $۱_t = (t, ۱)$ برداریکهٔ مماس به $\mathbb{R}$ در t است (به قسمت (ب) از شکل ۴.۳ توجه شود). اگر $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه $g \circ c$ یک منحنی در $\mathbb{R}^m$ است. بردار مماس به $g \circ c$ در t عبارت است از

$$\begin{aligned} (g \circ c)_*(۱_t) &= g_*(c_*(۱_t)) \\ &= g_*(\text{بردار مماس به } c \text{ در } t) \end{aligned}$$

به شکل ۵.۳ توجه شود.



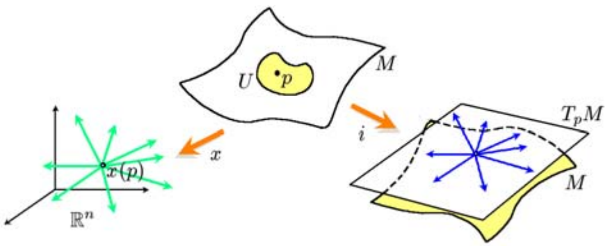
شکل ۵.۳

۲.۳ فضای مماس به منیفلد نشانده شده

حال منیفلد هموار n−بعدی M و نشانندهٔی $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک دستگاه مختصات (x, U) حول p داریم. در این صورت $i \circ x^{-1}$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^N$ با رتبهٔ n است. نتیجتاً، $(i \circ x^{-1})_*(T_{x(p)}\mathbb{R}^n)$ زیر فضایی n−بعدی از $T_{i(p)}\mathbb{R}^N$ است. به شکل ۶.۳ توجه گردد. این زیر فضا به دستگاه مختصاتی x بستگی ندارد؛ زیرا، اگر y دستگاه مختصاتی دیگری باشد، آنگاه

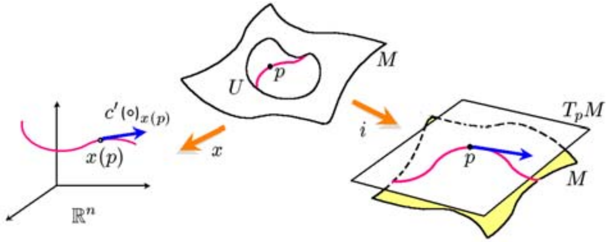
$$
\begin{aligned}
(i \circ y^{-1})_* &= (i \circ x^{-1} \circ x \circ y^{-1})_* \\
&= (i \circ x^{-1})_* \circ (x \circ y^{-1})_*
\end{aligned}
$$

و بنابراین $T_{x(p)}\mathbb{R}^n \to T_{y(p)}\mathbb{R}^n : (x \circ y^{-1})_{*y(p)}$ ایزومورفیسمی با وارون $(y \circ x^{-1})_{*x(p)}$ است.



شکل ۶.۳

به طریقی دیگر نیز می‌توان به این بحث توجه کرد، که به صورت در شکل ۷.۳ آن را توصیف نموده‌ایم. اگر $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ خمی با $c(0) = x(p)$ باشد، آنگاه $\alpha = i \circ x^{-1} \circ c$ خمی در $\mathbb{R}^N$ است که تماماً در $i(M)$ قرار دارد، و هر خم هموار در $i(M)$ نیز به این شکل است (اثبات؟). در این صورت $\alpha_*(1_0) = (i \circ x^{-1})_* \circ c_*(1_0)$، و بنابراین بردار مماس به هر α ای در $(i \circ x^{-1})_*(T_{x(p)}\mathbb{R}^n)$ قرار دارد. بعلاوه، هر بردار در این زیر فضا، بردار مماس یک α ای است؛ زیرا هر بردار در $T_{x(p)}\mathbb{R}^N$، بردار مماس به خمی c می‌باشد. بنابراین، زیر فضای n−بعدی ما درست عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس در $i(p)$ به خمهای هموار در $i(M)$. این زیر فضای n−بعدی را با نماد $T_p(M, i)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۷.۳

اکنون اجتماع (مجزای) فضاهای حاصل را قادریم تشکیل دهیم:

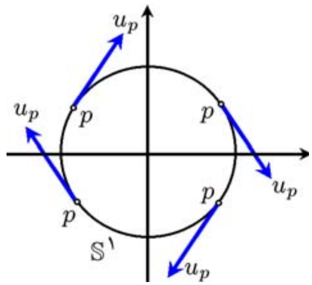
$$T(M,i) := \bigcup_{p\in M} T_p(M,i) \subset i(M)\times\mathbb{R}^N \subset T\mathbb{R}^N$$

نگاشتی تصویری $\varphi : T(M,i)\to M$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(v)=p \quad\Leftrightarrow\quad v\in T_p(M,i)$$

مثل در حالت $T\mathbb{R}^n$، هر تار $\pi^{-1}(p)$ ساختار فضای برداری دارد. با این حال، در ارائه مثالها باید کمی دقت بیشتر نمود.

منیفلد $M=\mathbb{S}^1$ و نگاشت تحتوای $i:\mathbb{S}^1\hookrightarrow\mathbb{R}^1$ را در نظر بگیرید. منحنی $c(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ از کلیهٔ نقاط $\mathbb{S}^1$ می‌گذرد و $c'(\theta)=(-\sin\theta,\cos\theta)$.



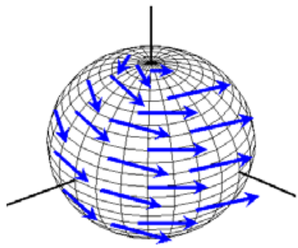
شکل ۸.۳

به ازای هر $p=(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{S}^1$ ای تعریف می‌کنیم $u_p=(-\sin\theta,\cos\theta)$ (روشن است که هر چنین برداری به بینهایت مقدار θ، یعنی $\theta+2k\pi$ با $k\in\mathbb{Z}$ قابل بیان می‌باشد، ولی مشکلی از این حیث وجود ندارد). در این صورت $T_p(\mathbb{S}^1,i)$ عبارت است از فضای شامل همهٔ مضارب u_p. به شکل ۸.۲ توجه شود. بنابراین همئومورفیسم

$f_1 : T(\mathbb{S}^1, i) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ با ضابطهٔ $f_1(\lambda u_p) = (p, \lambda)$ را داریم، که دیاگرام زیر را تعویضپذیر می‌سازد:

$$\begin{tikzcd} T(\mathbb{S}^1, i) \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathbb{S}^1 & \end{tikzcd}$$

یعنی $\pi' \circ f_1 = \pi$ که $\pi'(a,b) = a$. اگر مجموعه‌های بشکل $\pi'^{-1}(p)$ را تارهای π' تعریف کنیم، در این صورت هر تاری (به شکل طبیعی) یک ساختار فضای برداری دارد. تعویضپذیری دیاگرام به این معنی است که f_1 تارها را به تارها می‌برد؛ بعلاوه روشن است است که تحدی f_1 به هر تاری، یک ایزومورفیسم خطی بروی تصویرش می‌باشد.



شکل ۹.۳: سر کروی را نمی‌شود شانه کرد!

حال منیفلد $M = \mathbb{S}^2$ و نگاشت احتوای $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. در این حالت، هیچ نگاشت $f_2 : T(\mathbb{S}^2, i) \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ با ویژگیهای نگاشت f_1 مشروح در بالا وجود ندارد. زیرا، اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، آنگاه به ازای هر بردار ثابت $v \neq 0$ در $\mathbb{R}^2$، می‌بایستی مجموعهٔ بردارهای $\{f^{-1}(v_p) | p \in \mathbb{S}^2\}$ گردایه‌ای از بردارهای ناصفر باشد، که به هر نقطه از $\mathbb{S}^2$ برداری نسبت داده می‌شود، و این بردارها به شکل پیوسته تغییر می‌کنند. قضیه‌ای (دشوار) از توپولوژی اذعان می‌دارد که چنین وضعیتی غیر ممکن است (سر کروی را نمی‌شود شانه کرد! به شکل ۹.۳ توجه گردد).
مثال دیگر نیز هست که می‌توان اثبات نمود در آن حالت نیز نگاشت مناسبی $T(M, i) \to M \times \mathbb{R}^2$ وجود ندارد؛ اما بدون استفاده از قضیه‌ای دشوار و یا موضوعاتی نظیر آن! نگاشت $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ را نگاشت احتوای **نوار موبیوس** M در نظر بگیرید. به بیان دقیقتر، زیر مجموعه‌ای بخصوص از $\mathbb{R}^3$ که در فصل یک تعریف شد: M تصویر نگاشت

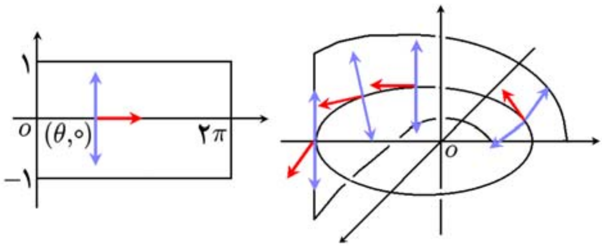
$f : [۰; ۲\pi] \times (-۱; ۱) \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ

$$\begin{aligned} f(\theta, t) &= \Big(۲\cos\theta + t\cos(\theta/۲)\cos\theta \\ &\qquad , ۲\sin\theta + t\cos(\theta/۲)\sin\theta, t\sin(\theta/۲)\Big) \end{aligned}$$

است. در هر نقطهٔ $p = (۲\cos\theta, ۲\sin\theta, ۰)$ از M، بردار

$$v_p := (-۲\sin\theta, ۲\cos\theta, ۰) = f_*\big((۱, ۰)_{(\theta, ۰)}\big)$$

به M مماس است. همین مطلب دربارهٔ همهٔ مضارب $f_*((۰, ۱)_{(\theta,۰)})$ درست است، که در شکل ۱۰.۳ با خطوط نقطه چین نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۳

توجه کنید که

$$\begin{aligned} f_*((۰, ۱)_{(\theta,۰)}) &= \Big[Df(۰, ۰)(۰, ۱)\Big]_{(۲,۰,۰)} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(۰, ۰)\right]_{(۲,۰,۰)} = (۱, ۰, ۰)_{(۲,۰,۰)} \end{aligned}$$

و حال آنکه

$$f_*((۰, ۱)_{(۲\pi,۰)}) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(۲\pi, ۰)\right]_{(۲,۰,۰)} = (-۱, ۰, ۰)_{(۲,۰,۰)}$$

ی بدان معنی است که هرگز قادر به حرکت بردارهای نقطه چین بر همهٔ نقاط $(۲\cos\theta, ۲\sin\theta, ۰)$ و به صورت پیوسته نیستیم؛ زیرا، اگر چنین می‌شد، آنگاه هر برداری به شکل $f_*((۰, \lambda(\theta))_{(\theta,۰)})$ می‌بود که $\lambda : [۰; ۲\pi] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. این تابع باید در همه جا مخالف صفر باشد و بعلامه $\lambda(۲\pi) = -\lambda(۰)$، که (بنا به قضیهٔ مقدار میانی از حسابان، که قضیه‌ای ساده است) محال می‌باشد. محال بودن انتخاب بردارهای نقطه چین بطور پیوسته، به

وضوح نشان می‌دهد که هیچ نگاشتی از $T(M,i)$ بروی $M\times\mathbb{R}^2$ همیومورفیسم بوده و تار به تار نیز باشد، وجود ندارد. به این ترتیب، حالت دیگری پیش آمد که $T(M,i)$ شبیه $M\times\mathbb{R}^n$ نیست.

با این حال، اگر $i:M\hookrightarrow\mathbb{R}^N$ نشاننده باشد، ساختار $T(M,i)$ از نظر موضعی بسیار ساده است: اگر (x,U) دستگاه مختصاتی بر M باشد، آنگاه $\pi^{-1}(U)$ (یعنی، بخشی از $T(M,i)$ که روی U قرار دارد) را معمولاً به صورت تار به تار و به شکل همیومورف به شکل همیومورف به روی $U\times\mathbb{R}^n$ می‌توان نگاشت. در واقع، به ازاء هر $p\in U$ ای، تار (M,i) با

$$m_p({}_{x(p)}\mathbb{R}^n) := (i\circ x^{-1})_{*x(p)}(T_{x(p)}\mathbb{R}^n)$$

برابر است، که m_p به جهت خلاصه نویسی وضع شده است. بنابراین، می‌توانیم تعریف کنیم

$$f:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n \quad f(m_p(v_{x(p)}))=(p,v)$$

به زبان فنی معمول، $T(M,i)$ موضعاً بدیهی است. این جنبه‌های $T(M,i)$ موجب می‌شود که $T(M,i)$ به خانواده‌ای فوق العاده بزرگ و مهم از ساختارها تعلق بگیرد:

۳.۳ کلاف برداری

کلاف برداری n–بعدی (یا **کلاف n–صفحه‌ای**) یک پنجم تایمی $\xi=(E,\pi,B,\oplus,\odot)$ است که

۱) E و B فضا هستند (آنها را بترتیب **فضای کلی** و **فضای پایهٔ** ξ می‌نامیم).

۲) $\pi:E\to B$ نگاشتی پیوسته به روی B است.

۳) $\oplus$ و $\odot$ نگاشتهایی به شکل

$$\begin{aligned}\oplus &: \bigcup_{p\in B}\pi^{-1}(p)\times\pi^{-1}(p)\to E\\ \odot &: \mathbb{R}\times E\to E\end{aligned}$$

هستند، که $\oplus(\pi^{-1}(p)\times\pi^{-1}(p))\subseteq\pi^{-1}(p)$ و همچنین $\odot(\mathbb{R}\times\pi^{-1}(p))\subseteq\pi^{-1}(p)$ و به واسطهٔ آنها هر تار $\pi^{-1}(p)$ یک فضای برداری n–بعدی است

(با میدان زمینهٔ $\mathbb{R}$)؛ به گونه‌ای که **شرط موضعاً بدیهی بودن** به شرح زیر برقرار است:

به ازاء هر $p \in B$، همسایگی U ای از p و همیومورفیسمی $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که به ازاء هر $q \in U$ ای یک ایزومورفیسم فضاهای برداری از $\pi^{-1}(q)$ به $\{q\} \times \mathbb{R}^n$ است.

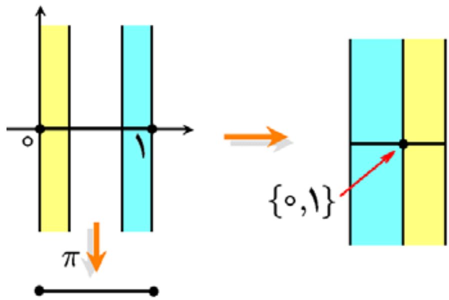
چون شرط موضعاً بدیهی بودن، در اساس شرطی موضعی است، به ازاء هر زیر مجموعهٔ $A \subset B$، بطور خودکار از کلاف مفروض $\xi = (E, \pi, B, \oplus, \odot)$ به کلافی $\xi|_A$ بر A می‌توان رسید. به بیان دقیقتر، به کلاف

$$\xi|_A \quad := \quad \Big(\pi^{-1}(A), \pi)\pi^{-1}(A), A, \\ \oplus|_{\bigcup_{p\in A} \pi^{-1}(p)\times\pi^{-1}(p)}, \odot|_{\mathbb{R}\times\pi^{-1}(A)}\Big)$$

ملاحظه می‌شود که این نمادگزاری بیش از حد طولانی است؛ و به همین دلیل، کلاف را به صورت $\pi : E \to B$، و یا حتی با E تنها نشان می‌دهیم. برای بردارهای $v, w \in \pi^{-1}(p)$ و $a \in \mathbb{R}$، عناصر $\oplus(u, w)$ و $\odot(a, v)$ را بترتیب با $v + w$ و av نشان می‌دهیم.

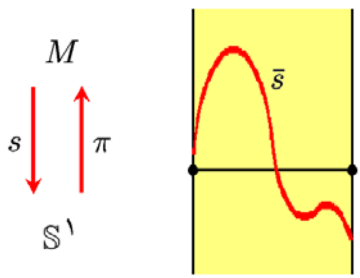
ساده ترین مثال از کلاف $n-$صفحه‌ای، عبارت است از خود $X \times \mathbb{R}^n$ با $\pi : X \times \mathbb{R}^n \to X$ تصویر روی اولین مؤلفه‌اش، که بر هر تار $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ ساختار بدیهی تعریف می‌گردد. این را **کلاف $n-$صفحه‌ای بدیهی روی** X نامیده و با نماد $\varepsilon^n(X)$ نشان می‌دهیم. کلاف مماس $T\mathbb{R}^n$ درست $\varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$ است.

پس همان طور که قبلاً ملاحظه گردید، کلاف $T(\mathbb{S}^1, i)$ با $\varepsilon^1(\mathbb{S}^1)$ هم ارز می‌باشد. اما، **هم ارزی** در اینجا یک اصطلاح فنی است: دو کلاف برداری مفروض $\xi_1 = \pi : E_1 \to B$ و $\xi_2 = \pi_2 : E_2 \to B$ را در صورتی هم ارز گوئیم (و می‌نویسیم $\xi_1 \cong \xi_2$) که همیومورفیسمی $h : E_1 \to E_2$ چنان یافت گردد که هر تار $\pi_1^{-1}(p)$ را به صورت ایزومورف روی $\pi_2^{-1}(p)$ تصویر کند. نگاشت h را هم ارزی می‌نامیم. کلاف هم ارز با $\varepsilon^n(B)$ را بدیهی می‌نامیم. (شرط بدیهی بودن در مورد کلافها درست به این معنی است که به ازاء هر نقطه p یک همسایگی U از p یافت می‌شود که $\xi|_U$ بدیهی است.)



شکل ۱۱.۳

کلافهای $T(\mathbb{S}^۲, i)$ و $T(M, i)$ بدیهی نیستند، با این حال مثال ساده‌ای از یک کلاف غیر بدیهی به شرح ذیل نیز می‌توان مطرح نمود: خود نوار موبیوس (نه $T(M, i)$)، در صورتی که به عنوان یک کلاف برداری ۱−بعدی روی $\mathbb{S}^۱$ در نظر گرفته شود، را در نظر بگیرید. M را با یکی گیری $(۰, a)$ با $(۱, -a)$ از روی $[۰, ۱]\times\mathbb{R}$ می‌توان ساخت، حال آنکه $\mathbb{S}^۱$ را با یکی گیری ۰ با ۱ بر $[۰, ۱]$ می‌توان بدست آورد. نگاشت π را برای $۰ < t < ۱$ به صورت $\pi\{(۰, a), (۱, -a)\} = \{۰, ۱\}$ تعریف می‌کنیم. شکل ۱۱.۳ موضعاً بدیهی بودن M در نزدیکی نقطهٔ $\{۰, ۱\}$ از $\mathbb{S}^۱$ را نشان می‌دهد. فرض کنید $M \to \mathbb{S}^۱ : s$ تابعی پیوسته با $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$ باشد (چنین تابعی را یک **برش** از M می‌نامند). این تابع به تابعی پیوسته $\bar{s} : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ که $\bar{s} = -\bar{s}(۱)$ نظیر است. چون بایستی $\bar{s}$ در جایی صفر گردد، پس بایستی برش s در جایی صفر شود (یعنی، باید به ازای یک $\theta \in \mathbb{S}^۱$ ای $s(\theta) \in \pi^{-۱}(\theta)$ صفر گردد). این نشان می‌دهد که واقعاً M کلافی غیر بدیهی است.



شکل ۱۲.۳

روشن است که هم ارزی مشابه ایزومورف بودن می‌باشد. مشابه هومومورفیسم بودن چنین است.[1]: نگاشت کلافی از $\xi_{۱}$ به $\xi_{۲}$ عبارت است از یک جفت از نگاشتهای پیوسته چون $(\tilde{f}, f)$، که $\tilde{f} : E_{۱} \to E_{۲}$ و $f : B_{۱} \to B_{۲}$، به گونه‌ای که

۱) دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd} E_{۱} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_{۱}"'] & E_{۲} \arrow[d, "\pi_{۲}"] \\ B_{۱} \arrow[r, "f"] & B_{۲} \end{tikzcd}$$

۲) نگاشت $\tilde{f} : \pi_{۱}^{-۱}(p) \to \pi_{۲}^{-۱}(f(p))$ به ازای هر $p \in B_{۱}$ ای خطی است.

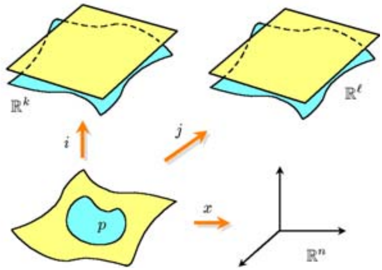
زوج (f_*, f) یک نگاشت کلافی از $T\mathbb{R}^k$ به $T\mathbb{R}^\ell$ است، که $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ تابع دیفرانسیلپذیر دلخواه است.

۴.۳ کلاف مماس بر منیفلد

اگر $M^n \subseteq \mathbb{R}^k$ و $N^m \subseteq \mathbb{R}^\ell$ زیر منیفلد، $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ و $j : N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$ نگاشتهای احتوی، و f در شرط $f(M) \subseteq N$ صدق کند، آنگاه f_* فضای $T(M, i)$ را به $T(N, j)$ می‌نگارد؛ برای ملاحظهٔ این امر کافی است توجه شود که $v \in T(M, i)$ بردار مماس به منحنی‌ای c در M می‌باشد، و لذا $f_*(v)$ بردار مماس به منحنی $f \circ c$ در N است، و در نتیجه $f_*(v) \in T(N, j)$. به این طریق به یک نگاشت—کلافی از $T(M, i)$ به $T(N, j)$ می‌رسیم. نکته اینجا است که در بحث حاضر $f : M \to N$ را نگاشتی هموار و موضعی می‌توان در نظر گرفت، چرا که f را به شکل موضعی به $\mathbb{R}^\ell$ می‌توان توسیع داد؛ یعنی، به حالتی که i و j نشانندهٔ دو منیفلد مجرد M و N هستند و نیز $f : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها است. کافی است نگاشت $j \circ f \circ i^{-۱} : i(M) \to j(N)$ را در نظر گرفته و آن را به شکل موضعی به $\mathbb{R}^k$ توسیع دهیم. حالتی که بررسی می‌خواهیم

[1] بسته به اینکه همهٔ کلافها را یکجا در نظر بگیریم، کلافهای مختلف روی فضاهای مختلف را در نظر بگیریم، و یا فضای پایهٔ بخصوصی را با کلافهای مختلف در نظر بگیریم، عملاً حالتهای مختلفی برای تعریف نگاشت—کلافی وجود دارد. همچنین، ممکن است f به ایزومورفیسمی روی کلافها، یا فقط همانی بودن، و یا حتی همیومورفیسم بودن، محدود گردد. در مسایل موضوعاتی از این قسم، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

کنیم، ساده‌تر است: یعنی، حالت $M = N$ و $f = \mathrm{Id}_M$، که i و j نشانندهٔ M در $\mathbb{R}^k$ و $\mathbb{R}^\ell$ باشند.



شکل ۱۳.۳

در این صورت، عناصر $T_p(M,i)$ را به شکل کلی $(i \circ x^{-1})_*(w)$ که $w \in T_{x(p)}\mathbb{R}^n$ می‌توان نوشت، و حال آنکه اعضاء $T_p(M,j)$ را به شکل $(j \circ x^{-1})_*(w)$ که $w \in T_{x(p)}\mathbb{R}^n$ می‌توان نوشت. چنانچه $(i\circ x^{-1})_*(w)$ را به $(j\circ x^{-1})_*(w)$ بنگاریم، به یک نگاشت—کلافی از $T(M,i)|_U$ به $T(M,j)|_U$ می‌رسیم، که بوضوح هم ارزی است. نگاشت $T_p(M,i) \to T_p(M,j)$ القائی بر تارها، مستقل از دستگاه مختصاتی است، زیرا اگر (y,V) دستگاه مختصاتی دیگری باشد، در این صورت

$$\begin{array}{ccc}
(i \circ y^{-1})_*(w) = (i \circ x^{-1})_*\big((x \circ y^{-1})_*(w)\big) \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \\
(j \circ y^{-1})_*(w) = (j \circ x^{-1})_*\big((x \circ y^{-1})_*(w)\big)
\end{array}$$

بنابراین، همهٔ این نگاشتها را می‌توان تجمیع نمود و به نگاشت ها ارزی از $T(M,i)$ به $T(M,j)$ رسید. به بیان دیگر، $T(M,i)$ مستقل از نشانندهٔ i است؛ لذا بجای $T(M,i)$ از TM می‌توان استفاده نمود. در حالی که توجه داریمَ عملاً TM نمایشگر خانواده‌ای از کلافهای هم ارز است، نه یک کلاف بخصوص. این شیوه‌ای است که اغلب جبریستها مایلند به این موضوع نگاه کنند، ولی حقیقتاً ظاهر خوشایندی ندارد! آنچه که به دنبال آن هستیم، ارائهٔ یک و تنها یک کلاف برداری برای هر M است به نحوی که کلیهٔ خواص $T(M,i)$ موجود در یک کلاس هم ارزی را داشته باشد و در عین حال باندازهٔ کافی طبیعی باشد. آیا قادر به این کار هستیم؟ بله! می‌توانیم. وقتی $T\mathbb{R}^n$ را بجز به معنی اولیه‌اش (یعنی، $(\varepsilon^n(\mathbb{R}^n))$ استفاده می‌کنیم، f_* نیز برای $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ فرق خواهد نمود. در این حالت، از اصطلاح «f_* قدیم» استفاده می‌کنیم.

۱.۴.۳ قضیه. به هر n−منیفلد M، یک کلاف n−صفحه‌ای TM روی M و به هر نگاشت هموار $f : M \to N$، یک نگاشت−کلافی (f_*, f) به گونه‌ای می‌توان متناظر نمود که:

۱) اگر $\mathrm{Id} : M \to M$ نگاشت همانی باشد، آنگاه نگاشت $\mathrm{Id}_* : TM \to TM$ نیز همانی باشد. اگر $g : N \to P$، آنگاه $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

۲) به ازاء هر تابع هموار $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$، هم ارزیهایی $t^n : T\mathbb{R}^n \to \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$ و $t^m : T\mathbb{R}^m \to \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)$ می‌توان یافت به گونه‌ای که دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
T\mathbb{R}^n \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "t^n"'] & T\mathbb{R}^m \arrow[d, "t^m"] \\
\varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\text{قدیمی } f_*"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)
\end{tikzcd}$$

۳) اگر $U \subseteq M$ زیر منیفلدی باز از M باشد، آنگاه TU با $(TM)|_U$ هم ارز است. به ازاء هر $f : M \to N$، نگاشت $(f|_U)_* : TM \to TN$ درست همان تحدید f_* است. به بیان دقیقتر، یک هم ارزی $TU \cong (TM)|_U$ به گونه‌ای وجود دارد که نمودارهای زیر تعویضپذیر می‌گردند. در اینجا $i : U \hookrightarrow M$ نگاشت احتوی است.[۲]

$$\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cong"'] & TM \\
(TM)|_U \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "(f|_U)_*"] \arrow[d, "i_*"'] & TM \\
TM \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

اثبات: ساخت TM با اینکه بسیار طبیعی است، حیله‌ای استادانه در آن نهفته است. تنها یک کلاف TM بدست می آوریم، ولی هر یک از اعضاء TM خانواده‌ای بزرگ از اشیاء هم ارز است.

چنانچه در ابتدای امر مشخص کنیم چه کلافهایی TM در اختیار داریم، مراحل ساخت را بهتر و ساده‌تر خواهیم فهمید. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه

[۲] وقتی ار نماد f_* استفاده می‌کنیم، بایستی متوجه باشیم که «f» در واقع به معنی سه تایی (f, M, N) است که $f : M \to N$. نگاشت همانی Id_U از U به خودش و نگاشت احتوی $i : U \hookrightarrow M$ متفاوتند، زیرا نگاشتهای $\mathrm{Id}_{U*} : TU \to TM$ و $i_* : TU \to TM$ مشخصاً متفاوتند (هر یک TU را به مجموعه‌ای خاص می‌نگارد).

$x_*\ :\ TU \to T(x(U))$ یک هم ارزی خواهد بود (معکوس این نگاشت، $(x^{-1})_*$ است). چون TU اساساً همان $(TM)|_U$ است، و $T(x(U))$ نیز اساساً همان $x(U)\times\mathbb{R}^n$ می‌باشد، هر نقطهٔ $e\in\pi^{-1}(p)$ ای توسط x_* به زوجی به شکل $(x(p),v)$ برده می‌شود، که در اینجا v عنصری از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد (و چون x_* فضای $\pi^{-1}(p)$ را بشکل ایزومورف روی $\{p\}\times\mathbb{R}^n$ می‌نگارد، هر v ای از $\mathbb{R}^n$ نیز به همین شکل ظاهر خواهد شد). اگر y دستگاه مختصاتی دیگری باشد، آنگاه به ازاء یک $w\in\mathbb{R}^n$ ای $y_*(e)$ با $(y(p),w)$ برابر است. به راحتی می‌توان ارتباط بین بردارهای v و w را مشخص نمود؛ چون $(x(p),v)$ توسط $y_*\circ x_*^{-1}=(y\circ x^{-1})_*$ به $y(p,w)$ نگاشته می‌شود، چنانچه $(y\circ x^{-1})_*$ را بعنوان «$(y\circ x^{-1})_*$ قدیم» تلقی کنیم، داریم

$$w=D(y\circ x^{-1})(x(p))(v) \qquad (۲.۳)$$

این شرط بدون اینکه کلافها مشخص باشند، با معنی و قابل استناد است. این همان نکته‌ای است که ما را قادر به تعریف TM می‌سازد.

اگر x و y دو دستگاه مختصات با دامنه‌های شامل p باشند و $v,w\in\mathbb{R}^n$، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$(x,v)\underset{p}{\sim}(y,w) \iff w=D(y\circ x^{-1})(x(p))(v)$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، به سادگی می‌توان تحقیق نمود که $\underset{p}{\sim}$ رابطه‌ای هم ارزی است؛ کلاس هم ارزی شامل (x,v) را با نماد $[x,v]_p$ نشان می‌دهیم. این کلاسهای هم ارزی را بردارهای مماس در p نامیده و مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس در $p\in M$ را با T_pM نمایش می‌دهیم؛ نگاشت π کلاسهای هم ارزی نسبت به $\underset{p}{\sim}$ را به p می‌نگارد. با فرمولهای

$$[x,v]_p+[x,w]_p:=[x,v,w]_p \quad , \quad a.[x,v]_p:=[x,a.v]_p$$

ساختار فضای برداری بر $\pi^{-1}(p)$ تعریف می کنیم. این تعریف مستقل از انتخاب دستگاه مختصاتی x یا y است، چرا که نگاشت $D(y\circ x^{-1})(x(p))$ ایزومورفیسمی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ است.

تعریف جدید برای TM، باعث نگاشتی یکبیک و پوشا به شرح زیر می‌شود:

$$t_x:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n \quad [x,u]_p\mapsto(q,v) \qquad (۳.۳)$$

دوست داریم که این گونه نگاشتها همیومورفیسم باشند، بنابراین لازم است به ازاء هر مجموعهٔ باز $A\subset U\times\mathbb{R}^n$، مجموعهٔ $t_x^{-1}(A)$ باز باشد، و لذا هر اجتماعی از این

مجموعه‌ها نیز باید باز باشد. متری بر TM وجود دارد که مجموعه‌های باز آن، درست همین مجموعه‌ها هستند. اما اثبات این امر کمی حساس است و از این رو به عنوان بخشی از یک مسالهٔ به خواننده سپرده می‌شود.

به این ترتیب، یک کلاف $\pi : TM \to M$ در اختیار داریم. تار $\pi^{-۱}(p)$ را با نماد T_pM نشان نمی‌دهیم، درست شبیه نماد $T_p\mathbb{R}^n$. ابته، شاید نماد T_pM بهتر باشد. اگر $f : M \to N$، و (x,U) و (y,V) دستگاه مختصاتی حول بترتیب p و $f(p)$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$f_*([x,y]_p) := [y, D(y \circ f \circ x^{-۱})(x(p))(v)]_{f(p)} \qquad (۴.۳)$$

البته، بایستی تحقیق شود که این تعریف مستقل از انتخاب x و y است (باز هم تمرین).

در این صورت، شرط (۱) از قضیه بدیهی است. برای اثبات (۲)، t^n را به صورت t_{Id} تعریف می‌کنیم که Id نگاشت همانی $\mathbb{R}^n$ است و t_x در (۳.۳) تعریف شده است، با اینکه تحقیق تعویضپذیری دیاگرام مشکلاتی دارد، حکم (۲) واضح است.

شرط (۳) نیز مشخصاً بدیهی است. در واقع، کلاف TU روی $p \in U$ تقریباً همان تار TM بر p است؛ تنها تفاوت آن این است که هر کلاس هم ارزی برای M، عناصر بیشتری دارد، زیرا در M دستگاههای مختصاتی بیشتری گرد p وجود دارد، تا دستگاههای مختصاتی در $U \subset M$ و گرد p. □

از این پس، کلاف $\pi : TM \to M$ را **کلاف مماس به** M می‌نامیم. اگر $i : M \to \mathbb{R}^k$ نشاننده باشد، آنگاه TM با $T(M,i)$ هم ارز است. در واقع، اگر (x,U) دستگاهی مختصات حول p باشد، و Id نگاشت یا دستگاه مختصاتی بدیهی $\mathbb{R}^k$ باشد، آنگاه بنابه (۴.۳) داریم

$$\begin{array}{c} i_*([x,v]_p) \;=\; \Big[\mathrm{Id}, D(i \circ x^{-۱})(p)(v)\Big]_{i(p)} \\ \Big\downarrow t^n \;=\; t_{\mathrm{Id}} \\ \Big(i(p), D(i \circ x^{-۱})(x(p))(v)\Big) \in T_p(M,i) \end{array}$$

پس $t^n \circ i_*$ یک هم ارزی است. اما $T(M,i)$ هیچ نقش دیگری در این داستان ایفاء نمی‌کند، و از این پس، از نماد TM بجای آن استفاده می‌کنیم.

اکنون که موفق به ساخت کلافی بر M دلخواه شدیم که با $T(M,i)$ هم ارز است، باید مشخص کنیم که این ساخت تا چه اندازه اتفاقی است. آیا کلافهای دیگر با این ویژگیها می‌توانیم بیابیم؟ پاسخ مثبت است، و دو نوع مختلف از چنین کلافهایی را در ادامه خواهیم ساخت.

به عنوان اولین مثال، منحنی‌هایی $c : (-\omega, \omega) \to M$ را در نظر می گیریم، که هر یک در یک همسایگی حول ۰ تعریف می‌شوند و $c(0) = p$. اگر (x, U) دستگاه مختصاتی‌ای گرد p باشد، تعریف می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{r}\text{به عنوان نگاشتی از } x\circ c_1, x\circ c_2 \\ \text{به } \mathbb{R} \text{ در } \mathbb{R}^n \text{ مشتق برابر دارند.}\end{array}\right. \Rightarrow \quad c_1 \underset{p}{\approx} c_2$$

کلاسهای هم ارزی به ازاء $p \in M$ های دلخواه، عناصر کلاف جدید ما $T'M$ هستند. به ازاء نگاشت $f : M \to N$ نگاشتی $f_\#$ وجود دارد که کلاس هم ارزی c نسبت به $\approx_p$ به کلاس هم ارزی $f \circ c$ نسبت به $\approx_{f(p)}$ نگاشته می‌شود. بدون پرداختن به جزئیات، اظهار می کنیم که بسادگی می توان نشان داد که این مثال حقیقتاً همان TM است. برای این منظور کافی است $[x, v]_p$ را به کلاس هم ارزی $x^{-1} \circ y$ نسبت به γ نظیر کنیم که γ منحنی‌ای در $\mathbb{R}^n$ با $\gamma'(0) = v$ و $f_\#$ را نیز به f_* متناظر کنیم.

در مثال دوم، اشیاء چندان ساده نیستند. بردار مماس در p را عملگری خطی ℓ تعریف می‌کنیم که بر مجموعهٔ همهٔ توابع هموار f تعریف می‌شود و «یک مشتق در p است» به این معنی که

$$\ell(fg) = f(p)\ell(g) + g(p)\ell(f)$$

قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که عملگرهای $\ell = (\partial/\partial x^i)\big|_p$ این ویژگی را دارند. روشن است که اگر ℓ یک چنین عملگری باشد و f و g در یک همسایگی از p برابر باشند، آنگاه $\ell(f) = \ell(g)$. این شرط عملاً برای هر مشتقی ℓ بر قرار است. زیرا، اگر در یک همسایگی از p داشته باشیم $f = 0$، آنگاه تابع همواری مانند $h : M \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(p) = 1$ و $\operatorname{Supp}(h) \subset f^{-1}(0)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &= \ell(0) = \ell(fh) \\ &= f(0)\ell(h) + h(0)\ell(f) = 0 + \ell(f) \end{aligned}$$

حال اگر در یک همسایگی از p داشته باشیم $f = g$، آنگاه

$$0 = \ell(f-g) = \ell(f) - \ell(g)$$

پس چنانچه f تنها بر یک همسایگی از p تعریف شده باشد، $\ell(f)$ را می‌توان محاسبه نمود: کافی است h را طوری انتخاب کنیم که در یک همسایگی از p برابر یک باشد و $\operatorname{Supp}(h) \subset f^{-1}(0)$ و سپس $\ell(f)$ را $\ell(fh)$ تعریف کنیم.

مجموعهٔ همهٔ چنین عملگرهایی یک فضای برداری است، ولی به هیچ دلیلی بعد آن از قبل معلوم نیست. ذیلاً با تعیین مقدار آن می‌پردازیم:

۲.۴.۳ لم. گیریم f تابعی هموار همسایگی باز محدب U از $\circ$ در $\mathbb{R}^n$ است و $f(\circ) = \circ$. در این صورت توابع هموار $g_i : U \to \mathbb{R}$ وجود دارد، به گونه‌ای که

۱) به ازاء هر $x \in U$ ای

$$f(x^{1}, \cdots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x^{1}, \cdots, x^n)$$

۲) به ازاء هر $i = l, \cdots, n$ ای داریم $g_i(\circ) = D_i f(\circ)$.

اثبات: به ازاء $x \in U$، تعریف می کنیم $h_x(t) := f(tx)$. چون U محدب است، h_x به ازاء $\circ \leq t \leq 1$ قابل تعریف است. اکنون

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\circ) = \int_\circ^{1} h'_x(t)\, dt \\ &= \int_\circ^{1} \sum_{i=1}^{n} D_i f(tx).x^i \, dt \end{aligned}$$

بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $g_i(x) = \int_\circ^{1} D_i f(tx)\, dt$. □

۳.۴.۳ قضیه. مجموعهٔ همهٔ مشتقات خطی در $p \in M^n$ یک ککلاف برداری $n-$بعدی است. در واقع، اگر (x, U) دستگاه مختصاتی حول p باشد، آنگاه

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{1}}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

این فضا را تولید می‌کنند، و هر مشتق ℓ ای را به صورت

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell(x^i) \bullet \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

می‌توان نوشت (پس ℓ توسط اعداد $\ell(x^i)$ که $1 \leq i \leq n$ مشخص می‌شود).

اثبات: توجه کنید که

$$\ell(1) = \ell(1 \bullet 1) = 1 \bullet \ell(1) + \ell(1) \bullet 1$$

و بنابراین $\ell(1) = \circ$. در نتیجه، به ازاء هر تابع ثابت c بر U داریم $\ell(c) = c \bullet \ell(1) = \circ$. حالتی را در نظر بگیرید که $M = \mathbb{R}^n$ و $p = \circ$. فرض کنید U محدب است. به

ازاء f دلخواه بر U، توابع g_i را مانند در لم ۲.۴.۳ برای تابع $f - f(\circ)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \ell(f - f(\circ)) = \ell\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Id}^i g_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big[\ell(\mathrm{Id}^i) g_i(\circ) + \mathrm{Id}^i(\circ)\ell(g_i)\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ell(\mathrm{Id}^i) \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Id}^i}(\circ) = \circ \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\partial/\partial \mathrm{Id}^i\big|_p$ ها فضای برداری را تولید می‌کنند؛ بوضوح این عملگرها مستقل خطی هستند. استفاده از دستگاه مختصاتی x برای انتقال این احکام از $\mathbb{R}^n$ به M تمرینی ساده است. □

از قضیهٔ ۳.۴.۳ ملاحظه می‌گردد که باز هم کلاف ساخته شده از همهٔ مشتقات در همهٔ نقاط از M نیز حقیقتاً خود TM است. برای مشاهدهٔ این امر کافی است به دستهٔ هم ارزی $[x, a]_p$ عملگر $\ell = \sum_{i=1}^{n} a^i (\partial/\partial x^i)\big|_p$ را نظیر کنیم. فرمول

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$$

که در فصل ۲ نشان داده شد، نشان می‌دهد که

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \iff \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$$

و این درست همان معادله‌ای است که می‌گوید $(x, a) \sim_p (y, b)$. به سادگی می‌توان نشان داد، که تحت این تناظر به f_* نگاشتی به شرح زیر نظیر می‌گردد:

$$\big[f_*(\ell)\big](g) = \ell(g \circ f)$$

توجه شود که اگر x نمایشگر دستگاه مختصاتی همانی بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} a^i (\partial/\partial x^i)\big|_p$ به a_p نظیر می‌شود، به شرط آنکه $T\mathbb{R}^n$ را با ε^N یکی بگیریم.

معمولاً هیچ تفاوتی میان بردار مماس $v \in T_pM$ و عملگر مشتق نظیرش قایل نیسیتم. یعنی، هیچ تفاوتی بین $[x, a]_p$ و $\sum_{i=1}^{n} a^i (\partial/\partial x^i)\big|_p$ قایل نمی‌شویم؛ در نتیجه، اگر f تابعی باشد که بر همسایگی‌ای از p تعریف می‌گردد، از $v(f)$ می‌توانیم سخن به

میان آوریم. در عمل، تعبیر بردار مماس به عنوان یک عملگر مشتق (نظیر) راحت تر است و تأثیر نگاشت f_* نیز با استفاده از رابطهٔ زیر ساده‌تر فهمیده می‌شود:

$$(f_*v)(g) = v(g \circ f)$$

مرسوم است که دستگاه همانی بر $\mathbb{R}^۱$ را با نماد t نشان دهیم، و بجای $(\partial/\partial t)\big|_{t_\circ}$ از $(d/dt)\big|_{t_\circ}$ استفاده کنیم؛ این پایه‌ای برای $T_{t_\circ}\mathbb{R}$ است. اگر $c : \mathbb{R} \to M$ منحنی‌ای دیفرانسیلپذیر باشد، بردار

$$c_* \left(\frac{d}{dt}\right)\Big|_{t_\circ}) \in T_{c(t_\circ)}M$$

را **بردار مماس به** c **در** $t_\circ$ می‌نامیم. این بردار را با نماد آشنای $(dc/dt)\big|_{t_\circ}$ نشان می‌دهیم. البته در استفاده از این نمادگزاری باید دقت کرد تا اشتباه معمول در حسابان رخ ندهد: معمولاً در آنجا از نماد dc/dt به معنی $(dc/dt)\big|_t$ استفاده می‌شود که t در dt یک دستگاه مختصاتی است، ولی t در $|_t$ یک نقطهٔ خاص از $\mathbb{R}^۱$ می‌باشد.

همان طور که تاکنون پی برده‌اید، دومین و سومین مثالمان، حقیقتاً همان TM هستند. قضیه‌ای کلی وجود دارد که می‌گوید همهٔ مثالهای قابل ملاحظه، این خاصیت را دارند. اما این قضیه کمی طولانی و خالی از لطف است و لذا در قسمت ضمیمه اثبات می‌گردد.

کلاف مماس TM به منیفلد هموار M ساختاری کاملتر از یک کلاف $n-$صفحه‌ای دلخواه دارد. چون TM موضعاً شبیه $U \times \mathbb{R}^n$ است، پس به وضوح TM خود یک منیفلد است؛ یعنی، طریقی طبیعی برای استوار کردن یک ساختار هموار روی TM وجود دارد. اگر $x : U \to \mathbb{R}^n$ چارتی بر M باشد، آنگاه هر عضو v از $(TM)|_U$ ای را به صورت منحصر بفرد به شکل

$$v = \sum_{i=۱}^{n} a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \quad , \quad p = \pi(v)$$

می‌توان نوشت. بیائید a^i را با نماد $x^i(v)$ نشان دهیم. در این صورت، نگاشت

$$v \mapsto \Big(x^۱(\pi(v)), \cdots, x^n(\pi(v)), \dot{x}^۱(v), \cdots, \dot{x}^n(p)\Big) \in \mathbb{R}^{۲n}$$

همیومورفیسمی از $(TM)|_U$ به $U\times\mathbb{R}^n$ است. نگاشت حاصل $(x\circ\pi, \dot{x})$، عملاً نگاشت x_* است، به شرطی که TU را با $U \times \mathbb{R}^n$ به شکل استاندارد، یکی بگیریم. اگر (y, V) دستگاه مختصات دیگیری باشد، و نیز اگر $v = \sum_n^{j=i}(\partial/\partial y^j)\big|_p$، آنگاه همان طور که

قبلاً ملاحظه شد، داریم

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i D_i(y^i \circ x^{-1})(x(p))$$

پس، اگر $(t,a) = (t^1, \cdots, t^n, a^1, \cdots, a^n) \in \mathbb{R}^{2n}$، آنگاه

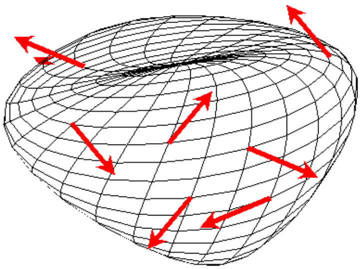
$$y_* \circ (x_*)^{-1}(t,a) = \Big(y \circ x^{-1}(t), \sum_{i=1}^{n} a^i D_i(y^1 \circ x^{-1})(t), \cdots, \sum_{i=1}^{n} a^i D_i(y^n \circ x^{-1})(t)\Big)$$

این عبارت نشان می دهد که $\pi : E \to B$ هموار است.

بنابراین، گردایه‌ای از چارتهای $C^\infty-$مرتبط بر TM داریم، که آنرا به اطلس ماکسیمال می‌توان گسترش داد. بدیهی سازیهای x_* با این ساختار هموار بر TM، هموار می‌شوند. در کل، کلاف برداری $\pi : E \to B$ را در صورتی کلاف برداری **هموار** گوئیم که E و B منیفلد هموار باشند و همهٔ بدیهی سازیهای موضعی آن در گرد هر نقطه‌ای هموار باشند. نتیجه اینکه $\pi : E \to B$ هموار است.

۵.۳ میدان برداری

یادآور می شویم که منظور از یک **برش** از کلاف $\pi : E \to B$، تابعی پیوسته $s : B \to E$ است که بر B رابطهٔ $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$ بر قرار می‌باشد؛ در مورد کلافهای برداری هموار، همواری برش را می‌توان شرط کرد و به مفهوم برش هموار رسید. برشهای TM را **میدان برداری بر** M می‌نامیم. اگر M زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^N$ باشد، میدان برداری را به صورت انتخاب پیوستهٔ پیکانهای مماس به M می‌توان تعبیر نمود (به شکل ۱۴.۳ توجه شود). قضیه‌ای که می‌گوید موهای روی یک کره را نمی‌توان شانه زد، اذعان می‌دارد که هیچ میدان برداری بر $\mathbb{S}^2$ که در همه جا مخالف صفر باشد، وجود ندارد. بعداً، نشان خواهیم داد که نمی‌توان دو میدان برداری مماس که در همه جا مستقل خطی‌اند بر کل نوار موبیوس انتخاب نمود.



شکل ۱۴.۳

اغلب میدانهای برداری را با نمادهای X، Y و یا Z نشان داده و بردار $X(p)$ را به صورت X_p نشان می‌دهیم؛ توجه شود که $X_p \in T_pM$. برخی اوقات، تک بردار در T_pM را نیز با X نشان می‌دهیم. اگر TM را به عنوان مجموعهٔ مشتقات در نظر بگیریم، آنگاه به ازاء هر دستگاه مختصاتی (x, U) برای M داریم

$$\forall p \in U \quad : \quad X(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

توابع a^i وقتی و تنها وقتی پیوسته اند که هموارند که $X : M \to TM$ پیوسته یا هموار باشد. اگر X و Y میدان برداری باشند، میدان برداری جدید $X + Y$ را به صورت

$$(X + Y)(p) := X(p) + Y(p)$$

تعریف می‌کنیم. به صورت مشابه، اگر $f : M \to \mathbb{R}$، میدان برداری fX را به صورت

$$(fx)(p) := f(p)X(p)$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که اگر X، Y و f هموار باشند، آنگاه $X + Y$ و fX نیز هموار خواهند بود. بر U می‌توانیم بنویسیم

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

که $\partial/\partial x^i$ نمایشگر میدان برداری $p \mapsto (\partial/\partial x^i)\big|_p$ است.

اگر $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار و X میدانی برداری باشد، آنگاه با تأثیر X بر f در هر نقطهٔ دلخواه، تابعی جدید $\bar{X}(f) : X \to \mathbb{R}$ حاصل می‌شود:

$$\bar{X}(f) := X_p(f)$$

با کمی زحمت می‌توان ثابت نمود که اگر X میدان برداری هموار باشد، آنگاه به ازاء هر تابع هموار f، تابع $\bar{X}(f)$ نیز هموار است؛ چرا که، به شکل موضعی از $X(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p)(\partial/\partial x^i)|_p$ نتیجه می‌شود. $\bar{X}(f) = \sum_{n}^{i=1} a^i(\partial f/\partial x^i)$ که مجموع آخر از حاصلضربهایی از توابع هموار تشکیل شده است. بالعکس، اگر $\bar{X}(f)$ به ازاء کلیهٔ توابع هموار، هموار باشد، آنگاه (چون بازاء هر i ای $\bar{X}(x^i) = a^i$) میدان برداری X هموار است.

گیریم $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ توابع بر M باشد. دیدیم که هر میدان برداری هموار X، موجب تعریف یک تابع $\bar{X} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ می‌گردد. به وضوح $\bar{X}(fg) = f\bar{X}(g) + g\bar{X}(f)$ و $\bar{X}(f+g) = f\bar{X}(f) + \bar{X}(g)$. بنابراین، $\bar{X}$ یک مشتق برای حلقهٔ $\mathcal{F}$ است. معمولاً، میدان برداری هموار X را با مشتق نظیرش $\bar{X}$ یکی می‌گیرند. دلیل این امر آن است که اگر $A : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ مشتقی دلخواه برای حلقهٔ $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه به ازاء یک میدان برداری هموار منحصر بفردی چون X، باید $A = \bar{X}$. در واقع، کافی است تعریف شود

$$X_p(f) := A(f)(p)$$

و به این ترتیب به یک مشتق X_p در p می‌رسیم.

۶.۳ جهتدهی

کلاف مماس نقطهٔ آغاز مطالعهٔ منیفلدهای هموار است، و فعلاً مطلب دیگری در این خصوص لازم نیست بررسی شود. چند فصل بعدی به مطالعهٔ مبسوط کلافهای نظیر به آن می‌پردازد. آهنگ اصلی در همهٔ این فصول، این موضوع است که اگر بتوان ساختاری بر یک فضای برداری تعریف نمود، بر هر کلاف برداری دلخواهی نیز می‌توان ساختار مشابه را تعریف کرد؛ به خصوص بر کلاف مماس هر منیفلد دلخواه. در حال حاضر، مفهوم جدیدی در خصوص منیفلدها مطرح می‌کنیم، که منشاء آن مفهوم جهت بر یک فضای برداری است.

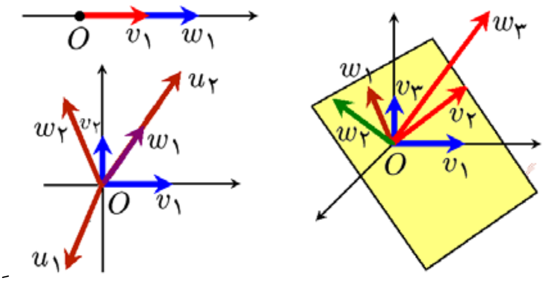
نگاشتهای خطی نامنفرد $f : V \to V$ تشکیل فضایی برداری با بعد متناهی می‌دهند و آنها را به دو بخش می‌توان تقسیم نمود: آنهایی که $\det f > 0$، و آنهایی که $\det f < 0$. تبدیلات خطی در گروه اول را **حافظ جهت** و در گروه دوم را **جهت برگردان** می‌گوئیم. مثالی ساده از یک تبدیل خطی جهت برگردان، نگاشت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $f(x) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, -x^n)$ است (انعکاس نسبت به ابر صفحهٔ $x^n = 0$). هیچ راهی برای گذر پیوسته بین این دو گروه وجود ندارد؛ اگر نگاشتهای

خطی $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را با ماتریسهای $\mathbb{R}^{n^2}$ یکی بگیریم (یعنی، عملاً با $\mathbb{R}^{n^2}$)، در این صورت نگاشتهای حافظ جهت و نگاشتهای جهت برگردان، دو زیر منیفلد باز مجزا از مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای نامنفرد (یعنی، آنهایی که $\det \neq 0$) تشکیل می‌دهند. اصطلاح حافظ جهت فعلاً کمی ثقیل است، چرا که هنوز مفهوم جهت را تعریف نکرده‌ایم، که قرار باشد چیزی آنرا حفظ کند یا خیر! چنانچه بخواهیم از نگاشت حافظ جهت بین دو فضای برداری متفاوت (ولی ایزومورف) V و W بحث کنیم، مسالهٔ جالبتری نمایان می‌شود؛ عملاً این کار ممکن نیست، مگر آنکه بر V و W ساختارهای اضافه‌ای قرار دهیم.

برای ساخت این ساختار جدید، به این نکته توجه می‌کنیم که هر دو پایهٔ مرتب $(v_1, \cdots, v_n)$ و $(v'_1, \cdots v'_n)$ برای V یک ایزومورفیسم $f : V \to V$ با ضابطهٔ $f(v_i) = v'_i$ مشخص می‌کنند؛ در این صورت، ماتریس $A = [a_{ij}]$ تابع f به کمک معادلات

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$$

قابل حصول است. در صورتی می‌گوئیم $(v_1, \cdots, v_n)$ و $(v'_1, \cdots, v'_n)$ **همجهت** هستند که $\det A > 0$ (یعنی، f حافظ جهت باشد) و آنها را در صورتی **با جهات مختلف** گوئیم که $\det A < 0$. رابطهٔ همجت بودن به وضوح رابطه‌ای ارزی است، و لذا مجموعهٔ همهٔ پایه‌های مرتب نسبت به این رابطه به دو دستهٔ هم ارزی تقسیم می‌گردد.



شکل ۱۵.۳: نمونه‌هایی از کنجهای مرتب جهتدار و همجهت در $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$

به هر یک از این دو دستهٔ هم ارزی، یک **جهت برای** V گفته می‌شود. دسته‌ای $(v_1, \cdots, v_n)$ به آن تعلق دارد را با نماد $[v_1, \cdots, v_n]$ نشان می‌دهیم. بنابراین، اگر μ جهتی بر V باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\mu \ni (v_1, \cdots, v_n)$، که داشته باشیم

$\mu=[v_1,\cdots,v_n]$. اگر μ جهتی مشخص بر V باشد، جهت دیگر را با نماد $-\mu$ نشان می‌دهیم. جهت $[e_1,\cdots,e_n]$ برای $\mathbb{R}^n$ را جهت استاندارد می‌نامیم.
حال اگر (V,μ) و (w,v) دو فضای برداری $n-$بعدی همراه با جهت باشند، ایزومورفیسم $f:V\to W$ را در صورتی **حافظ جهت** (نسبت به μ و ν) گوئیم که اگر $[v_1,\cdots,v_n]=\mu$، آنگاه $[f(v_1),\cdots,f(v_n)]=\nu$؛ روشن است که اگر این شرط برای یک $(v_1,\cdots v_n)$ ای برقرار باشد، آنگاه برای همهٔ انتخابهای ممکن از آن نیز درست است.

بر هر یک از تارهای $\{x\}\times\mathbb{R}^n$ کلاف بدیهی بدیهی $n-$بعدی $\varepsilon^n(X)=X\times\mathbb{R}^n$، جهت استاندارد $[(x,e_1),\cdots,(x,e_n)]$ را نسبت می‌دهیم. اگر $f:\varepsilon^n(X)\to\varepsilon^n(X)$ هم ارزی و X همبند باشد، آنگاه یا f جهت بر هر تاری را حفظ می‌کند و یا جهت هر تاری را عوض می‌کند؛ زیرا اگر توابع $a_{ij}:X\to\mathbb{R}$ را بوسیلهٔ

$$f(x,e_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}(x)(x,e_j)$$

تعریف کنیم، آنگاه $\det[a_{ij}]:X\to\mathbb{R}$ پیوسته است و هیچگاه صفر نمی‌شود. چنانچه $\pi:E\to B$ کلاف $n-$صفحه‌ای غیر بدیهی و دلخواه باشد، منظور از یک جهت μ بر E، گردایه‌ای از جهات μ_p برای هر یک از تارهای $\pi^{-1}(p)$ است که به ازاء هر مجموعهٔ باز و همبند $U\subset B$ در شرط سازگاری مشروح در زیر صدق می‌کند:

> اگر $t:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ هم ارزی باشد، و تارهای $U\times\mathbb{R}^n$ را با جهت استاندارد توأم کنیم، در این صورت یا t بر همهٔ تارها حافظ جهت است و یا در همهٔ تارها جهت برگردان است.

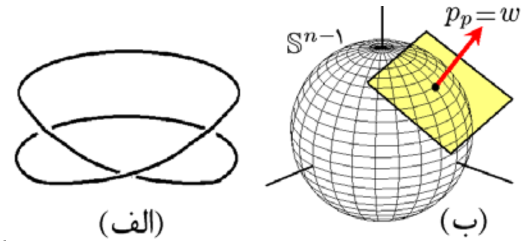
توجه شود که اگر این شرط برای t ای بخصوص بر قرار باشد، و $t':\pi^{-1}(v)\to U\times\mathbb{R}^n$ هم ارزی دیگر باشد، آنگاه t' نیز خود به خود در همین شرط صدق می‌کند؛ زیرا

$$t'\circ t^{-1}:U\times\mathbb{R}^n\to U\times\mathbb{R}^n$$

هم ارزی است. این نشان می‌دهد که جهات μ_p تعریف کنندهٔ یک جهت بر E هستند، مشروط به آنکه شرط سازگاری برای گردایه‌ای از مجموعه‌های U که B را پوشش می‌دهند، برقرار باشد.

اگر کلافی دارای جهت $\mu=\{\mu_p\}$ باشد، جهت دیگری $-\mu=\{-\mu_p\}$ نیز بر آن وجود دارد، اما این طور نیست که هر کلافی دارای جهت باشد. مثلاً، نوار موبیوس در صورتی که بعنوان یک کلاف برداری روی $\mathbb{S}^1$ در نظر گرفته شود، هیچ جهتی ندارد. زیرا در حالی که نوار موبیوس هیچ برشی ندارد، از هر تار آن دو بردار چنان می‌توان

اختیار نمود که گردایهٔ A همهٔ آنها بصورت دو برش بنظر آید. مثلاً، A را $[-۱;۱]\times\{-۱,۱\}$ می‌توان گرفت، که در آن $(۰,a)$ یا $(۱,-a)$ یکی گرفته شده‌اند. در این صورت A بصورت مرز نوار موبیوس M حاصل از $[-۱;۱]\times[-۱;۱]$ بنظر می آید (به قسمت الف از شکل ۱۶.۳ توجه شود). چنانچه بر M جهات سازگار μ_p را داشته باشیم، برشی $s:\mathbb{S}^۱\to M$ با انتخاب $s(p)$ برابر بردار منحصر بفرد $s(p)\in A\cap\pi^{-۱}(p)$ با $[s(p)]=\mu_p$ تعریف می‌کنیم؛ که این محال است، زیرا M هیچ برشی نمی‌پذیرد.



شکل ۱۶.۳: الف) مرز نوار موبیوس.
ب) جهت بر کره

کلاف را در صورتی **جهتپذیر** گوئیم که آن را بتوان جهتدار نمود، و در غیر این صورت آن را **جهت ناپذیر** می‌گوئیم؛ **کلاف جهتدار** درست عبارت است از یک جفت به شکل (ξ,μ)، که μ جهتی بر کلاف ξ است. این تعریف را در حالت خاص کلاف مماس TM به یک منیفلد مفروض M می‌توان بکار برد. **منیفلد جهتدار** زوج مرتبی است به شکل (M,μ)، مرکب از منیفلد M و یک جهت بر TM. منیفلد $\mathbb{R}^n$ جهتدار است؛ زیرا، به وضوح $T\mathbb{R}^n\cong\varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$، که بر آن جهت استاندارد قابل تعریف است. کره $\mathbb{S}^{n-۱}\subseteq\mathbb{R}^n$ نیز جهتپذیر است. برای مشاهدهٔ این امر، کافی است برای هر نقطهٔ دلخواه $p\in\mathbb{R}^{n-۱}$، بردار $w=p_p\in\varepsilon^n(\mathbb{R}^n)\cong T\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم، که در $i_*(T_p\mathbb{S}^{n-۱})\subseteq T_p\mathbb{R}^n$ قرار ندارد (مسألهٔ ۲۱)، و سپس تعریف کنیم: اگر $v_۱,\cdots,v_{n-۱}\in T_p\mathbb{S}^{n-۱}$، آنگاه وقتی و تنها وقتی $[v_۱,\cdots,v_{n-۱}]\in\mu_p$ که $[w,i_*(v_۱),\cdots,i_*(v_{n-۱})]$ به جهت استاندارد برای $T_p\mathbb{R}^n$ متعلق باشد (به قسمت (ب) از شکل ۱۶.۳ توجه شود). جهتی $\mu=\{\mu_p|p\in\mathbb{S}^{n-۱}\}$ که به این ترتیب تعریف می‌گردد، جهت استاندارد بر $\mathbb{S}^{n-۱}$ تعریف می‌گردد.

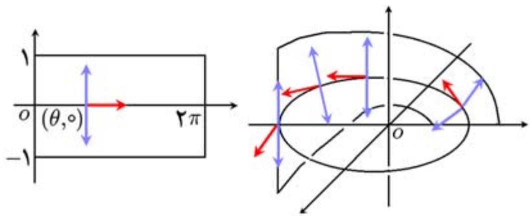
تیوب $\mathbb{S}^۱\times\mathbb{S}^۱$ مثالی دیگر از یک منیفلد جهتپذیر است. برای مشاهدهٔ این امر کافی ایت توجه شود که اگر $M_۱$ و $M_۲$ منیفلدهایی جهتدار باشند، آنگاه تار $T_p(M_۱\times M_۲)$ از کلاف مماس $T(M_۱\times M_۲)$ را به صورت $V_{۱p}\times V_{۲p}$ می‌توان نوشت که $(\pi_i)_*:V_{ip}\to T_p(M_i)$ ایزومورفیسم فضاهای برداری است و زیر فضاهای V_{ip} بر حسب p به

شکل پیوسته حرکت می‌کنند (مسألهٔ ۲۶). چون $T\mathbb{S}^{۱}$ بدیهی است، این نشان می‌دهد که $T(\mathbb{S}^{۱}\times\mathbb{S}^{۱})$ نیز بدیهی است و در نتیجه جهتپذیر است. هر تیوب $n-$حلقه‌ای نیز به همین صورت، جهتپذیر می‌باشد (اثبات آن در مسألهٔ ۱۶ مطرح شده است، که در آن کلاف مماس به منیفلد مرزدار نیز تشریح می‌گردد).

نوار موبیوس ساده ترین مثال از یک منیفلد ۲−بعدی جهتناپذیر می‌باشد. قبلاً مشاهده نمودیم که در مورد مدل نشانده شدهٔ M در $\mathbb{R}^{۳}$، بر زیر مجموعهٔ

$$S=\{(۲\cos\theta,۲\sin\theta,۰)|۰\le\theta<۲\pi\}\subset M$$

می‌توان بردارهای v_p را به گونه‌ای تعیین نمود که نسبت به p بطور پیوسته حرکت می‌کنند. اما، محال است که بتوان از بین بردارهای حاشور خورده در هر نقطه ($w_p=$ $f_*((۰,۱)_{(\theta,۰)})$ و یا منفی آن) برداری را انتخاب نمود که مجموعهٔ همهٔ آنها تشکیل یم میدان برداری بدهد. چنانچه برای هر $p\in S$ ای جهت μ_p را داشته باشیم، آنگاه w_p را به این صورت می‌توانیم انتخاب کنیم که $[v_p,w_p]\in\mu_p$ و در غیر این صورت $-w_p$ را انتخاب می‌کنیم. که این محال است (به شکل ۱۷.۳ توجه گردد).



شکل ۱۷.۳: نوار موبیوس جهتناپذیر است.

صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^{۲}$ نیز باید جهتناپذیر باشد، زیرا نوار موبیوس را در بر دارد. در واقع، به ازای هر کلاف جهتپذیر دلخواه $\xi=\pi:E\to B$ و هر زیر مجموعهٔ $B'\subset B$، تحدید $\xi|_{B'}$ نیز جهتپذیر است. جهتناپذیری $\mathbb{P}^{۲}$ را به صورت دیگری نیز می‌توان مشاهده نمود؛ کافی است نگاشت متقاطر $A:\mathbb{S}^{۲}\to\mathbb{S}^{۲}$ با ضابطهٔ $A(p)=-p$ را در نظر بگیرید. این نگاشت تحدید نگاشت خطی $\bar{A}:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}^{۳}$ با همین ضابطه می‌باشد. در این صورت، نگاشت $A_*:T_p\mathbb{S}^{۲}\to T_{-p}\mathbb{S}^{۲}$ درست عبارت است از $(p,v)\mapsto(A(p),\bar{A}(v))$، مشروط به اینکه $T_p\mathbb{S}^{۲}$ را با $\{p\}\times\mathbb{R}^{۳}$ یکی بگیریم. نگاشت $\bar{A}$ جهت برگردان است، چرا که اگر $v_i=(p,u_i)\in T_p\mathbb{S}^{۲}$ با $i=۱,۲$ پایه‌ای برای $T_p\mathbb{S}^{۲}$ باشد، آنگاه پایه‌های $(u_۱,u_۲,p)$ و $(\bar{A}(u_۱),\bar{A}(u_۲),A(p))$ با جهتهای مختلفند.
ن نشان می دهد که اگر μ جهت استاندارد بر $\mathbb{S}^{۲}$ باشد و $[v_۱,v_۲]\in\mu_p$، آنگاه $[\bar{A}(v_۱),\bar{A}(v_۲)]\in$

$-\mu_{A(p)}$. بنابراین، نگاشت $A : \mathbb{S}^۲ \to \mathbb{S}^۲$ جهت برگردان است (در صورتی که f نشاننده‌ای از یک منیفلد جهتدار به منیفلدی جهتدار باشد و بعد آن منیفلدها یکسان باشد، مفاهیم حافظ جهت بودن و جهت برگردانی با نعنی هستند). از این حکم به راحتی استنباط می‌گردد که $\mathbb{P}^۲$ جهتپذیر نیست: اگر $\mathbb{P}^۲$ دارای جهت $\nu = \{\nu_{[p]}\}$ باشد و $g : \mathbb{S}^۲ \to \mathbb{P}^۲$ نگاشت با ضابطهٔ $p \mapsto [p]$ باشد، آنگاه چنانچه بخواهیم g حافظ جهت باشد، جهتی $\{\bar{\mu}_p\}$ بر $\mathbb{S}^۲$ حاصل می‌گردد؛ در این صورت باید نگاشت A نسبت به $\bar{\mu}$ جهت را حفظ نماید، که محال می‌باشد. زیرا، بایستی $\bar{\mu}$ برابر μ یا $-\mu$ باشد.

در مورد ۳−فضای تصویری $\mathbb{P}^۳$ در $\mathbb{R}^۴$ وضعیت کمی پیچیده‌تر است. در این حالت نگاشت متقاطر $A : \mathbb{S}^۳ \to \mathbb{S}^۳$ حافظ جهت است! اگر $g : \mathbb{S}^۳ \to \mathbb{P}^۳$ نگاشت $p \mapsto [p]$ باشد، آنگاه به وضوح با طلب کردن حافظ جهت بودن g، جهاتی v_p برای نقاط مختلف $\mathbb{P}^۳$ می‌توان بدست آورد. در کل، این استدلال نشان می‌دهد که اگر n فرد باشد، آنگاه $\mathbb{P}^n$ جهتپذیر است و در غیر این صورت جهت ناپذیر می باشند.

تعریف ساده‌تری برای جهتپذیری M وجود دارد که در آن از مفهوم کلاف مماس TM اصلاً استفاده نمی‌گردد. بر طبق این تعریف، منیفلد M در صورتی **جهت پذیر** است که زیر مجموعه‌ای $\mathcal{A}'$ از $\mathcal{A}$ (اطلس بر M) وجود دارد که

۱) دامنهٔ همهٔ $(x, U) \in \mathcal{A}'$ ها M را می‌پوشاند.

۲) به ازای هر $(x, U), (y, V) \in \mathcal{A}'$ ای $\det[\partial y^i/\partial x^j]$ بر $U \cap V$ مثبت است.

اکنون اگر μ جهتی بر M بوده و $\mathcal{A}$ اطلسی دلخواه بر M باشد، زیر مجموعه‌ای $\mathcal{A}'$ از $\mathcal{A}$ به گونه‌ای می‌توانیم مشخص کنیم که شامل همهٔ چارتهای (x, U) ای از $\mathcal{A}$ است که نگاشت مشتق نظیرش $x_* : TM|_U \to T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^n$ حافظ جهت باشد (البته، روشن است که جهت بر فضای $x(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{۲n}$، جهت استاندارد گرفته شده است). اکنون، شرط (۲) درست به این معنی است که نگاشت مشتق : $(y \circ x^{-۱})_*$ $T(x(U)) \to T(x(V))$ حافظ جهت باشد که بی درنگ برقرار است. بالعکس، اگر $\mathcal{A}'$ از قبل مشخص شده باشد، تارهای $TM|_U$ را به گونه‌ای می‌توان جهتدار نمود که x_* حافظ جهت باشد، و به این ترتیب جهتی بر TM حاصل می‌گردد. البته، تعریف نخست از نظر هندسی و شهود پذیری بهتر است. با این حال، تعریف مبتنی بر مثبت بودن علامت دترمینان بعداً بسیار بکار خواهد آمد.

۷.۳ هم ارزی کلافهای مماس

اینکه همهٔ شرایط قابل توجه برای کلاف مماس به M برقرار است، درست به این معنی برقراری قضیهٔ ذیل می‌باشد.

۱.۷.۳ قضیه. [۳] اگر به ازاء هر منیفلد دلخواه M، کلافی برداری $T'M$ بر M، و به ازاً هر نگاشت هموار $f : M \to N$، یک نگاشت کلافی $(f_\#, f)$ چنان وجود داشته باشد که

۱) قضیهٔ ۱.۴.۳ برقرار باشد،

۲) قضیهٔ ۱.۴.۳ برای هم ارزیهای خاص t'^n برقرار باشد،

۳) قضیهٔ ۱.۴.۳ برای هم ارزیهای خاص $T'U \cong (T'M)|_U$ برقرار باشد،

آنگاه هم ارزیهای $e_M : TM \to T'M$ ای وجود دارند که دیاگرام زیر به ازاء هر نگاشت هموار $f : M \to N$ ای تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "e_M"'] & TN \arrow[d, "e_N"] \\ T'M \arrow[r, "f_*"] & T'N \end{tikzcd}$$

اثبات: جزئیات این اثبات چنان حجیم است که احتمالاً شما را از ادامهٔ آن منصرف می‌کند (و یا بالاخره در جائی از آن خسته می‌شوید)؛ نماد خوشیمن $\square$ خیلی دیر ظاهر می‌گردد. با همهٔ این اوصاف، ایدهٔ اصلی در اثبات فوق العاده ساده است. اگر (u, U) چارتی بب M باشد، آنگاه $(TM)|_U$ و $(T'M)|U$ هر دو شبیه $x(U) \times \mathbb{R}^n$ هستند. بنابراین، نگاشتی وجود دارد که تارهای یکی را به دیگری تصویر می‌کند و بالعکس. آنچه که عملاً مایلیم نشان دهیم این است که شرایط بر TM و $T'M$ تا آنجا مشابهت دارند که حقیقتاً بتوان آنها را یکی گرفت. البته، این دو عملاً خواشتهٔ ما را برآورده می‌کنند و تا کنون شاهد مواردی از آن بوده‌ایم؛ با این حال به جهت ایجاد ثبات لازم در کارها، لازم است اثباتی برای این امر اقامه گردد.

[۳] از نقطه نظر کاتگوری، قضایای ۱.۴.۳ و ۱.۷.۳ اذعان می‌دارند که در حد هم ارزی طبیعی بین فانکتورها، یک فانکتور منحصر بفرد از کاتگوری منیفلدهای هموار و نگاشتهای هموار به کاتگوری کلافها و نگاشتهای کلافی وجود دارد که بطور طبیعی با (ε^n, f_*) بر فضاهای اقلیدسی و تحدید فانکتور به زیر منیفلدهای باز، هم ارز است.

گیریم (x,U) دستگاه مختصاتی بر M باشد. دراین صورت هم ارزیهایی به شرح زیر را داریم؛ دو تا از آنها را که با نماد واحد $\cong$ نشان داده‌ایم، هم ارزیهایی هستند که شرط (۳) را به ثبوت می‌رسانند. ترکیب $(t^n|_{x(U)})\circ \cong \circ x_* \circ (\cong)^{-1}$ را با نماد α_x نشان داده‌ایم.

$$\begin{array}{ccccc}
TU & \xrightarrow{x_*} & T(x(U)) & \xrightarrow{\cong} & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \\
\downarrow{\cong} & & & & \downarrow{t^n|_{x(U)}} \\
(TM)|_U & & \xrightarrow{\alpha_x} & & \varepsilon(\mathbb{R}^n)|_{x(U)}
\end{array}$$

به صورت مشابه، با استفاده ار هم ارزی $\cong'$ برای T'، می‌توانیم β_x را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{array}{ccccc}
T'U & \xrightarrow{x_\#} & T'(x(U)) & \xrightarrow{\cong'} & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \\
\downarrow{\cong'} & & & & \downarrow{t'^n|_{x(U)}} \\
(T'M)|_U & & \xrightarrow{\beta_x} & & \varepsilon(\mathbb{R}^n)|_{x(U)}
\end{array}$$

در این صورت $\beta_x^{-1}\circ\alpha_x : (TM)|_U \to (T'M)|_U$ یک هم ارزی است، و لذا تار TM روی p را به صورت ایزومورفیسم به تار $T'M$ روی p می‌نگارد که $p \in M$ دلخواه می‌باشد. هدف اصلی ما نشان دادن این مطلب است که ایزومورفیسم مذکور بین تارهای روی p از انتخاب دستگاه مختصاتی مستقل است.

(الف) فرض کنیم $V \subseteq U$ باز است و $y = x|_V$. لازم است که همهٔ نگاشتهای احتوی

$$\begin{array}{ll}
i : U \hookrightarrow M & \tilde{i} : V \hookrightarrow M \\
j : V \hookrightarrow U & k : y(U) \hookrightarrow x(U)
\end{array}$$

را نماگذاری کنیم. به منظور مقایسهٔ α_x و α_y دیاگرام زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccccccc}
(TM)|_U & \xleftarrow{\cong} & TU & \xrightarrow{x_*} & T(x(U)) & \xrightarrow{\cong} & \\
\downarrow{\subseteq} & (۱) & \downarrow{j_*} & (۲) & \downarrow{j_*} & (۳) & \\
(TM)|V & \xleftarrow{\cong} & TV & \xrightarrow{y_*} & T(y(V)) & \xrightarrow{\cong} &
\end{array}$$

(۵.۳)

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(۳)"] & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[r, "t^n|_{x(U)}"] \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, "(۴)"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[d, "\subseteq"] \\
{} \arrow[r, "\cong"] & (T\mathbb{R}^n)|_{y(V)} \arrow[r, "t^n|_{y(V)}"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{y(U)}
\end{tikzcd}$$

هر یک از چهار مربع در دیاگرام بالا تعویضپذیرند. برای ملاحظهٔ این امر در مورد مربع (۱)، آن را به صورت زیر بزرگ نمایی می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd}
(TM)|_V \arrow[d, "\cong"'] & TM \arrow[l, "\subseteq"'] \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "i_*"] & (TM)|_U \arrow[d, "\cong"] \\
TV \arrow[ur, "\tilde{i}_*"] \arrow[rr, "j_*"] & & TU
\end{tikzcd}$$

دو مثلث در سمت چپ به دلیل وجود شرط (۳) برای TM تعویضپذیرند و مثلث سمت راست نیز چون $i \circ j = \tilde{i}$، تعویضپذیر است. به دلیل اینکه $k \circ y = x \circ j$، مربع (۲) نیز تعویضپذیر می‌باشد. با استدلالی مشابه در مورد مربع (۱)، می شود نشان داد که مربع (۳) نیز تعویضپذیر است؛ در آن نگاشتهای احتوی $x(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ و $y(V) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ بکار می آیند. اکنون، از تعویضپذیری دیاگرام (۵.۳) نتیجه می‌شود که دیاگرام زیر نیز تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
(TM)|_U \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[d, "\subseteq"] \\
(TM)|_V \arrow[r, "\alpha_y"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{x(V)}
\end{tikzcd}$$

این بدان معنی است که به ازای هر $p \in V$ ای ایزومورفیسم α_y بین تارهای روی p همان ایزومورفیسم القائی از α_x است. به وضوح همین مطلب در مورد β_x و β_y صحیح است. چرا که در استدلال بالا از خواص (۱) تا (۳) استفاده شده است و نه از ساختار بخصوص TM. بنابراین، به ازای هر $p \in M$ ای تساوی $\beta_y^{-۱} \circ \alpha_y = \beta_x^{-۱} \circ \alpha_x$ بر تارهای روی p برقرار است.

(ب) اکنون به لمی نیاز داریم که در مورد TM و $T'M$ به یک شکل قابل اجرا است. این لم را نیز تنها برای TM ثابت می‌کنیم، و چون در آن تنها از خواص (۱) تا (۳) استفاده می‌کنیم، استدلال برای $T'M$ نیز درست می‌باشد.

لم. اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و $B \subseteq \mathbb{R}^m$ باز باشند و $f : A \to B$ نگاشتی هموار، آنگاه دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, "t^n|_A"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[d, "f_*\ \text{قدیم}"] \\
TB \arrow[r, "\cong"] & (T\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, "t^m|_B"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{tikzcd}$$

اثبات لم: **حالت ۱.** نگاشتی $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $\bar{f} = f$ بر A. دیاگرام زیر را در نظر بگیرید، که $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ و $j : B \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتهای احتوی هستند.

$$\begin{tikzcd}
 & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, "t^n|_A"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[d, "\subseteq"] \\
TA \arrow[ur, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & T\mathbb{R}^n \arrow[r, "t^n"] \arrow[d, "\bar{f}_*"'] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "f_*\ \text{قدیم}"] \\
TB \arrow[dr, "\cong"'] & T\mathbb{R}^m \arrow[r, "t^m"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m) \arrow[d, "\subseteq"] \\
 & (T\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, "t^m|_B"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{tikzcd}$$

به وضوح، هر حلقهٔ ممکن در این دیاگرام تعویضپذیر است. این امر موجب می‌شود که دو ترکیب

$$TA \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{t^n|A} \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{\subseteq} \varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{f_*\ \text{قدیم}} \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)$$

و

$$TA \xrightarrow{f_*} TB \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^m)|_A \xrightarrow{t^m|_B} \varepsilon^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\subseteq} \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)$$

بابرند و این لم را در حالت ۱ به اثبات می‌رساند. زیرا، نگاشتهای «$\bar{f}_*$ قدیم» و «f_* قدیم» بر A برابرند.

حالت ۲. حالت کلی. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر $p \in A$ ای دو نگاشت بر تار روی p یکی هستند.

نگاشتی $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ با $\bar{f} = f$ بر مجموعه‌ای باز A' وجوود دارد که $p \in A' \subseteq A$. سپس، دیاگرام به شرح زیر را داریم، که هر $\cong$ از این نکته نتیجه می‌شود که

مجموعه‌ای زیر منیفلد باز دیگری است، و $i : A' \hookrightarrow A$ نگاشت احتوی است.

$$
\begin{tikzcd}
TA \arrow[dd, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "="] & TA \arrow[r] & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, phantom, "="] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[dd, "\bar{f}_*\ \text{قدیم}"] \\
 & TA' \arrow[u, "(f|_{A'})_*"'] \arrow[d, "(f|_{A'})_*"] \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur, phantom, "(۲)"] & (T\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[r, "t^n|_{A'}"] \arrow[ur, phantom, "(۳)"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[d, "\text{قدیم}\ (f|_{A'})_*"'] \arrow[dr, phantom, "(۵)"] & \\
TB \arrow[r, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "(۱)"] & TB \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur, phantom, "(۴)"] & (T\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, "t^m|_B"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, phantom, "="] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{tikzcd}
\qquad (۶.۳)
$$

تعویضپذیری حلقه‌های مستطیل شکل (۱)، (۳) و (۵) بدیهی است و در مورد (۴) نیز از حالت ۱ نتیجه می‌گردد. برای مشاهدهٔ تعویضپذیری حلقهٔ (۲) (که مثلث در وسط است)، آن را دیاگرام بزرگتری به شرح زیر می‌نشانیم که $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت احتوی است و سایر نگاشتها را نیز به دلیل ایجاد سهولت در مراجعات بعدی، اسمگذاری نموده‌ایم.

$$
\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cong_{(k)}"'] & TA' \arrow[d, "\cong_{(\lambda)}"] \arrow[dr, "j_*"] & \\
(T\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[r, "\subseteq_{(\mu)}"] & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, "\subseteq_{(\mu)}"] & T\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

برای اثبات $\lambda \circ i_* = \mu \circ k$، کافی است اثبات گردد که $\nu \circ \lambda \circ i_* = \nu \circ \mu \circ k$، زیرا ν یکبیک است. بنابراین، کافی است اثبات گردد که $j_* \circ i_* = \nu \circ \mu \circ k$، که به معنی تعویضپذیری دیاگرام

$$
\begin{tikzcd}
TA' \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, "(j\circ i)_*"] & \\
(T\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[r, "\subseteq"] & T\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

است. چون $j \circ i$ درست نگاشت احتوی A' در $\mathbb{R}^n$ است، این امر محقق می‌باشد.

تعویضپذیری دیاگرام (۶.۳) نشان می‌دهد که ترکیب

$$TA \xrightarrow{f_*} TB \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^m)|_B \xrightarrow{t^m|_B} t^m(\mathbb{R}^m)|_B$$

و نیز

$$TA \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{t^n|A} \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{\text{قدیم}\ \bar{f}_*} \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B$$

بر $(TA)|_{A'}$ برابرند، و لذا «$\bar{f}_*$ قدیم» را بر A' با «f_* قدیم» می‌توان تعویض نمود. به بیان دیگر، دو ترکیب در همسایگی‌ای از هر $p \in M$ با هم برابرند و بنابراین لم اثبات شد. □

(ج) حال فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو دستگاه مختصات دلخواه با $p \in U \cap V$ هستند. برای اثبات اینکه $\beta_x^{-1} \circ \alpha_x$ و $\beta_y^{-1} \circ \alpha_y$ بر تار در p از TM یکی ایزومورفیسم را القاء می‌کنند، بدون کاستن از کلیت بحث می‌توانیم فرض کنیم که $U = V$، زیرا کافی است قسمت (الف) را برای x و $x|_{U\cap V}$ و همچنین y و $y|_{U\cap V}$ اجرا کنیم.

فرض کنیم $U = V$، در این صورت دیاگرام (۷.۳) مشروح در زیر تعویضپذیر است. زیرا، تعویضپذیری مثلث سمت چپ بدیهی است، و بنابه قسمت (ب)، مستطیل سمت راست نیز تعویضپذیر است. اکنون، دیاگرام (۷.۳) نشان می‌دهد که $(y \circ x^{-1})_* \circ$ قدیم$\alpha_x = \alpha_y$. درست همین استدلال برای T' صحیح است. یعنی، $(y \circ x^{-1})_* \circ$ قدیم$\beta_x = \beta_y$. اکنون، حکم مورد نظر $\beta_x^{-1} \circ \alpha_x = \beta_y^{-1} \circ \alpha_y$ بی‌درنگ حاصل می‌گردد.

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "x_*"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, "y_*"] & T(x(U)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(y\circ x^{-1})_*"] & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[r, "t^n|_{x(U)}"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[d, "\text{قدیم } (y\circ x^{-1})_*"'] \\ (TM)|_U & T(y(U)) \arrow[r, "\cong"] & (T\mathbb{R}^n)|_{y(U)} \arrow[r, "t^n|_{y(U)}"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B \end{tikzcd} \qquad (۷.۳)$$

به این ترتیل، یک نگاشت—کلافی خوشتعریف $TM \to T'M$ (مرکب از اجتماع همهٔ $\beta_x^{-1} \circ \alpha_x$ ها) داریم، که به وضوح یک هم ارزی e_M است. اثبات $e_N \circ f_* = f_\# \circ e_M$ به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده. □

۸.۳ تمرینات

۱) گیریم M مجموعه‌ای دلخواه، و $\{(x_i, U_i)\}$ دنباله‌ای از توابع یکبیک $x_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ با $U_i \subset M$ و $\pi(U_i)$ باز در $\mathbb{R}^n$ است، به گونه‌ای که هر یک از توابع

$$x_i \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow x_j(U_i \cap U_j)$$

پوسته است. به نظر می رسد که بایستی M متری بپذیرد که هر یک از U_i ها نسبت آن بازند و هر یک از x_i ها همیومورفیسم هستند. اما در حقیقت، این طور نیست.

(الف) گیریم $M = \mathbb{R} \cup \{*\}$، که $* \notin \mathbb{R}$. گیریم $U_1 = \mathbb{R}$ و $x_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ همانی است، و $U_2 = \mathbb{R} - \{0\} \cup \{*\}$ با $x_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$x_2(a) = a \;\; , \;\; a \neq 0, * \;\; , \;\; x_2(*) = 0$$

نشان دهید هیچ متری بر M با ویژگی خواسته شده وجود ندارد. برای این منظور، نشان دهید که هر همسایگی از 0، همهٔ همسایگی‌های $*$ را قطع می‌کند. از این گذشته، شبه متر ρ بر M (یعنی تابعی $\rho : M \times M \to M$) که همهٔ خواص متر را دارد بجز اینکه ممکن است به ازاء $p \neq q$ ای $\rho(p, q) = 0$) چنان وجود دارد که هر یک از U_i ها نسبت به آن بازند و هر یک از x_i ها نیز همیومورفیسم هستند.

(ب) اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، دنباله‌ای $A_1, A_2, A_3, \cdots$ از زیر مجموعه‌های باز A چنان وجود دارد که هر یک از زیر مجموعه‌های باز در A، اجتماعی از A_i های بخصوص است.

(ج) دنبالهای از توابع پیوسته $f_i : A \to [0, 1]$ با $\mathrm{Supp}(f_i) \subseteq A$ وجود دارد که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌سازد؛ اگر C بسته و $p \in A - C$، آنگاه f_i ای با $\inf_i(A \cap C) \not> f_i(p)$ وجود دارد. [راهنمایی: ابتدا به کمک (ب)، دنبالهٔ جفت مجموعه‌های (A_i, A_j) را طوری مرتب کنید که $\bar{A}_i \subset A_j$.

(د) گیریم $f_{i,j}$ که $j = 1, 2, 3, \cdots$ دنباله‌هایی مثل در (ج) برای هر یک از مجموعه‌های باز $x_i(U_i)$ باشند. $g_{i,j} : M \to [0, 1]$ را به صورت

$$g_{i_{ij}}(p) = \begin{cases} f_{i,j}(p) & \text{اگر } p \in U_i \\ 0 & \text{اگر } p \notin U_i \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. همهٔ $g_{i,j}$ ها در دنباله‌ای خاص $C_1, C_2, C_3, \cdots$ مرتب کرده و فرض کنید d متری کراندار بر $\mathbb{R}$ است و ρ را بر M به صورت

$$\rho(p, q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(G_i(p), G_i(q))$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید ρ شبه متر مورد نظر است.

(ه) فرض کنید به ازاء هر $p, q \in M$ ای یک U_i و یک U_j با $p \in U_i$ و مجموعه‌های باز $B_i \subset x_i(U_i)$ و $B_j \subset x_j(U_j)$ چنان وجود دارند که $p \in x_i^{-1}(B_i)$، $q \in x_j^{-1}(B_j)$ و $x_i^{-1}(B_i) \cap x_i^{-1}(B_i) = \emptyset$. نشان دهید که ρ عملاً یک متر بر M است.

۲) (الف) فرض کنید (x,U) و (y,V) دو دستگاه مختصات هستند، و دو نگاشت بر TM به صورت

$$\begin{array}{ll} t_x : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n & [x,u]_q \longrightarrow (q,v) \\ t_y : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^n & [y,w]_q \longrightarrow (q,w) \end{array}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید مجموعه‌های به شکل $t_x^{-1}(A)$ که $A \subset U \times \mathbb{R}^n$ باز است و در $\pi^{-1}(U \cap V)$ قرار دارند، درست همان مجموعه‌های به شکل $t_y^{-1}(B)$ که $B \subset V \times \mathbb{R}^n$ باز است، می‌باشد.

(ب) نشان دهید که اگر متری بر TM چنان باشد که به ازاء یک گردایه (x_i, U_i) با $M = \cup_i U_i$، هر یک از t_{x_i} ها همیومورفیسم باشند، آنگاه همهٔ t_x ها همیومورفیسم هستند.

(ج) از مسالهٔ ۲۱ نتیجه بگیرید که بر TM متری وجود دارد که هر یک از t_x ها نسبت به آنها همیومورفیسم هستند.

۳) نشان دهید که در تعریف هم ارزی کافی است فرض شود $E_1 \to E_2$ پیوسته است. (برای اثبات پیوستگی معکوس، توجه کنید که به شکل موضعی نگاشتی از $U \times \mathbb{R}^n$ به $U \times \mathbb{R}^n$ می‌باشد).

۴) نشان دهید که در تعریف کلاف مماس، پیوستگی نگاشت $f : B_1 \to B_2$، بطور خودکار از پیوستگی $\tilde{f} : E_1 \to E_2$ نتیجه می‌گردد.

۵) هم ارزی ضعیف بین دو کلاف روی یک فضای پایه B، عبارت است از یک نگاشت کلافی $(\tilde{f}, f)$، به گونه‌ای که $\tilde{f}$ بر هر تاری ایزومورفیسم است، و f همیومورفیسمی از B به روی خودش است. دو کلاف غیر هم ارز ولی هم ارز ضعیف روی فضاهای پایه‌ای به شرح ذیل بیابید:

(الف) اجتماع مجزای دو دایره

(ب) شکل بینهایت ∞

(ج) تیوپ.

٦) فرض کنید $(\tilde{f}, f)$ نگاشتی کلافی است. در این صورت، نشان دهید $\tilde{f} = g \circ h$ که g و h چنان نگاشتهای پیوسته‌ای هستندکه h هر تار را بطور خطی به روی تاری دیگر می‌برد، و g بر هر یک از تارها ایزومورفیسم می‌باشد.

۷) (الف) نشان دهید که به ازاء هر کلاف $\pi : E \to B$، نگاشت $s : B \to E$ که به ازاء هر $p \in B$ ای $s(p)$ صفر در $\pi^{-1}(p)$ است، یک برش برای π است.

(ب) نشان دهید که هر کلاف n−صفحه‌ای ξ وقتی و تنها وقتی بدیهی است که n برش s_1، . . . و s_n وجود داشته باشند، که در همه جا مستقل خطی هستند. به بیان دیگر، به ازاء هر $p \in B$ ای $s_1(p), \cdots, s_n(p) \in \pi^{-1}(p)$ مستقل خطی هستند.

(ج) نشان دهید که هر کلاف n−صفحه‌ای دارای n برش مستقل خطی است، البته به شکل موضعی!

۸) (الف) نشان دهید که $\tilde{p}$ بر مجموعهٔ زوجهای (x, v)، رابطهٔ هم ارزی است.

(ب) تحقیق کنید که تعریف f_* مستقل از انتخاب دستگاههای مختصاتی x و y مورد استفاده در تعریف آن می‌باشد.

(ج) جزئیات مانده در قضیهٔ ۱.۴.۳ را تحقیق کنید.

۹) (الف) نشان دهید که تناظر بین TM و دسته‌های هم ارزی منحنی‌هایی که $[x, v]_p$ ها را به دسته‌های $\approx_p$ هم ارزی از $x^{-1} \circ \gamma$ نظیر می‌کنند، که γ منحنی‌ای در $\mathbb{R}^n$ با $\gamma'(0) = v$ است، نگاشت f_* را به $f_\#$ نظر می‌کند.

(ب) نشان دهید که با توجه به وجود تناظر دوسویی $[x, a]_p \to \sum_i a^i (\partial/\partial x^i)\big|_p$، نگاشت f_* را به صورت $[f_*(\ell)](q) = \ell(g \circ f)$ می‌توان تعریف نمود.

۱۰) اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد، ساختاری هموار بر V تعریف نموده و همیومورفیسمی از حاصلضرب $V \times V$ به TV بیابید که مستقل از انتخاب پایه باشد. مثل در حالت $\mathbb{R}^n$، به ازاء $v, w \in V$ از نماد $v_w \in V_w$ برای نمایش بردار (v, w) استفاده کنید.

۱۱) نشان دهید که اگر $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه به ازاء نگاشتی هموار $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داریم

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + x^2 h(x)$$

۱۲) (الف) گیریم $\mathcal{F}_p$ مجموعهٔ همهٔ توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ با $f(p) = 0$ است و $\ell : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ عملگری خطی است که به ازاء همهٔ $f, g \in \mathcal{F}_p$ ها $\ell(fg) = 0$. نشان دهید ℓ توسیعی منحصر بفرد به یک مشتق دارد.

(ب) گیریم W زیر فضای برداری از $\mathcal{F}_p$ تولید شده توسط همهٔ حاصلضربهای fg با $f, g \in \mathcal{F}_p$ است. نشان دهید فضای برداری همهٔ مشتقات در p با فضای دوگان $(\mathcal{F}_p/W)^*$ ایزومورف است.

(ج) چون بعد $(\mathcal{F}_p/W)^*$ برابر با بعد منیفلد M است، پس $\mathcal{F}_p/W$ نیز همان بعد را دارد. اگر x دستگاهی مختصاتی با $x(p) = ۰$ باشد، نشان دهید که همدسته‌های $x^۱ + W$، . . . و $x^n + W$ پایه‌ای برای $\mathcal{F}_p/W$ تشکیل می‌دهند (از لم ۲.۴.۳ استفاده کنید). همان طور که در مسالهٔ بعد مشهود است، در مورد توابع $C^۱$ وضعیت کاملاً متفاوت است.

۱۳) (الف) گیریم V فضای برداری همهٔ توابع $C^۱$ به شکل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(۰) = ۰$ است و W زیر فضای از V تولید شده توسط همهٔ حاصلضربهای در V است. نشان دهید که به ازاء همهٔ $f \in W$ ها $\lim_{x \to ۰} f(x)/x$ وجود دارد.

(ب) به ازاء $۰ < \epsilon < ۱$، فرض کنیم

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} x^{۱+\epsilon} & x \geq ۰ \\ ۰ & x \leq ۰ \end{cases}$$

نشان دهید همهٔ f_ϵ ها در V هستند، و همگی در V/W عناصر مستقل خطی می‌سازند.

(ج) نتیجه بگیرید $(V/W)^*$ با بعد $c^c = ۲^c$ است که c کاردینالیتی $\mathbb{R}$ است.

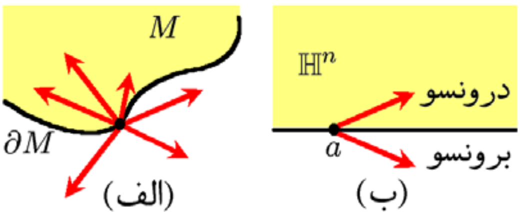
۱۴) نشان دهید که اگر $f : M \to N$، و f_* بر هر تاری صفر باشد، آنگاه f بر هر مؤلفهٔ M ثابت است.

۱۵) (الف) نگاشت $f : M \to N$ وقتی و تنها وقتی ایمرشن است که f_* بر هر تار از TM یکبیک باشد. کلی‌تر، رتبهٔ f در $p \in M$ برابر رتبهٔ تبدیل خطی $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ است.

(ب) اگر $f \circ g = f$، که g دیفیئومورفیسم است، نشان دهید که رتبهٔ $f \circ g$ در a با رتبهٔ f در $g(a)$ برابر است. (با مسالهٔ ۲—۳۳—(د) مقایسه کنید.)

۱۶) (الف) اگر M مرزدار باشد، کلاف مماس TM درست مثل حالت M معمولی تعریف می‌شود: عناصر T_pM دسته‌های هم ارزی $\tilde{p}$ از جفتهای (x, v) هستند. با اینکه x همسایگی از $p \in \partial M$ را بروی $\mathbb{H}^n$ می‌برد نه بروی $\mathbb{R}^n$، اما هنوز هم v بر کل $\mathbb{R}^n$ حرکت می‌کند. نتیجتاً، در T_pM بردارهای مماس در همهٔ راستاهای

وجود دارد. اگر $p \in \partial M$ و $x : U \to \mathbb{H}^n$ دستگاهی مختصاتی حول p باشد، آنگاه $T_pM \supseteq x^{-1}(T_{x(p)}\mathbb{R}^{n-1})$ زیر فضای برداری است. نشان دهید که این فضا مستقل از انتخاب x نیست؛ در واقع، اگر $i : \partial M \to M$ ایمرشن باشد، آن با $i_*(T_p(\partial M))$ برابر است.



شکل ۱۸.۳: (الف) بردارهای مماس بر مرز منیفلد. (بَ) بردارهای داخلی و خارجی.

(ب) گیریم $a \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{H}^n$. بردار مماس بر $T_a\mathbb{H}^n$ را دزر صورتی داخلی گوئیم که نسبت به یکی گیری $T\mathbb{H}^n$ با $\varepsilon(\mathbb{H}^n)$، به شکل (a, v) باشد که $v^n > 0$. بردار $v \in T_pM$ که در $i_*T_p(\partial M)$ نیست را داخلی گوئیم هرگاه $x_*(v) \in T_{x(p)}\mathbb{H}^n$ داخلی باشد. نشان دهید که این تعریف از انتخاب دستگاه مختصاتی x مستقل است.

(شکل)

(ج) نشان دهید که اگر M دارای جهت μ باشد، آنگاه ∂M جهتی منحصر بفرد $\partial\mu$ می‌پذیرد که $(\partial\mu)_p = [v_1, \cdots, v_{n-1}]$ اگر و فقط اگر به ازاء هر بردار خارجی $w \in T_pM$ ای $\mu_p = [w, i_*(v_1), \cdots, i_*(v_{n-1})]$.

(د) اگر μ جهت معمولی $\mathbb{H}^n$ باشد، نشان دهید که $\partial\mu$ برابر است با $(-1)^n$ ضرب در جهت معمولی موجود بر $\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{H}^n$. (دلیل این انتخاب در فصل ۸ روشن می‌شود.)

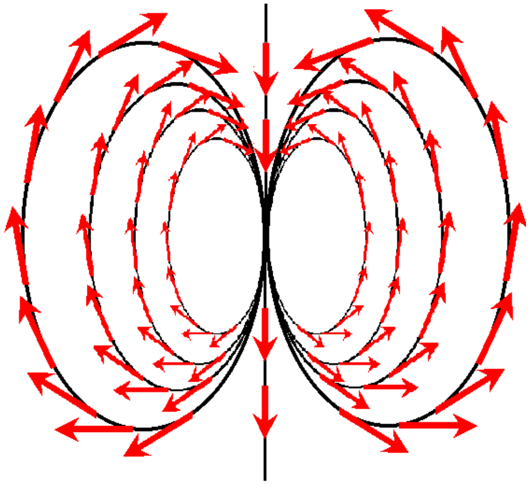
(ه) فرض کنید مسالهٔ ۱۴ از فصل ۲ برقرار است. نگاشت $g : \partial M \times [0, 1) \to \partial N \times [0, 1)$ را به صورت $g(p, t) = (f(p), t)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که در این صورت، با یکی گیری $(\beta^{-1})_* \circ g_* \circ \alpha_*(v) \in T_{f(p)}(\partial N)$ و $v \in T_p(\partial M)$، TP از روی $TM \cup TM$ قابل ساخت است.

(و) اگر M و N دارای جهت بترتیب μ و ν باشند و $f : (\partial M, \partial\mu) \to (\partial N, \partial\nu)$ حافظ جهت باشد، نشان دهید P جهتی دارد که با μ بر $M \subset P$ و ν بر $N \subset P$ سازگار است.

(ز) فرض کنید M عبارت از $\mathbb{S}^۲$ است که دو قرص از سطح آن جدا کرده‌ایم و $N = [۰, ۱] \times \mathbb{S}^۱$. گیریم f دیفیئوموفیسمی از M به N است که بر یک کپی از $\mathbb{S}^۱$ حافظ جهت است و بر دیگری، برگردان جهت می‌باشد. منیفلد نتیجه P چه است؟

۱۷) نشان دهید $T\mathbb{R}^۲$ با فضای حاصل از $T(\mathbb{S}^۲, i)$ با یکی گیری $(p, v) \in T_p(\mathbb{S}^۲, i)$ و $(-p, -v) \in T_{-p}(\mathbb{S}^۲, i)$ همیومورف است.

۱۸) با اینکه بر $\mathbb{S}^۲$ هیچ میدان برداری ناصفری وجود ندارد، بر $\mathbb{S}^۲ - \{(۰, ۰, ۱)\}$ که با $\mathbb{R}^۲$ دیفئومورف است، چنین میدان برداری‌ای وجود دارد. نشان دهید چنین میدان برداری را طوری می‌توان یافت که در حوالی $(۰, ۰, ۱)$ شبیه به میدان برداری نشان داده شده در شکل ۱۹.۳ باشد.



شکل ۱۹.۳

۱۹) فرض کنید نگاشتی $(a, b) \mapsto a \bullet b$ از $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ وجود دارد به گونه‌ای که به ازای هر $a, a_۱, a_۲, b, b_۱, b_۲ \in \mathbb{R}^n$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ای

$$(a_۱ + a_۲) \bullet b = a_۱ \bullet b + a_۲ \bullet b$$

$$a \bullet (b_۱ + b_۲) = a \bullet b_۱ + a \bullet b_۲$$

$$\lambda(a \bullet b) = (\lambda a) \cdots b = a_۲ \bullet (\lambda b)$$

$$a \bullet (۱, ۰, \cdots, ۰) = a$$

و به ازای هر $a \neq 0$، یک b ای چنان وجود داشته باشد که $a \bullet b = b \bullet a = (1, 0, \cdots, 0)$. (مثلاً، برای $n = 1$ کافی است ضرب معمولی را در نظر بگیریم؛ و برای $n = 2$، ضرب مختلط $(a, b) \bullet (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ را در نظر بگیرید.) گیریم $\{e_1, \cdots, e_n\}$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ استم ثابت کنید

(الف) هر نقطه در $\mathbb{S}^{n-1}$ به ازای یک $a \in \mathbb{R}^n$ ای منحصر به فرد به شکل $a \bullet e_1$ است.

(ب) اگر $a \neq \mathbf{0}$، آنگاه $a \bullet e_1$، . . . و $a \bullet e_n$ مستقل خطی‌اند.

(ج) اگر $p = a \bullet e_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$، آنگاه تصاویر $a \bullet e_1$، . . . و $a \bullet e_n$ $T_p(\mathbb{S}^{n-1}, i)$ مستقل خطی‌اند.

(د) ضربِ در a پیوسته است: $p \mapsto a \bullet p$.

(ه) $T\mathbb{S}^{n-1}$ بدیهی است.

(و) $T\mathbb{P}^{n-1}$ بدیهی است.

هر دو کلاف مماس $T\mathbb{S}^2$ و $T\mathbb{S}^3$ بدیهی هستند.ضرب مناسبی بر $\mathbb{R}^4$ و $\mathbb{R}^8$ بترتیب با استفاده از چهارتایی‌های همیلتن و هشتایی‌های کیلی قابل تعریف است. چهارتایی‌های همیلتن تعویضپذیر نیستند و اعداد کیلی حتی شرکتپذیر نیز نیستند. قضیه‌ای کلاسیک وجود دارد که می‌گوید «مجموعهٔ اعداد حقیقی، مختلط و چهارتایی‌های همیلتن، تنها مثالهای از ضرب شرکتپذیر بر هیأت اعدا حقیقی هستند» به مقالهٔ پالیس [?] توجه شود. اخیراً، فرانک آدامز با استفاده از توپولوژی جبری ثابت می‌کند که این حکم برای n مساوی ۱، ۲، ۳ و ۸ درست است.

۲۰) (الف) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ایزومورفیسم فضاهای برداری است و فضای حاصل از $\mathbb{R}^n \times [0; 1]$ با یکی گیری $(0, v)$ و $(1, T(v))$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این فضا را به عنوان فضای کلی یک کلاف برداری بر $\mathbb{S}^1$ می‌توان قلمداد نمود (تعمیم نوار موبیوس).

(ب) نشان دهید کلاف حاضر وقتی و تنها وقتی جهتپذیر است که T حافظ جهت باشد.

۲۱) با نشان دادن اینکه به ازای همهٔ منحنیهای c باm $c(0) = p$ و به ازای هر t ای $\|c'(t)\| = 1$، ضرب داخلی $< p, c'(0) >$ صفر است، نشان دهید به ازای هر $p \in \mathbb{S}^2$ ای بردار مماس $p_p \in T_p\mathbb{R}^3$ به $i_*(T\mathbb{S}^2)$ متعلق نیست. یاد آوری می‌کنیم که بنابه صفحهٔ ۲۳ از کتاب حسابان بر منیفلدها اثر اسپیواک، رابطهٔ زیر

را داریم:

$$< f, g >' (t) =< f'(t)^t, g(t) > + < f(t), g'(t)^t >$$

۲۲) گیریم M منیفلد هموار دلخواهی است. فرض کنید به ازای هر $A \subset M$ همیومورف با $\mathbb{S}^۱$، کلاف $(TM)|_A$ بدیهی باشد. نشان دهید M جهتپذیر است. راهنمایی: هر قوس c از $p_۰ \in M$ به $p \in M$ در یک چنین A ای قرار دارد و لذا $(TM)|_c$ نیز بدیهی است. بنابراین، جهت بر $T_{p_۰}M$ را به T_pM می‌توان منتقل نمود. بایستی بررسی شود که این انتقال به انتخاب c بستگی ندارد. ابتدا یک جفت c و c' در نظر بگیرید که یکدیگر را در $p_۰$ و p ملاقات می‌کنند. در کل با شکستن c به قطعات کوچکی که در همسایگی‌های مختصاتی جای گیرند، ممکن است حالتهای در همی به وجود آید.
یادداشت: با استفاده از احکام در ضمیمهٔ فصل ۹ و نیز مسألهٔ ۲۹، می‌توان نتیجه گرفت که اگر M جهتناپذیر باشد، آنگاه همسایگی‌ای از $\mathbb{S}^۱ \subset M$ ای وجود دارد که جهتپذیر نیست.

دو مسألهٔ بعدی به ساختهای مهم روی کلافهای برداری اختصاص دارد.

۲۳) فرض کنید $\xi = \pi : E \to X$ یک کلاف برداری و $f : Y \to X$ نگاشتی پیوسته است. گیریم $E' \subset Y \times E$ مجموعهٔ همهٔ (y, e) هایی با $f(y) = \pi(e)$ است و نگاشت $\pi' : E' \to X$ را به صورت $\pi'(y, e) = y$ و $\tilde{f} : E' \to E$ را به صورت $\tilde{f}(y, e) = e$ تعریف کنیم. با استفاده از ساختار فضای برداری بر $\pi^{-۱}(f(y))$، ساختار فضای برداری بر $\pi'^{-۱}(y) = \{(y, e)| e \in \pi^{-۱}(f(y))\}$ می‌توان تعریف نمود. نشان دهید که $\pi'^{-۱} : E' \to X$ کلاف برداری است و $(\tilde{f}, f)$ نگاشتی کلافی می‌باشد که بر هر تار ایزومورف می‌باشد. این کلاف را با نماد $f^*(\xi)$ نشان داده و **کلاف القائی** (از ξ) توسط f می‌نامیم.

(ب) فرض کنید کلافی دیگر $\xi'' : \pi'' : E'' \to X$ داریم و همچنین $(\tilde{f}', f)$ یک نگاشت کلافی از ξ'' به ξ است که بر هر تاری ایزومورفیسم می‌باشد. نشان دهید که $\xi'' = \xi' = f^*(\xi)$.

(ج) اگر $A \subset X$ و $i : A \hookrightarrow X$ نگاشت احتوی باشد، آنگاه $f^*(\xi) = \xi|_A$.

(د) اگر ξ جهتپذیر باشد، آنگاه $f^*(\xi)$ نیز جهتپذیر است.

(ه) مثالی بیاورید که نشان دهد ممکن است ξ جهت ناپذیر باشد ولی $f^*(\xi)$ جهتپذیر باشد.

(و) گیریم $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری است. چون $\pi : E \to B$ نگاشتی پیوسته از فضایی به فضای پایهٔ B کلاف ξ است، نماد $\pi^*(\xi)$ با معنی است. نشان دهید که اگر ξ جهتناپذیر باشد، آنگاه $\pi^*(\xi)$ نیز جهتناپذیر خواهد بود.

۲۴) (الف) به ازای کلاف n–صفحه‌ای $\xi = \pi : E \to B$ و کلاف m–صفحه‌ای $\eta = \pi' : E' \to B$ مفروض، فرض کنیم $E'' \subset E \times E'$ مجموعهٔ همهٔ جفتهای (e, e') با $\pi(e) = \pi'(e')$ است. گیریم $\pi'' : E'' \to B$ با ضابطهٔ $\pi''(e, e') = (\pi(e), \pi'(e'))$ است. نشان دهید $\pi'' : E'' \to B$ یک کلاف برداری $(m + n)$–صفحه‌ای است. این کلاف را **مجموع ویتینی** $\xi \oplus \eta$ کلافهای ξ و η می‌نامند. تار $\xi \oplus \eta$ بر p با جمع مستقیم $\pi^{-1}(p) \oplus \pi'^{-1}(p)$ برابر است.

(ب) اگر $f : Y \to B$، نشان دهید که در این صورت $f^*(\xi \oplus \eta) = f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$.

(ج) به ازای کلافهای مفروض $\xi_1 = \pi_i : E_i \to B_i$، با $i = 1, 2$، نگاشتهای $\pi : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ را به صورت $\pi(e_1, e_2) = (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که به این ترتیب یک کلاف برداری $\xi_1 \times \xi_2$ بر $B_1 \times B_2$ داریم.

(د) اگر $\Delta : B \to B \times B$ نگاشت قطری $\Delta(x) = (x, x)$ باشد، نشان دهید $\xi \oplus \eta = \Delta^*(\xi \times \eta)$.

(ه) نشان دهید که اگر ξ و η جهتپذیر باشند، آنگاه $\xi \oplus \eta$ نیز جهتپذیر است.

(و) نشان دهید که اگر ξ جهتپذیر و η جهت ناپذیر باشند، آنگاه $\xi \oplus \eta$ جهت ناپذیر است.

(ز) برای هر فضای برداری دلخواه W، جهتی طبیعی بر $W \times W$ تعریف نموده و به کمک آن نشان دهید که همواره $\xi \oplus \xi$ جهتپذیر است.

(ح) چنانچه X به شکل ∞ باشد، دو کلاف ۱–صفحه‌ای ξ و η بر X به گونه‌ای مشخص کنید که خودشان جهت ناپذیرند و $\xi \oplus \eta$ نیز جهت ناپذیر است.

۲۵) (الف) اگر $\pi : E \to M$ کلاف برداری هموار باشد، در این صورت π_* در هر نقطه‌ای با رتبهٔ حداکثر است، و هر تار $\pi^{-1}(p)$ از آن یک زیر منیفلد هموار از E

می‌باشد.

(ب) برش صفر زیر منیفلدی از E است، که توسط π به صورت دیفیئوموف روی B تصویر می‌گردد.

۲۶) (الف) اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند و همچنین نگاشتهای $\pi_M : M \times N \to M$ و $\pi_N : M \times N \to N$ بترتیب تصاویر طبیعی بر M و N. در این صورت، نشان دهید که $T(M \times N) \cong \pi_M^*(TM) \oplus \pi_N^*(NT)$.

(ب) در صورتی که M و N جهتپذیر باشند، نشان دهید $M \times N$ نیز هست.

(ج) در صورتی که $M \times N$ جهتپذیر باشد، ثابت کنید M و N هر دو جهتپذیرند.

۲۷) نشان دهید که ماتریس ژاکوبی $y_* \circ (x_*)^{-۱}$ به شکل

$$\begin{pmatrix} D_j(y^i \circ x^{-۱}) & O \\ X & D_j(y^i \circ x^{-۱}) \end{pmatrix}$$

است. این نشان می‌دهد که همواره منیفلد TM جهتپذیر است؛ یعنی، $T(TM)$ جهتپذیر است. (در این حالت، وضعیت بخصوصی است: به ازاء هر $v \in TM$، جهت برای $(TM)_v$ را به صورت

$$\left[\frac{\partial}{\partial(x^۱ \circ \pi)}\Big|_v, \ldots, \frac{\partial}{\partial(x^n \circ \pi)}\Big|_v, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^۱}\Big|_v, \ldots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^n}\Big|_v\right]$$

تعریف می‌کنیم $y_* \circ (x_*)^{-۱}$ نشان می‌دهد که این جهتدهی از انتخاب x مستقل است.) در مسالهٔ ۲۹ اثباتی متفاوت برای جهتپذیری منیفلد TM وجود دارد.

۲۸) (الف) گیریم (x, U) دستگاهی مختصاتی با $v(p) = ۰$ بر M است و $v \in T_pM$ برابر $\sum_{i=۱}^n a^i(\partial/\partial x^i)\big|_p$ است. منحنی با ضابطهٔ $c(t) = v + t(\partial/\partial x^i)|_p$ در TM را در نظر بگیرید. نشان دهید $(dc/dt)(۰) = (\partial/\partial \dot{x}^i)\big|_v$.

(ب) منحنی‌ای بیابید که مماس آن در صفر برابر $(\partial/\partial(x^i \circ \pi))\big|_v$ است.

۲۹) حل این مساله نیاز به آشنایی با مفهوم دنباله‌های دقیق دارد. دنبالهٔ $E_۱ \xrightarrow{\tilde{f}} E_۲ \xrightarrow{\tilde{g}} E_۳$ از نگاشتهای کلافی با $f = g = \mathrm{Id}_B$ را در صورتی **دقیق** گوئیم که در هر تار، دنباله‌ای دقیق از نگاشتهای بین فضاهای برداری باشد.

(الف) اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری هموار باشد، نشان دهید که دنباله‌ای دقیق به شکل

$$۰ \to \pi^*(E) \to TE \to \pi^*(TB) \to ۰$$

وجود دارد. راهنمایی: (۱) هر عضو از فضای کلی $\pi^*(\xi)$ زوج مرتبی از نقاط در یک تار است، که برداری مماس به آن تار مشخص می‌کنند. (۲) عنصر $X \in T_e(TE)$ را به $(e, \pi_* X)$ بنگارند.

(ب) اگر $\circ \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to \circ$ دنباله‌ای دقیق از کلافهای برداری باشد، نشان دهید اگر دو تار از E_i ها جهتپذیر باشند، سومی نیز هست.

(ج) نشان دهید $T(TM)$ همیشه جهتپذیر است.

(د) اگر $\pi : E \to M$ جهتپذیر نباشد، در این صورت نشان دهید که منیفلد E نیز جهتپذیر نیست. (این راهی برای اثبات این مطلب است که نوار موبیوس منیفلدی جهت ناپذیر است. همچنان که به عنوان کلافی بر $\mathbb{S}^1$ جهت ناپذیر است.)

مسایل ۳۰ و ۳۱ اطلاعات بیشتری در خصوص گروهها در بردارند و ادامهٔ تمرین ۳۳ از فصل ۲ به شمار می‌آیند. علاوه بر اینکه از آنها در مسالهٔ ۳۲ استفاده می‌شود، در فصل ۱۰ نیز با اهمیت هستند.

۳۰) (الف) فرض کنیم $p_\circ = (\circ, \cdots, \circ, 1) \in^{n-1}$. به ازاء $n \geq 2$ نگاشت $f : \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ را به صورت $f(A) = A(p_\circ)$ تعریف می کنیم. نشان دهید f پیوسته و باز است. نشان دهید $f^{-1}(p_\circ)$ با $\mathrm{SO}(n-1)$ همیومورف است، و سپس نشان دهید که به ازاء هر $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ ای $f^{-1}(p)$ با $\mathrm{SO}(n-1)$ همیومورف است.

(ب) $\mathrm{SO}(1)$ تک نقطه‌ای است و لذا همبندی می‌باشد. با استفاده از قسمت (الف) و اسقراء بر n، ثابت کنید که بازاء هر $n \geq 1$ ای $\mathrm{SO}(n)$ همبند است.

(ج) نشان دهید $\mathrm{O}(n)$ دقیقاً دو مولفه دارد.

۳۱) (الف) در صورتی که $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تبدیلی خطی باشد، نگاشت الحاقی $T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ تعریف می‌کنیم (به ازاء هر v، نگاشت $\langle v, T(w)\rangle \longrightarrow w$) خطی است، و لذا به ازاء یک $T_*(v)$ منحصر بفرد، داریم $\langle T^*(v), w\rangle \mapsto w$). چنانچه A ماتریس T نسبت به پایهٔ استاندارد باشد، ماتریس T^* برابر ترانهادهٔ A^t ماتریس A خواهد بود.

(ب) تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را در صورتی **خود الحاق** گوئیم که $T = T^*$. یعنی، به ازای هر $v, w \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$. اگر A ماتریس تبدیل T نسبت به پایهٔ استاندارد باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی T

خود الحاق است که ماتریس A متقارن باشد: $A^t = A$. قضیه‌ای استاندارد از جبر خطی اذعان می‌دارد که هر ماتریس متقارن را به صورت CDC^{-1} می‌توان نوشت، که D ماتریسی قطری است. (در صفحهٔ ۱۲۲ از کتاب حسابان اسپیوک اثباتی تحلیلی از آن آورده شده است.) نشان دهید می‌توان C را ماتریسی متعامد می‌توان انتخاب نمود. برای این منظور از این نکته شروع کنید که بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت بر هم عمود هستند.

(ج) تبدیل خطی خوذ الحاق T (یا ماتریس متقارن نظیرش A) را در صورتی **مثبت نیم—معین** گوئیم که به ازای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ای $\langle v, T(v)\rangle \geq 0$؛ آنرا در صورتی **مثبت معین** گوئیم که به ازای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ای داشته باشیم $\langle v, T(v)\rangle > 0$. نشان دهید که اگر A مثبت معین باشد، آنگاه معکوسپذیر است. راهنمایی: از نامساوی کوشی شوارتز استفاده شود.

(د) نشان دهید $A^t.A$ همواره مثبت نیم—معین است.

(ه) نشان دهید که اگر A مثبت نیم—معین باشد، آنگاه B ای وجود دارد که $A = B^2$. (یادتان باشد که A متقارن فرض شده است.)

(و) نشان دهید که هر $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ای را به صورت $A = A_1.A_2$ می‌توان نوشت که $A_1 \in \mathrm{O}(n)$ و A_2 مثبت معین است. راهنمایی: $A.A^t$ و قسمت (ه) را در نظر بگیرید.

(ز) ثابت کنید ماتریسهای A_1 و A_2 توابعی پیوسته از A هستند. راهنمایی: اگر $\{A^{(n)}\}$ دنباله‌ای همگرا به A بوده و $A^{(n)} = A_1^{(n)}.A_2^{(n)}$، آنگاه زیر دنباله‌ای از $\{A_1^{(n)}\}$ همگرا است.

(ح) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ با $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ همئومورف است و دقیقاً دو مؤلفه دارد: $\{A | \det A > 0\}$ و $\{A | \det A < 0\}$. (توجه کنید که این روش دیگری برای تعیین بعد $\mathrm{O}(n)$ می‌باشد.)

۳۲) دو تابع پیوسته $f_0, f_1 : X \to Y$ را در صورتی **هموتوپ** گوئیم که تابعی پیوسته $H : X \times [0; 1] \to Y$ چنان یافت گردد که $H(x, 0) = f_0(x)$ و $f_1(x) = H(x, 1)$. توابع H_t با ضابطهٔ $H_t(x) := H(x, t)$ را به عنوان مسیری از توابع از $H_0 = f_0$ به $H_1 = f_1$ می‌توان تلقی نمود. نگاشت H را **هموتوپی** بین f_0 و f_1 می‌نامند.

اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$، نماد $f : (X, A) \to (Y, B)$ بدین معنی است که $f : X \to Y$ و $f(A) \subset B$. یادآور می‌شویم که $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$

(به عنوان نگاشتهایی از (X, A) به (Y, B)) در صورتی هموتوپند که H ای مانند قبل یافت گردد که $H_t : (X, A) \to (Y, B)$.

(الف) اگر $A : [0; 1] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ پیوسته بوده و $H : \mathbb{R}^n \times [0; 1] \to \mathbb{R}^n$ به صورت $H(x, t) = A(t)(x)$ تعریف شود، نشان دهید H پیوسته است و لذا H_0 و H_1 به عنوان نگاشتهایی از $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$ به توی خودش $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$ هموتوپند. نتیجه بگیرید که هر تبدیل خطی نامنفرد $T : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$ با $\det T > 0$، با نگاشت همانی هموتوپ می‌باشد.

(ب) فرض کنید نگاشت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ هموار است، $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ و $f(\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}) \subset \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. در صورتی که $Df(\mathbf{0})$ نامنفرد باشد، نشان دهید که نگاشتهای

$$f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$$
$$Df(\mathbf{0}) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$$

هموتوپ است. راهنمایی: به ازای $0 < t \leq 1$ تعریف کنید $H(x, t) = f(tx)$ و نیز $H(x, 0) = Df(\mathbf{0})(x)$. برای اثبات پیوستگی در نقاط $(x, 0)$ از لم ۲.۴.۳ استفاده کنید.

(ج) گیریم U همسایگی‌ای از مبداء $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ است و $f : U \to \mathbb{R}^n$ همیومورفیسمی با $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ می‌باشد. گیریم $B_r \subset V$ گوی باز به مرکز در $\mathbf{0}$ و شعاع $r > 0$ است و $h : \mathbb{R}^n \to B_r$ همیومورفیسمی می‌باشد که با ضابطهٔ $h(x) = \left(\frac{2r}{n} \arctan |x|\right)x$ تعریف شده است. در این صورت، نگاشتهای

$$f, f \circ h : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$$

را **حافظ جهت در $\mathbf{0}$** گوئیم، هر گاه $f \circ h$ با

$$\mathrm{Id} : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\})$$

هموتوپ باشد. نشان دهید که این تعریف از انتخاب $B_r \subset V$ مستقل می‌باشد.

(د) فرض کنیم به ازای هر $p \in \mathbb{R}^n$ ای نگاشت $T_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $T_p(q) = p+q$ تعریف کنیم. اگر $f : U \to V$ همیومورفیسم باشد، و $U, V \subset \mathbb{R}^n$ باز باشند. نشان دهید که اگر M جهتپذیر باشد، آنگاه در صورتی f در p حافظ جهت است که نگاشت $T_{f(p)} \circ f \circ T_p$ در $\mathbf{0}$ حافظ جهت باشد. نشان دهید که اگر M جهتپذیر باشد، آنگاه گردایه‌ای $\mathcal{C}$ از چهارتها وجود دارد که دامنهٔ آنها M را می پوشاند و به ازای هر $(x, U), (y, V) \in \mathcal{C}$ ای نگاشت $y \circ x^{-1}$ به ازای هر p از $U \cup V$ حافظ جهت است.

(ه) توجه کنید که شرط در (د) حتی برای وقتی که $y \circ x^{-1}$ دیفرانسیلپذیر نباشد با معنی است. بنابراین، اگر M منیفلد (نه لزوماً دیفرانسیلپذیر) باشد، می‌توان تعریف نمود که M در صورتی جهتپذیر است که گردایه‌ای $\mathcal{C}$ از همیومورفیسمها $x : U \to \mathbb{R}^n$ یافت گردد که دامنهٔ آنها M را بپوشاند و $\mathcal{C}$ در شرط (د) صدق کند. برای اثبات اینکه این تعریف با تعریف قبلی مطابقت دارد، به حکمی از توپولوژی جبری نیاز داریم: اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ همیومورفیسمی با $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ بوده و $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ به شکل $T(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, x^n)$ باشد، آنگاه درست یکی از نگاشتهای f و $T \circ f$ در $\mathbf{0}$ حافظ جهت است. با فرض درستی این حکم، نشان دهید که اگر M چنین گردایه‌ای $\mathcal{C}$ از همیومورفیسمها بپذیرد، آنگاه به ازای هر ساختار هموار بر M، کلاف مماس TM جهتپذیر است.

۳۳) گیریم $M^n \subset \mathbb{R}^N$ زیر منیفلدی هموار و $n-$بعدی است. منظور از یک زِه در M، نقطه‌ای به شکل $p - q$ است، که $p, q \in M \subset \mathbb{R}^N$.

(الف) ثابت کنید که اگر $N > 2n + 1$، آنگاه بردار $v \in \mathbb{S}^{N-1}$ ای چنان وجود دارد که
(۱) هیچ زهی از M با v موازی نیست.
(۲) صفحهٔ مماس T_pM به M در p، بردار v را در بر دارد. راهنمایی: نگاشتهای بخصوص از زیر مجموعه‌های باز مناسب از $M \times M$ و TM بتوی $\mathbb{S}^{N-1}$ را در نظر بگیرید.

(ب) گیریم $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ زیر فضای عمود به v است و $\pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ تصویر نظیر به آن می‌باشد. نشان دهید که $\pi|_M$ ایمرشنی یکبیک است. به ویژه، اگر M فشرده باشد، آنگاه $\pi|_M$ نشاننده است.

(ج) هر منیفلد $n-$بعدی هموار و فشرده را در $\mathbb{R}^{2n-1}$ می‌توان نشاند.

یادداشت: این حالت خاصی از قضیهٔ کلاسیک ویتینی [?] است، که بنابه آن این حکم برای هر منیفلد غیر فشرده‌ای نیز درست است. اثباتهایی از آن را در «مقدمه‌ای بر منیفلدهای دیفرانسیلپذیر، اثر اوسلاند و مکنزی» و یا «درسهایی در هندسه دیفرانسیل، اثر استرنبرگ» می‌توانید مشاهده کنید. در کتاب «توپولوژی مقدماتی، اثر مانکرز» نیز نوع دیگری ار این استدلال آمده است و ثابت می‌گردد که هر $n-$ منیفلد نه لزوماً فشرده M را در یک $\mathbb{R}^N$ ای مناسب می‌توان نشاند (عملاً با $N = (n+1)^2$). با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نشان داد که در اینجا باید از وجود نگاشت سره‌ای $f : M \to \mathbb{R}$ که در مسألهٔ ۳۰ از فصل ۲ آمده

استفاده نمود. (با «توپولوژی دیفرانسیل، اثر پولاک و گیلومن» مقایسه گردد).
حکم دیگری از ویتینی [?] نشان می‌دهد که M^n را عملاً در $\mathbb{R}^{۲n}$ می‌توان نشاند.

فصل ۴

تانسور

۱.۴ کلاف دوگان

همهٔ ساختارهایی که در این فصل بر کلافهای برداری صورت می‌پذیرد، یک وجه مشترک دارند. در هر کدام، هر یک از تارهای $\pi^{-1}(p)$ را به فضای برداری دیگر تعویض می‌کنیم و سپس همه این فضاهای برداری جدید را به گونه‌ای با هم جور می‌کنیم که یک کلاف برداری بر روی همان فضای پایه قبلی تشکیل دهند. ساده ترین حالت هنگامی است که هر یک از تارهای V کلاف را با دوگانش V^* عوض کنیم. یادآور می‌شویم که V^* فضای برداری همه توابع خطی به شکل $\lambda : V \to \mathbb{R}$ است. اگر $f : V \to W$ تبدیل خطی باشد آنگاه تبدیل خطی $f^* : W^* \to V^*$ با ضابطه $f^*(\lambda)(v) := \lambda(f(v))$ می‌توان تعریف نمود. روشن است که اگر $\mathrm{Id}_V : V \to V$ همانی باشد، آنگاه Id_V^* همان V^* است و اگر $g : U \to V$ آنگاه $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. این احکام ساده نشان می‌دهند که اگر $f : V \to W$ ایزومورفیسم باشد، آنگاه f^* نیز هست. زیرا $(f^{-1} \circ f)^* = \mathrm{Id}_V^*$ و $(f \circ f^{-1})^* = \mathrm{Id}_W^*$.

چنانچه V با بعد متناهی باشد، بعد V^* و V برابرند. در واقع، اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، آنگاه عناصر $v_i^* \in V^*$ با تعریف $v_i^*(v_j) = \delta_j^i$ پایه‌ای برای V^* تشکیل می‌دهند. تابع خطی v_i^* به کل مجموعهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ بستگی دارد، نه فقط به v_i تنها؛ و ایزومورفیسم از V به V^* که از فرستادن v_i به v_i^* حاصل می‌شود، از انتخاب پایه مستقل نیست (کافی است تأثیر تغییر v_1 به $2v_1$ را در نظر بگیرید). از سوی دیگر اگر $v \in V$، بی هیچ پروایی می‌توانیم $v^{**} \in V^{**} := (V^*)^*$ را به صورت زیر تعریف

کنیم:

$$\text{به ازای هر } \lambda \in V^* \text{ ای} \quad v^{**}(\lambda) := \lambda(v)$$

اگر به ازاء هر $\lambda \in V^*$ ای $V^{**}(\lambda) = 0$ آنگاه به ازاء هر $\lambda \in V^*$ ای $\lambda(v) = 0$ که از آن نتیجه می‌گیریم $v = 0$ بنابراین، نگاشت $v^{**} \mapsto$ یزومورفیسمی از V به V^{**} است. این نگاشت را ایزومورفیسم طبیعی از V به V^{**} می‌نامیم (مساله ٦ استفاده از صفت طبیعی را روشن می‌سازد. یک دلیل آن این است که عملا هیچ ایزومورفیسم طبیعی از V به وجود ندارد.

حال فرض کنیم $\xi : E \to B$ کلافی برداری است. گیریم $E' := \bigcup_{p \in B} \{\pi^{-1}\}^*$ و نگاشت $\xi' : E' \to B$ را طوری تعریف کنیم که $\{\pi^{-1}\}^*$ را به p بنگارد. اگر $U \subset B$ و $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ بدیهی سازی موضعی باشد، آنگاه نگاشتی به شکل

$$t' : \pi'^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^n)^*$$

بطور طبیعی می‌توان تعریف نمود: چون تحدید نگاشت t به هر تار $\pi^{-1}(p)$ ایزومورفیسم است، ایزومورفیسمی به شکل

$$(t_p^*)^{-1} : \{\pi^{-1}(p)\}^* \to \{p\} \times (\mathbb{R}^n)^*$$

می‌توانیم تعریف کنیم. به این ترتیب، با خواستن اینکه همه چنین t' هایی بدیهی سازی موضعی باشند، می‌توانیم $\pi' : E' \to B$ را به کلافی برداری تبدیل کنیم: کلاف دوگان ξ^* کلاف ξ (در ابتدا لازم است یک بار برای همه تارهای ایزومورفیسمی از $(\mathbb{R}^n)^*$ به $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم.)

ابتدا، چنین به نظر می‌رسد که $\xi \simeq \xi^*$ زیرا هر $\pi^{-1}(p)$ ای با $\pi^{-1}(p)$ ایزومورف است. البته، این تا حدودی نیز درست است، زیرا هر دو فضای برداری با یک بعد هستند. فقدان ایزومورفیسم طبیعی از V به V^* مانع می‌شود تا به راحتی بتوانیم هم ارزی بین ξ و ξ^* تعریف کنیم. در حقیقت، همان طور که بعداً خواهیم دید، در غالب حالات ξ^* با ξ هم ارز است؛ خواننده خود می‌تواند در این مورد تفکر کند. در مقابل کلاف $\xi^{**} := (\xi^*)^*$ همواره با ξ هم ارز است. با تصویر کردن تار V در p از ξ به تار V^{**} در p از ξ^{**} به ایزومورفیسم طبیعی دست می‌یابیم. چنانچه طریق ساختن ξ^* از ξ را بیاد بیاوریم، پی می‌بریم که این نگاشت عملاً یک هم ارزی است.

حتی اگر بتوان ξ را به شکل هندسی تجسم نمود (نظیر وقتی که ξ با TM برابر است)، بندرت می‌توان تجسمی هندسی از ξ^* بدست داد. بلکه، فقط ξ^* بر ξ عمل

کند: اگر s برشی از ξ و σ برشی از ξ^* باشد، آنگاه تابی از B به $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $p \to \omega(p)(s(p))$ می‌توان تعریف نمود. زیرا $s(p) \in \pi^{-۱}(p)$ و $\sigma(p) \in \pi'^{-۱}(p) = \pi^{-۱}(p)^*$. این تابع را به سادگی با $\sigma(s)$ نمایش می‌دهیم.

وقتی این ساخت در مورد کلاف مماس TM به ءانجام می‌شود، کلاف حاصل را با نماد T^*M نشان داده و به آن کلاف کنتاژانت M می‌گوئیم. تار T^*M روی p درست $(M_p)^*$ است. کلاف کتانژانت T^*M نیز شبیه TM یک کلاف برداری همواری است: زیرا C^∞–مرتبط بودن دو بدیهی سازی موضعی x^* و y_* برای TM، درست به معنی حکم شابه در خصوص x'_* و y'_* است (در حقیقت، $(y'_* \circ (x'_*) = y_* \circ (x_*)-^{-۱}$). بنابراین برشهایی پیوسته و یا برشهای هموار از T^*M را می‌توانیم تعریف کنیم.

اگر ω یک برش هموار از T^*M و X میدان برداری همواری بر M باشد، آنگاه $\omega(X)$ تابع هموار $p \Rightarrow \omega(p)(X(p))$ است.

۲.۴ دیفرانسیل یک تابع

اگر $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، برش هموار df از T^*M را به صورت

$$\forall\ X \in T_pM \quad : \quad df(p)(X) := X(f)$$

تعریف می‌کنیم. این برش را دیفرانسیل f می‌نامیم. بخصوص، فرض کنید که X با $\frac{dc}{dt}\Big|_{t_\circ}$ برابر باشد، که $c(t_\circ) = p$. یادآور می‌شویم که

$$\frac{dc}{dt}|_{t_\circ} = c_*\Big(\frac{d}{dt}|_{t_\circ}\Big)$$

این بدان معنی است که

$$\begin{aligned} df\Big(\frac{dc}{dt}_{t_\circ}\Big) &= c_*\Big(\frac{d}{dt}|_{t_\circ}\Big)(f) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}(f \circ c) \\ &= (f \circ c)'(t_\circ) \ \text{یا}\ \frac{d(f(c(t)))}{dt}\Big|_{t_\circ} \end{aligned}$$

این معادله را به شکل جمع و جور زیر می‌توان نوشت:

$$df(\frac{dc}{dt}) = \frac{d(f(c(t)))}{dt}$$

اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه هر یک از dx^i ها یک برش از T^*M روی U هستند. با اعمال این تعریف، ملاحظه می‌کنیم که

$$dx^i(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = \delta^i_j$$

بنابراین، $dx^1(p)$، . . . و $dx^n(p)$ پایه‌ای برای T_p^*M تشکیل می‌دهند که دوگان پایهٔ $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$، . . . و $\frac{\partial}{\partial^n}\Big|_p$ برای T_pM می‌باشد. این بدان معنی است که هر برش ω را به صورتی یکتا بر U به صورت

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) dx^i(p)$$

می‌توان نوشت، که ω_i ها توابعی بخصوص بر U هستند. برش ω وقتی و تنها وقتی پیوسته است که همهٔ توابع ω^i پیوسته باشند. حکم مشابهی برای C^∞ داریم. همچنین، اگر جمع برشها و ضرب تابع در برش را به شکل بدیهی تعریف کنیم (یعنی، جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه) می‌توانیم بنویسیم

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i$$

برش df نیز باید چنین نمایش داشته باشد. در واقع، فرمول کلاسیک مشروح در زیر را ادامه داریم:

۱.۲.۴ قضیه. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی و f تابعی هموار باشد، آنگاه بر U داریم

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

اثبات: اگر $X_p \in M_p$ به شکل $X_p = \sum_{i=1}^{n} a^i \partial/\partial x^i|_p$ باشد، آنگاه $a^i = X_p(x^i) =$ $dx^i(p)(X_p)$. بنابراین

$$df(p)(X_p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i(p)(X_p)$$

و برهان تمام است. □

۳.۴ معادل کلاسیک برای اصطلاحات نوین

متخصصان هندسه دیفرانسیل کلاسیک (و یا آنالیزدانان کلاسیک) ذز استفاده از اصطلاح تغییر بینهایت کوچک sx^i مختصات x^i آنگونه که لایبنیتز گفته، تردیدی نمی‌کنند. کسی نمی‌خواهد بگوید که این اصطلاح بی معنی است، چرا که احکام درستی از تقسیم این کمیاب بینهایت کوچک (البته به شرطی که درست بکار آیند) بدست می‌آید. عملاً روشن شده بود که نزدیک راه برای توصیف تغییر بینهایت کوچک، مشخص کردن جهتی است که این تغییر در آن راستا صورت می‌پذیرد؛ یعنی، بردار مماس.

چون فرض می‌شود df میزان تغغیرات بینهایت کوچک f نسبت به یک تغییر بینهایت کوچک در متغیرش است، پس باید df تابعی از این تغییر باشد، که این به معنی این است که df تابعی از بردارهای مماس می‌باشد. بنابراین خود dx^i ها به صورت تابع مسخ می‌شوند، و لذا روشن است که آنها را باید از بردارهای مماس $\partial/\partial x^i$ تمیز داد. چنانچه این ثوصیفات را بپذیریم، موضوع تعریف جدید، عملاً به معنی ایجاد تطابق بین اصطلاحات قدیم و جدید است. کوتاه سخن اینکه، همهً مفاهیم کلاسیک که در آنها از کمیات بینهایت کوچک بهره گرفته می‌شود، قابل بیان به صورت توابه بربردارهای مماس هستند، نظیر df، مگر آنهایی که به صورت خارج قسمت بینهایت کوچکها مطرح می‌شوند، که به صورت بردارهای مماس تعبیر می‌گردد، نظیر dc/dt.

چنانچه کتب کلاسیک را ورق بزنیم و آنها را از دیدگاه جدید بررسی کنیم، عملاً خواهیم دید که اغلب دیدگاهی جدید کمی و یا قسمتی در کارهای هندسه دانان قدیمی نهفته است. فی‌المثل، مفهوم دیفرانسیل df را به دو صورت کلاسیک و مدرن در جدول کرده‌ایم؛

صورت کلاسیک	صورت نوین
گیریم f تابعی از $x^n,\cdots,x^1$ مانند $f =$ $f(x^{-1},\cdots x^n)$ است.	گیریم f تابعی بر M و x دستگاهی مختصاتی بر M است (بنابراین، به ازاء تابعی $\bar{f}$ بر $\mathbb{R}^n$، یعنی $\bar{f} = f \circ x^{-1}$ داریم $f = \bar{f} \circ x$).

صورت کلاسیک

گیریم x^i ها توابعی از t مانند $\mathrm{h}x^i = x^i(t)$ند. در این صورت f تابعی از t می‌شود: $f(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$.
اکنون داریم

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

(نمادگذاری ای که در آن c در نظر گرفته نمی‌شود، هنوز هم مورد استفادهٔ فیزیک‌دانان است.)

صورت نوین

گیریم $c : \mathbb{R} \to M$ یک منحنی است. در این صورت $f \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، که

$$(f \circ c)(t) = f(x^1 \circ c(t), \cdots, x^n \circ c(t))$$

به این ترتیب، داریم

$$(f \circ c)'(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i \bar{f}(x(c(t))).(x^i \circ c)'(t)$$
$$= \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)).(x^i \circ c)'(t)$$

یا

$$\frac{d(f(c(t)))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)).\frac{dx^i(c(t))}{dt}$$

صورت کلاسیک

با ضرب در dt، داریم

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

(فایدهٔ این نمادگذاری در آن است که با تقسیم طرفین به dt) باز هم یک حکم درست نتیجه می‌شود، و به چگونگی توابع $x^i(t)$ بستگی ندارد. این ساده‌ترین روش برای توصیف این مطلب است که df تابعی از بردارهای مماس است.

صورت نوین

نتیجتاً

$$df\left(\frac{dc}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)) \bullet dx^i\left(\frac{dc}{dt}\right)$$

چون هر بردار مماس در $c(t)$ به شکل $\frac{dc}{dt}$ است. بنابراین

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

بعداً، در مرحله‌ای که به آماده سازی مقدمات لازم برای مطالعهٔ کارگیری گاوس و نیز ریمان مبادرت می‌کنیم، بطور پیوسته همهٔ آنچه را که قبلاً ساخته‌ایم به صورت کلاسیک ترجمه می‌کنیم. در این بین مشاهده می‌گردد که این کار کمی مشکلند از ترجمهٔ اصل مقاله که زبان آلمانی است، می‌باشد،

یادآور می‌شویم که اگر $f : M \to N$ هموار باشد، آنگاه به ازاء هر $p \in M$ ای

یک نگاشت خطی به شکل $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ و در مجموع یک نگاشت به شکل $f_* : TM \to TN$ داریم، چون $f_{*p} : T_pM \Rightarrow T_{f(p)}N$ نگاشتی خطی بین فضاهای برداری است، نگاشتی به شکل $T_{f(p)}N^* \to T_pM^*$ قابل ساخت است که آنرا با نماد f^*_{*p} نشان می‌دهیم، ولی بهتر است آنرا به شکل ساده‌تر

$$f^*_p : T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$$

نشان دهیم. توجه شود که از تجمع نگاشتهای f^*_p، نگاشت کلانی از T^*N به T^*M بدست نمی‌آید؛ در واقع، امکان دارو یک $q \in N$ ای به ازاء بیش از یک $p_i \in M$ به شکل $f(pi)$ باشد، و هیچ دلیلی وجود ندارد که $(f_*)_{px}$ و $(f_*)_{pz}$ یکی باشند. از سوی دیگر، با کلاف کتانژانت کاری می‌توان کرد که با کلاف مماس ممکن نیست فرض کنیم ω برشی از T^*N است. در این صورت، برشی η از T^*M به صورت زیر می‌توان تعریف نمود:

$$\eta(p) := \omega(f(p)) \circ f_{*p}$$

به عبارت دیگر

$$\eta(p)(X_p) = \omega(f(p))(f_{*p}X_p) \qquad (X_p \in T_pM)$$

(این نمادگذاری پیچیده، ایدهٔ ساده‌ای دارد: برای اینکه η بر برداری تأیر کند، باید آن بردار را توسط f_* به N منتقل کرد و سپس ω را روی آن تاثیر داد.) برش اخیر η را با نماد $f^*\omega$ نشان می‌دهیم.

با این حال، هیچ روش مشابهی برای منتقل کردن میدان برداری X بر M به میدان برداری بر N وجود ندارد.

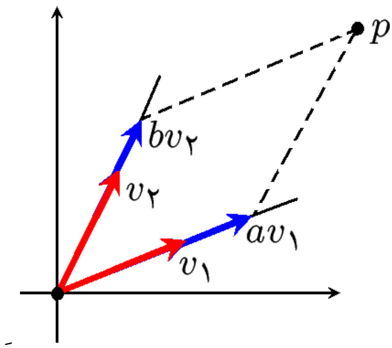
با توجه به تعاریف مذکور، در کل می‌توان گفت که هر نگاشت $f : M \to N$ نگاشتی f_* با f بین کلافهای مماس و نگاشتی f^* با جهت مخالف بین کلافهای کتانژانت تولید می‌کند. امروز به نگاشتهایی که همجهت هستند کواریان و آنهایی که با جهت عکس هستند را کنتراواریان می‌نامند. اطلاعاتی کلاسیک وجود دارد که تا حدودی بر عکس اصطلاح ما است: میدان برداری را کیدان برداری کنتراواریان و برشهای T^*_M را میدان برداری کواریان می‌نامند. با این حال معلوم نسیت چطور این اصطلاح درگذر زمان بر عکس شده است براحتی به خاطر سپرد که نوع میدانهای برداری کواریان است، و نوع کنتراوایان آنهایی است که از نظر منطقی با جهت بر عکس هستند.

منطق وضح این اصطلاح کلاسیک را با در نظر گرفتن دستگاههایی مختصاتی خطی x بر $\mathbb{R}^n$ که تبدیلات خطی‌اند، می‌توان توضیح داد، در این حالت، اگر $x(v_i) = e_i$،

آنگاه

$$x(a^1 v_1 + \cdots + a^n v_n) = (a^1, \cdots, a^n)$$

و لذا دستگاهی مختصاتی x چیزی جز یک دستگاه مختصات دکارتی اریب نیست. اگر x' دستگاهی مختصاتی دیگری باشد آنگاه $x'^j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x^i$ به ازاء $a_{ij} \in \mathbb{R}$ هایی بخصوص.



شکل ۱.۴

به وضوح $a_{ij} = \partial x'^j / \partial x^i$، و بنابراین

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i \qquad (۱.۴)$$

این مطالب را مستقیماً از این مطلب که ماتریس $(\partial x'^j / \partial x^i)$ ثابت است و با $D(x' \circ x^{-1})$ یکسان می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت. با مقایسهٔ (؟؟) و فرمول

$$dx'^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dx^i \qquad (۲.۴)$$

از قضیه۱ ، ملاحظه می‌کنیم که دیفرانسیلهای dx^i درست به همان صورتی تغییر می‌کنند که x^i تغییر می‌کنند و بر این اساس آنها را کواریان می‌نامیدند. نتیجتاً، هر ترکیب به شکل

$$\omega'_j = \sum_{i=1}^{n} \omega i \frac{\partial x^i}{\partial x'_j}$$

از طرف دیگر، اگر دو عبارت همسان برای یک میدان برداری داشته باشیم

$$X = \sum_{i=1}^{n} ai \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} a'^i \frac{\partial}{\partial x' i}$$

آنگاه توابع a'^j در رابطهٔ

$$a'^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial x' j}{\partial x^i}$$

صدق می‌کنند. میدانهای برداری کواریان و کنتراواریان، به عبارت دیگر، برشهای بترتیب TM و T^*M را تانسور (میدان تانسوری) کواریان و کنتراواریان از مرتبهٔ یک نیز می‌نامند. برای فهم این اصطلاح به کمی جبر نیاز است.

۴.۴ توابع چند خطی

اگر V_1، . . . و V_m فضای برداری باشند. تابع $T : V_1 \times \cdots \times V_m \to \mathbb{R}$ را در صورتی چند خطی گوئیم که به ازاء هر انتخاب v_1، v_{k-1}، v_{k+1}، . . . و v_m ای نگاشت $v \to T(v_1, \cdots, v_{k-1}, v, v_{k+1} \cdots v_m)$ خطی باشد. به وضوح، مجموعهٔ همهٔ چنین T هایی، فضای برداری است. اگر $V_1, \cdots, V_m = V$، این فضای برداری را با نماد $\mathcal{T}^m(V)$ نشان می‌دهیم. توجه شود که $\mathcal{T}^1(V) = V^*$. اگر $f : V \to W$ تبدیلی خطی باشد. در این صورت، تبدیلی خطی $f^* : \mathcal{T}^m(W) \to \mathcal{T}^m(V)$ وجود دارد که کاملاً شبیه حالت $m = 1$ قابل تعریف است:

$$f^*T(v_1, \cdots, v_m) = T(f(v_1), \cdots, f(v_m))$$

اگر $T \in \mathcal{T}^k(V)$ و $S \in \mathcal{T}^l(V)$، آنگاه حاصلضرب تانسوری $T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ را

$$T \oplus S(v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, v_{k+\ell}) = T(v_1, \cdots, v_k).S(v_{k+1}, \cdots, u_{k+\ell})$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که $T \oplus S$ متفاوتند. از سوی دیگر $(S \oplus T) \oplus U = S \oplus (T \oplus U)$ و لذا امکان تعریف حاصلضربهای تانسوری n−تایی وجود دارد. این ضرب تانسوری بطور خودکار، چند خطی است، زیرا مثلاً $(S_1 + S_2) \oplus T = S_1 \oplus T + S_2 \oplus T$ و ... به ویژه، اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V و $\{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ پایهٔ دوگان برای $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ باشد، آنگاه عناصر

$$v_{i_1}^* \oplus \cdots \oplus v_{i_k}^* \quad 1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n$$

به وضوح، پایه‌ای برای $\mathcal{T}^k(V)$ تشکیل می‌دهند. و لذا بعد این فضا n^k است.

از این ساخت جبری جدید می‌توان استفاده نمود و از هر کلاف برداری $\xi = \pi : E \to B$، کلاف برداری جدیدی را تولید نمود. فرض کنیم

$$E' = \bigcup_{p \in B} \mathcal{T}^k(\pi^{-1}(p))$$

و $\pi' : E' \to B$ کل فضای $\mathcal{T}^k(\pi^{-1}(p))$ را به p بنگارد. اگر $U \subseteq B$ و $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ بدیهی سازی برای ξ باشد. در این صورت ایزومورفیسمهای $t_p : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$ باعث تعریف ایزومورفیسمهای

$$(t_p^*)^{-1} : \mathcal{T}^k(\pi^{-1}(p)) \to \{p\} \times \mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n)$$

می‌شومند. اگر ایزومورفیسم $\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{nk}$ را یک بار برای همیشه انتخاب کنیم، از تجع نگاشتهای $(t_p^*)^{-1}$ به نگاشتی به شکل $t' : \pi'^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{nk}$ می‌رسیم. با در نظر گرفتن همهٔ چنین t' هایی به عنوان بدیهی سازی موضعی $\pi' : E' \to B$، به یک کلاف برداری $\mathcal{T}^k(\xi)$ دست می‌یابیم. کلاف ξ^* حالت خاص $k = ۱$ است.

۵.۴ تانسور کواریان و کنترا واریان

در حالتی که $\xi = TM$، کلاف $\mathcal{T}^k(TM)$ را کلاف تانسورهای کواریان از مرتبهٔ k می‌نامیم، و برشهای آن را میدان تانسوری کواریان مرتبهٔ k ام می‌نامیم. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه

$$dx^۱(p), \cdots, dx^n(p)$$

پایه‌ای برای $(M_p)^*$ است و حاصلضربهای تانسوری k–تایی

$$dx^{i_۱}(p) \oplus \cdots \oplus dx^{i_k}(p) \in \mathcal{T}^k(T_pM) \quad ۱ \leq i_۱, \cdots, i_k \leq n$$

پایه‌ای برای $\mathcal{T}^k(T_pM)$ تشکیل می‌دهند. در نتیجه، هر میدان تانسوری کواریان A از مرتبهٔ k ام بر $\cup$ را به صورت

$$A(p) = \sum_{i_۱, \cdots, i_k} A_{i_۱, \cdots i_k}(p) dx^{i_۱}(p) \oplus \cdots \oplus dx^{i_k}(p) \qquad (p \in U)$$

و یا به شکل ساده‌تر، به صورت

$$A = \sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots i_k} \quad dx^{i_1} \oplus \cdots \oplus dx^{i_k}$$

می‌توان نوشت، که در عبارت اخیر $dx^{i_1}\oplus\cdots\oplus dx^{i_k}$ برشی از $\mathcal{T}^k(TM)$ است. همچنین، اگر

$$A = \sum_{i_1,\cdots,i_k} A'_{i_1,\cdots i_k} dx'^{i_1} \oplus \cdots \oplus dx'^{i_k}$$

آنگاه

$$A'_{\alpha_1,\cdots\alpha_k} = \sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i,\cdots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x'^{\alpha_k}}$$

در این مجموع، حاصلضربی از توابع معمولی ظاهر شده است. برای اثبات آن کافی است از عبارت (۲.۴) در صفحهٔ ۱۰۱ و خواص $\oplus$ استفاده شود.) برش A پیوسته یا هموار است اگر و فقط اگر کلیهٔ تواتبع $A_{i_1,\dots,i_k}$ پیوسته یا هموار باشند.

هر میدان تانسوری کواریان A از مرتبهٔ k ام را به صورت عملگری $\bar{A}$ بر k میدان برداری $X_k,\cdots,X_k$ می‌توان در نظر گرفت، که تابع به شکل

$$\bar{A}(X_1,\cdots,X_k)(p) = A(p)(X_1(p),\cdots,X_k(p))$$

را تولید می‌کند: $\bar{A} : \mathcal{X}(M)^k \to c^\infty(M,\mathbb{R})$. توجه شود که $\bar{A}$ بر مجموعهٔ k-تایی‌های از میدانهای برداری هموار $\mathcal{X}(M)^k$، چند خطی است؛ به این معنی که

$$\begin{aligned}
&\bar{A}(X_1,\cdots,X_i+X'_i,\cdots,X_k) = \\
&\qquad = \bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k) + \bar{A}(X_1,\cdots,X'_i,\cdots,X_K) \\
&\bar{A}(X_1,\cdots,aX_i,\cdots,X_k) = a\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k)
\end{aligned}$$

بعلاوه، چون $\bar{A}$ نقطه به نقطه تعریف می‌شود، عملاً با ضرایب از توابع هموار $\mathcal{F}$ خطی است. یعنی، اگر f هموار باشد، در این صورت

$$\bar{A}(X_1,\cdots,fX_i,\cdots X_k) = f\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots X_k)$$

زیرا، به ازاء هر p ای

$$\begin{aligned}
\bar{A}(X_1,\cdots,fX_i,\cdots,X_k)(p) &= A(p)(X_1(p),\cdots,f(p)X_i(p),\cdots X_k(p)) \\
&= f(p)A(p)(X_1(p),\cdots,X_i(p),\cdots,X_k(p)) \\
&= f(p).\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots X_k)(p)
\end{aligned}$$

بالاخره، آمادهٔ طرح قضه‌ای دیگر هستیم، که بعداً به دفعات موزد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۵.۴ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{V} = \mathcal{X}(M)$ و $\mathcal{F} = C^\infty(M, \mathbb{R})$. اگر $\mathcal{A} : \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \to \mathcal{F}$ تابعی $\mathcal{F}-$خطی باشد، آنگاه میدان برداری منحصر بفرد A ای وجود دارد که $\mathcal{A} = \bar{A}$.

اثبات: ابتدا توجه کنید که اگر $v \in T_pM$ یک بردار مماس دلخواه باشد، آنگاه میدان برداری $X \in \mathcal{V}$ ای وجود دارد که $X(p) = v$. در واقع، اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد و $v = \sum_{i=1}^n a^i \partial/\partial^i|_p$، آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم

$$X = \begin{cases} f \sum_{i=1}^n a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} & U \text{ بر} \\ 0 & U \text{ در خارج} \end{cases}$$

که هر یک از a^i ها تابعی ثابت در نظر گرفته شوند، و f تابعی هموار با $f(p) = 1$ و $\mathrm{Supp}(f) \subseteq U$ است. حال اگر $v_1, \cdots v_k \in T_pM$ به میدانهای برداری $X_1, \cdots, X_k \in TM$ توسیع یابند، آنگاه روشن است که کافی است تعریف کنیم

$$A(p)(v_1, \cdots, v_k) := A(X_1, \cdots, X_k)(p)$$

اکنون تنها مساله ممکن، اثبات خوشتعریفی A است: اگر به ازاء هر i ای $X_i(p) = Y_i(p)$، ادعا می‌کنیم که

$$\mathcal{A}(X_1, \cdots, X_k)(p) = \mathcal{A}(Y_1, \cdots, Y_k)(p)$$

برای سادگی حالت $k = 1$ را در نظر می‌گیریم (حالت کلی کاملاً مشابه است). این جکم که از $X(p) = Y(p)$ نتیجه می‌شود $\mathcal{A}(X)(p) = \mathcal{A}(y)(p)$ را دو مرحله ثابت می‌کنیم.

(۱) ابتدا فرض کنیم X و Y در یک همسایگی از p برابرند. گیریم f تابعی هموار با $f(p)$ و $\mathrm{Supp}(f) \subseteq U$ در این صورت $fX = fY$ و بنابراین

$$f\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(fX) = \mathcal{A}(fY) = f\mathcal{A}(Y)$$

که اگر در p مقدار یابی شود، داریم $\mathcal{A}(X)(p) = \mathcal{A}(Y)(p)$.

(۲) روشن است که برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که اگر $X(p) = 0$ آنگاه $\mathcal{A}(X)(p) = 0$. گیریم (x, U) دستگاهی مختصاتی گرد p است، و لذا در همسایگی

U می‌توانیم بنویسیم $X = \sum_{i=1}^{n} b^i \partial/\partial x^i$ که همهٔ $b^i(p)$ ها صفرند. اگر g در یک همسایگی از p مانند V برابر یک باشد و $\mathrm{Supp}(g) \subseteq U$، آنگاه

$$Y = g \sum_{n}^{i=1} b^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} b^i g \frac{\partial}{\partial x^i}$$

میدانی برداری است که بر کل M تعریف شده، هموار است و بر V با X برابر است. در نتیجه بنا به قسمت (۱) داریم $\mathcal{A}(X)(p) = \mathcal{A}(y)(p)$. اکنون چون $b^i(p) = 0$، داریم

$$\mathcal{A}(Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} b^i(p) \bullet \mathcal{A}(g\frac{\partial}{\partial x^i})(p) = 0$$

و لذا حکم ثابت شد. □

نظر به قضیهٔ ۲، عملاً بین میدان برداری تانسوری A و عملگر $\bar{A}$ تفاوتی قایل نمی‌شویم، و از نماد $\bar{A}$ اصلاً استفاده نمی‌کنیم.

توجه کنید که قضیهٔ ۲ در حالت خاص $k = 1$ قابل عمل است. یعنی در مورد کلاف کتانژانت $\mathcal{T}^1(TM) = T^*M$: هر تابعی $\mathcal{X}(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ که $C^\infty(M,\mathbb{R})-$خطی باشد، از یک میدان برداری کواریان ω حاصل شده است. درست شبیه میدانهای برداری کواریان، هر نگاشت هموار $f : M \to N$ نگاشتی f^* را القاء می‌کند که میدانهای تانسوری کواریان A مرتبهٔ k ام بر N را به میدانهای تانسوری کواریان f^*A مرتبهٔ k ام بر M تبدیل می‌کند:

$$f^*A(p)(X_{1p}, \cdots, X_{kp}) := A(f(p))(f_*X_{1p}, \cdots, f_*X_{kp})$$

بعلاوه، اگر A و B میدانهای تانسوری از مرتبهٔ بترتیب k و ℓ باشد، آنگاه میدان تانسوری کواریان جدید $A \oplus B$ از مرتبهٔ $k+\ell$ می‌توانیم تعریف کنیم: $(A \oplus B)(p) := A(p) \oplus B(p)$ که بر $(T_pM)^{k+\ell}$ عمل کند.

با اینکه میدانهای تانسوری کواریان عملاً همهٔ نیازهای ما را فراهم می‌سازد، تنها به خاطر تکمیل طرح کلی بحث میدانهای تانسوری کنتراواریان را نیز تعریف می‌کنیم. یادآور می‌شویم که هر میدان برداری کنتراواریان، برشی X از TM است. پس به ازاء هر p ای $X_p \in T_pM$. حال هر عضو v از فضای برداری دلخواه V را به عنوان نگاشتی خطی $v : V^* \to \mathbb{R}$ می‌توان در نظر گرفت، کافی است $v(\lambda)$ را به صورت $\lambda(v)$ تعریف کنیم. میدان تانسوری کنتراواریان مرتبهٔ k ام دقیقاً عبارت است از برشی از کلاف $\mathcal{T}^k(T^*M)$. بنابراین، هر $A(p)$ یک تابع $k-$ خطی بر T_pM^* است. اگر از

$\mathcal{T}_k(V)$ برای مجموعهٔ همهٔ توابع $k-$خطی بر V^* استفاده کنیم، از نماد $\mathcal{T}_k(TM)$ بجای $\mathcal{T}^k(T^*M)$ می‌توان استفاده کرد. دذ مختصات موضعی می‌توان نوشت

$$A(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A^{j_1,\cdots j_k}(p)\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \oplus \cdots \oplus \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p$$

(خاطر نشان می‌کنیم که $\partial/\partial x^i|_p$ بر T_pM^* عمل کند)، یا بطور خلاصه

$$A(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A^{j_1,\cdots j_k}(p)\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \oplus \cdots \oplus \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p$$

اگر عبارت دیگری، برای A داشته باشیم

$$A(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A'^{j_1,\cdots j_k}(p)\frac{\partial}{\partial x'^{j_1}}\Big|_p \oplus \cdots \frac{\partial}{\partial x'^{j_k}}\Big|_p$$

در این صورت به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$A'^{\beta_1\cdots\beta_k}(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A^{j_1,\cdots j_k}\frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\partial x'^{\beta_k}}{\partial x^{j_k}}$$

هر میدان برداری تانسوری کنتراواریان A مرتبهٔ k را به صورت عملگر $\bar{A}$ می‌توان در نظر گرفت که بر k تا میدان برداری کواریان $\omega_1, \cdots, \omega_k$ عمل کند و تابعی را نتیجه می‌دهد:

$$\bar{A}(\omega_1, \cdots, \omega_k)(p) = A(p)(\omega_1(p), \cdots, \omega_k(p))$$

بطور طبیعی، قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۲ وجود دارد، که به همان طریق نیز اثبات می‌گردد، و بر اساس آن استفاده از نماد $\bar{A}$ مجاز است؛ و به این ترتیب هر میدان تانسوری کنتراواریان از مرتبهٔ k را با عملگری بر k میدان برداری کواریان می‌توان یکی گرفت، که بر مدول توابع هموار $\mathcal{F}$ خطی است.

۶.۴ تانسور مرکب و انقباض

فصل ۵

میدان برداری و معادله دیفرانسیل

۱.۵ منحنی انتگرال

به مطالعهٔ جزئیات بیشتر در خصوص کلاف مماس TM و برش‌های آن (یعنی، میدان‌های برداری) می‌پردازیم. گیریم X میدانی برداری است که در یک همسایگی از $p \in M$ تعریف می‌گردد. مایلیم بدانیم که آیا منحنی‌ای $\rho : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ گذرنده از p وجود دارد که بردارهای مماسش با بردارهای حاصل از میدان برداری X باشد؟ یعنی، منحنی‌ای ρ با $\rho(\circ) = p$ وجود دارد که

$$\rho_* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_t \right) = \frac{d\rho}{dt}\bigg|_t = X(\rho(t))$$

شکل ۱.۵: میدان برداری

چون X برشی موضعی است، دستگاهی مختصاتی (x, U) حول p چنان می‌توانیم مطرح کنیم، که به موجب آن X به روی $x(U) \in \mathbb{R}^n$ منتقل شود. یادآور می‌شویم که

در حالت کلی $\alpha_* X$ ممکن است برای تابع هموار $\alpha : M \longrightarrow N$ با معنی نباشد. البته، اگر α دیفئومورفیسم باشد، می‌توانیم تعریف کنیم

$$(\alpha_* X)_q = \alpha_{*\ \alpha^{-۱}(q)}(X_{\alpha^{-۱}(q)}) \quad \text{یا} \quad (\alpha_* X)_q := \alpha_*(X_{\alpha^{-۱}(q)})$$

تحقیق اینکه $\alpha_{ast} X$ بر $\alpha(M)$ هموار است، مشکل نیست (مسالهٔ ۱).به ویژه، میدانی برداری $x_* X$ بر $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ داریم. تابعی $f : x(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که به ازاء هر q ای

$$(x_* X)_q = f(q)_q \in T_q\mathbb{R}^n$$

به عبارت دیگر، مؤلفه‌های $(x_* X)_q$ عبارتند از $f^۱(q)$، $\cdots$ و $f^n(q)$. منحنی $c = x \circ p$ را در نظر بگیرید. در این صورت شرط $\frac{dp}{dt} = X(p(t))$ به معنی $p_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t \right) = X(p(t))$ است. بنابراین

$$\frac{dc}{dt}\Big|_t = x_* p_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t \right) = x_*(X(p(t))) = (x_*, X)_{x(p(t))} = (x_* X)_{c(t)}$$

پس، اگر از نماد $c'(t)$ برای نمایش مشتق معمولی تابع $\mathbb{R}^n-$ مقداری c استفاده کنیم، آنگاه تساوی بالا را به شکل سادهٔ

$$c'(t) = f(c(t))$$

می‌توان نوشت. این مثال ساده‌ای از یک معادله دیفرانسیل برای تابع $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است، که اگر آنرا بر حسب مختصات c^i بنویسیم، به یک دستگاه معادلات می‌رسیم

$$c^{i'}(t) = f^i(c^۱(t), \cdots, c^n(t)) \qquad i = ۱, \cdots, n$$

بعلاوه، مایلیم که شرایط آغازی

$$c^i(\circ) = x^i(p)$$

برقرار باشد. روند حل اینگونه معادلات را «انتگرال گیری» از معادله می‌گویند (دلیل آن شاید این باشد که برای حل حالت سادهٔ $c'(t) = f(t)$ که $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، از طرفین آن انتگرال گرفته می‌شود). جواب‌هایی که به این ترتیب بدست می‌آیند را «انتگرال‌های» معادله می‌نامند. هنوز هم بخشی از این اصطلاحات وجود دارد. منحنی $p : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ با $p(\circ) = p$ و $dp/dt = X(p(t))$ را **منحنی انتگرال برای X با شرط آغازی $p(\circ) = p$ می‌نامیم.**

قبل از طرح قضیهٔ اصلی وجود و یکتایی چنین منحنی‌های انتگرالی، چند حالت خاص را در نظر می‌گیریم.

معادلهٔ $c'(t) = -(c(t))^{۲}$ در مورد منحنی c با برد $\mathbb{R}$ که در حالت کلاسیک بر حسب تابع $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $dy/dx = -y^{۲}$ نوشته می‌شود. در اینجا $f(a) = -a^{۲}$. روش استاندارد حل این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{-y^{۲}} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{-y^{۲}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{y} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{۱}{x+c}$$

بنابراین، منحنی‌های $c(t) = ۱/(t+c)$ جواب هستند. این موضوع را مستقیماً و بدون متوسل شدن به بحث بالا می‌توان انجام داد. معادلهٔ داده شده را به صورت $y' = f \circ y$ می‌توان نوشت، پس

$$\left(\frac{۱}{t} \circ y\right).y' = ۱$$

و لذا اگر $F' = ۱/f$، آنگاه $(F \circ y)' = ۱$ و لذا $F(y(x)) = x + c$ که C عددی ثابت و دلخواه اسن. برای حصول به شرط اولیهٔ $c(۰) = a$، بایستی فرض شود $c(t) = ۱/(t + ۱/a)$. این در همهٔ حالات بجز $a = ۰$ درست است. در این حالت، جواب درست «$\forall t : c(t) = ۰$» است. منحنی‌های c به زبان میدان‌های برداری، منحنی‌های $X(a) = -a^{۲}\frac{d}{dt}$ هستند.

شکل ۲.۵: میدان برداری $X(a) = -a^{۲}\frac{d}{dt}$

توجه کنید، در حالی که X بر کل $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود، هیچ منحنی انتگرالی از X بجز $c(t) = ۰$ بر کل $\mathbb{R}$ تعریف نمی‌شود و تنها بر بخشی از آن تعریف می‌گردد. می‌شود این موضوع را منبعث از این مطلب دانست که $X(۰) = ۰$. که با این حالت کاری نمی‌شود کرد. اگر $a > ۰$، منحنی $c(t) = ۱/(t + ۱/a)$ برای همهٔ t های به اندازه کافی بزرگ می‌گردد و وقتی $t \to \alpha$ به صفر نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد. از سوی دیگر، وقتی $t \to -۱/a$، به دلیل اینکه میدان برداری بسیار بزرگ می‌شود، منحنی به بینهایت میل می‌کند. حتی اگر میدان برداری را در همسایگی صفر اصلاح کنیم، باز هم بحث بالا درست است منحنی به صفر نزدیک نمی‌شود.

با مطالعهٔ معادلهٔ $c'(t) = c(t)^{۲/۳}$ می‌توان رفتار دیگری را مشاهده کرد. اینرا به شکل کلاسیک به صورت $dy/dx = y^{۲/۳}$ می‌توان نوشت. با شرط اولیهٔ $c(۰) = ۰$، دو

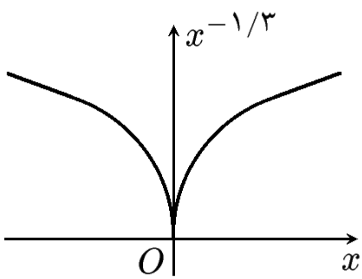
جواب مختلف دارد، یعنی

$$۱)\ \forall t\ :\ c(t) = ۰ \qquad ۲)\ \forall t\ :\ c(t) = t^{۳}/۲۷$$

در این حالت، تابع f با ضابطهٔ $f(a) = a^{۲/۳}$ است و در $a = ۰$ دیفرانسیل‌پذیر نیست. اغلب وقتی تابع $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس $C^۱$ است، یکتایی نتیجه می شود، اما یکتایی از این شرط کمی قوی‌تر است. در صورتی می‌گوئیم f بر U در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند که k ای چنان یافت گردد که

$$\forall x, y \in U\ :\quad \Big|f(x) - f(y)\Big| \leq k\Big|x - y\Big|$$

توجه شود که $f(a) = a^{۲/۳}$ درشرط لیپ شیتز صدق نمی‌کند؛ عملاً هیچ K ای نیست که به ازاء هر x در نزدیکی صفر نامساوی $\Big|f(x) - f(۰) \leq k\Big|x\Big|$ برقرار باشد، زیرا $\lim_{x\to ۰\pm} \frac{x^{۲/۳}}{x} = x^{-۱/۳} \to \alpha$ به وضوح، هر تابع لیپ شیتز، پیوسته است، اما لزومی ندارد که دیفرانسیل‌پذیر باشد. (مثلاً، $(f(x) = \Big|x\Big|)$. از سوی دیگر، هر تابع از کلاس $C^۱$ به صورت موضعی لیپ شیتز است، یعنی، در همسایگی‌ای از هر نقطه‌اش، در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند. این از لم ۲—۵ نتیجه می‌شود. به علاوه، روشن است که هر تابع لیپ شیتز بر هر مجموعهٔ کراندار، کراندار است.



شکل ۳.۵: نمودار تابع $f(a) = a^{۲/۳}$

۲.۵ قضایای وجود و یکتایی

قضیهٔ وجود و یکتایی برای معادلات دیفرانسیل به لمی ساده در مورد فضاهای متری کامل نیاز دارد.

۱.۲.۵ قضیه (لم انقباض). گیریم (M,p) یک فضای متری کامل غیر تهی است، و $f: M \Longrightarrow M$ انقباض است، یعنی، عددی $\circ < C < ۱$ چنان یافت می‌شود که

$$\forall x, y \in N \;:\quad p(f(x), f(y)) \leq c\, p(x,y)$$

در این صورت، $x \in M$ ای منحصر بفرد وجود دارد که $f(x) = x$ (تابع f نقطه ثابت منحصر بفرد دارد).

اثبات: توجه شود که به وضوح f پیوسته است. گیریم $x_\circ \in M$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به استقراء به شکل $x_{n+۱} = f(x_n)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر،

$$x_{n+۱} = f^n(x_n) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{بار}}(x_\circ)$$

در این صورت، بنا به استقراء داریم $p(x_n, x_{n+۱}) \leq C^n\, p(X_\circ, x_۱)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+k}) &\leq p(x_n, x_{n+۱}) + \cdots + p(x_{n+k-۱}, x_{n+k}) \\ &\leq (C^n + \cdots + C^{n+k-۱}) p(x_\circ, x_۱) \end{aligned}$$

چون $C < ۱$، مجموع $\sum\limits_{n=\circ}^{\alpha} C^n$ همگرا است، بنابراین $\lim\limits_{n\to\alpha}(C^n + \cdots + C^{n+k+۱}) = \circ$.
در نتیجه، دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است، و لذا x ای هست که $x = \lim\limits_{n\to\alpha} x_n$. پیوستگی f نشان می‌دهد که

$$f(x) = \lim_{n\to\alpha} f(x_n) = \lim_{n\to\alpha} x_{n+۱} = x$$

و برهان تمام است. □

اکنون بر آنیم که از لم انقباض برای فضاهای بخصوصی از توابع بکار بگیریم. یادآور می‌شویم که اگر (M,p) فضای متری باشد و X فشرده، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته $f: X \longrightarrow M$ فضایی است متری با متر σ با تعریف

$$\sigma(f,g) := \sup_{x\in X}\; p(f(x), g(x))$$

چنانچه M کرندار باشد، لزومی ندارد فرض شود X فشرده است. به علاوه، اگر M کامل باشد، آنگاه فضای متری جدید نیز کامل خواهد بود. این حکم اساساً قضیه‌ای است که می‌گوید حد یک شکل از توابع پیوسته، پیوسته است، و همچنین اینکه به دلیل

کامل بودن M، به ازاء هر x ای $\lim_{n\to\alpha} f_n(x)$ وجود دارد. بویژه اگر M زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته $f : X \longrightarrow M$ با متر زیر کامل است:

$$\left|\left|f\right|\right| := \sup_{x\in X}\left|f(x)\right| \quad \text{که} \quad \sigma(f,y) := \left|f-g\right|$$

استراتژی اصلی ما در حل معادلات دیفرانسیل، جایگزینی توابع دیفرانسیل‌پذیر و مشتقات با توابع پیوسته و انتگرال‌ها است. اگر $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد، آنگاه روشن است که در صورتی تابع پیوسته $\alpha : (-b,b) \longrightarrow U$ که بر بازه‌ای به گرد ۰ تعریف می‌شود، در روابط

$$\alpha(\circ)=x \qquad \alpha'(\circ)=f(\alpha(t)) \qquad (۱)$$

صدق می‌کند که معادلهٔ انتگرال

$$\alpha(t)=x+\int_\circ^t f(\alpha(\theta))d\theta \qquad (۲)$$

برقرار باشد، که انتگرال (۲)، انتگرالی از یک تابع $\mathbb{R}^n-$ مقداری است که به صورت انتگرال‌گیری از هر یک از مؤلفه‌های آن به صورت جدا از هم تعریف می‌گردد. بالعکس، اگر α در (۱) صدق کند، آنگاه α دیفرانسیل‌پذیر است و لذا پیوسته است. بنابراین $\alpha' = f\circ\alpha$ نیز پیوسته است، و لذا

$$\alpha(t)-x=\alpha(t)-\alpha(\circ)=\int_\circ^t \alpha'(u)du=\int_\circ^t f(\alpha(u))du$$

برای اثبات قضیهٔ اصلی، تنها به یک تقریب ساده نیاز است. اگر تابع پیوسته‌ای $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در شرط $\left|f\right| \leq k$ صدق کند، آنگاه $\left|\int_a^b f(u)du\right| \leq k(b-a)$. برای اثبات این موضوع، کافی است توجه شود که این حکم برای توابع ثابت درست است، و لذا برای توابع پله‌ای هم به راحتی ثابت می‌گردد، و آنگاه برای توابع پیوسته قابل اثبات است، چرا که ر تابع پیوسته، حد یک شکل توابع پله‌ای بر $[a,b]$ است.

۲.۲.۵ قضیه. گیریم $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی دلخواه است، که $U \subset \mathbb{R}^n$ باز می‌باشد. گیریم $x_\circ \in U$ و نیز $a > \circ$ عددی است که گوی بستهٔ $\bar{B}_{۲a}(x_\circ)$ به شعاع $۲a$ و مرکز در $x_\circ$ تماماً در U قرار می‌گیرد. فرض کنید که

۱) $|f| \leq L$ بر $\bar{B}_{۲a}(x_\circ)$

۲) $\forall x,y \in \bar{B}_{۲a}(x_\circ) \ : \ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$

$b > \circ$ را طوری انتخاب کنید که

$$\text{۳)} \quad b \leq a/L$$
$$\text{۴)} \quad b < \text{۱}/k$$

در این صورت، به ازاء هر $x \in \bar{B}_a(x_\circ)$، یک $\alpha_x : (-b,b) \longrightarrow U$ ای منحصر بفرد وجود دارد که

$$\alpha'_x(t) = f(\alpha_n(t)) \quad , \quad \alpha_x(\circ) = x$$

اثبات: فرض کنیم $x \in \bar{B}_a(x_\circ)$ دلخواه و از این پس ثابت است. گیریم

$$M = \left\{ \alpha \,\middle|\, \text{پیوسته است } \alpha : (-b,b) \longrightarrow \bar{B}_{\text{۲}a}(x_\circ) \right\}$$

در این صورت، M یک فضای متری کامل است. به ازاء هر $\alpha \in M$، منجنی $S\,\alpha$ را بر $(-b,b)$ به صورت $S\,\alpha(t) = x + \int_\circ^{\text{۱}} f(\alpha(x))du$ تعریف می‌کنیم. (چون f بر $\bar{B}_{\text{۲}a}(x_\circ)$ پیوسته است، انتگرال وجود دارد). روشن است که منحنی $S\,\alpha$ پیوسته می‌باشد. به علاوه، به ازاء هر $t \in (-b,b)$ ای داریم

$$|S\,\alpha(t) - x| = \left| \int_\circ^t f(\alpha(u))du \right| \overset{(\text{۱})}{<} bL \overset{(\text{۳})}{\leq} a$$

چون $|x - x_\circ| \leq a$، نتیجه می‌گیریم که به ازاء هر $t \in (-b,b)$ ای $|S\alpha(t) - x_\circ| < \text{۲}a$. پس

$$\forall\, t \in (-b,b) \;:\; S\,\alpha(t) \in B_{\text{۲}a}(x_\circ) \subset \bar{B}_{\text{۲}a}(x_\circ) \qquad (\text{۱.۵})$$

و بنابراین $S : M \longrightarrow M$.
حال فرض کنیم $\alpha, \beta \in M$. در این صورت

$$\begin{aligned} \left| S\,\alpha - S\,\beta \right| &= \sup_t \left| \int_\circ^t f(\alpha(u)) - f(\beta(u))du \right. \\ &\overset{(\text{۲})}{<} bk \sup_{-b<u<b} \left| \alpha u - \beta u \right| = bk \left| \alpha - \beta \right| \end{aligned}$$

چون (بنا به (۴)) فرض شده است $bk < \text{۱}$، از این نامساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $S : M \Rightarrow M$ انقباضی است. در نتیجه، S نقطه منحصر بفردی داد؛ یعنی:
یک $\alpha : (-b,b) \longrightarrow \bar{B}_{\text{۲}a}(x_\circ)$ منحصر بفرد است که $\alpha(t) = x + \int_\circ^t f(\alpha(u))du$.

با این حال، این دقیقاً آن چیزی نیست که قضیه می‌گوید. بلکه حتی به کمک لم مهم انقباض، هنوز حکم دقیق‌تر زیر ثابت نشده است:

نگاشت α تنها $U \longrightarrow \beta c(-b,b)$ است که در شرط ذیل صدق می‌کند:

$$\beta(t) = x + \int_{\circ}^{t} f(\beta(u))du$$

دلیل این حکم چنین است: یادآور می‌شویم که هر چنین β ای عملاً در $\bar{B}_{۲a}(x_{\circ})$ قرار دارد و حتی در $B_{۲a}(x_{\circ})$. ابتدا اعداد $t > \circ$ را در نظر بگیریم. قبلاً (در (۱.۵)) ملاحظه شد که به ازاء هر t با $\circ \leq t < b$ داریم

$$\beta(t) = x + \int_{\circ}^{t} f(\beta(u))du \in \beta_{۲a}(x_{\circ}) \quad (\text{گوی باز است}) \tag{۲.۵}$$

به شرطی که به ازاء هر u با $\circ \leq u < t$ داشته باشیم $\beta(u) \in \bar{B}_{۲a}(x_{\circ})$. یعنی، به بیان دیگر، به ازاء هر u با $\circ \leq u \leq t$ داشته باشیم $\beta(u) \in B_{۲a}(x_{\circ})$. اکنون از استدلال مبتنی بر sup استفاده می‌کنیم. گیریم

$$A = \{t \big| \circ \leq t < b, \beta(u) \in B_{۲a}(x_{\circ}) \text{ ای } u \in [\circ, t)\}$$

گیریم $\alpha = \sup A$. فرض کنید $\alpha < b$. به وضوح به ازاء هر u با $\circ \leq u < \alpha$ داریم $\beta(u) \in B_{۲a}(x_{\circ})$ سپس، بنا به (۲.۵) داریم $\beta(\alpha) \in B_{۲a}(x_{\circ})$. به وضوح، از این نتیجه می‌شود که به ازاء همهٔ $s > \circ$ های باندازه کافی کوچک $\beta(\alpha + s) \in B_{۲a}(x_{\circ})$، که با فرض $\alpha = \sup A$ در تضاد است. پس بایستی $\sup A = b$ استدلال مشابهی برای حالت $-b < t \leq \circ$ قابل اجرا است.

در جمع، نقطهٔ ثابت α_x نگاشت s که یکتا است، همان منحنی منحصر بفرد مورد انتظار ما است. □

توجه شود که جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل $\alpha'(t) = f(\alpha(t))$ نسبت به تغییر جمعی در پارامتر، ثابت می‌ماند یعنی، اگر فرض شود $\beta(t) := \alpha(t_{\circ} + t)$، آنگاه

$$\beta'(t) = \alpha'(t_{\circ} + t) = f(\alpha_{\circ} + t) = f(\beta(t))$$

و لذا β نیز یک جواب است. این نکته، انگیزه‌ای برای گسترش قسمت یکتایی قضیهٔ ۲.۲.۵ است.

۳.۲.۵ قضیه. فرض کنید $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ شیتز است، یعنی گرد هر نقطه از U یک گوی وجود دارد که f بر آن در شرط (۲) از قضیهٔ ۲.۲.۵ به ازاء k ای

مشخص، صدق می‌کند (و لذا به ازاء L ای مشخص نیز در شرط (۱) صدق می‌کند).
گیریم $x \in U$ و α_1 و α_2 دو نگاشت بر بازه‌ای I باز هستند که $\alpha_2(I), \alpha_1(I) \subseteq U$ و

$$\alpha_i'(t) = f(\alpha_i(t)) \qquad \alpha_i(\circ) = x \qquad i = 1, 2$$

در این صورت $\alpha_1 = \alpha_2$ بر I.

اثبات: فرض کنید $\alpha_1(t_\circ) = \alpha_2(t_\circ)$ به ازاء یک $t_\circ \in I$. چنانچه تعریف کنیم $\beta_i(t) := \alpha_i(t_\circ + t)$، آنگاه توابع β_i در یک معادله دیفرانسیل واحد صدق می‌کنند (یعنی $\beta_i'(t) = f(\beta_i(t))$) و شرایط اولیهٔ آنها نیز یکی است (یعنی $\beta_i(\circ) = \alpha_1(t_\circ) = \alpha_2(t_\circ) \in U$). بنابراین، به ازاء t های باندازهٔ کافی، بنا به قضیهٔ ۱.۲.۵، داریم $\beta_1(t) = \beta_2(t)$. در نتیجه، مجموعهٔ $\{t \in I \big| \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$ باز است. به وضوح این مجموعه بسته و غیر تهی است، و لذا برابر I است. $\square$

حال به وضعیت در قضیهٔ ۲.۲.۵ باز می‌گردیم. با نوشتن $\alpha(t,x)$ بجای $\alpha_x(t)$، نگاشت

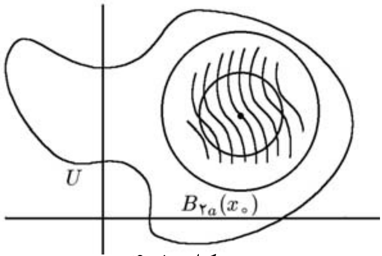
$$\alpha : (-b, b) \times B - a(x_\circ) \longrightarrow U$$

حاصل می‌شود که در

$$\alpha(\circ, x) = x \qquad , \qquad \frac{d}{dt}\,\alpha(t,x) = f(\alpha(t,x))$$

صدق می‌کند. [در واقع $D_1\,\alpha(t,x) = f(\alpha(t,x))$، اما اغلب از نماد $\partial/\partial t$ یا d/dt در این گونه موارد استفاده می‌کنیم]. این نگاشت α را فلوی موضعی (یا شارموضعی) برای f در $(-b,b) \times B_a(x_\circ)$ می‌نامیم. بهترین کاری که برای تجسم این نگاشت می‌توانیم انجام دهیم، ترسیم تصویرر منحنی‌های انتگرال α_x است. اگر $y = \alpha_x(t_\circ)$، آنگاه منحنی انتگرال α_x با شرط آغازی $\alpha_x(\circ) = x$، تنها با یک تغییر پارامتر با منحنی انتگرال α_y آغازی از $\alpha_y(\circ) = y$ تفاوت می‌کند، و بنابراین بر هم منطبق هستند. به ازاء هر x دلخواه و از این پس ثابت، نگاشت $t \mapsto \alpha(t,x)$ با $-b < t < b$ تماماً در بخشی از منحنی گذرنده از x قرار دارد. از سوی دیگر، اگر t را ثابت نگاه داریم، آنگاه نگاشت $x \mapsto \alpha(t,x)$ حاصل می‌شود که توسط آن هر نقطهٔ x ای در امتداد منحنی انتگرال گذرنده از آن، باندازهٔ t واحد زمانی حرکت می‌کند. برای توجه بیشتر به این نگاشت، آن را با نماد φ_t نشان می‌دهیم:

$$\varphi_t(x) := \alpha(t,x) = \alpha_x(t)$$



شکل ۴.۵

این نگاشت همواره پیوسته است. در واقع کل شار α پیوسته است (یعنی، به عنوان نگاشتی بر حسب t و x).

۴.۲.۵ قضیه. اگر $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ موضعاً لیپ شیتز باشد، آنگاه شار $\alpha : U \longrightarrow (-b,b) \times B_a(x_\circ)$ که در قضیهٔ ۲.۲.۵ مطرح شد، پیوسته است.

اثبات: نگاشت S معرفی شده در اثبات قضیهٔ ۲.۲.۵ را با نماد S_x نشان می‌دهیم، با این کار نقش x مشخص‌تر می‌شود. در این صورت، داریم

$$\left|\alpha_x - S_y\alpha_x\right| = \left|S_x\alpha_x - S_y\alpha_x\right| = \left|x-y\right|$$

یاد آور می‌شویم که $\left|S\alpha - S\beta\right| \leq bk\left|\alpha-\beta\right|$. اگر S_y^n نمایشگر n بار تکرار S_y باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
\left|\alpha_x - S_y^n\alpha_x\right| &\leq \left|\alpha_x - S_y\alpha_x\right| + \left|S_y\alpha_x - S_y^2\alpha_x\right| + \cdots + \left|S_y^{n-1}\alpha_x - S_y^n\alpha_x\right| \\
&\leq (1 + bk + \cdots + (bk)n - 1)\,|x-y| \\
&\leq \frac{1}{1-bk}\,|x-y|
\end{aligned}$$

یادآور می‌شویم که بنا به قضیهٔ ۱.۲.۵، نقطهٔ ثابت α_y نگاشت S_y با حد $S_y^n\alpha$ با $n \to \alpha$ برابر است. در این صورت $\alpha_y = \lim\limits_{n\to\alpha} S_y^n\,\alpha_x$ و بنابراین

$$\left|\alpha_x - \alpha_y\right| \leq \frac{1}{1-bk}\,|x-y|$$

چون $\left|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)\right| = \sup_t \left|\alpha_x - \alpha_y\right|$، به این ترتیب پیوستگی α ثابت شده است.

□

چنانچه شرایط بیشتری بر نگاشت f تحمیل کنیم، امکان اثبات هموار ی α وجود دارد. در واقع اگر $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^k باشد، آنگاه شار $\alpha : (-b,b) \times B_a(x_\circ) \to U$ نیز از کلاس C^k است.

متأسفانه، این قضیه بسیار دشوار است. در کتاب مقدمه‌ای به منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر اثر لانگ (ویرایش دوم)، اثباتی کلاسیک از آن مطرح شده است. همچنین در صفحات ۱۲۶ تا ۱۳۸ کتاب آنالیز ۲ اثر لانگ نیز اثباتی جدیدتر مطرح شده است. برای مطالعهٔ این اثبات دشوار، لازم است که ابتدا اصول قضایای باناخ شامل قضیهٔ هان—باناخ را مطالعه کنید و سپس حساب دیفرانسیل در فضاهای باناخ را مطالعه کنید، شامل قضایای تابع وارون و ضمنی (صفحات ۹۳ تا ۱۲۶ از آنالیز ۲). با این حال، این کار از مطالعهٔ اثبات کلاسیک راحت‌تر است (و حتی، پس از اتمام کار، اطلاعاتی در خصوص فضاهای باناخ و حساب دیفرانسیل در آنها را نیز کسب نموده‌اید).

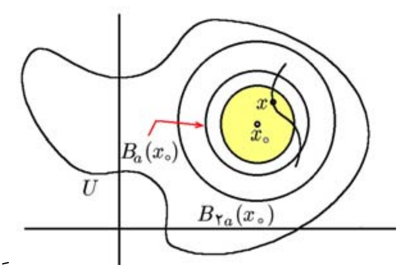
ما فقط این حکم را بدون اثبات می‌پذیریم. توجه شود که اگر f هموار C^α باشد، آنگاه همهٔ نگاشت‌های φ_t نیز هموار C^α هستند.

چون نگاشت $\alpha : (-b,b) \times B_a(x_\circ) \longrightarrow U$ در شرط $\alpha(\circ, x) = y$ صدق می‌کند، داریم

$$\alpha : \{\circ\} \times \bar{B}_{a/۲}(x_\circ) \longrightarrow \bar{B}_a(x_\circ) \subseteq B_a(x_\circ)$$

از پیوستگی α و فشردگی $\{\circ\} \times \bar{B}_{a/۲}(x_\circ)$ نتیجه می‌شود که $\epsilon > \circ$ ای چنان وجود دارد که

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times B_{a/۲}(x_\circ) \longrightarrow B_a(x_\circ)$$



شکل ۵.۵

(اگر $x \in B_{a/۲}(x_\circ)$، آنگاه منحنی انتگرال با شرط آغازی x به ازاء هر t ای که $|t| <$ در $B_a(x_\circ)$ واقع است.) پس اگر $\left|s\right| < \epsilon$ و $x \in B_{a/۲}$، آنگاه نقطهٔ $\alpha(s,x)$ به $B_a(x_\circ)$ متعلق است، و لذا می‌توانیم تعریف کنیم

$$\partial(t) := \alpha(t, \alpha(s,x)) \qquad |t| < \epsilon$$

این نگاشت در شرایط $\partial(\circ) = \alpha(s,x)$ و $\partial'(t) = f(\partial(t))$ صدق می‌کند. همچنین، توجه داریم که به ازاء هر t ای که $\left|s+t\right| < \epsilon$، نگاشت $\beta(t) = \alpha(s+t,x)$ نیز در شرایط $\beta(\circ) = \alpha(s,x)$ و $\beta'(t) = f(\beta(t))$ صدق می‌کند. نتیجتاً بر $|t| < \epsilon$ داریم $\beta(t) = \alpha(t,\alpha(s,x))$. به بیان دیگر اگر $|t|, \left|s\right|, \left|t+s\right| < \epsilon$، آنگاه $\alpha(t,\alpha(s,x)) = \alpha(s+t,x)$. حال اگر نگاشت $\varphi_t : B_{a/۲}(x_\circ) \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $\varphi_t(x) := \alpha(t,x)$ تعریف کنیم، می‌توانیم بگوئیم که اگر $|t|, \left|s\right|, \left|t+s\right| < \epsilon$ و $\varphi_t(x) \in B_{a/۲}(x_\circ)$ آنگاه $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{t+s}(x)$. این بویژه نشان می‌دهد که به ازاء هر $\left|s\right| < \epsilon$ ای φ_s دیفئومورفیسم است و وارون آن $\varphi_s^{-۱}$ برابر φ_{-s} است. چون همهٔ بحث‌هایی که داشتیم موضعی بودند، بدون هیچ اثبات و یا نکته‌ای، می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ آنها در مورد منیفلد نیز صحیح هستند.

۵.۲.۵ قضیه. گیریم X یک میدان برداری هموار بر M است و $p \in M$. در این صورت، مجموعه‌ای باز V شامل p و $\epsilon > \circ$ ای چنان وجود دارند که گردایه‌ای منحصر بفرد از دیفئومورفیسم‌ها $\varphi_t : V \to \varphi_t(V) \subseteq N$ با $|t| < \epsilon$ و خواص زیر وجود دارد:

(۱) $\varphi : (-\epsilon,\epsilon) \times V \longrightarrow M$ با ضابطهٔ $\varphi(t,p) := \varphi_t(p)$ هموار C^α است.

(۲) $|t|, \left|s\right|, \left|s+t\right| < \epsilon$ و $q, \varphi_t(q) \in V$، آنگاه $\varphi_{s+t}(q) = \varphi_s \circ \varphi_t(q)$.

(۳) $q \in V$، آنگاه X_q در $t = \circ$ به منحنی $t \mapsto \varphi_t(q)$ مماس است (به عنوان بردار مماس).

مثال‌هایی که قبلاً مطرح کردیم، نشان می‌دهند که نمی‌توان انتظار داشت در حالت کلی φ_t به ازاء همهٔ t ها تعریف شود و یا φ_t بر کل M تعریف گردد. در حالتی این مکان وجود دارد. **محمل میدان برداری X را درست به صورت بستار $\{p \in M \big| X_p \neq \circ\}$ تعریف می‌کنیم.**

۶.۲.۵ قضیه. اگر X با محمل فشرده باشد (بویژه، اگر M فشرده باشد)، آنگاه به ازاء هر $t \in \mathbb{R}$ ای دیفئومورفیسم‌های $\varphi_t : M \to M$ با خواص (۱)، (۲) و (۳) وجود دارند.

اثبات: **محمل X را با تعدادی متناهی مجموعهٔ باز $V_۱$، $\cdots$ و V_n می‌پوشانیم، که بر طبق قضیهٔ ۵.۲.۵ به $\epsilon_۱$، $\cdots$ و ϵ_n و دیفئومورفیسم‌های $\varphi_t^۱$، $\cdots$ و φ_t^n متناظرند.** گیریم

$\epsilon = \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$. توجه شود که بنا به یکتایی به ازاء هر $q \in V_i \cap V_j$ ای $\varphi_t^i(q) = \varphi_t^i(q)$. پس میتوانیم تعریف کنیم

$$\varphi_t(q) := \begin{cases} \varphi_t^i(q) & \text{اگر } q \in V_i \\ q & \text{اگر } q \notin \mathrm{Supp}X \end{cases}$$

به وضوح $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow M$ هموار است و اگر $|t|, \left|s\right|, \left|t+s\right| < \epsilon$ آنگاه $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ و هر یک از φ_t ها دیفئومورفیسم هستند.

برای تعریف φ_t برای $|t| \geq \epsilon$، می‌نویسیم: $t = k.\frac{\epsilon}{2} + r$ که k عددی صحیح است و $\left|r\right| < \frac{\epsilon}{2}$. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\varphi_t = \begin{cases} \varphi_{\epsilon/2} \circ \cdots \circ \varphi_{\epsilon/2} \circ \varphi_r & (\text{ترکیب } k \text{ تا } \varphi_{\epsilon/2} \text{ با } \varphi_r) \quad \text{اگر } k \geq 0 \\ \varphi_{-\epsilon/2} \circ \cdots \circ \varphi_{-\epsilon/2} \circ \varphi_r & (\text{ترکیب } -k \text{ تا } \varphi_{-\epsilon/2} \text{ با } \varphi_r) \quad \text{اگر } k < 0 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که $\{\varphi_t\}$ همان خانوادهٔ مورد نظر است. □

۳.۵ گروه یک پارامتری از دیفئومورفیسمهای

گردایهٔ منحصر بفرد $\{\varphi_t\}$ معرفی شده در قضیهٔ ۶.۲.۵، یا دقیق‌تر، نگاشت $t \mapsto \varphi_t$ از $\mathbb{R}$ به گروه همهٔ دیفئومورفیسم‌های M را گروه ۱−پارامتری از دیفئومورفیسمهای تولید شده توسط X می‌نامیم. در حالت قضیهٔ ۵.۲.۵ که موضعی است، به یک گروه ۱− پارامتری موضعی از دیفئومورفیسم‌های موضعی می‌رسیم. میدان برداری X را مولد بینهایت کوچک خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ نیز نامیده می‌شود (در این دیدگاه، میدان‌های برداری را تبدیلات بینهایت کوچک می‌نامند).

شرط (۳) در قضیهٔ ۵.۲.۵ را بر اساس عمل X_q بر توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ می‌توان بیان کردو یادآور می‌شویم که

$$\frac{dc}{dt}(f) = df\frac{(c(t))}{dt} = (f \circ c)'(t)$$

بنابراین، اینکه X_q بردار مماس به منحنی $t \mapsto \varphi_t(q)$ در $t = 0$ است، درست به این معنی است که

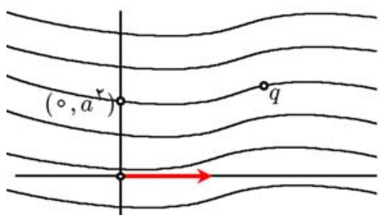
$$(Xf)(q) = X_q f = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(\varphi_h(q)) - f(q)\right)$$

این معادله بسیار کاربردی است. اولین استفادهٔ آن، در استخراج قضیه‌ای منتج از قضیهٔ ۵.۲.۵ است که امکان ساده کردن بسیاری از محاسبات در ارتباط با میدان‌های برداری را فراهم می‌سازد، و کاربردهای نظری مهمی نیز دارد.

۱.۳.۵ قضیه. گیریم X یک میدان برداری هموار است و $X(p) \neq \circ$. در این صورت، دستگاهی مختصاتی (x, U) بگرد p چنان وجود دارد که $X = \partial/\partial x^{\text{۱}}$ بر U.

اثبات: به سادگی ملاحظه می‌شود که می‌توانیم فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ (با دستگاه مختصات استاندارد $((t^{\text{۱}}, \cdots, t^n)$) و $p = \circ \in \mathbb{R}^n$. به علاوه، می‌توانیم فرض کنیم $X(\circ) = \partial/\partial t^{\text{۱}}\big|_{\circ}$. ایدهٔ اثبات این است که در یک همسایگی از $\circ$ یک منحنی انتگرال منحصر بفرد وجود دارد که از هر نقطهٔ $(\circ, a^{\text{۲}}, \cdots, a^n)$ می‌گذرد؛ اگر q بر منحنی گذرنده از این نقطه قرار داشته باشد، از $a^{\text{۲}}$، $\cdots$ و a^n برای $n - \text{۱}$ مختص آخر q و از بازهٔ زانی نظیر به منحنی‌ای که q بر آن واقع است به عنوان اولین مختص می‌توانیم استفاده کنیم.
برای این منظور فرض کنیم X خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند و نگاشت X با ضابطهٔ

$$X(a^{\text{۱}}, \cdots, a^n) = \varphi_{a^{\text{۱}}}(\circ, a^{\text{۲}}, \cdots, a^n)$$



شکل ٦.۵

که در یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. اکنون به ازاء $a = (a^{\text{۱}}, \cdots, a^n)$ داریم

$$\begin{aligned} X_*\left(\frac{\partial}{\partial t^{\text{۱}}}\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial t^{\text{۱}}}\Big|_a (f \circ x) \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{f(x(a^{\text{۱}} + h, a^{\text{۲}}, \cdots, a^n)) - f(x(a))\} \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{f(\varphi_{a^{\text{۱}}+h}(\circ, a^{\text{۲}}, \cdots, a^n)) - f(x(a))\} \\ &= \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{f(\varphi_h(x(a) - f(x(a))\} = (Xf)(x(a)) \end{aligned}$$

به علاوه به ازاء هر $i > \text{۱}$، داریم

$$X_*\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_\circ\right)(f) = \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_a (f \circ x)$$

$$= \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{f(x\Big|_{\circ}, \cdots, h, \cdots, \circ) - f(\circ)\}$$
$$= \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{f(\circ, \cdots, h, \cdots, \circ) - f(\circ)\} = \left(\frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_{\circ}\right)$$

چون $X(\circ) = \partial/\partial t^{\text{۱}}\Big|_{\circ}$ بنا به فرض، این نشان می‌دهد که $X_{*\circ} = I$ ناتکین است. در نتیجه، $x := X^{-\text{۱}}$ را به عنوان دستگاهی مختصاتی در یک همسایگی از $\circ$ می‌توان در نظر گرفت. این همان دستگاه مختصاتی مورد نظر است، چرا که به راحتی می‌توان تحقیق نمود که معادلهٔ $X_*(\partial/\partial t^{\text{۱}}) = X \circ X$ برقرار است، که این درست، معادل با $X = \partial/\partial x^{\text{۱}}$ است. □

۴.۵ مشتق و براکت لی

دومین استفاده از معادلهٔ $(Xp) = \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{f(\varphi_h(p)) - f(p)\}$ ملموس‌تر است. اینکه Xf را بر حسب دیفئومورفیسم‌های φ_h کاملاً می‌توان توضیح داد، امکان تعریف عمل X بر اشیاء دیگر را به همین منوال فراهم می‌سازد. برای نمایان کردن تشابه ذاتی این مفاهیم، با این قرارداد آغاز می‌کنیم که Xf را با نماد $\mathcal{L}_X f$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{L}_X f$ را مشتق (لی) f نسبت به X می‌نامیم؛ این تابع دیگری است که مقدار آن در p به صورت

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \mathcal{L}_X f(p) = (Xf)(p) = X_p(f)$$

محاسبه می‌گردد. حال اگر w یک میدان برداری کواریان هموار باشد، میدان برداری کواریان جدیدی بنام مشتق لی w نسبت به X به صورت

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \lim_{h\to\circ} \frac{\text{۱}}{h}\{(\varphi_h^* w)(p) - w(p)\}$$

تعریف می‌کنیم. به این ترتیب، $\mathcal{L}_X w$ حد اعضاء مشخصی از $T_h^* M$ است. یادآور می‌شویم که اگر $X_p \in T_p M$، آنگاه

$$(\varphi_h^* w)(p)(X_p) = w(\varphi_h(p))(\varphi_h^* X_p)$$

با استدلالی کاملاً ساده می‌توان نشان داد (مسالهٔ ۸) که همواره این حد وجود دارد، و میدان برداری کواریانی که به این ترتیب تعریف می‌شود، $\mathcal{L}_X w$ هموار C^∞ است. در ادامه این میدان برداری را بر حسب مختصات بطور صریح محاسبه گردد و احکام مذکور را به صورت احکام بدیهی استخراج خواهیم کرد:

اگر Y یک میدان برداری دیگر باشد، مشتق لی Y نسبت به X را به صورت

$$(\mathcal{L}_X Y)(p) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{Y_p - (\varphi_{h*}Y)_p\}$$

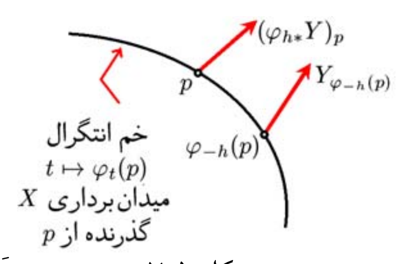
می‌توانیم تعریف کنیم. میدان برداری $\varphi_{h*}Y$ ظاهر شده در این فرمول، حالت خاصی از میدان برداری $\alpha_* Y$ است که در ابتدای این فصل برای هر دیفئومورفیسم $\alpha : M \longrightarrow N$ و هر میدان برداری Y بر M تعریف گردید. در نتیجه، $(\varphi_{h*}Y)_p = \varphi_{h*}(Y_{\varphi-h}(p))$ با تعیین مقدار Y در $\varphi_h^{-1}(p) = \varphi_{-h}(p)$ تهیه می‌شود، که در ادامه توسط φ_{h*} به p برگشت داده شده است.

تعریف $\mathcal{L}_X Y$ را با توجه به بحث ذیل بسیار نزدیک‌تر به $\mathcal{L}_X f$ و $\mathcal{L}_X w$ می‌توان دانست. اگر $\alpha : M \longrightarrow N$ دیفئومورفیسم و Y میدان برداری بر برد N باشد، آنگاه میدان برداری $\alpha^* Y$ بر M را به صورت

$$(\alpha^* Y)_p := (\alpha^{-1})_*(Y_{\alpha(p)})$$

می‌توانیم تعریف کنیم. البته، روشن است که $\alpha^* Y$ درست همان $(\alpha^{-1})_* Y$ است. حال توجه کنید که

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{(\varphi_h^* Y)_p - Y_p\} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{Y_p - (\varphi_h^* Y)_p\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{k}\{Y_p - (\varphi_{-k}^* Y)_p\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{k}\{Y_p - (\varphi_{k*} Y)_p\} = (\mathcal{L}_x Y)(p)
\end{aligned}$$



شکل ۷.۵

با این حال ترجیه می‌دهیم، همواره همان تعریف اولیه را مورد توجه قرار دهیم.

اکنون $\mathcal{L}_X w$ و $\mathcal{L}_X Y$ را در یک دستگاه مختصاتی محاسبه می‌کنیم. با استفاده از گزارهٔ زیر، محاسبات بسیار ساده‌تر خواهد شد.

۱.۴.۵ گزاره. اگر به ازاء $i=۱,۲$ اشیاء $\mathcal{L}_X Y_i$ و $\mathcal{L}_X w_i$ وجود داشته باشند، در این صورت

$$۱)\quad \mathcal{L}_X(Y_۱+Y_۲)=\mathcal{L}_X Y_۱+\mathcal{L}_X Y_۲$$

$$۲)\quad \mathcal{L}_X(w_۱+w_۲)=\mathcal{L}_X w_۱+\mathcal{L}_X w_۲$$

اگر $\mathcal{L}_X Y$ و $\mathcal{L}_X w$ موجود باشند، در این صورت

$$۳)\quad \mathcal{L}_X(fY)=Xf.Y+f.\mathcal{L}_X Y$$

$$۴)\quad \mathcal{L}_X(fw)=Xf.w+f.\mathcal{L}_X w$$

بالاخره، اگر $w(Y)$ نمایشگر تابع $p\mapsto w(p)(Y_p)$ بوده و $\mathcal{L}_X w$ و $\mathcal{L}_X Y$ موجود باشند، آنگاه

$$۵)\quad \mathcal{L}_X(w(Y)=(\mathcal{L}_X w)(Y)+w(\mathcal{L}_X Y)$$

اثبات: (۱) و (۲) بدیی هستند. سایر معادلات را شبیه روشی که برای یافتن $(fg)'(x)$ انجام دادیم، بدست می‌آوریم. در اینجا تنها (۳) را ثابت می‌کنیم و سایر موارد به عنوان تمرین بر عهدهٔ شما.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X fY)_p &= \lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h}\{(fY)_p-(\varphi_{h*}fY)_P\}\\
&= \lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h}\{f(p)Y_p-f(\varphi_{-h}(p))\varphi^{(}_{h*}fY)\varphi_{-h}(p)\}\\
&= \lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h}\{f(p)Y_p-f(\varphi_{-h})\varphi_{h*}(fY)\varphi_{-h}(p)\}\\
&= \lim_{h\to ۰} f(p)\frac{۱}{h}\{Y_p-\varphi_{h*}Y_{\varphi-h}(p)\}\\
&\qquad +\lim_{h\to ۰}[\frac{۱}{k}\{f(p)-f(\varphi_{-h}(p))\}]\varphi_{h*}Y_{\varphi-h(p)}
\end{aligned}$$

روشن است که حد اول با $f(p).\mathcal{L}_X Y(p)$ برابر می‌باشد. در مورد حد دوم نیز، حد داخل کروشه برابر

$$\lim_{k\to ۰}\frac{-۱}{k}(f(p)-f(\varphi_k(p)))=Xf(p)$$

است و همچنین، ملاحظه می‌گردد که $\lim_{h\to ۰}\varphi_{h*}Y_{\varphi-h(p)}=Y_p$ و برهان تمام است. □

اکنون آماده‌ایم تا $\mathcal{L}_X$ را بر حسب دستگاهی مختصاتی (x, U) بر M محاسبه کنیم.
فرض کنیم $X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. ابتدا $\mathcal{L}_X(dx^i)$ را محاسبه می‌کنیم. یادآور می‌شویم (از مسالهٔ ۴−۱) که اگر $f : M \longrightarrow N$ و y دستگاه مختصاتی بر N باشد، در این صورت

$$f^*(dy^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j} dx^j$$

این را بر φ_h^* می‌توانیم اعمال کنیم و y را x بگیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(dx^i)(p) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{(\varphi_h^*)dx^i(p) - dx^i(p)\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)\, dx^j(p) - dx^i(p)\}
\end{aligned}$$

به این ترتیب، ضریب $dx^j(p)$ عبارتست از

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial(x^i \circ \varphi_h)}{\partial x^j} - \delta^i_j\right] &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial(x^i \circ \varphi_h)}{\partial x^j}(p) - \frac{\partial(x^i \circ \varphi_0)}{\partial x^j}(p)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[(x^i \circ \varphi_h) - (x^i \circ \varphi_0)] \quad (۳.۵) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p X(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p)
\end{aligned}$$

به منظور تحقیق رابطهٔ (۳.۵) توجه شود که $A(h, q) = x^i(\varphi_h(q))$ نگاشتی هموار از $\mathbb{R} \times M$ به $\mathbb{R}$ است؛ پس $\partial^2 A/\partial h \partial x^j = \partial^2 A/\partial x^j \partial h$، که این همان (۳.۵) است که در آن جای حد و مشتق عوض شد. نتیجه اینکه

$$\mathcal{L}_X\, dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} dx^j$$

اکنون از قسمت‌های (۲) و (۴) از گزارهٔ ۸ برای محاسبهٔ فرم کلی $\mathcal{L}_X w$ استفاده می‌کنیم، اما در حقیقت متوجه محاسبهٔ $\mathcal{L}_X Y$ می‌باشیم. برای محاسبهٔ $\mathcal{L}_X(\partial/\partial x^i)$ از محاسبات در ارتباط با $\mathcal{L}_X dx^i$ می‌توانیم بهره ببریم؛ اما چون φ_{h*} در ارتباط با میدان‌های برداری دارای یک ترکیب بیشتر از φ_h^* در ارتباط با میدان‌های بردارای کواریان است که همین امر مشکلاتی را بوجود می‌آورد. تکنیکی که در این وضعیت به کار می‌آید، قبلاً در مورد اثبات (۳) و (۴) و (۵) از گزارهٔ ۱.۴.۵ استفاده شده است. پاسخ مساله را به راحتی با استفاده از قسمت (۵) گزارهٔ ۱.۴.۵ می‌توان بدست آورد:

$$0 = \mathcal{L}_X \delta^i_j = \mathcal{L}_X\left[dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j})\right] = (\mathcal{L}_X dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + dx^i\left(\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

بنابراین

$$dx^i\left(\mathcal{L}_X\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-\frac{\partial a^i}{\partial x^j}$$

و لذا

$$\mathcal{L}_X\frac{\partial}{\partial x^j}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

حال، با استفاده از (۳) داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\left(b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \mathcal{L}_X b^j.\frac{\partial}{\partial x^j}+b^j\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_{i=1}^{n}b^j\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned}$$

با جمع بستن روی j و سپس تعویض i و j در مجموع دوگانهٔ حاصل، نتیجه می‌گیریم که:

۲.۴.۵ نتیجه. اگر $X=\sum_{i=1}^{n}a^i\partial/\partial x^i$ و $Y=\sum_{i=1}^{n}b^i\partial/\partial x^i$، در این صورت

$$\mathcal{L}_XY=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}-b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right\}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

این فرمول به ظاهر پیچیده را اگر به شکل مختصات آزاد مطرح کنیم، به بیان ساده‌ای برای $\mathcal{L}_XY$ خواهیم رسید. اگر $f:M\longrightarrow N$ تابعی هموار باشد، آنگاه Yf تابع است، و لذا $XYf=X(Yf)$ نیز با معنی است. روشن است که

$$X(Yf)=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{i=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{i,j}a^i\frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}+a^ib^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}$$

چنانچه عبارت $X(Yf)-Y(Xf)$ را تشکیل دهیم، جملات شامل مشتقات مرتبه دوم در $X(Yf)$ توسط جملات مشابه در $Y(Xf)$ حذف می‌شوند، و نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{L}_XY=XY-YX$$

عبارت $XY-YX$ را با نماد $[X,Y]$ نشان داده و براکت X و Y می‌نامیم؛ توجه شود که

$$[X,Y]_p:=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$$

با محاسبات کاملاً مستقیم نشان داد که

$$[X,Y]_p(fg) = f(p)[X,Y]_p(g) + g(p)[X,Y]_p(f)$$

بنابراین $[X,Y]_p$ مشتقی در p است و لذا عضوی از T_pM می‌باشد.

اکنون به یک وضع پیچیده‌ای رسیده‌ایم. میدان‌های برداری $\mathcal{L}_xY$ و $[X,Y]$ به صورت مستقل از انتخاب دستگاه مختصات تعریف شدند، ولی تنها به یک دستگاه خاص ثابت شد که آنها برابرند! این نوع استدلال از دید خیلی‌ها کامل است، اما در اصل چنین نیست. متأسفانه، اثبات خالی از مختصات دشوار و غیر ملموس است.

در فصل ۳ لمی را اثبات کردیم که در حالت خاص $\mathbb{R}$ می‌گوید هر تابع هموار $f : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ با $f(\circ) = \circ$ را به شکل $f(t) = tg(t)$ می‌توان نوشت، که $g : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار با $g(\circ) = f'(\circ)$ است. در حقیقت

$$g(t) = \int_\circ^\backslash f'(s\,t)ds$$

این حکم را به شکل زیر می‌توان تعمیم داد:

۳.۴.۵ لم. اگر $f : (-\epsilon,\epsilon)\times M \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار بوده و به ازاء هر $p\in M$ ای $f(\circ,p) = \circ$، آنگاه تابعی هموار $g : (-\epsilon,\epsilon)\times M \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان یافت می‌شود که

$$f(t,p) = t\,g(t,p) \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(\circ,p) = g(\circ,p)$$

اثبات: کافی است تعریف شود $g(t,p) = \int_\circ^\backslash \frac{\partial}{\partial s} f(st,p)ds$. □

۴.۴.۵ قضیه. اگر X و Y میدان برداری هموار باشند، در این صورت $\mathcal{L}_XY = [X,Y]$.

اثبات: گیریم $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار است. گیریم X خانوادهٔ $\{\varphi_t : |t| < \epsilon\}$ را تولید می‌کند. بنا به لم ۳.۴.۵ خانواده‌ای از توابع هموار g_t بر M چنان وجود دارد که

$$f\circ\varphi_t = f + t\,g_t \qquad , \qquad g_\circ = Xf$$

بنابراین، داریم

$$(\varphi_{h*}Y)_p(f) = \varphi_{h*}(Y_{\varphi-h}(p))(f) = Y_{\varphi_{-h_{(p)}}}(f\circ\varphi_h) = Y_{\varphi_{-h}(p)}(f + hg_h)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{Y_p-(\varphi_{h*}Y)_p\}(f) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{(Yf)(p)-(Yf)(\varphi_{-h}(p))\}\\ &\quad -\lim_{h\to 0}(Yg_h)(\varphi_{-h}(p))\\ &= (\mathcal{L}_X Y)(p)-(Yg_0)(p)\\ &= X_p(Yf)-Y_p(Xf)\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

تساوی $\mathcal{L}_X Y = XY - YX$ احکام خاصی در رابطهٔ $\mathcal{L}_X Y$ نتیجه می‌دهد، که از روی تعریف اولیهٔ آن به هیچ عنوان بدیهی نیست. به وضوح $[X,Y]=-[Y,X]$ و لذا $[X,Y]=0$. نتیجتاً

$$\mathcal{L}_X X = 0 \qquad , \qquad \mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_X X$$

چون به وضوح $\mathcal{L}_X[aY_1+bY_2]=a\mathcal{L}_X Y_1+b\mathcal{L}_X Y_2$، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{L}$ نسبت به Y خطی است. به علاوه، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\mathcal{L}$ نسبت به X نیز خطی است:

$$\mathcal{L}_{aX_1+bX_2}Y = a\mathcal{L}_{X_1}Y+b\mathcal{L}_{X_2}Y$$

بالاخره، با محاسبهٔ مستقیم می‌توان اتحاد ژاکوبی را اثبات کرد:

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y[Z,X]]=0$$

این معادله را بر اساس مشتق لی به دو صورت می‌توان توجیه کرد:

(الف) $\mathcal{L}_X[Y,Z]=[\mathcal{L}_X Y,Z]+[Y,\mathcal{L}_X Z]$.

(ب) به عنوان عملگرهای بر توابع هموار، داریم $\mathcal{L}_{[X,Y]}=\mathcal{L}_X\circ\mathcal{L}_Y-\mathcal{L}_Y\circ\mathcal{L}_X$. یا به بیانی داریم

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}=[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$$

سرانجام لازم است گفته شود که $\mathcal{L}_Y$ نسبت به ثابت‌ها خطی است، نه نسبت به توابع هموار $\mathcal{F}$. در واقع، بنا به گزارهٔ ۸ و یا حتی محاسبات ساده‌نر که مبتنی بر تعریف $[X,Y]$ است، می‌توان نشان داد که

$$[fX,gY]=fg[X,Y]-f(Xg)Y+g(Yf)X$$

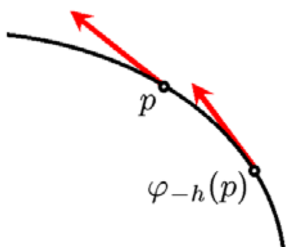
بنابراین، $[X,Y]$ تانسور نیست—یعنی $[X,Y]_p$ نه تنها به X_p و Y_p بستگی دارد، بلکه به میدان‌های برداری X و Y بستگی دارد! (حتی، جالب اینکه می‌توان بجای X و Y از ترکیبی خطی از آنها نیز استفاده کرد.) بویژه، حتی اگر $X_p = 0$،هیچ دلیلی برای نتیجه‌گیری $[X,Y]_p = 0$ وجود ندارد. چرا که، در عبارت

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

جملهٔ اول $X_p(Yf)$ صفر است، ولی جملهٔ دوم ممکن است صفر نباشد، زیرا در آن مشتق Xf در راستای Y_p محاسبه می‌شود. حتی اگر $(Xf)(p) = 0$ باز هم ممکن است جملهٔ دوم صفر نباشد.

براکت $[X,Y]$ با اینکه تانسور نیست، در تعریف بسیاری از تانسورهای خاص، به دلایلی که رفته رفته روشنتر خواهد شد، بکار می‌رود. بیش از آنکه به بیان تعبیر هندی براکت بپردازیم، به اثبات دو حکم در ارتباط با $\mathcal{L}_X Y$ به شکل مستقیم می‌پردازیم. البته این دو حکم با استفاده از تعریف $[X,Y]$ بدیهی‌اند.

۵.۴.۵ لم. به ازاء هر میدان برداری X داریم $\mathcal{L}_X X = 0$.



شکل ۸.۵

اثبات: اگر X خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند، کافی است نشان دهیم که به ازاء هر h ای $X_p = (\varphi_{h*}X)_p$ یادآور می‌شویم که $(\varphi_{h*}X)_p = \varphi_{h*}X_{\varphi_{-h}(p)}$. اکنون $X_{\varphi_{-h}(p)}$ دقیقاً عبارت است از بردار مماس به منحنی $t \mapsto \varphi_t(p)$ در نقطهٔ $t = -h$، و لذا برابر مماس به منحنی $?(t) := \varphi_{t-h}(p)$ در لحظهٔ $t = 0$ است. بنابراین $\varphi_{h*}X_{\varphi_{-h}(p)}$ بردار مماس به منحنی $\varphi_h \circ ?(t) = \varphi_h(\varphi_{t-h}(p)) = \varphi_t(p)$ در $t = 0$ می‌باشد. اما این درست همان بردار مماس X_p است. □

۶.۴.۵ لم. اگر X_p و Y_p صفر باشند، در این صورت $\mathcal{L}_X Y(p) = 0$.

اثبات: چون $X_p = 0$، منحنی انتگرال منحصر بفرد C ای وجود دارد که $C(0) = p$ و $dc/dt = X(C(t))$. روشن است که این منحنی $C(t) = p$ است (منحنی انتگرالی که از p آغاز می‌شود و هیچ‌گاه p را ترک نمی‌کند؛ بالعکس، اگر منحنی انتگرالی از نقطه‌ای بجز p آغاز شود، آنگاه هیچ‌گاه به p نخواهد رسید.) بنابراین چون $Y_p = 0$ داریم

$$(\varphi_{h*}Y)_p = \varphi_{h*}Y_{\varphi_{-h}(p)} = \varphi_{h*}Y_p = \varphi_{h*}(0) = 0$$

و بنابراین $\mathcal{L}_X Y(p) = 0$. □

برای اینکه تعبیری از $[X, Y]$ ارائه کنیم، به لم‌های زیر نیاز است.

۷.۴.۵ لم. گیریم $\alpha : M \longrightarrow M$ دیفئومورفیسم و X میدانی برداری بر M است که $\{\varphi_t\}$ را تولید می‌کند. در این صورت $\alpha_* X$ نیز $\{\alpha \circ \varphi_t \circ \alpha^{-1}\}$ را تولید می‌کند.

اثبات:

$$\begin{aligned}(\alpha_* X)_q(f) &= [\alpha_* X_{\alpha^{-1}(q)}](f) = X_{\alpha^{-1}(q)}(f \circ \alpha)\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{(f \circ \alpha)(\varphi_h(\alpha^{-1}(q))) - (f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(q))\}\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(\alpha \circ \varphi_h \circ \alpha^{-1}(q)) - f(q)\}\end{aligned}$$

. □

۸.۴.۵ نتیجه. اگر $\alpha : M \longrightarrow M$، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\alpha_* X = X$ که به ازاء هر t ای $\varphi_t \circ \alpha = \alpha \circ \varphi_t$.

۹.۴.۵ لم. گیریم X و Y به ترتیب $\{\varphi_t\}$ و $\{\psi_t\}$ را تولید کنند. در این صورت، وقتی و تنها وقتی $[X, Y] = 0$ که به ازاء هر t و s ای $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$.

اثبات: اگر به ازاء هر s ای $\varphi_t \psi_s = \psi_s \varphi_t$، آنگاه بنا به نتیجهٔ ۸.۴.۵ داریم $\varphi_{t*}Y = Y$. اگر این مطلب برای همهٔ t ها درست باشد، آنگاه به وضوح $\mathcal{L}_X Y = 0$.

بالعکس، فرض کنیم $[X, Y] = 0$، در نتیجه به ازاء هر q ای

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{Y_q - (\varphi_{h*}T = Y)_q\} \qquad (۴.۵)$$

به ازاء هر $p \in M$ مفروض، منحنی $c : (-\epsilon, \epsilon) \to T_pM$ را به صورت $c(t) := (\varphi_{t*}Y)_p$ تعریف می‌کنیم. در مورد مشتق $c'(t)$ این نگاشت بتوی فضای برداری T_pM

داریم

$$\begin{aligned} c'(t) &= \lim_{h\to} \frac{۱}{h}\{c(t+h)-c(t)\} \\ &= \lim_{h\to} \frac{۱}{h}\{(\varphi_{(t+h)*}Y)_p - (\varphi_{t*}Y)_p\} \\ &= \lim_{h\to} \frac{۱}{h}\{\varphi_{t*}(\varphi_{h*}Y)_{\varphi_t(p)} - \varphi_{t*}Y_{\varphi-t}(p)\} \\ &= \varphi_{t*}\{\lim_{h\to} \frac{۱}{h}[(\varphi_{h*}Y)_{\varphi-t(p)} - Y_{\varphi-t}(p)]\} \\ &\overset{(۱)}{=} \varphi_{t*}(\circ) = \circ \end{aligned}$$

توضیح اینکه در (1) از (۴.۵) با $q = \varphi_{-t}(p)$ استفاده کرده‌ایم. نتیجاً $c(t) = c(\circ)$ و لذا $\varphi_{t*}Y = Y$. پس بنا به نتیجهٔ ۸.۴.۵، به ازاء هر t و s ای داریم $\varphi_t\psi_s = \psi_s\varphi_t$. □

کمی قبل نشان دادیم که اگر $X(p) \neq \circ$، آنگاه دستگاه مختصاتی‌ای وجود دارد که نسبت به آن می‌توان نوشت: $X = \partial/\partial x^۱$. اگر Y میدان برداری دیگری باشد، که در همه جا نسبت به X مستقل خطی است، در این صورت، ممکن است دستگاه مختصاتی‌ای x بتوان یافت که

$$X = \partial/\partial x^۱ \qquad , \qquad Y = \partial/\partial x^۲$$

اما، در این صورت، با محاسبه‌ای ساده می‌توان نتیجه گرفت که $[\partial/\partial x^۱, \partial/\partial x^۲] = \circ$ و لذا انتظار وجود یک دستگاه x که برای آن (۵.۵) برقرار باشد، تنها وقتی برآورده می‌شود که $[X,Y] = \circ$. حکم قابل توجه این است که شرط $[X,Y] = \circ$ نه تنها لازم است، بلکه کافی نیز هست.

۱۰.۴.۵ قضیه. اگر $X_۱$، $\cdots$ و X_k میدان‌های برداری‌ای باشند در یک همسایگی از p مستقل خطی‌اند و نیز اگر به ازاء هر $۱ \leq \alpha, \beta \leq k$ داشته باشیم $[X_\alpha, X_\beta] = \circ$، آنگاه دستگاهی مختصاتی (x,U) به گرد p چنان یافت می‌شود که به ازاء هر $\alpha = ۱,\cdots,k$ ای بر U داریم $X_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$.

اثبات: همچون در اثبات قضیهٔ ۱.۳.۵ می‌توانیم فرض کنیم که $M = \mathbb{R}^n$ و $p = \circ$ و با احتمالاً یک نغییر مختصات خطی می‌توانیم فرض کنیم که به ازاء هر $\alpha = ۱,\cdots,k$ ای $X_\alpha(\circ) = \partial/\partial t^\alpha\big|_\circ$. اگر هر X_α ای $\{\varphi_t^\alpha\}$ را تولید کند، نگاشت X را به صورت

$$X(a^۱,\cdots,a^n) = \varphi^۱_{a^۱}(\varphi^۲_{a^۲}(\cdots(\varphi^k_{a^k}(\circ,\cdots,\circ,a^{k+۱},\cdots,a^n))\cdots))$$

تعریف می‌کنیم. مانند اثبات قضیه ۱.۳.۵، می‌توانیم محاسبه کنیم و نتیجه بگیریم که

$$X_*\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_\circ\right)=\begin{cases} X_\alpha(\circ)=\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_\circ & \alpha=۱,\cdots,k\\ \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_\circ & \alpha=k+۱,\cdots,n\end{cases}$$

بنابراین $x=\mathcal{X}^{-۱}$ را به عنوان دستگاهی مختصاتی در یک همسایگی از $p=\circ$ می‌توان در نظر گرفت. به علاوه، درست مثل قبل ملاحظه می‌گردد که $X_۱=\partial/\partial x^۱$. اکنون وقت آن رسیده که از مفروضات $[X_\alpha,X_\beta]=\circ$ استفاده کنیم. برای این منظور، لم ۹.۴.۵ را به میان می آوریم؛ نظر به این لم، به ازاء هر $۱\leq\alpha\leq k$ نگاشت $\mathcal{X}$ را به صورت

$$X(a^۱,\cdots,a^n)=\varphi^\alpha_{a^\alpha}(\varphi^۱_{a^۱}(\cdots(\cdots(\circ,\cdots,\circ,a^{k+۱},\cdots,a^n)\cdots))$$

نیز می‌شود نعریف کرد، و استدلال قبل نشان می‌دهد که $X_\alpha=\partial/\partial x^\alpha$. □

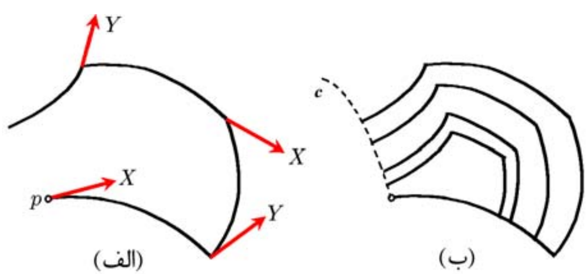
پس، ملاحظه می‌کنیم که $[X,Y]$ به تعبیری، میزان امکان استفاده از منحنی‌های انتگرال X و Y به عنوان خطوط مختصاتی یک دستگاه مختصات را تعیین می‌کند. حکمی که اثبات آن دشوارتر ولی اهمیتش کمتر است، وجود دارد که این موضوع را دقیق‌تر توضیح می‌دهد. اگر X و Y میدان‌های برداری‌ای در یک همسایگی از p باشند، آنگاه به ازاء h های باندازهٔ کافی کوچک می‌توانیم

۱) در امتداد منحنی انتگرال X گذرنده از p باندازهٔ h واحد زمانی حرکت کنیم؛

۲) با شروع از این موقعیت، در امتداد منحنی انتگرال Y باندازهٔ h واحد زمانی حرکت کنیم؛

۳) پس، در امتداد منحنی انتگرال X باندازهٔ h واحد زمانی به عقب برگردیم؛

۴) پس، در امتداد منحنی Y باندازهٔ h واحد زمانی به عقب برگردیم.



شکل ۹.۵

اگر در یک همسایگی از p رابطهٔ $[X,Y]=0$ برقرار باشد، x دستگاهی مختصاتی با $x(p)=0$ باشد و نیز

$$X=\partial/\partial x^1 \qquad , \qquad Y=\partial/\partial x^2$$

در این صورت، در هر یک از چهار مرحلهٔ بالا، نقطهٔ انتهایی چنین است:

$$\begin{array}{ll} 1)\ (h,0,0,\cdots,0) & 3)\ (0,h,0,\cdots,0) \\ 2)\ (h,h,0,\cdots,0) & 4)\ (0,0,0,\cdots,0) \end{array}$$

لذا، در این حالت همواره متواضی الاضلاع مذکور بسته است! حتی اگر $[X,Y]\neq 0$ این متوازی الاضلاع بستهٔ از مرتبهٔ یک است. به این معنی که (دو منحنی δ و c را در صورتی برابر از مرتبهٔ اول در نقطهٔ ۰ گوئیم که $c(0)=\delta(0)$ و $(c'(0)=\delta'(0)$). گیریم $c(h)$ نقطهٔ در انتها مرحلهٔ (۴) باشد.

در این صورت $c(h)=\psi_{-h}(\varphi_{-h}(\psi_{-h}(\varphi_h(0))))$ با منحنی ثابت p برابر از مرتبهٔ یک است. یعنی

۱۱.۴.۵ گزاره. $c'(0)=0$.

اثبات: چنانچه تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \alpha_1(t,h) &= \psi_t(\varphi_h(p)) \\ \alpha_2(t,h) &= \varphi_{-t})(\psi_h(\varphi_h(p))) \\ \alpha_3(t,h) &= \psi_{-t}(\varphi_{-h}(\psi_h(\varphi_h(p)))) \end{aligned}$$

در این صورت $c(t)=\alpha_3(t,t)$. به علاوه

$$a)\quad \alpha_2(0,t)=\alpha_1(t,t)$$

$$b)\quad \alpha_3(0,t)=\alpha_2(t,t)$$

و به ازاء هر تابع عموار $f:M\to\mathbb{R}$ ای

$$c)\quad \partial(f\circ\alpha_1)/\partial t=Yf\circ\alpha_1$$

$$d)\quad \partial(f\circ\alpha_2)/\partial t=Yf\circ\alpha_2$$

$$e)\quad \partial(f\circ\alpha_3)/\partial t=Yf\circ\alpha_3$$

و حال آنکه

$$f)\quad \partial(f\circ\alpha_1)/\partial h(h) = Xf(\alpha_1(0,h))$$

نتیجتاً، با استفاده مکرر از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\begin{aligned}(f\circ c)'(0) &= D_1(f\circ\alpha_3)(0,0)+D_2(f\circ\alpha_3)(0,0)\\ &\overset{(b)}{=} D_1(f\circ\alpha_3)(0,0)+\{D_1(f\circ\alpha_2)(0,0)\\ &\qquad +D_2(f\circ\alpha_2)(0,0)\}\\ &\overset{(a)}{=} D_1(f\circ\alpha_3)(0,0)=D_1(f\circ\alpha_2)(0,0)\\ &\qquad +\{D_1(f\circ\alpha_1)(0,0)+D_2(f\circ\alpha_1)(0,0)\}\end{aligned}$$

اکنون، از (c)، (d)، (e) و (f) نتیجه می‌گیریم که

$$(f\circ c)'(0) = -Yf(p)-Xf(p)+Xf(p)=0$$

. $\square$

هرگاه یک منحنی $M \to (-\epsilon,\epsilon) : c$ با $c(0)=p$ و $c'(0)=0\in T_pM$ باشد، بردار جدیدی $c''(0)$ یا $\left.\frac{d^2c}{dt^2}\right|_0$ به صورت

$$c''(0)(f) := (f\circ c)''(0)$$

تعریف می‌کنیم. با محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که چون $c'(0)=0$، بنابراین عملگر $c''(0)$ مشروح در بالا یک مشتق است، و بنابراین $c''(0)\in T_pM$. (در مسالهٔ ۱۷ ساختی کلی‌تر مطرح می‌شود.) ثابت می‌شود که منحنی c تعریف شده در قبل، براکت $[X,Y]_p$ با مشتق مرتبهٔ دوم ارتباط دارد. تا هنگامی که گروه لی مطرح نشده،ممکن است قضیهٔ بعدی کمی بی‌مورد به نظر بیاید. اثبات آن که عملاً انتهای فصل است را می‌توان حذف کرد، اما محاسبات هوشمندانه‌ای در آن وجود دارد. ضمیمهٔ این فصل شامل احکام به خصوصی در ارتباط با معادلات دیفرانسیل است که بعداً مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱۲.۴.۵ قضیه. $c''(0)=2[X,X]_p$.

اثبات: با استفاده از نمادگذاری‌های قبلی، چون $(f\circ c)(t)=(f\circ\alpha_3)(t,t)$ داریم

$$\begin{aligned}(f\circ c)'' &= D_{1,1}(f\circ\alpha_3)(0,0)+2D_{2,1}(f\circ\alpha_3)(0,0)\\ &\qquad +D_{2,2}(f\circ\alpha_3)(0,0)\qquad (*)\end{aligned}$$

در این صورت

$$D_{۱,۱}(f \circ \alpha_{۳})(۰,۰) \overset{(e)}{=} D_{۱}(-Yf \circ \alpha_{۳})(۰,۰) \overset{(e)}{=} YYf(p) \qquad (۱)$$

همچنین، ملاحظه می‌گردد که

$$\begin{aligned}
۲D_{۲,۱}(f \circ \alpha_{۳})(۰,۰) &\overset{(e)}{=} ۲D_{۱}(-Yf \circ \alpha_{۳}) \qquad (۲)\\
&\underset{c.r.}{\overset{(b)}{=}} ۲\{D_{۱}(Yf \circ \alpha_{۲})(۰,۰) + D_{۲}(Yf \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\}\\
&\overset{(d)}{=} ۲XYf(p) - ۲D_{۲}(Yf \circ \alpha_{۲})(۰,۰)\\
&\underset{c.r.}{\overset{(a)}{=}} ۲XYf(p) - ۲\{D_{۱}(Yf \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\\
&\qquad + D_{۲}(Yf \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\}\\
&\underset{(f)}{\overset{(c)}{=}} -۲XYf(p) - ۲XYf(p)
\end{aligned}$$

که $c.r$ مخفف قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق است. با استفاده از (b) داریم

$$\begin{aligned}
D_{۲}(f \circ \alpha_{۳})(۰,۰) &= D_{۱,۱}(f \circ \alpha_{۲}) + ۲D_{۲,۱}(f \circ \alpha_{۲})(۰,۰)\\
&\qquad + D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۲})(۰,۰)\\
&\overset{(d)}{=} D_{۱}(-Xf \circ \alpha_{۲})(۰,۰) + ۲D_{۲}(-Xf \circ \alpha_{۲})(۰,۰)\\
&\qquad + D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۲})(۰,۰)\\
&\underset{c.r.}{\overset{(d)}{=}} XXf(p) - ۲\{D_{۱}(Xf \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\\
&\qquad + D_{۲}(Xf \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\} + D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۲})(۰,۰)\\
&\underset{(f)}{\overset{(c)}{=}} XXf(p) - ۲YXf(p) - ۲XXf(p)\\
&\qquad + D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۲})(۰,۰)
\end{aligned}$$

سرانجام، با توجه به (a) داریم

$$D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۲})(۰,s) = D_{۱}(f \circ \alpha_{۱})(s,s) + D_{۲}(f \circ \alpha_{۲})(s,s)$$

و لذا

$$\begin{aligned}
D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۲})(۰,۰) &= D_{۱,۱}(f \circ \alpha_{۱})(۰,۰) + ۲D_{۲,۱}(f \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\\
&\qquad + D_{۲,۲}(f \circ \alpha_{۱})(۰,۰)\\
&\underset{(f)}{\overset{(c)}{=}} YYf(p) + ۲XYf(p) + XXf(p) \qquad (۴)
\end{aligned}$$

با جاگذاری (۱) تا (۴) در $(*)$ قضیه نتیجه می‌گردد. □

۵.۵ ضمیمه. معادلات دیفرانسیل

با اینکه در اغلب موارد معادلات دیفرانسیل به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x)=f(\alpha(t,x))$$

با شرط آغازی $\alpha(\circ,x)$ را حل می‌کنیم، در برخی موارد لازم می‌آید که به ازاء $t_\circ$ ای داشته باشیم

$$\alpha(t_\circ,x)=x$$

برای اثبات این می‌توان در همه جا $\circ$ را با $t_\circ$ در اثبات قضیهٔ ۲.۲.۵ عوض کرد، و یا اینکه به جای α از نگاشت $t\mapsto\alpha(t-t_\circ,x)$ استفاده نمود.

مطلب دیگری که در ارتباط با معادلات دیفرانسیل لازم به ذکر است، چنین می‌باشد: معادلهٔ سادهٔ $\alpha'(t)=g(t)$ در بین معادلات دیفرانسیل $\alpha'(t)=f(\alpha(t))$ نیست. حتی $\alpha'(t)t\alpha(t)$ نیز جزو این معادلات نیست. در حالت کلی مایلیم معادلات به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar\alpha(t,x)=f(t,\alpha(t,x))\qquad \alpha(\circ,x)=x$$

را حل کنیم، که $f:(-c,c)\times U\to\mathbb{R}^n$. برای انجام اینکار، کافی است در سراسر برهان هر جا $f(\alpha(t,x))$ است، از $f(t,\alpha(t,x))$ استفاده کنیم. روش هوشمندانه‌ای نیز در این مورد وجود دارد. تعریف می‌کنیم:

$$\bar f:(-c,c)\times U\to\mathbb{R}^{n+1}\qquad \bar f(s,x)=(1,f(s,x))$$

در این صورت، شاری $\bar\alpha=(\alpha^{-1},\alpha^{-2})$ به شکل $(-b,b)\times W\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ با

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar\alpha(t,s,x)=\bar f(\bar\alpha(t,s,x))\qquad \bar\alpha(\circ,s,x)=(s,x)$$

وجود دارد. در مورد اولین تابع مولفه‌ای $\bar\alpha^1$، این بدان معنی است که

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar\alpha^1(t,s,x)=1\qquad \bar\alpha^1(\circ,s,x)=s$$

در نتیجه $\bar\alpha^1(t,s,x)=s+t$. در مورد دومین تابع مولفه‌ای $\bar\alpha^2$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar\alpha^2(t,s,x)=f(\bar\alpha(t,s,x))=f(\bar\alpha(t,s,x))=f(s+t,\bar\alpha^2(t,s,x))$$

در این صورت، $\beta(t,x)=\bar\alpha^{2}(t,0,x)$ شار مورد نظر با شرایط زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(t,x)=f(t,\beta(t,x)) \qquad \beta(0,x)=x$$

البته، می‌توانستیم فرض کنیم $\beta(t_0,x)=x$ (و در ابتدا $\bar\alpha$ را به شکل $\bar\alpha(t_0,s,x)=(s,x)$ بگیریم، و منحنی $t\mapsto\beta(t-(t_0,x))$ را در نظر نگیریم).

سرانجام، حالت خاص معادله دیفرانسیل خطی $\bar\alpha^{1}(t)=g(t.\alpha(t))$ را در نظر می‌گیریم، که g تابعی بر (a,b) با مقادیر ماتریس $n\times n$ است. در این حالت $f(t,x)=g(t).x$.
اگر c یک ماتریس $n\times n$ (ثابت) دلخواه باشد، در این صورت

$$(c.\alpha)'(t)=c.\alpha'(t)=g(t).c.\alpha(t)$$

و لذا $c.\alpha$ نیز جوابی از همین معادله دیفرانسیل است. این نکته، مطلب مهمی در مورد معادلات دیفرانسیل خطی را به ثبوت می‌رساند، که وجه تمییز آن از سایر انواع معادلات دیفرانسیل می‌باشد، $\alpha'(t)=f(t,\alpha(t))$، و آن اینکه ممکن است جواب‌ها تنها در بازهٔ کوچکی از زمان تعریف شوند، حتی اگر $f:(a,b)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ هموار باشد.

۱.۵.۵ گزاره. اگر g تابعی با مقادیر ماتریس $n\times n$ پیوسته بر (a,b) باشد، آنگاه جواب‌های معادلهٔ $\alpha'(t)=g(t).\alpha(t)$ همگی بر کل (a,b) تعریف می‌شوند.

اثبات: توجه شود که از پیوستگی g، نتیجه می‌شود تابع $f(t,x)=g(t)-x$ لیپ شتیز باشد. پس به ازاء هر $t_0\epsilon(a,b)$ ای می‌توان معادله را با هر شرط آغازی در یک بازهٔ باز شامل t_0 حل نمود. هر کدام را تا جایی که ممکن است، گسترش می‌دهیم. اگر جواب گسترش یافته α به ازاء همهٔ t های با $t_0<t<b$ تعریف نشود، فرض می‌کنیم t_1 کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ t هایی است که α برای آنها تعریف می‌شود. فرض کنیم β طوری است که به ازاء t های نزدیک t_1، داشتیم باشیم $\beta'(t)=g(t)\beta(t)$ و $\beta(t_1)\neq 0$. در این صورت به ازاء هر $t^*<t_1$ باندازهٔ کافی نزدیک به t_1 داریم $\beta(t^*)\neq 0$. بنابراین، c ای با $(c-\beta)(t^*)=\alpha(t^*)$ وجود دارد. بنا به یکتایی جواب $c.\beta$ و α بر بازه‌ای که همزمان تعریف شوند، منطبق هستند. بنابراین α را به صورت $c.\beta$ به قسمت t_1 می‌توان گسترش داد، که تناقض است. به صورت مشابه، α می‌بایستی به ازاء همهٔ t هایی که $a<t\le t_0$ تعریف گردد. □

۶.۵ تمرینات

۱. الف) اگر $\alpha:M\to N$ هموار باشد، در این صورت $\alpha_*:TM\to TN$ هموار

است.

ب) اگر $\alpha : M \to N$ دیفئومورفیسم باشد، و X میدانی برداری هموار بر M باشد، آنگاه میدان برداری $\alpha_* X$ بر N نیز هموار است.

ج) اگر $\alpha\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\alpha(t) = t^۳$ باشد، آنگاه میدان برداری هموار X بر $\mathbb{R}$ چنان وجود دارد که $\alpha_* X$ میدان برداری غیر هموار است.

۲. میدان برداری غیر صفری بر $\mathbb{R}$ چنان بیابید که همهٔ منحنی‌های انتگرال آن تنها بر بازه‌ای باز حول صفر تعریف شوند.

۳. مثالی از یک فضای متری کامل (M, p) و یک تابع به شکل $f : M \to M$ بیاورید که به ازاء همهٔ $x, y \in M$ ها $p(f(x), f(y)) \leq p(x, y)$، ولی f هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد.

۴. گیریم $f : (-c, c) \times U \times V \to \mathbb{R}^n$ هموار است، که $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ بازند و نیز فرض کنید $(x_\circ, y_\circ) \in U \times V$، ثابت کنید یک همسایگی W از $(x_\circ, y_\circ)$ و عددی مثبت b چنان یافت میشود که به ازاء هر $(x, y) \in W$ ای یک $\alpha = \alpha_{(x,y)} : (-b, b) \to U$ منحصر بفرد چنان وجود دارد که به ازاء هر $t \in (-b, b)$ ای $\alpha'(t) \in V$ و همچنین

$$\alpha''(t) = f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \qquad \alpha(\circ) = x \qquad \alpha'(\circ) = y$$

به علاوه، اگر بنویسیم $\alpha_{(x,y)}(t) = \alpha(t, x, y)$، آنگاه $\alpha : (-b, b) \times W \to U$ هموار است.

راهنمایی: دستگاه معادلات $\alpha'(t) = \beta(t)$ و $\beta'(t) = f(t, \alpha(t), \beta(t))$ را در نظر بگیرید.

برخی اوقات لازم است معادلات وابسته به پارامتر را حل کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t, y, x) = f(t, y, \alpha(t, y, x)) \qquad \alpha(\circ, y, x) = x \qquad (*)$$

که $f : (-c, c) \times V \times U \to \mathbb{R}^n$، به ازاء مجموعه‌های باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ و $V \subseteq \mathbb{R}^m$. هدف یافتن یک تابع $\alpha_{(y,x)} : (-b, b) \to U$ جواب به ازاء هر شرط اولیهٔ x و پارامتر y است. به عنوان مثال، معادلهٔ

$$\alpha'(t) = y\alpha(t) \qquad \alpha(\circ) = x$$

نمونه‌ای از چنین معادلات است که جواب آن $\alpha(t) = xe^{yt}$ می‌باشد.

۵. الف) نگاشت $\bar{f} : (-c,c) \times V \times U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ را به صورت $\bar{f}(t,x,y) = (\circ, f(t,y,x))$ تعریف می‌کنیم. اگر $(\bar{\alpha}^{1}, \bar{\alpha}^{2}) = \bar{\alpha} : (-b.b) \times W \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ یک فلو برای $\bar{f}$ در همسایگی‌ای از $(y_\circ, x_\circ)$ باشد، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\alpha}(t,y,x) = \bar{f}(t,\bar{\alpha}(t,y,x)) \qquad \bar{\alpha}(\circ,y,x) = (y,x)$$

نشان دهید که به ازاء یک α ای می‌توانیم بنویسیم $\bar{\alpha}(t,y,x) = (y, \alpha(t,y,x))$، و سپس نتیجه بگیرید که α در $(*)$ صدق می‌کند.

ب) نشان دهید که معادلات به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x) = f(t,x,\alpha(t,x)) \qquad \alpha(\circ,x) = x \qquad (**)$$

را به معادلات به شکل $(*)$ می‌توان تبدیل نمود (و در نتیجه، به معادلات به شکل $\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t,x) = f(\alpha(t,x))$.) [وقتی ثابت شود که هر تابع $f : U \to \mathbb{R}^n$ از کلاس C^k داری یک شار $\alpha : (-b,b \times W \to U)$ از کلاس C^k است، قسمت دشوار اثبات این است که اگر f از کلاس C^1 باشد، آنگاه α نسبت به متغیرهای در W مشتق‌پذیر است، و اگر مشتق نسبت به این متغیرها را با نماد $D_{2\alpha}$ نشان دهیم، آنگاه

$$D_1 D_2\, \alpha(t,x) = D_2 f(\alpha(t,x)).D_2 \alpha(t,x) \qquad (***)$$

(چون $D_1 D_2 = D_2 D_1$، اگر f از کلاس C^2 باشد، آنگاه از معادلهٔ اولیهٔ $D_1\, \alpha(t,x) = f(\alpha(t,x))$ این مطلب نتیجه می‌گردد). چون $(***)$ به ازاء هر $D_2\, \alpha$ به شکل $(**)$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که اگر $D_2\, f$ از کلاس C^1 باشد (یعنی f از کلاس C^2 باشد) آنگاه $D_2\, \alpha$ دیفرانسیل‌پذیر است. حال دیفرانسیل‌پذیری از کلاس C^k به صورت مشابه و به کمک استقراء ریاضی قابل استنتاج است.]

۶. الف) معلادله دیفرانیل خطی $\alpha'(t) = g(t)\alpha(t)$ را در نظر بگیرید، که $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. بنابراین، هدف یافتن تابع با مقدار حقیقی α است. نشان دهید که همهٔ جواب‌ها مضاربی از $\alpha(t) = \exp(\int g(t)dt)$ هستند، که $\int g(t)dt$ نمایشگر تابعی G است که $G'(t) = g$. (البته، با تعویض G، تابع α در عددی مثبت ضرب می‌شود.) در ادامهٔ این مسأله نشان می‌دهیم که احکام مشابهی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی برقرار است.

ب) گیریم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ است و $|A|$ به معنی ماکزیمم همهٔ $|a_{ij}|$ ها

است. نشان دهید

$$\left|A+B\right| \leq |A| + \left|B\right| \qquad \left|AB\right| |A|.\left|B\right|$$

ج) نتیجه بگیرید که سری نامتناهی از ماتریس‌های $n \times n$ به شکل

$$\exp(A) := e^A := I + A + \frac{۱}{۲}A^۲ + \cdots + \frac{۱}{n!}A^n + \cdots$$

همگرای مطلق است. [به این معنی که در آیهٔ (i, j) ام از مجموعه‌های جزئی به درایهٔ (i, j) ام از ماتریسی مشخص به صورت مطلق همگرا است.] و بر هر مجموعهٔ کرانداری، همگرای یک شکل است.

د) نشان دهید که $\exp(TAT^{-۱}) = T.\exp(A).T^{-۱}$.

ه) اگر $AB = BA$، آنگاه $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$.

راهنمایی: بنویسید $\sum_{p=\circ}^{۲N} \frac{۱}{p!}(A+B)^p = (\sum_{p=\circ}^{۲N} \frac{۱}{p!}A^p)(\sum_{p=\circ}^{۲N} \frac{۱}{p!}B^p) = R_N$ و نشان دهید که اگر $N \to \infty$ آنگاه $\left|R_N\right|$.

و) ثابت کنید $(\exp A).(\exp(-A)) = I$ و لذا همواره $\exp A$ معکوس‌پذیر است.

ز) به وضوح نگاشت $\exp : \mathbb{R}^{n^۲} \to \mathbb{R}^{n^۲}$ دیفرانسیل‌پذیر (و حتی تحلیلی) است. نشان دهید

$$\exp'(\circ)(B) = \exp(\circ).B = B$$

(توج شود که برای نرم معمولی $|A|$ در $A \in \mathbb{R}^{n^۲}$ داریم $|A| \leq |A| \leq n|A|$.)

ح) با استفاده از حد توصیف شده در قسمت (ز) نشان دهید که اگر $AB = BA$ داریم $\exp'(A)(B) = \exp(A).B$.

ط) فرض کنید $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^۲}$ دیفرانسیل‌پذیر است و $B(t) = \exp(A(t))$. اگر $B'(t)$ ماتریسی باشد که هر درایهٔ آن مشتق درایهٔ نظیر به آن است. نشان دهید که اگر $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$، آنگاه

$$B'(t) = A'(t).\exp(A(t))$$

(روشن است که اگر به ازاء هر t و s ای $A(s)A(t) = A(t)A(s)$، آنگاه $AA' = A'A$).

ی) نشان دهید که اگر به ازاء هر s و t ای $g(s)g(t) = g(t)g(s)$، آنگاه $\alpha(t) = \exp(\int_\circ^t g(s)ds)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی $\alpha'(t) = g(t).\alpha(t)$ است. (مشخص است که اگر $g(t)$ ماتریس ثابت A باشد، یعنی دستگاه با ضرایب ثابت باشد، آنگاه $g(s)g(t) = g(t)g(s)$ به ازاء هر t و s. در این حالت $\exp(\int_\circ^t g(s)ds) = \exp(tA)$ را با تبدیل A به شکل کانونی ژروان می‌توان یافت.)

۷. نشان دهید که اگر $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to M$ ای به شکل $x = \mathcal{X}^{-1}$ است، در این صورت $X = \partial/\partial x^1$ با $\mathcal{X}_*(\partial/\partial t^1) = X \circ \mathcal{X}$ معادل است.

۸. الف) فرض کنید M و N منیفلد هموارند. فرض کنید به ازاء تابع $f : M\times N \to \mathbb{R}$ هموار و $q \in N$، $f(\circ, q)$ نمایشگر تابع $M \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $p \mapsto f(p,q)$ است. اگر (x, U) دستگاه مختصاتی‌ای بر M باشد، نشان دهید که تابع $\partial f/\partial x^i$ با ضابطهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p,q) := \frac{\partial(f(\circ,q))}{\partial x^i}(p)$$

بر $M \times N$ هموار است.

ب) اگر $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$ یک گروه ۱ـ پارامتری از دیفئومورفیسم‌ها باشد، نشان دهید که به ازاء هر تابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$، حد $\lim\limits_{h\to\circ} \frac{1}{h}(f(\varphi_h(p)) - f(p))$ موجود است، و تابعی هموار بر M تعریف می‌کند.

ج) اگر $\varphi_* : (-\varepsilon, \varepsilon) \times TM \to TM$ به صورت $\varphi_*(t,v) = \varphi_{t*}(v)$ تعریف شود، نشان دهید φ_* هموار است، و نتیجه بگیرید که به ازاء هر میدان برداری هموار X و ۱ـ فرم w بر M، حد

$$\lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\{(\varphi_h^* w)(X_p) - w(X_p)\}$$

موجود است و تابعی هموار بر M تعریف می‌کند.

د) با $\mathcal{L}_X Y$ به صورت مشابه عمل کنید.

۹. استدلالی برای قسمتی از گزارهٔ ۸ که در آن $\varphi_{h*}Y_{\varphi-h}(p)$ به Y_p تبدیل شده است، بیاورید.

۱۰. الف) ثابت کنید

$$\mathcal{L}_X\, fw = Xf.w + f.\mathcal{L}_X\, w$$

$$\mathcal{L}_X(w(Y)) = (\mathcal{L}w)(Y) + w(\mathcal{L}Y)$$

ب) در صورتی که $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{(\varphi_{h*}Y)_p - Y_p\}(\mathcal{L}_X Y)(p)$ گزارهٔ ۸ چه تغییری خواهد کرد؟

۱۱. الف) نشان دهید $\varphi^*(df)(Y) = Y(f\circ\varphi)$.

ب) با استفاده از الف مستقیماً از تعریف $\mathcal{L}_X$ نشان دهید که به ازاء هر $Y \in T_pM$ ای $\{\mathcal{L}_X df(p)\}(Y_p) = Y_p(\mathcal{L}_X f)$ و نتیجه بگیرید که $\mathcal{L}_X df = d(\mathcal{L}_X f)$. فرمولی که برای $\mathcal{L}_X dx^i$ در متن آمده است، حالت خاصی از این فرمول کلی است. در قسمت بعد، اثباتی ساده‌تر برای $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ مطرح می‌کنیم، که در آن از روش بکار رفته در گزارهٔ ۱۵ استفاده می‌شود.

ج) گیریم X و Y میدان برداری بر M اند و $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار است. اگر X خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند، تعریف می‌کنیم $\alpha(t,h) = Y_{\varphi_{-t}(p)}(f\circ\varphi_h)$. نشان دهید که $D_1\alpha(0,0) = -X_p(Yf)$ و $D_2\alpha(0,0) = Y_p(Xf)$. نتیجه بگیرید که به ازاء $c(h) = \alpha(h,h)$ داریم

$$-c'(0) - \mathcal{L}_X Y(p)(f) = [X,Y]_p(f)$$

۱۲. اتحاد ژاکوبی را نشان دهید.

۱۳. فرض کنید X، Y و Z بر $\mathbb{R}^3$ میدان‌های برداری

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} \quad Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

هستند.

الف) نشان دهید که نگاشت $aX + bY + cZ \mapsto (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ایزومورفیسمی از مجموعه‌ای به خصوص از میدان‌های برداری به $\mathbb{R}^3$ است و $[U,V]$ به حاصلضرب خارجی تصاویر U و V نظیر می‌شود.

(ب) نشان دهید که شار $aX+bY+cZ$ عبارت از دوران $\mathbb{R}^3$ حول محوری گذرنده از ۰ است.

۱۴. اگر $\binom{k}{\ell}$ بر N و $\varphi : M \to N$ دیفئومورفیسم باشد، φ^*A را بر M به شکل زیر تعریف می‌کنین. اگر $v_1,\cdots,v_k \in T_pM$ و $\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell \in T_p^*M$، آنگاه

$$[\varphi^*A(p)](v_1,\cdots,v)k,\lambda)1,\cdots,\lambda_\ell)$$
$$= A(\varphi(p))(\varphi_*v_1,\cdots,\varphi_*v_k,(\varphi^{-1})^*\lambda_1,\cdots,(\varphi^{-1})^*\lambda_\ell)$$

الف) نشان دهید که با یکی‌گیری میدان برداری (یا میدان برداری کواریان) با یک میدان تانسوری از نوع $\binom{0}{1}$ (یا از نوع $\binom{1}{0}$) این نگاشت، با حالت φ^*Y که قبلاً تعریف کردیم، یکی است.

ب) اگر میدان برداری X بر M خانوادهٔ $\{\varphi_t\}$ را تولید کند و A تانسوری از نوع $\binom{k}{\ell}$ بر M باشد، تعریف می‌کنیم

$$(\mathcal{L}_X A)(p) := \lim_{h\to h}\{(\varphi_h^* A)(p) - A(p)\}$$

نشان دهید

$$\mathcal{L}_X(A+B) = \mathcal{L}_X A + \mathcal{L}_X B$$
$$\mathcal{L}_X(A\otimes B) = (\mathcal{L}_X A)\otimes B + A\otimes(\mathcal{L}_X B)$$

(به خصوص $\mathcal{L}_{\mathcal{X}_\in}\mathcal{A} + \{\mathcal{A}(\{) \mathcal{X} = ((\mathcal{A}\}) \mathcal{L}_\S)$).

ج) نشان دهید $\mathcal{L}_{X_1+X_2}A = \mathcal{L}_{X_1}A \neq \mathcal{L}_{X_2}A$. راهنمایی: این مطلب را قبلاً برای حالتی که A از نوع $\binom{0}{0}$ یا $\binom{0}{1}$ یا $\binom{1}{0}$ است، می‌دانیم.

د) گیریم $C : \mathcal{T}_\ell^k(V) \to \mathcal{T}_\ell^{k-1}(V)$ یک انقباض باشد:

$$\begin{aligned}&(CT)(V_1,\cdots,V_{k-1},\lambda_1,\cdots,\lambda_{\ell-1}) :=\\&(x,\lambda)\mapsto T(v_1,\cdots,v_{\alpha-1},v,v_{\alpha+1},\cdots,v_{k-1},\lambda_1,\cdots\\&\quad\cdots,\lambda_{\beta-1},\lambda,\lambda_{\beta+1},\cdots,\lambda_{\ell-1})\end{aligned}$$

نشان دهید که $\mathcal{L}_X CA = C(\mathcal{L}_X A)$.

ه) توجه کنید که $A(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_\ell)$ را با بکارگیری پی در پی انقباض بر $A\otimes X_1\otimes\cdots\otimes X_k\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_\ell$ می‌توان به دست آورد. با استفاده از (د) ثابت کنید

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\{A(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_\ell)\} &= (\mathcal{L}_X A)(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_k)\\&+\sum_{i=1}^{k} A(X_1,\cdots,\mathcal{L}_X X_i,\cdots,X_k,w_1,\cdots,w_\ell)\\&+\sum_{i=1}^{\ell} A(X_1,\cdots,X_k,w_1,\cdots,\mathcal{L}_X w_i,\cdots,w_\ell)\end{aligned}$$

و) اگر مؤلفه‌های A در یک دستگاه مختصات مفروض x عبارت از $A^{j_1,\cdots,j_\ell}_{i_1,\cdots i_k}$ باشد
و $X=\sum_{i=1}^{n} a^i\partial/\partial x^i$، نشان دهید که مختصات $\mathcal{L}_X A$ عبارت است از

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X A)^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k} &= \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} A^{j_1\cdots j_\ell}_{i_i\cdots i_k} \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} A^{j_1\cdots j_{\alpha-1} j j_{\alpha+1}\cdots j_\ell}_{i_i\cdots i_k} \cdot \frac{\partial a^{j\alpha}}{\partial x^j}\\ &+\sum_{\alpha=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n} A^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_{\alpha-1} i i_{\alpha+1}\cdots i_k}\cdot\frac{\partial a^i}{\partial x^{i\alpha}}\end{aligned}$$

۱۵. گیریم D عملگری است که توابع هموار $\mathcal{F}$ را به توابع هموار $\mathcal{F}$ می‌نگارد و میدان‌های برداری هموار $\mathcal{H}$ را به $\mathcal{H}$ می‌نگارد، به گونه‌ای که $D:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ و $D:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ بر $\mathbb{R}-$ خطی هستند و

$$D(fY)=f.DY+Df.Y$$

الف) نشان دهید D توسیعی منحصر بفرد به یک عملگر دلرد که میدان‌های تانسوری از نوع $\binom{k}{\ell}$ را به اشیائی نظیر خودشان می‌نگارد، به گونه‌ای که

۱) D بر $\mathbb{R}$ خطی است،

۲) $D(A\otimes B)=DA\otimes B+A\otimes DB$.

۳) به ازاء هر انقباض C، داشته باشیم $DC=CD$.

چنانچه فرض شود $Df=Xf$ و $DY=\mathcal{L}_X Y$، این توسیع منحصر بفرد $\mathcal{L}_X$ است.

ب) گیریم A میدانی تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ است، و لذا می‌توانیم فرض کنیم $A(p)\in End(T_pM)$؛ به این ترتیب، به ازاء هر میدان برداری X، $A(X)$ نیز میدانی برداری است. نشان دهید که اگر تعریف کنیم $D_Af=0$ و $D_AX=A(X)$، آنگاه D_A توسیعی منحصر بفرد دارد که در (۱) و (۲) و (۳) صدق می‌کند.

ج) نشان دهید $(D_Aw)(p)=-A(p)^*(w(p))$.

د) نشان دهید $\mathcal{L}_{fX}=f\mathcal{L}_X-D_{X\otimes df}$. راهنمایی: این را برای توابع و میدان‌های برداری بررسی کنید.

ه) چنانچه T از نوع $\binom{2}{1}$ باشد، نشان دهید

$$(D_AT)^{ij}_k=\sum_{\alpha=1}^{n} T^{\alpha j}_k A^i_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n} T^{i\alpha}_k A^j_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{n} T^{ij}_\alpha A^\alpha_k$$

این را به حالت تانسورهای از نوع $\binom{k}{\ell}$ تعمیم دهید.

۱۶. الف) گیریم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در ۰ در $f'(۰) = ۰$ صدق می‌کند. به ازاء $t \geq ۰$ تعریف می‌کنیم $g(t) := f(\sqrt{t})$. نشان دهید که مشتق راست (به کمک قضیهٔ تیلور) عبارتست از

$$g'_+(۰) = \lim_{h \to ۰+} \frac{۱}{h}(g(h) - g(۰)) = \frac{۱}{۲} f''(۰)$$

ب) به ازاء $c : \mathbb{R} \to M$ با $c'(۰) = ۰ \in T_pM$ و $t \geq ۰$ تعریف کنید $\delta(t) := c(\sqrt{t})$. نشان دهید که بردار مماس $c''(۰)$ با ضابطهٔ $c''(۰)(f) = (f \circ c)''(۰)$ را به صورت $c''(۰) = ۲\delta'(۰)$ می‌توان در نظر گرفت.

۱۷. الف) گیریم p نقطه‌ای تکین برای تابع $f : M \to \mathbb{R}$ است، بنابراین $f_{*p} = ۰$. به ازاء بردارهای مفروض $X_p, Y_p \in T_pM$، میدان‌های برداری $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\tilde{X}_p = X_p$ و $\tilde{Y}_p = Y_p$. در این صورت تعریف می‌کنیم $f_{**}(X_p, Y_p) := \tilde{X}_p(\tilde{Y} f)$. با استفاده از اینکه $[X, Y]_p(f) = ۰$، نشان دهید که $f_{**}(X_p, Y_p)$ متقارن است، و نتیجه بگیرید که خوشتعریف است.

ب) نشان دهید

$$f_{**}\left(\sum_{i=۱}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \sum_{j=۱}^{n} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right) = \sum_{i,j=۱}^{n} a^i b^j \frac{\partial^۲ f}{\partial x^i \partial x^j}(p)$$

ج) نشلان دهید که رتبهٔ $(\partial^۲ f / \partial x^i \partial x^j)(p)$ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات‌است.

د) گیریم p نقطه‌ای تکین از تابع $f : M \to N$ است. به ازاء $X_p, Y_p \in T_pM$ و $g : N \to \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $f_{**}(X, Y)(g) = \tilde{X}(\tilde{Y}(g \circ f))$. نشان دهید که در این صورت، نگاشت $f_{**} : T_pM \times T_pM \to T_{f(p)}N$ دو خطی و خوشتعریف است.

ه) اگر ۰ نقطهٔ تکین تابع $c : \mathbb{R} \to M$ باشد، نشان دهید $c_{**} : T_۰\mathbb{R} \times T_۰\mathbb{R} \to T_{c(۰)}M$ زوج $(۱_۰, ۱_۰)$ را به بردار مماس $c''(۰)$ با تعریف $c''(۰)(f) = (f \circ c)''(۰)$ می‌نگارد.

۱۸. گیریم c منحنی در گزارهٔ ۱۱.۴.۵ و قضیهٔ ۱۲.۴.۵ است. اگر x دستگاه مختصاتی حول p با $x(p) = ۰$ بوده و نیز $[X, Y]_p = \sum_{i=۱}^{n} a^i \partial / \partial x^i \Big|_p$، نشان دهید $x^i(c(t)) =$

$a^it^۲+O(t^۲)$، که $O(t^۲)$ نمایشگر تابعی است با این ویژگی که $\lim_{t\to ۰} O(t^۲)/t^۲ =$ ۰.

۱۹. الف) نشان دهید که اگر M فشرده بوده و ۰ مقداری منظم برای $f : M \to \mathbb{R}$ باشد، آنگاه همسایگی‌ای U از $۰ \in \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که $f^{-۱}(U)$ با $f^{-۱}(۰)\times$ U دیفئومورف است به گونه‌ای که دیفئومورفیسم مربوطه $\varphi : f^{-۱}(۰) \times U \to$ $f^{-۱}(U)$ در شرط $f(\varphi(p,t)) = t$ صدق می‌کند. راهنمایی: با استفاده از قضیه ۱.۳.۵ و افراز یکانی، میدانی برداری X بر یک همسایگی از $f^{-۱}(۰)$ چنان بسازید که $f_*X = -d/dt$.

ب) کلی تر، اگر M فشرده بوده و $q \in N$ مقداری منظم برای $f : M \to N$ باشد، در این صورت نشان دهید که همسایگی‌ای U از q و دیفئومورفیسمی $\varphi :$ $f^{-۱}(q) \times U \to f^{-۱}(U)$ چنان وجود دارند که $f(\varphi(q,q')) = q'$.

ج) از (ب) نتیجه بگیرید که اگر همهٔ نقاط N مقادیر منظم باشند، آنگاه به ازاء هر $q_۱$ و $q_۲$ باندازهٔ کافی نزدیک به هم، $f^{-۱}(q_۱)$ و $f^{-۱}(q_۲)$ دیفئومورفند. اگر f بروی N نباشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که M با $N \times f^{-۱}(q)$ دیفئومورف است؟

فصل ۶

منیفلد انتگرال

۱.۶ پیش درآمد

اعتبار ریاضی‌دانان به چند برهان بدی است که اقامه می‌کنند. [کار پیشروها زشت است.]

آ. س. بیسکوویچ[۱]

زیبایی اولین آزمون است: در دنیا جایی برای ریاضیات زشت نیست. ج. ه. هارودی[۲]

در فصل قبل دیدیم که حتی اگر میدان برداری X بر کل منیفلد مفروض M هموار باشد، منحنی‌های انتگرال X ممکن است تنها برای زمان‌های باندازه کافی کوچک قابل تعریف باشند. اکنون کمی بحث را تغییر داده، و به دنبال احکام کلی در این رابطه هستیم. به جای میدان برداری، فرض می‌کنیم که به ازاء هر $p \in M$ ای یک زیر فضای یک بعدی $\Delta_p \subset T_pM$ داریم. تابع Δ حاصل را، توزیع ۱—بعدی می‌نامیم (این نوع توزیع ربطی با مفهوم توزیع در آنالیز که در ارتباط با اشیائی چون «$\delta-$ تابع» است، ندارد). در این صورت Δ به شکل **موضعی** توسط میدان برداری تولید می‌گردد؛ یعنی، به ازاء هر $p \in M$، در همسایگی p یک (و لذا تعداد زیادی) میدان برداری X

[۱] برگرفته از کتاب «مطالب گوناگونی از ریاضیدانان» از ج. ر. لیتل وود.
[۲] برگرفته از کتاب «عذرخواهی یک ریاضیدان».

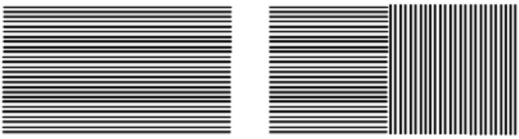
به گونه‌ای می‌توانیم انتخاب کنیم که به ازاء هر q از آن همسایگی $\Delta_q \in X_q \neq \circ$. Δ را در صورتی توزیع هموار گوئیم که در هر نقطه، X را میدانی هموار بتوان انتخاب نمود.

مفهوم منحنی انتگرال در مورد توزیع ۱−بعدی بی معنی است، ولی می‌توانیم چنین تعریف کنیم که: زیر منیفلد ۱−بعدی N از M را در صورتی منحنی انتگرال Δ گوئیم که به ازاء هر $p \in N$ ای $i_*(T_pN) = \Delta_p$، که $i = N \hookrightarrow M$ نگاشت احتوی است. به ازاء هر $p \in M$ ای، همیشه می‌توان منیفلد انتگرالی N برای توزیع هموار Δ یافت که $p \in N$؛ کافی است میدان برداری X را انتخاب کنیم که به ازاء هر q از یک همسایگی از p داریم $\circ \neq X_q \in \Delta_q$، و سپس انتگرال c میدان برداری X با شرط آغازی $C(\circ) = p$ را بدست بیاوریم. آنگاه با در نظر گرفتن N به صورت برد c، پارامتره کردن c را فراموش کنیم. این استدلال عملاً نشان می‌دهد که به ازاء هر $p \in M$ ای یک دستگاه مختصات (x,U) چنان وجود دارد که به ازاء هر مجموعهٔ ثابت از اعداد $a^۲$، $\cdots$ و a^n، مجموعهٔ

$$\left\{q \in U \middle| x^۲(q) = a^۲, \cdots, x^n(q) = a^n\right\}$$

منیفلد انتگرال Δ بر U است، و اینها تنها منیفلدهای انتگرال در U هستند.

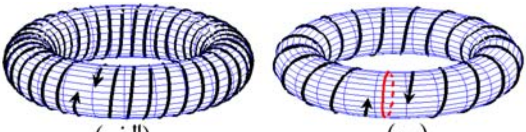
این هنوز هم حکمی موضعی است، اما چون با زیر منیفلدها سر و کار دارد و نه با منحنیهای با پارامترهای به خصوص، امکان متصل کردن زیر منیفلدهای انتگرال با هم وجود دارد. کل منیفلد M را به صورت اجتماعی مجزا از زیر منیفلدهای انتگرال همبند Δ می‌توان نوشت که موضعاً به شکل



(الف) (ب)

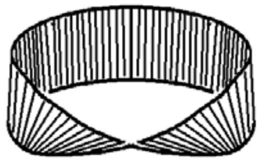
شکل ۱.٦

و یا صورتهای پیچیده‌نر می‌باشد. مثلاً همان طور که در فصل ۱ دیدیم، توزیعی بر چنبره وجود دارد که منیفلدهای انتگرال آن، منیفلدهای ۱−بعدی چگال هستند. به علاوه، بر چنبره توزیعی وجود دارد که داری تنا یک منیفلد انتگرال همبند فشرده هستند. همچنین، میدان‌های برداری‌ای بر چنبره یافت می‌شوند که هر یک از دو توزیع فوق الذکر، منحنی‌های انتگرال یکی از آنها هستند.



شکل ۲.۶: دو توزیع متفاوت بر تیوب

اما بر نوار موبیوس، توزیعی وجود دارد که تنها به شکل موضعی توسط میدان برداری تولید می‌شود و هیچ میدان برداری‌ای وجود ندارد که آنرا به شکل فراگیر تولید کند.


شکل ۳.۶: نوار موبیوس

جزئیات در ارتباط با کنار هم گذاری منیفلدهای انتگرال موضعی را به کنار می‌گذاریم، زیرا عملاً در ابعاد بالا این کار را نمی‌شود انجام داد. فعلاً، برای حالت ابعاد بالا به شکل موضعی عمل می‌کنیم.

توزیع $k-$ بعدی بر M، تابعی $p \mapsto \Delta_p$ است که $\Delta_p \subset T_pM$ زیر فضایی k–بعدی از T_pM است. به ازاء هر $p \in M$، همسایگی U و k میدان برداری X_1، $\cdots$ و X_k چنان یافت می‌شوند که $X_1(q)$، $\cdots$ و $X_k(q)$ پایه‌ای برای Δ_q است به ازاء هر $q \in U$. Δ را در صورتی توزیع هموار گوئیم که میدان‌های برداری هموار X_1، $\cdots$ و X_k با ویژگی بالا بتوان انتخاب نمود (البته در همسایگی از هر نقطهٔ $p \in M$). زیر منیفلد (k–بعدی) N از M را در صورتی **منیفلد انتگرال** برای Δ گوئیم که به ازاء هر $p \in N$ ای $i_*(T_pN) = \Delta_p$، که $i : N \hookrightarrow M$ نگاشت احتوی است.

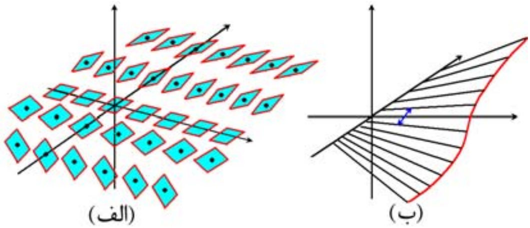
با اینکه به نظر تعاریف ذکر شده بسیار شبیه حالت ۱–بعدی است، اما احکام مربوطه خیلی متفاوت به نظر می‌آیند. در کل، حتی به صورت موضعی، ممکن است منیفلد انتگرال موجود نباشد.

به عنوان ساده‌ترین مثال، توزیع ۲–بعدی Δ در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید که $\Delta_p = \Delta_{(a,b,c)}$ توسط $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + b\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ و $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$ تولید می‌شود. بنابراین

$$\Delta_p = \left\{ r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + br\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

اگر $T\mathbb{R}^n$ را با $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ یکی بگیریم، در این صورت Δ_p از همهٔ بردارهای به شکل $(r, s, rb)_p$ تشکیل می‌شود. بنابراین Δ_p را به صورت صفحهٔ به معادلهٔ $z - c = b(x -$

a) می‌توان تصور نمود. شکل زیر Δ_p را برای $p=(a,b,0)$ ها نشان می‌دهد. صفحهٔ $\Delta_{a,b,c}$ عبارت است از صفحهٔ گذشته از نقطهٔ (a,b,c) و موازی با صفحه‌ای که از $(a,b,0)$ می‌گذرد.



شکل ۴.٦: نمونه‌ای از یک توزیع انتگرال ناپذیر

چنانچه این توزیع را تجسم کنید، احتمالاً پی می‌برید که چرا هیچ منیفلد انتگرالی ندارد. فرض کنید منیفلد انتگرالی N از Δ با $0 \in N$ وجود داشته باشد. در این صورت، باید مقطع N و $\{(0,y,z)\}$ یک منحنی δ در $yz-$ صفحه باشد که از 0 می‌گذرد و بردارهای مماس به آن در مقطع $\Delta_{(0,y,z)}$ و $yz-$ صفحه قرار دارند. تنها چنین بردارهایی، بردارهای با مؤلفهٔ سوم صفرند، و لذا بایستی δ برابر $y-$ محور باشد. حال، به ازاء هر y_0 ثابت، مقطع $N \cap \{(x,y_0,z)\}$ را در نظر می‌گیریم. این یک منحنی در صفحهٔ $\{(x,y_0,z)\}$ است که از $\{(0,y_0,0)\}$ می‌گذرد، و همهٔ بردارهای مماس به آن با شیب y_0 هستند، لذا بایستی برابر خط $\{(x,y_0,y_0x)\}$ باشد. پس، در مجموع باید منیفلد انتگرال مورد نظر به صورت در قسمت (ب) از شکل ۴.٦ باشد. اما چنین زیر منیفلدی وجود ندارد. مثلاً فضای مماسش در $(1,0,0)$ برابر فضای همهٔ بردارهای با مؤلفهٔ سوم مخالف صفر است، که غیر ممکن است.

برای اینکه ببینیم واقعاً در اینجا چه اتفاقی رخ داده است، حالت کلی‌تر را در نظر می‌گیریم که $\Delta_{(a,b,c)} - \Delta_p$ برابر

$$\Delta_p := \left\{ r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \{rf(a,b)+sg(a,b)\}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p : a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

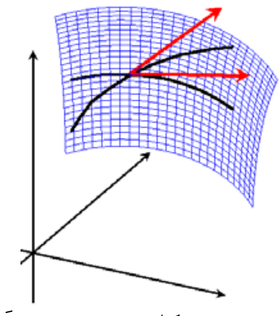
باشد. از نظر هندسی، Δ_p صفحه‌ای است به معادلهٔ

$$z-c=f(a,b)(x-a)+y(a,b)(y-b)$$

مثل در مثال اول، صفحهٔ $\Delta_{(a,b,c)}$ از (a,b,c) می‌گذرد و با صفحه‌ای که از $(a,b,0)$ می‌گذرد، موازی است، زیرا f و g تنها به a و b بستگی دارند.

اکنون می‌پرسیم که در چه صورت توزیع Δ به ازاء هر نقطه‌ای یک منیفلد انتگرال N عبوری از آن نقطه دارد. چون Δ_p هیچگاه به $xy-$ صفحه عمود نمی‌شود، زیر منیفلد به صورت موضعی به شکل نمودار تابعی از x و y قابل بیان است:

$$N = \{(x, y, z)\Big| z = \alpha(a, y)\}$$



شکل ۵.٦

اکنون، فضای مماس در $p = (a, b, \alpha(a, b))$ توسط

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a, b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a, b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

تولید می‌گردد. این بردارهای مماس، وقتی و تنها وقتی در Δ_p قرار دارند

$$f(a, b) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a, b) \quad , \quad g(a, b) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a, b)$$

بنابراین، تابعی $\alpha : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ لازم است بیابیم که

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = f \quad , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = g \tag{۱.٦}$$

مشخص است که در حالت کلی، چنین تابعی وجود ندارد. با برابر قرار دادن مشتقات جزیی ترکیبی، شرط لازم بر f و g می‌یابیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{۲.٦}$$

در مثال قبلی ما $f(a, b) = b$، $g(a, b) = ۰$، $\frac{\partial f}{\partial y} = ۱$ و $\frac{\partial g}{\partial x} = ۰$ و لذا این شرط لازم در این حالت برقرار نیست. می‌دانیم که شرط لازم (۲.٦) برای وجود تابع α صادق در (۱.٦) برای یک همسایگی از هر نقطه، کافی نیز هست.

۱.۱.۶ گزاره. اگر f و g در شرط (۲.۶) صدق کنند، در همسایگی از ۰، و نیز اگر $z_\circ \in \mathbb{R}$، آنگاه تابعی α وجود دارد که در یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}^2$ تعریف می‌گردد، طوری که $\alpha(\circ, \circ) = z\circ$ و رابطهٔ (۱.۶) برقرار است.

اثبات: ابتدا $\alpha(x, \circ)$ را طوری تعریف می‌کنیم که $\alpha(\circ, \circ) = z_\circ$ و

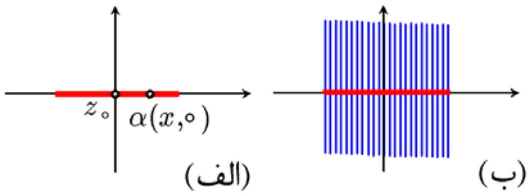
$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, \circ) = f(x, \circ) \tag{۳.۶}$$

یعنی، تعریف می‌کنیم

$$\alpha(x, \circ) = z_\circ + \int_\circ^x f(t, \circ) dt$$

سپس، به ازاء هر x ای $\alpha(x, y)$ را به صورت

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) = g(x, y) \tag{۴.۶}$$



شکل ۶.۶

تعریف می‌کنیم؛ یعنی، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \alpha(x, \circ) + \int_\circ^y g(x, t) dt \\ &= z_\circ + \int_\circ^x f(t, \circ) dt + \int_\circ^y g(x, t) dt \end{aligned}$$

در این ساخت از (۲.۶) استفاده نشد، و به موجب آن α ای بدست آوردیم که در (۴.۶) صدق می‌کند و $\partial\alpha/\partial y = g$. ادعا می‌کنیم که اگر (۲.۶) برقرار باشد، آنگاه بایستی بعلاوه داشته باشیم $\partial\alpha/\partial x = f$. برای اثبات این مطلب، به ازاء هر x ثابت، تابع $y \mapsto \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x, y) - f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم. بنا به (۳.۶) این تابع به ازاء $y = \circ$

برابر ۰ است. برای اینکه ثابت کنیم، تابع مذکور به ازاء هر y ای صفر است، کافی است نشان دهیم که مشتق آن ۰ است. اما مشتق آن در y عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &\overset{(2)}{=} \frac{\partial y}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &\overset{(**)}{=} 0\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

اکنون آماده‌ایم تا به طور اساسی به حالت کلی یک توزیع ۲—بعدی در $\mathbb{R}^3$ بپردازیم:

$$\Delta_p=\left\{r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p+s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p+(rf(p)+sg(p))\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p : r,s\in\mathbb{R}\right\}$$

که $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. فرض کنید $N=\{(x,y,z):z=\alpha(x,y)\}$ یک منیفلد انتگرال برای Δ است. فضای مماس به N در $p=(a,b,\alpha(a,b))$ باز هم توسط

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p+\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \quad,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p+\frac{\partial\alpha}{\partial x}(a,b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

تولید می‌گردد. این بردارهای مماس وقتی و تنها وقتی در Δ_p قرار دارند که

$$f(a,b,\alpha(a,b))=\frac{\partial\alpha}{\partial x}(a,b)\quad,\quad g(a,b,\alpha(a,b))=\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b) \qquad (5.6)$$

جهت بدست آوردن شرایط لازم برای و چون چنین تابع α ای، باز هم از برقرار دادن مشتقات جزئی ترکیبی آغاز می‌کنیم. در این صورت، از (۵.۶) و قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial x}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,\alpha(a,b))+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,\alpha(a,b)).\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}(a,b) &= \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\alpha(a,b))+\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,\alpha(a,b)).\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b)\end{aligned}$$

این فرمول چندان مفید نیست، زیرا در آن همچنان تابع مجهول α حضور دارد، اما با جاگذاری از (۵.۶) داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,\alpha(a,b)) &+ \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,\alpha(a,b)).g(a,b,\alpha(a,b))\\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\alpha(a,b)).f(a,b,\alpha(a,b))\end{aligned}$$

اکنون، به دنبال شرایطی هستیم که بایستی f و g در آنها صدق کنند تا به موجب آنها از هر نقطه‌ای یک منیفلد انتگرال Δ بگذرد؛ به این معنی که این معادلات در هر (a, b) ای برقرار باشند و فرقی نکند که $\alpha(a, b)$ چه باشد. به این ترتیب، به شرط لازم معروف به شرح ذیل می‌رسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.g = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}.f \tag{۶.۶}$$

ثابت می‌شود که در این حالت کلی نیز، شرط لازم بالا، عملاً یک شرط کافی نیست. در واقع، نیازی نیست که خود ما آنرا به تنها یک تابع که بر $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده است، محدود کنیم؛ قادر به بررسی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای n تابع بر $\mathbb{R}^m$ هستیم (به عبارت دیگر، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مورد یک تابع از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$). در قضیهٔ زیر، t را به عنوان نقاط در $\mathbb{R}^m$ و x را به عنوان نقاط در $\mathbb{R}^n$ استفاده می‌کنیم؛ پس، در مورد هر تابع $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ می‌توان از $\frac{\partial f}{\partial t^i}$ برای $D_i f$ و از $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ برای $D_{m+i} f$ استفاده کرد.

۲.۱.۶ قضیه. گیریم $U \times V \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ باز است، که U همسایگی‌ای از $\circ \in \mathbb{R}^m$ است و $f_i : U \times V \to \mathbb{R}^n$ توابعی هموارند، که $i = ۱, \cdots, m$. در این صورت، به ازاء هر $x \in V$ ای، حداکثر یک تابع $\alpha : W \to V$ وجود دارد که بر همسایگی‌ای W از $\circ \in \mathbb{R}^m$ تعریف می‌شود و در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \alpha(\circ) = x \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t^i}(t) = f_j(t, \alpha(t)) \quad \forall\, t \in W \end{cases} \tag{۷.۶}$$

(به بیان دقیق‌تر، هر دو چنین تابعی مانند $\alpha_۱$ بر $W_۱$ و $\alpha_۲$ بر $W_۲$، بر مؤلفه‌ای از $W_۱ \cap W_۲$ که شامل $\circ$ است، برابرند.) چنین تابعی وقتی و تنها وقتی در همسایگی‌ای W از $\circ$ وجود دارد (و به طور خودکار هموار است) که همسایگی‌ای از $(\circ, x) \in U \times V$ چنان وجود داشته باشد که

$$\frac{\partial f_j}{\partial t^i} - \frac{\partial f_i}{\partial t^j} + \sum_{k=۱}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^k} f_i^k - \sum_{k=۱}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} f_j^k = \circ \qquad i, j = ۱, \cdots, m \tag{۸.۶}$$

اثبات: یکتایی از اثبات وجود نتیجه می‌شود. نشان دادن لزوم شرایط (۸.۶) ساده است و به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده؛ بنابراین، کافی است نشان دهیم که اگر این

شرایط برقرار باشند، آنگاه تابعی با شرایط مورد نظر وجود دارد. اثبات شبیه گزارهٔ ۱.۱.۶ است، با یک مشکل کوچک در انتهای آن.

ابتدا می‌خواهیم $\alpha(t, 0, \cdots, 0)$ را طوری تعریف کنیم که

$$\begin{cases} \alpha(0, 0, \cdots, 0) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t^1}(t, 0, \cdots, 0) = f_1(t, 0m \cdots, 0, \alpha(t, 0, \cdots, 0)) \end{cases} \tag{9.6}$$

برای این منظور، معادله دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases} \beta_1(0) = x \\ \beta_1'(t) = f_1(t, 0, \cdots, 0, \beta_1(t)) \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله منحصر بفرد دارد که برای t های با $|t| < \varepsilon_1$ تعریف می‌گردد. تعریف می‌کنیم

$$\alpha(t, 0, \cdots, 0) = \beta_1(t) \qquad |t| < \varepsilon_1$$

در این صورت، رابطهٔ (۹.۶) برای $|t| < \varepsilon_1$ برقرار است.

اکنون برای هر t^1 ثابت با $\left|t^1\right| < \varepsilon_1$، معادلهٔ

$$\begin{cases} \beta_2(0) = \alpha(t^1, 0, \cdots, 0) \\ \beta_2'(t) = f_2(t^1, t, 0, \cdots, 0, \beta_2(t)) \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله نیز به ازاء t های باندازهٔ کافی کوچک، جواب منحصر بفرد دارد. در اینجا، لازم است خواننده به قضیهٔ ۲.۲.۵ برگردد و حکم ذیل را تحقیق کنید: اگر ε_1 را باندازهٔ کافی کوچک انتخاب کنیم، آنگاه به ازاء هر $\left|t^1\right| < \varepsilon_1$، جواب‌های معادلات برای β_2 با شرایط اولیهٔ $\beta_2(0) = \alpha(t^1, 0, \cdots, 0)$، هر یک برای $|t| < \varepsilon_2$ تعریف می‌گردند، که $\varepsilon_2 > 0$ عددی خاص است. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\alpha(t^1, t, 0, \cdots, 0) = \beta_2(t) \qquad |t^1| < \varepsilon_2 \quad , \quad |t| < \varepsilon_2$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{cases} \alpha(0, 0, \cdots, 0) = x \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t^2}(t^1, t, 0, \cdots, 0) = f_2(t^1, t, 0, \cdots, 0, \alpha(t^1, t, 0, \cdots, 0)) \\ |t^1| < \varepsilon_1 \ , \ |t| < \varepsilon_2 \end{cases} \tag{10.6}$$

ادعا می‌کنیم که به ازاء هر t^1 ثابت با $|t^1| < \varepsilon_1$، به ازاء هر t با $|t| < \varepsilon_2$ نیز داریم

$$0 = g(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t^1}(t^1, t, \cdots, 0) - f_1(t^1, t, 0, \cdots, 0)\alpha(t^1, t, 0, \cdots, 0 \tag{11.6}$$

ابتدا توجه می‌کنیم که بنا به (۹.۶) داریم

$$g(0) = 0 \qquad (۱۲.۶)$$

حال معادله‌ای برای $g'(t)$ استخراج می‌کنیم. در ادامه، همهٔ عبارات شامل α را در $(t^1, t$ مقداریابی کرده‌ایم و همهٔ عبارات شامل f_i را در $(t^1, t, 0, \cdots, \cdots, 0, \alpha(t^1, t, 0, \cdots, 0))$.
داریم

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2 \partial t^1} - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} \frac{\partial \alpha^k}{\partial t^2} \\
&\overset{(10.6)}{=} \frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} f_2^k \\
&\overset{(10.6)}{=} \frac{\partial f_2}{\partial t^1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x^k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t^1} - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} f_2^k \qquad (13.6) \\
&\overset{(11.6)}{=} \frac{\partial f_2}{\partial t^1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x^k} (g^k(t) + f_1^k) - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} f_2^k \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x^k} g^k(t)
\end{aligned}$$

اکنون، معادلهٔ (۵) یک معادله دیفرانسیل با جوابی منحصر بفرد برای هر شرط اولیه است. جواب با شرط اولیهٔ $g(0) = 0$ مطرح شده در (۴)، به وضوح به ازاء هر t ای $g(t) = 0$. پس (۳) درست است.

نشان دادن اینکه α عملاً بر $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \cdots \times (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ تعریف می‌شود و در $(*)$ صدق می‌کند، تمرینی ساده است. □

قضیهٔ ۲.۱.۶ مسألهٔ اینکه در چه صورت توزیع‌ها، منیفلد انتگرال دارند را به طوری اساسی برای ما حل می‌کند. شیوهٔ بحث ما و نهایتاً مسألهٔ مذکور، مطلبی اساسی در مورد قضایای در هندسهٔ دیفرانسیل می‌دهد:

بسیاری از قضایای اساسی در هندسه دیفرانسیل، به دو دسته قابل تقسیم هستند. نوع اول از قضایا به ما می‌گویند که چنانچه وضعیت مناسبی پیش بیاید (نظیر، یک توزیع دارای زیرمنیفلدهای گذرنده از هر نقطه‌ای باشد) آنگاه شرایط دیگر نیز برقرارند؛ این شرایط با برابر قرار دادن مشتقات جزئی مرکب حاصل می‌شوند، و به آنها «شرایط انتگرال‌پذیری» گفته می‌شود. نوع دوم از قضایا، دلیل این اسم‌گذاری را توجیه می‌کنند؛ به این ترتیب که نشان می‌دهند «شرایط انتگراپذیری» برای رسیدن به آن وضعیت مناسب کافی هستند.

در قسمت‌های بعدی بحث، که ما برای اول بار به این گونه بحث‌ها وارد می‌شویم، مطالب مهم‌تری در مورد قضایای هندسه دیفرانسیل را نشان می‌دهد:
همیشه طرق جالب و در عین حال غیر قابل اقماضی برای شرح شرایط انتگرال‌پذیری وجود دارد، به نحوی که در اثبات کفایت آنها، هیچ گونه ظهور مشتقات جزئی در بحث ما لازم نیست.

۲.۶ نظریهٔ موضعی: قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس

اگر $f : M \to N$ تابعی هموار باشد، و X و Y میدان‌های برداری هموار به ترتیب M و N باشند در صورتی می‌گوئیم X و Y $f-$ **مرتبط** هستند که به ازاء هر $p \in M$ ای $f_{*p}(X_p) = Y_{f(p)}$. اگر $g : N \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، آنگاه

$$Y_{f(p)}(g) = f_{*p}X_p(g) = X_p(g \circ f)$$

بنابراین

$$(Y_g) \circ f = X(f \circ g)$$

بالعکس، اگر این برای همهٔ توابع $g : N \to \mathbb{R}$ هموار برقرار باشد، آنگاه X و Y $f-$مرتبط هستند.

البته، ممکن است یک میدان برداری X ممکن است با هیچ میدان برداری دیگری Y $f-$مرتبط نباشد. به علاوه، لزومی ندارد که یک میدان برداری مفروض X بر M با یک میدان برداری دیگر بر M $f-$مرتبط باشد. حالت اخیر در یک حالت ممکن است محال باشد:

۱.۲.۶ گزاره. گیریم $f : M \to N$ تابعی هموار است، طوری که f ایمرشن می‌باشد. اگر Y میدان برداری هموار بر N با $Y_{f(p)} \in f_{p*}(T_pM)$ باشد، آنگاه یک میدان برداری هموار X بر M وجود دارد که با Y $f-$مرتبط است.

اثبات: روشن است که X_p را باید عنصر یکتایی از T_pM تعریف کنیم که $Y_{f(p)} \in f_{p*}X_p$. برای اثبات همواری X، از قضیهٔ ۳.۵.۲ (قسمت ۲) استفاده می‌کنیم: دستگاه مختصاتی (x, U) حول $p \in M$ و نیز (y, V) حول $f(p) \in N$ چنان وجود دارند که

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^n, 0, \cdots, 0)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که در این صورت، بایستی

$$f_{p*}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$$

بنابراین، اگر $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial y^i}$، که α^i ها توابع هموارند، آنگاه $X = \sum_{i=1}^{n} \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$، که در آن $\alpha^i \circ f = \beta^i$. این ایجاب می‌کند که توابع β^i نیز هموارند (مسألهٔ ۳). □

ذیلاً، مهمتریت خاصیت f−مرتبط بودن را مطرح می‌کنیم:

۲.۲.٦ گزاره. اگر X_i و Y_i f−مرتبط باشند، که $i = ۱, ۲$. در این صورت $[X_۱, X_۲]$ با $[Y_۱, Y_۲]$ f−مرتبط است.

اثبات: اگر $g : N \to \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه

$$(Y_i\, g) \circ f = X_i(g \circ f) \quad i = ۱, ۲ \qquad (۱۴.٦)$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \{[Y_۱, Y_۲]g\} \circ f &= \{Y_۱(Y_۲ g)\} \circ f - \{Y_۲(Y_۱ g)\} \circ f \\ &= X_۱([Y_۲ g] \circ f) - X_۲([Y_۱ g] \circ f) \end{aligned}$$

بنا بر (۱) و اینکه g را با $Y_۲ g$ و سپس $Y_۱ g$ عوض کنیم، آنگاه

$$\begin{aligned} &\overset{(۱۴.٦)}{=} X_۱(X_۲(g \circ f)) - X_۲(X_۱(g \circ f)) \\ &= [X_۱, X_۲](g \circ f) \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

حال یک توزیع k−بعدی Δ را در نظر می‌گیریم. در صورتی می‌گوئیم میدان برداری X به Δ **متعلق** است که به ازاء همهٔ p ها $X_p \in \Delta_p$. فرض کنید N یک منیفلد انتگرال Δ است، و $i : N \hookrightarrow M$ نگاشت احتوای آن می‌باشد. اگر X و Y دو میدان برداری متعلق به Δ باشند، آنگاه به ازاء همهٔ $p \in N$ ها عناصر منحصر بفرد $\tilde{X}_p, \tilde{Y}_p \in T_pN$ به گونه‌ای وجود دارند که

$$X_p = i_* \tilde{X}_p \qquad Y_p = i_* \tilde{Y}_p$$

به بیان دیگر، X و $\tilde{X}$ f−مرتبط Y و $\tilde{Y}$ نیز i−مرتبطتند. گزارهٔ ۱.۲.٦ نشان می‌دهد که $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ میدان‌های برداری هموار بر N هستند، و گزارهٔ ۲.۲.٦ نیز نشان می‌دهد که

$[\tilde{X},\tilde{Y}]$ و $[X,Y]$–iمرتبط می‌باشند. یعنی $i_*[\tilde{X},\tilde{Y}]_p = [X,Y]_p$. در اینجا $[\tilde{X},\tilde{Y}]_p \in T_P N$؛ بنابراین، در مجموع داریم $[X,Y]_p \in \Delta_p$. بالعکس اگر منیفلد انتگرالی برای Δ وجود داشته باشد که از هر p دلخواه بگذرد آنگاه $[X,Y]$ نیز به Δ متعلق است.

برای لحظه‌ای به توزیع Δ در $\mathbb{R}^۳$ که به صورت

$$\Delta_p = \left\{ r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + (rf(p)+sg(p))\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \quad : \quad r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

مطرح شد، برمی‌گردیم. میدان‌های برداری

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial z} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

به Δ متعلقند. به کمک فرمول در صفحهٔ ۱۲۸، ملاحظه می‌کنیم که

$$[X,Y] = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial y}{\partial z} - g\frac{\partial f}{\partial z} \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

این تنها وقتی به Δ متعلق است که عبارت پشت $\partial/\partial z$ صفر باشد، که این درست همان شرطی است بر Δ که طی آن Δ دارای منیفلد انتگرال عبور کننده از هر نقطهٔ دلخواه است.

درکل، در صورتی Δ را **انتگرال‌پذیر** گوئیم که به ازاء هر X و Y متعلق به Δ، $[X,Y]$ نیز به Δ متعلق باشد. این شرط را اغلب به سادگی می‌توان تحقیق نمود:

۳.۲.۶ گزاره. اگر $X_۱$، $\cdots$ و X_k توزیع Δ را در یک همسایگی U از p تولید کنند، آنگاه وقتی و تنها وقتی Δ بر U انتگرال‌پذیر است که $[X_i,X_j]$ ترکیبی خطی به شکل

$$[X_i,X_j] = \sum_{\alpha=۱}^{k} C_{ij}^{\alpha}\, X_\alpha$$

با ضرایب هموار C_{ij}^{α} باشد.

اثبات: اگر $X_۱$، $\cdots$ و X_k توزیع Δ را در همسایگی U از p تولید کنند، آنگاه وقتی و تنها وقتی Δ بر U انتگرال‌پذیر است که هر یک از $[X_i,X_j]$ ها ترکیبی خطی به شکل

$$[X_i,X_j] = \sum_{\alpha=۱}^{k} C_{ij}^{\alpha}\, X_\alpha$$

باشند، که C_{ij}^{α} ها توابعی هموارند.

اثبات: به وضوح، اگر Δ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه چنین توابعی وجود دارند، زیرا به ازاء هر $q \in U$ ای $[X_i, X_j]_q$ به Δ_q متعلق است و Δ_q توسط $X_\alpha(q)$ ها تولید می‌گردد. بالعکس، فرض کنیم، چنین توابعی وجود داشته باشند. اگر X و Y به Δ متعلق باشند، به وضوح می‌توانیم بنویسیم

$$X = \sum_{i=۱}^{k} f_i\, X_i \quad , \quad Y = \sum_{j=۱}^{k} g_j\, X_j$$

روشن است که برای اثبات تعلق $[X, Y]$ به Δ کافی است تعلق هر یک از $[f_i\, X_i, g_j\, X_j]$ را به طور جداگانه در نظر بگیریم. چون

$$[f\,X, g\,Y] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

پس، اگر X، Y و $[X, Y]$ به Δ متعلق باشند، آنگاه $[f\,X, g\,Y]$ نیز هست. □

اکنون آمادگی لازم برای طرح قضیهٔ اصلی را داریم. این قضیه با قضیهٔ ۲.۱.٦ معادل است؛ در واقع، قضیهٔ ۲.۱.٦ را از آن می‌توان استخراج کرد (مسألهٔ ۷). اما، اثبات آن اساساً متفاوت است.

۴.۲.٦ قضیه (قضیهٔ انتگرال‌پذیری فروبینیوس؛ نوع اول). گیریم Δ توزیع k–بعدی، انتگرال‌پذیر و هموار بر M است. به ازاء هر $p \in M$، یک دستگاه مختصاتی (x, U) با

$$x(p) = ۰ \quad , \quad x(U) = (-\varepsilon; \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

چنان وجود دارد که به ازاء هر $a^{k+۱}$، $\cdots$ و a^n یا $\left|a^i\right| < \varepsilon$، مجموعهٔ

$$\{q \in U\ ;\ x^{k+۱}(q) = a^{k+۱}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$$

یک منیفلد انتگرال Δ است. □

تحدید هر منیفلد انتگرال از Δ به U، به یکی از این مجموعه‌ها متعلق است.

اثبات: روشن است که می‌توانیم فرض کنیم در $\mathbb{R}^n$ هستیم و $p = ۰$. به علاوه، می‌توانیم فرض کنیم که $\Delta_۰ \subseteq T_۰\mathbb{R}^n$ توسط

$$\frac{\partial}{\partial t^۱}\Big|_۰, \cdots, \frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_۰$$

تولید می‌گردد. گیریم $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ تصویر بروی اولین k عامل است. در این صورت $\pi_* : \Delta_۰ \to T_۰\mathbb{R}^k$ ایزومورفیسم است. بنا به فرض پیوستگی، π_* به ازاء

q های نزدیک $\circ$ بر Δ_q یک به یک است. بنابراین، در نزدیکی $\circ$ بردارهای منحصر بفرد $X_1(q), \cdots, x_k(q) \in \Delta_q$ را طوری می‌توانیم انتخاب کنیم که

$$\pi_* X_i(q) = \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_{\pi(q)} \qquad i = 1, \cdots, k$$

در این صورت، میدان‌های برداری X_i (بر همسایگی‌ای از $\circ \in \mathbb{R}^n$) و $\partial\partial t^i$ (بر $\mathbb{R}^k$) با هم π–مرتبط هستند. بنا به گزارهٔ ۲.۲.۶، داریم

$$\pi_* X_i(q) = \partial = \left[\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}\right]_{\pi(q)} = \circ$$

اما، بنا به فرض $[X_i, X_j]_q \in \Delta_q$ و Δ بر Δ_q یک به یک است. بنابراین $[X_i, X_j] = \circ$ قضیهٔ ۱۰.۴.۵، یک دستگاه مختصاتی π چنان وجود دارد که

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, k$$

به وضوح، مجموعه‌های $\{q \in U \ ; \ x^{k+1}(q) = a^{k+1}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$ منیفلدهای انتگرال Δ هستند، زیرا بردارهای مماس به آنها توسط $\partial/\partial x^i = X_i$ که $i = 1, \cdots, k$، تولید می‌گردند.

اگر N منیفلد انتگرال همبندی از Δ باشد که به U تحدید شده است و $i : N \hookrightarrow U$ نگاشت احتوای آن باشد، دیفرانسیل‌های $d(x^m \circ i)$ با $k + 1 \leq m \leq n$ را در نظر می‌گیریم. به ازاء هر بردار مماس X_q از T_qN داریم

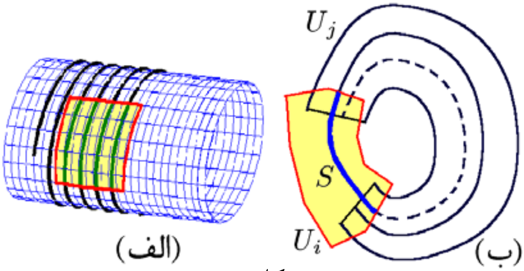
$$d(x^m \circ i)(X_q) = X_q(x^m \circ i) = i_* X_q(x^m) = \circ$$

زیرا $i_* X_q \in \Delta_q$، که Δ_q توسط $\partial/\partial x^i\Big|q$ های با $i = 1, \cdots, k$ تولید می‌گردد. بنابراین، $d(x^m \circ i) = \circ$، که به موجب آن $x^m \circ i$ بر منیفلد انتگرال همبند N ثابت است. □

۳.۶ نظریهٔ فراگیر

اصطلاحی به شرح ذیل را به منظور بیان موفقتر احکام فراگیر مطرح می‌کنیم: اگر M منیفلدی هموار باشد، زیر منیفلد k–بعدی (و اغلب غیر همبند) N از M را در صورتی فولیشن! (به معنی، بر گنبدی) از M گوئیم که هر نقطه از M در (مؤلفه‌ای همبندی از) N قرار داشته باشد، و گرد هر نقطه $p \in M$، یک دستگاه مختصات (x, U) با $x(U) = (-\varepsilon; \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon; \varepsilon)$ چنان یافت گردد که مؤلفه‌های همبندی $N \cap U$

مجموعه‌هایی به صورت در قسمت (الف) از شکل ۷.٦ باشند. هر مؤلفهٔ همبندی N را یک **برگ!** از برگنبدی N می‌گوئیم.



شکل ۷.٦

توجه شود که امکان دارد دو مؤلفهٔ همبندی مجزا از $N \cap U$ به یک برگ از برگنبدی متعلق باشند.

۱.۳.٦ قضیه. گیریم Δ یک توزیع انتگرال‌پذیر، هموار و $k-$ بعدی بر M است. در این صورت، M توسط منیفلدهای انتگرال Δ برگنبدی است. (هر مؤلفهٔ همبندی از آن را، منیفلد انتگرال ماکسیمال Δ می‌نامیم).

اثبات: با استفاده از قضیهٔ ؟؟ ملاحظه می‌گردد که M را با دنباله‌ای از دستگاه‌های مختصاتی (x_i, U_i) صادق در شرایط قضیهٔ ۴.۲.٦ می‌توانیم پوشش دهیم. در مورد هر چنین دستگاه مختصاتی، (x, U)، هر یک از مجموعه‌های به شکل $\{q \in U \ ; \ x^{k+1}(q) = a^{k+1}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$ را یک (برش) **باریکه!** از U می‌نامیم. توجه شود که احتمال دارد باریکه‌ای از U_i مثل S، مجموعهٔ U_j را در بیش از یک باریکه قطع کند. اما $S \cap U_j$ حداکثر به تعدادی شمارا مؤلفهٔ همبندی دارد، و هر مؤلفهٔ همبندی از آن در باریکه‌ای به خصوص از U_j (بنا به قضیهٔ ۴.۲.٦) قرار دارد. در نتیجه، $S \cap U_j$ در حداکثر به تعدادی شمارا باریکه از U_j قرار دارد (به قسمت (ب) از شکل ۷.٦ توجه شود).

به ازاء هر $p \in M$ مفروض، دستگاهی مختصاتی $(x_\circ, U_\circ)$ با $p \in U_\circ$ انتخاب نموده و فرض می‌کنیم $S_\circ$ باریکه‌ای از $U_\circ$ باشد که p را در بردارد. باریکهٔ S از U_i را در صورتی **متصل** به p گوئیم که دنباله‌ای نظیر $\circ = i_\circ, i, \cdots i_\ell = ۱$ و متناظر به آنها دنباله‌ای از باریکه‌های با $S_\circ = S_{i_\circ}, S_{i_۱}, \cdots S_{i_\ell} = S$ به گونه‌ای یافت گردد که

$$S_{i_\alpha} \cap S_{i_{\alpha+۱}} \neq \phi \qquad \alpha = \circ, \cdots, \ell - ۱$$

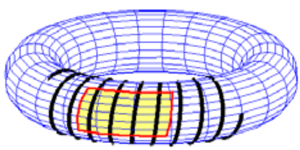
چون حداکثر به تعدادی شمارا دنباله‌های از باریکه‌های مناسب نظیر به هر دنبالهٔ مفروض $i_\circ, \cdots, i_\ell$ وجود دارد و نیز حداکثر به تعدادی شمارا از چنین دنباله‌های اعدادی وجود

دارد، بنابراین، حداکثر تعدادی شمارا با باریکهٔ متصل به p وجود دارد. اکنون، به کمک مسألهٔ ۳—۱ ملاحظه می‌کنیم، که اجتماع همهٔ چنین باریکه‌هایی، زیر منیفلدی از M است. به ازاء هر $p \neq q$، یا اجتماع‌های نظیر مجزا هستند و یا اینکه کاملاً برابرند. پس چنین اجتماع‌هایی کاملاً از هم مجزا هستند. نتیجتاً، M با اجتماعی مجزا از همهٔ چنین زیر منیفلدهایی برگنبدی شده است؛ روشن است که این اجتماع مجزا، منیفلدی انتگرال از Δ می‌باشد. $\square$

۲.۳.۶ یادداشت. با توجه به اینکه اجتماع منیفلدهای انتگرال، منیفلد انتگرال است، می‌توان در صورت قضیهٔ ؟؟ به جای «منیفلدهای انتگرال» از منیفلد انتگرال سخن گفت.

چنانچه منیفلدهای متر ناپذیر را مجاز بدانیم، اثبات ساده‌تر هم می‌شود، زیرا لازم نیست اجتماعی شمارا از دستگاه‌های مختصاتی برای هر برگ بیابیم، و کافی است توپولوژی برگنبدی را به صورت کوچکترین توپولوژی‌ای که نسبن به آن همهٔ برگ‌ها بازند، تعریف کنیم. البته، در این حالت مطالب بعدی درست نیست. در واقع، در ضمیمهٔ الف، منیفلد متر ناپذیری مطرح شده است توسط زیر منیفلد همبند با بعد کمتر برگنبدی شده است.

توجه شود که اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی از نوع توصیف شده در اثبات قضیه باشد، آنگاه ممکن است بی‌نهایت تعداد از باریکه‌های U به یک برگ واحد متعلق باشند. البته، این تعداد حداکثر شمارا است؛ در غیر این صورت، برگ اجتماعی ناشمارا از مجموعه‌های باز مجزا خواهد شد، که غیر ممکن است. این امر امکان استفاده از گزاره‌ای از فصل ۲ را به ما می‌دهد.

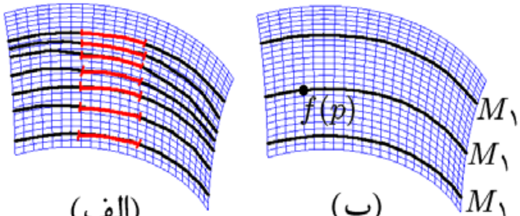


شکل ۸.۶

۳.۳.۶ قضیه. گیریم M منیفلدی هموار و M_1 یک برگ از برگنبدی مشخص شده توسط توزیع Δ باشد. گیریم P منیفلد هموار دیگری است و $f : P \to M$ تابعی هموار با $f(p) \subseteq M_1$ می‌باشد. در این صورت f به عنوان نگاشتی از P بتوی M_1 هموار است.

اثبات: بر طبق گزارهٔ ۴.۵.۲ کافی است نشان دهیم که f به عنوان نگاشتی بتوی $M_۱$ پیوسته است. به ازاء هر $p \in P$ مفروض، دستگاهی مختصاتی (x, U) حول $f(p)$ چنان انتخاب می‌کنیم که باریکه‌های

$$\{q \in U \ ; \ x^{k+۱}(q) = a^{k+۱}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$$



شکل ۹.۶

منیفلدهای انتگرال Δ باشند. اکنون، f به عنوان نگاشتی بتوی M پیوسته است، و بنابراین f همسایگی W ای از p را بتوی U می‌نگارد؛ W را همبند می‌توانیم بگیریم. به ازاء $k + ۱ \leq i \leq n$، اگر به ازاء یک $p' \in W$ ای $x^i(f(p')) \neq a^i$، آنگاه $x^i \circ f$ بایستی تمام مقادیر بین a^i و $x^i(f(p'))$ را (بنا به پیوستگی) اختیار کند. این بدان معنی است که $f(W)$ به تعداد ناشمارا باریکه در بردارد که با این واقعیت که $f(W) \subseteq M_۱$ در تضاد می‌باشد. نتیجتاً به ازاء هر $p' \in W$ ای $x^i(f(p')) = a^i$. به بیان دیگر، $f(W)$ در باریکه‌ای به خصوص از U قرار دارد که p را شامل است. این روشن می‌سازد که f به عنوان نگاشتی بتوی $M_۱$ پیوسته می‌باشد. $\square$

۴.۶ تمرینات

۱. الف) گیریم $\zeta = \pi : E \to B$ یک کلاف n–صفحه‌ای است، و $\zeta' = \pi' : E' \to B$ یک کلاف k–صفحه‌ای است، طوری که $E' \subset E$. اگر $i : E' \hookrightarrow E$ نگاشت احتوی بوده و $Id_B : B \to B$ نگاشت همانی باشد، در صورتی ζ' را **زیر کلاف** ζ گوئیم که (i, Id_B) نگاشت کلافی باشد. نشان دهید که هر توزیع k–بعدی بر M درست یک زیر کلاف از TM می‌باشد.

ب) در مورد کلاف‌های هموار ζ و ζ' روی منیفلد هموار M، زیر کلاف هموار تعریف نموده و نشان دهید که هر توزیع k–بعدی وقتی و تنها وقتی هموار است که زیر کلافی هموار باشد.

۲. لف) در مورد اثبات قضیهٔ ۲.۱.۶، ادعای در مورد با اندازهٔ کافی کوچک انتخاب کردن $\varepsilon_۱$ را بررسی کنید.

ب) اثبات قسمت یکتایی قضیه را تکمیل کنید.

۳. الف) در اثبات گزارهٔ ۱.۲.۶ نشان دهید که $f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$.

ب) اثبات گزارهٔ ۱.۲.۶ را تکمیل کرده و نشان دهید که اگر $Y = \sum_{i=۱}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial y^i}$، آنگاه $X = \sum_{i=۱}^{n} \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ که $\alpha^i \circ f = \beta^i$ و توابع β^i هموارند.

۴. در اثبات گزارهٔ ۳.۲.۶ نشان دهید که توابع C_{ij}^{α} همگی هموارند.

۵. گیریم $\Delta_۱$، $\cdots$ و Δ_h توزیع‌های انتگرال پذیر بر M با بعد به ترتیب $d_۱$، $\cdots$ و d_h هستند. فرض کنید که به ازاء هر $p \in M$ ای $T_pM = (\Delta_۱) \oplus \cdots \oplus (\Delta_h)_p$. نشان دهید که در گرد هر نقطه‌ای یک دستگاه مختصاتی (x, U) طوری وجود دارد که $\Delta_۱$ توسط $\frac{\partial}{\partial x^۱}$، $\cdots$ و $\frac{\partial}{\partial d_۱}$ تولید می‌گردد و $\cdots$.

۶. با در نظر گرفتن توزیع Δ در $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (با مختصات t و x) با ضابطهٔ

$$\Delta_p = \left\{ \sum_{i=۱}^{m} r^i \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_p + \sum_{k=۱}^{m} \Big(\sum_{i=۱}^{m} r^i f_i^k(p) \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \quad : \quad r \in \mathbb{R}^m \right\}$$

قضیهٔ ۲.۱.۶ را از ۴.۲.۶ نتیجه بگیرید. توجه کنید که حتی وقتی f_j به x بستگی ندارد، یعنی معادلات به شکل

$$\partial\alpha/\partial t^j(t) = f_j(t)$$

و با شرایط انتگرال‌پذیری $\frac{\partial f_i}{\partial t^j} = \frac{\partial f_j}{\partial t^i}$ هستند، هیچگاه در $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ کار نمی‌کنیم، بلکه در $\mathbb{R}^m$ انجام می‌دهیم. این با ترفند استفاده از متغیرهای مستقل جدید مربوط است.

۷. این مسأله روشی دیگر برای اثبات قضیهٔ ۲.۱.۶ به کنمک طرح معادلات دیفرانسیل با مشتقلت جزئی و تبدیل آن‌ها به معادلات معمولی در امتداد خطوط گذرنده از مبداء، فراهم می‌کند. تکنیک مشابهی در بخش ۷ از فصل ۲ بود که بسیار بااهمیت است.

الف) اگر به ازاء تابعی $\beta : [0;\varepsilon) \times W \to V$ فرض شود $\alpha(ut) = \beta(u,t)$، نشان دهید β بایستی در دستگاه

$$\frac{\partial \beta}{\partial u}(u,t) = \sum_{j=1}^{m} t^j . f_j(ut, \beta(u,t)) \qquad \beta(0,t) = x$$

صدق کند. می‌دانیم که چنین معادلاتی را می‌توان حل کرد (چون معادله به پارامتر $t \in \mathbb{R}^m$ بستگی دارد، به مسألهٔ ۵—۵ نیاز داریم). لازم است بررسی شود که ε ای چنان می‌توان انتخاب نمود که برای همهٔ $t \in W$ ها کار کند.

ب) نشان دهید $\beta(u,vt) = \beta(uv,t)$. (نشان دهید که هر دو تابع در یک معادله دیفرانسیل به عنوان توابعی از u صدق می‌کنند، که شرط آغازی هر دو فیزیکی است.) با کشیدن W می‌توانیم فرض کنیم که $\varepsilon = 1$.

ج) نتیجه بگیرید که

$$\frac{\partial \beta}{\partial t^j}(v,t) = v . \frac{\partial \beta}{\partial t^i}(1, vt)$$

د) به کمک شرط انتگرال‌پذیری بر f نشان دهید که $\frac{\partial \beta}{\partial t^j}(v,t)$ و $v.f_j(vt, \beta(v,t))$ به عنوان توابعی از v در معادله دیفرانسیل واحدی صدق می‌کنند. از (ج) استفاده کرده و نشان دهید که این دو تابع یکی‌اند.

هـ) تعریف کنید $\alpha(t) = \beta(1,t)$. توجه شود که $\alpha(vt) = \beta(v,t)$. نشان دهید α در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کند.

۸. این مسأله مطالبی در خصوص آنالیز مختلط را آموزش می‌دهد. گیریم $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ تحلیلی مختلط است. اگر توابع مختصاتی در $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ را به صورت $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ نشان دهیم، آنگاه $f = u, iv$ در معادلات کوشی—ریمان صدق می‌کند

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_i} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2$$

به کمک قضیهٔ ۲.۱.۶ ثابت کنید که معادلات

$$\frac{\partial \alpha^1}{\partial x} = u(x, y, \alpha^1(x,y), \alpha^2(x,y)) = \frac{\partial \alpha^2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial x} = v(x, y, \alpha^1(x,y), \alpha^2(x,y)) = -\frac{\partial \alpha^1}{\partial y}$$

را در همسایگی‌ای از $0 \in \mathcal{C}$ (یا هر نقطهٔ دیگر $z_0 \in \mathcal{C}$) می‌توان حل نمود، و نتیجه بگیرید که معادله دیفرانسیل

$$\varphi'(z) = f(z, \varphi(z))$$

(که یعنی مشتق مختلط) در همسایگی ای از z_0 جواب دارد، که شرط اولیهٔ $\varphi(z_0) = w_0$ دلخواه می‌باشد.

فصل ۷

فرم دیفرانسیل

مجدداً به میدان‌های تانسوری توجه نومده، و به نوع به خصوصی از آنها میپردازیم. در این راستا به مقدمات جبری بیشتری نیاز داریم.

۱.۷ توابع تناوبی

گیریم V یک فضای برداری $n-$بعدی روی $\mathbb{R}$ است. عنصر $t \in \mathcal{T}^k(V)$ را در صورتی **تناوبی** گوئیم که اگر به ازاء یک i و j با $i \neq j$ داشته باشیم $v_i = v_j$، آنگاه

$$T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = 0$$

اگر T تناوبی باشد، آنگاه به ازاء هر v_1، $\cdots$ و v_k ای

$$\begin{aligned}
0 &= (v_1, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_k) \\
&= T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) \\
&\quad + T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) \\
&= 0 + T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) + T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + 0
\end{aligned}$$

بنابراین، T **متقارن کج** است:

$$T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$$

البته، اگر T متقارن کج باشد، آنگاه T نوسانی نیز خواهد بود. [این مطلب در حالت خاصی از یک فضای برداری روی میدانی که $۱ + ۱ = ۰$، این مطلب درست نیست؛ در این حالت متقارن بودن به معنی متقارن کج بودن است، و شرط نوسانی به معنای آن می‌افزاید.]

مجموعه‌ها همهٔ $T \in \mathcal{T}^k(V)$ های نوسانی را با نماد $\Omega^k(V)$ نشان می‌دهیم. روشن است که $\Omega^k(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ زیرفضایی از $\mathcal{T}^k(V)$ می‌باشد. به علاوه، اگر $f : V \to W$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه $f^* : \mathcal{T}^k(W) \to \mathcal{T}^k(V)$ این زیر فضاها را حفظ می‌کند؛ یعنی، $f^* : \Omega^k(W) \to \Omega^k(V)$. توجه کنید که، $\Omega^۱(V) = \mathcal{T}^۱(V) = V^*$، و لذا $\Omega^۱(V)$ با بعد n است. به علاوه، مرسوم است فرض شود که $\Omega^۰(V) = \mathcal{T}^۰(V)$. در حال حاضر، روشن است که بعد $\Omega^k(V)$ برای $k\rangle ۱$ خوش‌تعریف است، در حالی که مقدار آنرا نمی‌دانیم. معروفترین تانسور نوسانی، تابع دترمینان $\det \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R})^n$ می‌باشد، مشروط به آنکه آنرا به صورت تابعی از n سطر یک ماتریس تعریف گردد. بزودی خواهیم دید که این تابع، به تعبیری، کلی‌ترین تابع نوسانی است. در بسیاری از کوششها در طرح مفهوم دترمینان، اولین قدم این است که نشان داده می‌شود هر دو تابع $n-$خطی نوسانی بر $\mathbb{R}^n$، مضربی از همبند؛ به بیان دیگر $\dim \Omega^n(\mathbb{R}^n) \leq ۱$. سپس با ساخت عملی تابع غیر صفر $\det$ نشان داده می‌شود که $\Omega^n(\mathbb{R})^n = ۱$. (البته، اگر V فضای برداری با بعد n دلخواه باشد، آنگاه باز هم $\dim \Omega^n(V) = ۱$.) معمولاً، ساخت $\det$ با فرمول صریحی است که حالت خاصی از روش شروح در ذیل است.

گیریم S_k مجموعهٔ همهٔ جایگشت‌های $\{۱, \cdots, k\}$ است؛ هر عضو از $u \in S_k$ تابعی است دوسویی $u(i) \mapsto i$. اگر $(v_۱, \cdots, v_k)$ یک $k-$تائی دلخواه (از هر نوع اشیائی) باشد، تعریف می‌کنیم

$$\sigma.(v_۱, \cdots, v_k) = (v_{\sigma(۱)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

این تعریف، ابهامی در ساختش دارد. فی‌المثل، اولین درآیهٔ سمت راست، $\sigma(۱)$ امین عنصر از v_i ها است. چنانچه v ها را به کمک اندیس‌های ۱، $\cdots$ و k مرتب نشده داشته باشیم، سخنگفتن از $\sigma(۱)$ بی‌معنی است. یک راه برای توصیف $\sigma.(v_۳, v_۲, v_۱, \cdots)$ چنین است؛ فرض کنیم $w_۱ = v_۳$، $w_۲ = v_۲$، $w_۳ = v_۱$ و $\cdots$. در ادامه، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\sigma.(\rho.(v_۱, \cdots, v_k)) &= \sigma.(w_۱, \cdots, w_k)\\ &= (v_{\rho(\sigma(۱))}, \cdots, v_{\rho(\sigma(k))}) \quad (\text{زیرا } w_\alpha = v_{\rho(\alpha)})\end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\sigma.(\rho.(v_۱, \cdots, v_k)) = (\rho\sigma).(v_۱, \cdots, v_k) \qquad (۱.۷)$$

حال، به ازاء هر $T \in \mathcal{T}^k(v)$ مفروض، «نوسان T» را به صورت

$$\text{Alt } T := \frac{۱}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma . T \circ \sigma$$

تعریف می‌کنیم. به بیان دیگر

$$\text{Alt } T(v_۱, \cdots, v_k) = \frac{۱}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma . T(v_{\sigma(۱)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

که $\operatorname{sgn} \sigma$ برابر $+۱$ است، اگر σ جایگشت زوج باشد و در صورت فرد بودن σ، داریم $\operatorname{sgn} \sigma = -۱$.

۱.۱.۷ گزاره. ۱) اگر $T \in \mathcal{T}^k(V)$، آنگاه $\text{Alt}(T) \in \Omega^k(V)$.

۲) اگر $\omega \in \Omega^k(V)$، آنگاه $\text{Alt}\, \omega = \omega$.

۳) اگر $T \in \mathcal{T}^k(V)$، آنگاه $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$.

اثبات: بر عهدهٔ خواننده (یا به صفحات ۷۸ و ۷۹ از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بر خمینه‌ها توجه شود). □

۲.۷ ضرب گوه‌ای

حال، به ازاء $\omega \in \Omega(V)$ و $\eta \in \Omega^\ell(V)$، عنصر $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(V)$ را به صورت

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)^i}{k!\ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

تعریف می‌کنیم. ضریبی که اضافه کرده‌ایم، احتمالاً بی‌مورد به نظر می‌رسد. اما بعداً سودبخشی آن نشان داده خواهد شد.

روشن است که

۱) ضرب گوه‌ای $\wedge$ دو خطی است:

$$(\omega_۱ + \omega_۲) \wedge \eta = \omega_۱ \wedge \eta + \omega_۲ \wedge \eta$$

$$\omega \wedge (\eta_۱ + \eta_۲) = \omega \wedge \eta_۱ + \omega \wedge \eta_۲$$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$$

۲) $f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta$.

۳) ضرب گوه‌ای $\wedge$ پاد یا ناجابجایی است: $\omega\wedge\eta=(-۱)^{k\ell}\eta=(-۱)^{k\ell}\eta\wedge\omega$.
به ویژه اگر k فرد باشد، آنگاه $\omega\wedge\omega=۰$.

به علاوه، شرکت‌پذیری ضرب گوه‌ای در حکم زیر اثبات می‌گردد.

۱.۲.۷ قضیه. ۱) $S\in\mathcal{T}^k(V)$ و $T\in\mathcal{T}^\ell(V)$ و $\mathrm{Alt}(S)=۰$، آنگاه

$$\mathrm{Alt}(S\otimes T)=\mathrm{Alt}(T\otimes S)=۰$$

۲) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))$

۳) اگر $\omega\in\Omega^k(V)$، $\eta\in\Omega^\ell(V)$ و $\theta\in\Omega^m(V)$، آنگاه

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\omega\wedge(\eta\wedge\theta)=\frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!}\,\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

اثبات: ۱) داریم

$$\begin{aligned}(k+\ell)!\,\mathrm{Alt}(S\otimes T)(v_۱,\cdots,v_{k+\ell}) &=\\ &= \sum_{J\in S_{k+\ell}}\operatorname{sgn}\sigma.(S\otimes T).(\sigma.(v_۱,\cdots,v_{k+\ell}))\\ &= \sum_{J\in S_{k+\ell}}\operatorname{sgn}\sigma.S(v\sigma(۱),\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $G\subset S_{k+۱}$ مجموعهٔ همهٔ σ هایی است که $k+۱$، $\cdots$ و $k+\ell$ را ثابت نگاه می‌دارد. در این صورت

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in G}\operatorname{sgn}\sigma.S(v_{\sigma(۱)},\cdots,v_{\sigma(k)}).T(v_{\sigma(k+۱)},\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})\\ &\Big\{\sum_{\sigma'\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma' S(v_{\sigma'(۱)},\cdots,v_{\sigma'(k)})\Big\}.T(v_{k+۱},\cdots,v_{k+\ell})=۰\end{aligned}$$

اکنون، فرض کنیم $\sigma_\circ\in G$. گیریم $\sigma_\circ G=\{\sigma_\circ\sigma' : \sigma'\in G\}$، در این صورت بنابه (۱.۷) داریم

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in G}\operatorname{sgn}\sigma.S(v_{\sigma(۱)},\cdots,v_{\sigma(k)}).T(v_{\sigma(k+۱)},\cdots,v_{\sigma(k+\ell)})\\ &\Big\{\sum_{\sigma'\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma'.S(v_{\sigma'(۱)},\cdots,v_{\sigma'(k)})\Big\}.T(v_{k+۱},\cdots,v_{k+\ell})\end{aligned}$$

پس کافی است نشان دهیم که این عبارت صفر است (زیرا $\sigma_\circ.(v_۱,\cdots,v_{k+۱})$ یک $(k+\ell)$ تایی دیگر از بردارها است). توجه شود که اگر $\sigma\in G\cap\sigma_\circ G$ آنگاه به ازاء یک $\sigma'\in G$ ای $\sigma=\sigma_\circ\sigma'$ و بنابراین $\sigma_\circ=\sigma(\sigma')^{-۱}\in G$ که تناقض است. سپس، در مجموع $G\cap\sigma_\circ G=\emptyset$. به این جهت، می‌توانیم $S_{k+\ell}$ را به دو زیر مجموعهٔ مجزا طوری تقسیم کنیم که مجموع بر هر یک از آنها صفر است. رابطهٔ $\mathrm{Alt}(T\otimes S)$ به صورت مشابه قابل اثبات است.

۲) به وضوح

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)=\circ$$

و لذا از (۱) داریم

$$\begin{aligned}\circ &= \mathrm{Alt}(\omega\otimes[\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta])\\ &= \mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))-\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)\end{aligned}$$

تساوی دیگر، به صورت مشابه قابل اثبات است.

۳) داریم

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\eta)\wedge\theta &= \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\mathrm{Alt}((\omega\wedge\eta)\otimes\theta)\\ &= \frac{(k+\ell+m)!}{(k+\ell)!m!}\frac{(k+\ell!)}{k!\ell!}\mathrm{Alt}(\omega\wedge\eta\otimes\theta)\end{aligned}$$

تساوی بعدی، به صورت مشابه قابل اثبات است. □

توجه شود که بر اساس (۲) حتی اگر عامل $(k+\ell)!/k!\ell!$ در تعریف Alt حذف گردد، همچنان ضرب گوه‌ای $\wedge$ شرکت‌پذیر است. از سوی دیگر، عامل $۱/k!$ در تعریف Alt اساسی است، زیرا بدون آن، رابطهٔ $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}\,T)=\mathrm{Alt}\,T$ صحیح نیست، و در نتیجه رابطهٔ اول در اثبات (۲) غلط می‌شود. [چنانچه $\overline{\mathrm{Alt}}$ را همان Alt ولی بدون عامل $۱/k!$ تعریف کنیم، بایستی $\wedge$ را به شکل

$$\omega\wedge\eta:=\frac{۱}{k!\ell!}\overline{\mathrm{Alt}}(\omega\otimes\eta)$$

تعریف کنیم. این بحث حتی در میدان‌های با مشخصهٔ متناهی نیز درست و با معنی است، چرا که هر یک از جملات $\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)(v_۱,\cdots,v_{k\ell})$ به تعداد $k!\ell!$ مرتبه تکرار

می‌شوند (زیرا ω و η نوسانی‌اند)، و $۱/k!\ell!$ را به این معنی می‌توان تعبیر نمود که این $k!\ell!$ شیء را یک عنصر تصور می‌کنیم.]

دلیل حضور عامل $(k+\ell)!/k!\ell!$ در تعریف $\wedge$ چنین است: اگر $v_۱$، $\cdots$ و v_n وایه‌ای برای V باشند و $\varphi_۱$، $\cdots$ و φ_n پایهٔ دوگان نظیر به آنها، آنگاه

$$\begin{aligned}\varphi_۱\wedge\cdots\wedge\varphi_n &= \frac{(۱+\cdots+۱)!}{۱!۱!\cdots۱!}\,\mathrm{Alt}(\varphi_۱\wedge\cdots\wedge\varphi_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma.(\varphi_۱\otimes\cdots\otimes\varphi_n)\circ\sigma\end{aligned}$$

به ویژه

$$(\varphi_۱\wedge\cdots\wedge\varphi_n)(v_۱,\cdots,v_n)=۱$$

(پس، اگر $v_۱$، $\cdots$ و v_n پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\varphi_۱\wedge\cdots\wedge\varphi_n=\det$.)

به صورت ذیل، پایه‌ای برای $\Omega^k(V)$ می‌توان ساخت.

۲.۲.۷ قضیه. مجموعهٔ همهٔ $\varphi_{i_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k}$ های با $۱\le i_۱<\cdots<i_k\le n$، پایه‌ای برای $\Omega^k(V)$ تشکیل می‌دهد، که در نتیجه، با بعد $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است. (به خصوص، به ازاء $k\rangle n$ ها $\Omega^k(V)=\{۰\}$.)

اثبات: اگر $\omega\in\Omega^k(V)\subseteq\mathcal{T}^k(V)$، می‌توانیم بنویسیم

$$\omega=\sum_{i_۱,\cdots,i_k}u_{i_۱\cdots i_k}\,\varphi_{i_۱}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k}$$

و در نتیجه

$$\omega=\mathrm{Alt}(\omega)=\sum_{i_۱,\cdots,i_k}u_{i_۱\cdots i_k}\,\mathrm{Alt}(\varphi_{i_۱}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k})$$

هر $\mathrm{Alt}(\varphi_{i_۱}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k})$ یا صفر است و یا اینکه به ازاء $j_۱<\cdots<j_k$ برابر $\pm(۱/k!)\varphi_{j_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_k}$ می‌باشد. در نتیجه عناصر به شکل $\varphi_{j_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_k}$ که $j_۱<\cdots<j_k$ کل $\Omega^k(V)$ را تولید می‌کنند. اگر

$$۰=\sum_{i_۱<\cdots<i_k}a_{i_۱,\cdots,i_k}\,\varphi_{j_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_k}$$

آنگاه با اعمال دو طرف بر $(v_{i_۱},\cdots,v_{i_k})$ مشاهده می‌گردد که $a_{i_۱,\cdots,i_k}=۰$. □

۳.۲.۷ نتیجه. اگر $\omega_1, \cdots \omega_k \in \Omega^1(V)$، آنگاه شرط لازم و کافی برای استقلال خطی ω_1، $\cdots$ و ω_k این است که $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \neq 0$.

اثبات: اگر ω_1، $\cdots$ و ω_k مستقل خطی باشند، آنگاه پایه‌ای v_1، $\cdots$، v_k، $\cdots$ و v_n برای V وجود دارد که بردارهای پایه‌ای دوگان φ_1، $\cdots$، φ_k، $\cdots$ و φ_n آن به ازاء $1 \leq i \leq k$ در شرط $\varphi_i = \omega_i$ صدق می‌کنند. بنابراین $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ عنصری از یک پایه برای $\Omega^k(V)$ است و لذا صفر نیست.

از سوی دیگر، اگر $\omega_1 = a_2\omega_2 + \cdots + a_k\omega_k$، آنگاه

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k = (a_2\omega_2 + \cdots + a_k\omega_k) \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0$$

و برهان تمام است. $\square$

به جهت خلاصه‌تر کردن نمادگذاری‌ها، مرسوم است فرض شود I یک اندیس چندگانه $(i_1, \cdots, i_k)$ است و φ_I نمایشگر $\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}$ است. در این صورت، هر عضو از $\Omega^k(V)$ به صورت یکتا به شکل $\sum_I a_I \varphi_I$ قابل بیان است. توجه شود که بر طبق قضیهٔ ۲.۲.۷، هر $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ ای به صورت ترکیب خطی توابع به شکل

$$(v_1, \cdots, v_k) \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \text{ از ماتریس } k \times k \text{ مینور }$$

قابل بیان است. ذیلاً قضیه‌ای ساده‌تر، قبل از پرداختن به حالت منیفلدها، مطرح می‌کنیم.

۴.۲.۷ قضیه. گیریم v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V است و $\omega \in \Omega^k(V)$. به علاوه فرض کنیم

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_j \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

در این صورت

$$\omega(\omega_1, \cdots, \omega_n) = \det(\alpha_{ij}).\omega(v_1, \cdots, v_n)$$

اثبات: عنصر $\eta \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ را به صورت

$$\eta((a_{11}, \cdots, a_{n1}), \cdots, (a_{n1}, \cdots, a_{nn})) = \omega \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn}\, v_j$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت روشن است که $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$، و لذا به ازاء یک $c \in \mathbb{R}$ ای $\eta = c.\det$، و به علاوه $c = \eta(e_۱, \cdots, e_n) = \omega(v_۱, \cdots, v_n)$ $\square$

۵.۲.۷ نتیجه. اگر V n–بعدی بودی و $\Omega^n(V) \neq ۰$، در این صورت جهتی منحصر بفرد μ برای V چنان وجود دارد که

$$[v_۱, \cdots, v_n] = \mu \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \omega(v_۱, \cdots, v_n) > ۰$$

اکنون ساخت جبری جدید را به حالت کلاف‌های برداری می‌توانیم تعمیم بدهیم. اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری باشد، با تعویض هر تار $\pi^{-۱}(p)$ با $\Omega^k(\pi^{-۱}(p))$ به یک کلاف جدید $\Omega^k(\xi)$ می‌رسیم. برش ω از $\Omega^k(\xi)$، تابعی است چون ω که به ازاء هر $p \in B$ ای $\omega(p) \in \Omega^k(\pi^{-۱}(p))$. اگر η برشی از $\Omega^\ell(\xi)$ باشد، برش $\eta \wedge \omega$ از $\Omega^{k+\ell}(\xi)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p) \in \Omega^{k+\ell}(\pi^{-۱}(p))$$

۳.۷ فرم

برشهای $\Omega^k(TM)$، که دقیقاً عبارتند از میدان‌های برداری کواریان نوسانی از مرتبهٔ k ام، را k–فرم بر M می‌نامیم. ۱–فرم درست به معنی یک میدان برداری کواریان است. چون به وضوح $\Omega^k(TM)$ کلاف برداری هموار بر M است، از فرم‌های هموار می‌توان سخن گفت؛ از این پس، همهٔ فرم‌ها را هموار می‌دانیم مگر آنکه خلافش تصریح شود. یادآور می‌شویم که تانسورهای کواریان به شکل کنتراواریان عمل می‌کنند: اگر $f : M \to N$ هموار بوده و ω یک k–فرم بر N باشد، آنگاه $f^*\omega$ یک k–فرم بر M است. عناصر $\omega_۱ + \omega_۲$ و $w \wedge \eta$ را نیز می‌توان تعریف نمود. خواص ذیل از k–فرم‌ها را به سادگی از خواص نظیر بر $\Omega^k(V)$ می‌توان استنتاج نمود:

۱) $(\omega_۱ + \omega_۲) \wedge \eta = \omega_۱ \wedge \eta + \omega_۲ \wedge \eta$

۲) $\omega \wedge (\eta_۱ + \eta_۲) = \omega \wedge \eta_۱ + \omega \wedge \eta_۲$

۳) $\omega \wedge \eta = (-۱)^{k\ell} \eta \wedge \omega$

۴) $f\omega \wedge \eta = \omega \wedge f\eta = f(\omega \wedge \eta)$

۵) $f^*\omega \wedge f^*\eta$

اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه $dx^i(p)$ ها پایه‌ای برای T^*M تشکیل می‌دهند، و لذا $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(p)$ ها که $i_1 < \cdots < i_k$، پایه‌ای برای $\Omega^k(p)$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، هر k–فرم ω را به صورت یکتا به شکل

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \cdots, i_k} \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

می‌توان نوشت. یا چنانچه $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ را با ازاء اندیس چندگانهٔ $I = (i_1, \cdots, i_k)$ به شکل dx^I بنویسیم،نگاه $\omega = \sum_I \omega_I \, dx^I$.

مسألهٔ یافتن رابطهٔ بین ω_I و ω'_I ای که در شرط

$$\omega = \sum_I \omega_I \, dx^I = \sum_I \omega'_I \, dy^I$$

صدق می‌کنند، به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده (مسألهٔ ۱۶). اما در اینجا حالت خاصی از آنرا مطرح می‌کنیم.

۱.۳.۷ قضیه. اگر $f : M \to N$ تابعی هموار بین n–منیفلدها باشد، (x, U) دستگاهی مختصاتی حول $p \in M$ و (y, V) دستگاهی مختصاتی حول $q = f(p) \in N$ باشد، در این صورت

$$f^*(g\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (g \circ f). \det\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right) dx^I \wedge \cdots \wedge dx^n$$

اثبات: اگر $f : M \to N$، کافی است نشان دهیم

$$f^*(g\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = \det\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

حال، به کمک مسألهٔ ۴ از فصل ۱ داریم

$$\begin{aligned}
& f^*(g\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right) = \\
= \quad & (dy^1(q) \wedge \cdots \wedge dy^n(q))(p)\left(f_*\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, f_*\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right) \\
= \quad & (dy^1(q) \wedge \cdots \wedge dy^n(q))\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^1}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_q, \cdots\right. \\
& \qquad \left. \cdots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^n}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_q\right) \\
\overset{(5)}{=} \quad & \det\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)\right)
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۲.۳.۷ نتیجه. اگر (x,U) و (y,V) دو دستگاه مختصات بر M باشند و

$$g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=h\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

آنگاه $h=g.\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$.

اثبات: با فرض همانی بودن f، قضیه را به کار ببندید. □

این نتیجه نشان می‌دهد که n−فرم‌ها، اشیاء هندسی نظیر به «چگال‌های اسکالر زوج» به گونه‌ای در مسألهٔ ۱۰ از فصل ۴ تعریف شدند، هستند.

اگر $\xi=\pi:E\to B$ یک کلاف n−صفحه‌ای باشد، آنگاه برش ω همه جا ناصفر از $\Omega^n(\xi)$ اهمیتی به سزا دارد: به ازاء هر $p\in B$، عنصر $\omega(p)\in\Omega^n(\pi^{-1}(p))$ بنا به نتیجهٔ ؟؟ یک جهت μ_p بر $\pi^{-1}(p)$ مشخص می‌کند. به سادگی ملاحظه می‌گردد که گردایهٔ جهت‌های $\{\mu_p\}$ را مجموعه شرایط سازگاری مطرح شده در فصل ۳ صدق می‌کند، و بنابراین $\mu=\{\mu_p\}$ یک جهت بر ξ تعریف می‌کند. به ویژه، اگر یک n−فرم ناصفر ω بر منیفلد n بعدی M موجود باشد، آنگاه M جهت‌پذیر است (به عبارت دیگر، کلاف TM جهت‌پذیر است). عکس این مطلب درست است:

۳.۳.۷ قضیه. اگر منیفلد هموار n بعدی M جهت‌پذیر باشد، آنگاه یک n−فرم ω بر M وجود دارد که در همه جا ناصفر است.

اثبات: بنا به قضایای ؟؟۱ و ۳.۶.۲، یک پوشش ϑ برای M متشکل از گردایه‌ای از دستگاه‌های مختصاتی $\{(x,U)\}$، و نیز یک افراز یکانی $\{\varphi_U\}$ زیر دست ϑ می‌توان انتخاب نمود. گیریم μ جهتی برای M است. به ازاء هر (x,U) یک n−فرم ω_U بر U طوری انتخاب می‌کنیم که به ازاء هر $p\in U$ و $v_1,\cdots,v_n\in T_pM$ داشته باشیم

$$\omega_U=(v_1,\cdots,v_n)>0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad [v_1,\cdots,v_n]=\mu_p$$

حال فرض کنیم $\omega=\sum_{U\in\vartheta}\varphi_U\omega_U$. در این صورت ω یک n− فرم هموار است. به علاوه، به ازاء هر p ای، اگر $v_1,\cdots,v_n\in T_pM$ در $[v_1,\cdots,v_n]=\mu_p$ صدق کند، آنگاه به ازاء هر U ای که $p\in U$ داریم

$$(\varphi_U\,\omega_U)(p)(v_1,\cdots,v_n)\geq 0$$

و نامساوی بر حداقل یک U ای اکید است. بنابراین $\omega(p) \neq ۰$. □

توجه شود که کلاف $\Omega^n(TM)$ یک بعدی است. نشان داده‌ایم که اگر M جهت‌پذیر باشد، آنگاه $\Omega^n(TM)$ برشی ناصفر (در همه جا ناصفر) دارد، که در نتیجه، کلاف $\Omega^n(TM)$ بدیهی است. اما، بالعکس اگر کلاف $\Omega^n(TM)$ بدیهی باشد، آنگاه برش همه جا ناصفری وجود دارد و لذا M جهت‌پذیر است. [در کل، اگر ξ یک کلاف $n-$ صفحه‌ای باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\Omega^n(\xi)$ بدیهی است که ξ جهت‌پذیر باشد، به شرط آنکه فضای پایه B پیرافشرده باشد (یعنی، هر پوشش آن دارای یک زیر پوشش موضعاً متناهی باشد).]

۴.۷ دیفرانسیل یک فرم

درست مثل $\Omega^۰(V)$ که بیان دیگری از $\mathbb{R}$ بود، ۰**–فرم** بر M را به صورت تابعی f بر M تلقی می‌کنیم (و $f \wedge \omega$ به معنی $f.w$ است). به ازاء هر ۰– فرم f، ۱– فرم df (یادآور می‌شویم که $(d\,f(X) = X(f))$ را این طور تعریف می‌کنیم که در دستگاه مختصاتی (x, U) مفروض بر M، داریم

$$d\,f := \sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^j$$

چنانچه ω برابر $k-$ فرم $\omega = \sum_I \omega_I\, dx^I$ باشد، که هر یک از ω_I ها ۰– فرمند، می‌توان ۱– فرم‌های $d\omega_I$ را تشکیل داد و $(k+۱)-$ فرم $d\,w$ را به صورت

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I = \sum_I \sum_{\alpha=۱}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha \wedge dx^I$$

تعریف نمود. $d\omega$ را دیفرانسیل ω می‌نامیم. ثابت می‌شود که این تعریف به انتخاب دستگاه مختصاتی بستگی ندارد. این مطلب را به جند طریق میتوان اثبات نمود یک راه که به محاسبات فوق العاده زیادی ایجاد مقایسهٔ ضرایب w'_I در عبارت $\omega = \sum_I w'_I\, dx^I$ با ضرایب قبلی ω_I است.

روش دیگر، بحث کمتری دارد. بایافتن خواصی از $d\omega$ آغاز می‌کنیم (که آنها را هم با بیان نسبت به یک دستگاه مختصات بخصوص، ثابت میکنیم .)

۱.۴.۷ گزاره. ۱) $d(\omega_۱ + \omega_۲) = d\omega_۱ + d\omega_۲$.
۲) اگر $\omega_۱$ یک $k-$ فرم باشد، آنگاه $d(\omega_۱ \wedge \omega_۲) = d\omega_۱ \wedge \omega_۲ + (-۱)^k \omega_۱ \wedge d\omega_۲$.
۳) $d(d\omega) = ۰$ یا به اختصار $d^۲ = ۰$.

اثبات: ۱) واضح است.

۲) برای اثبات (۲) ابتدا توجه می‌کنیم که بنا به (۱) کافی است تنها حالت $\omega_۱ = f\,dx^I$ و $\omega_۲ = g\,dx^J$ فرض شود. در این صورت $\omega_۱ \wedge \omega_۲ = f\,g\,dx^I \wedge dx^J$ و

$$\begin{aligned} d(\omega_۱ \wedge \omega_۲) &= d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= gdf \wedge dx^I \wedge dx^J + fdg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= d\omega_۱ \wedge \omega_۲ + (-۱)^k\, fdx^I \wedge dg \wedge dx^J \\ &= d\omega_۱ \wedge \omega_۲ + (-۱)^k \omega_۱ \wedge d\omega_۲ \end{aligned}$$

۳) به وضوح، کافی است $k-$ فرم‌های به شکل $\omega = fdx^I$ را در نظر بگیریم. در این صورت

$$d\omega = \sum_{\alpha=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha \wedge dx^I$$

در نتیجه

$$d(d\omega) = \sum_{\alpha=۱}^{n} \left(\sum_{\beta=۱}^{n} \frac{\partial^۲ f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\, dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^J \right)$$

جملات $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\, dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^I$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^I$ دو به دو در این مجموع حذف می‌شوند. □

در ادامه سه خاصیت مشخص کنندهٔ d بر U را مطرح می‌کنیم.

۲.۴.۷ گزاره. فرض کنید d' هر $k-$ فرم بر U را به $(k+۱)-$ فرمی بر U بنگارد، k عددی دلخواه است، و به علاوه

۱) $d'(\omega_۱ + \omega_۲) = d'\omega_۱ + d'\omega_۲$	۳) $d'(d'f) = ۰$
۲) $d'(\omega_۱ \wedge \omega_۲) = d'\omega_۱ \wedge \omega_۲ + (-۱)^k \omega_۱ \wedge d'\omega_۲$	۴) $d'f =$ قدیمی df

در این صورت، $d = d'$ بر U.

اثبات: روشن است که کافی است دهیم که اگر $\omega = f dx^I$، آنگاه $d'\omega = d\omega$. اما، بنا به (۲) داریم

$$\begin{aligned} d'(f dx^I) &= d'f \wedge dx^I + f \wedge d'(dx^I) \\ &\overset{(4)}{=} df \wedge dx^I + f \wedge d'(dx^I) \end{aligned}$$

پس، کافی است نشان دهیم که $d'(dx^I) = 0$، که در آن

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \overset{(4)}{=} d'x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k}$$

به استقراء بر k عمل می‌کنیم. با فرض درستی حکم برای $k-1$، داریم

$$\begin{aligned} d'(dx^I) &= d'(d'x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k}) \\ &\overset{(2)}{=} d'(d'x^{i_1}) \wedge d'x^{i_2} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k} \\ &\quad - d'x^{i_1} \wedge d'(d'x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d'x^{i_k}) \\ &\overset{A}{=} 0 - 0 \end{aligned}$$

که در A از (۲) و فرض استقراء استفاده شده است؛ و برهان تمام است. □

۳.۴.۷ نتیجه. عملگری d منحصر بفرد از k− فرم‌های بر M به $(k+1)$− فرم‌های بر M، به ازاء k دلخواه، وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$1)\ d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2 \qquad 2)\ d^2 = 0$$

$$3)\ d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k d_1 \wedge d\omega_2$$

و در مورد توابع، با دیفرانسیل قدیمی d یکی است.

اثبات: به ازاء هر دستگاه مختصات (x, U)، عملگر منحصر بفردی d_U در اختیار است. به ازای هر ω مفروض، و $p \in M$، U ای با $p \in U$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $d\omega(p) = d_U(w|U)(p)$. □

سومین طریق در اثبات استقلال تعریف d نسبت به دستگاه مختصات، ارائهٔ تعریف ناوردای آن است.

۴.۴.۷ قضیه. اگر ω یک k− فرم بر M باشد، آنگاه یک $(k+1)$− فرم منحصر بفرد $d\omega$ بر M چنان وجود دارد که به ازاء هر مجموعهٔ از میدان‌های برداری X_1، $\cdots$ و

X_{k+1} داریم

$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}) \quad (2.7) \\ &= \sum_1 + \sum_2 \end{aligned}$$

که علامت $\wedge$ بر X_i به معنی حذف آن جمله است. این $(k+1)-$ فرم $d\omega$ آنگونه که قبلاً تعریف شد، یکی است.

اثبات: عملگری که $(X_1,\cdots,X_{k+1})$ را به $\sum_1+\sum_2$ می‌نگارد، به وضوح خطی است بر $\mathbb{R}$. به علاوه، عملاً بر مجموعهٔ توابع هموار $\mathcal{F}$ خطی است. در واقع، اگر X_{i_0} را با fX_{i_0} تعویض کنیم، آنگاه $\sum_1$ به

$$f\sum_1+\sum_{i\neq i_0}(-1)^{i+1}(X_if)\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})$$

تبدیل می‌شود، و با استفاده از فرمول‌های

$$[fX,Y]=f[X,Y]+Yf.X \qquad [X,fY]=f[X,Y]-Xf.Y$$

به سادگی مشاهده می‌گردد که $\sum_2$ به

$$\begin{aligned} f\sum_2 &- \sum_{i<i_0}(-1)^{i+i_0}(X_if)\omega(X_{i_0},X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_{i_0},\cdots,X_{k+1}) \\ &+ \sum_{i_1<i}(-1)^{i_0+j}(X_jf)\omega(X_{i_0},X_1,\cdots,\hat{X}_{i_0},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1}) \end{aligned}$$

تبدیل می‌گردد؛ پس با کمی دقت، ملاحظه می‌گردد که $\sum_1+\sum_2$ به $f\sum_1+f\sum_2$ تبدیل می‌شود.

قضیهٔ ۱.۵.۴ نشان می‌دهد که میدان برداری کواریان منحصر بفرد $d\omega$ صادق در (۵.۷) وجود دارد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $d\omega$ نوسانی است، و لذا یک $(k+1)-$ فرم می‌باشد.

برای محاسبهٔ $d\omega$ در دستگاه مختصاتی (x,U)، روشن است که کافی است $d(fdx^I)$ را محاسبه کنیم. به علاوه، یادآور می‌شویم که می‌توانیم فرض کنیم $\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge$

dx^k. در مورد $d\omega$، همچون هر فرم دلخواه دیگر، داریم

$$d\omega = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right) = 0$$

از (۵.۷) روشن است که $d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right) = 0$ صفر است مگر آنکه یک اندیس چندگانهٔ به شکل $(\alpha_1, \cdots, \hat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_{k+1})$ جایگشتی از $(1, \cdots, k)$ باشد. چون α ها صعودی هستند، این تنها وقتی ممکن است که

$$(\alpha_1, \cdots \alpha_{k+1}) = (1, \cdots, k, j) \qquad\qquad (j > k)$$

که در این حالت

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (-1)^k \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j\rangle k} (-1)^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\, dx^1 \wedge \cdots, \wedge dx^k \wedge dx^j \\ &= \sum_{j\rangle k} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^k \end{aligned}$$

که درست با همان تعریف قدیمی d است. □

این اولین مثال حقیقی ما از یک تعریف ناوردا برای تانسوری مهم است، و نیز اولین استفادهٔ ما از قضیهٔ ۱.۵.۴ است. ما $d\omega(p)(v_1, \cdots, v_{p+1})$ به شکل صریح مشخص نکردیم، بلکه ابتدا $d\omega(X_1, \cdots, X_{k+1})$ را پیدا کردیم، که X_i ها میدان‌های برداری توسیع دهندهٔ v_i هستند، و سپس این تابع را در p محاسبه کردیم. به همین سبک می‌توان عمل کرد و اثبات نمود که توسیع‌های X_1، $\cdots$ و X_{k+1} مستقل هستند. این کار بسیار کوتاه‌تر از آن است که موضوع را در دستگاهی مختصاتی معرفی کرد و سپس استقلال را نشان داد. اما به نظر پذیرش این موضوع سخت است. در کل، مقدار $d\omega(X_1, \cdots, X_{k+1})(p)$ تنها به مقادیر X_i در p بستگی دارد و به مقدار آنها در سایر نقاط هیچ گونه بستگی‌ای ندارد. به علاوه این مقدار به مقادیر ω در نقاطی به جز p (اطراف آن) نیز بستگی دارد. بایستی در فرمول قرار داده شود. یکی دیگر از جنبه‌های تعریف ما، که با تعریف

ناوردای تانسورهای مهم دیگر مشترک است، ظهور جملات شامل براکت میدان‌های برداری مختلف در آن است. این گونه جملات هستند که نشان می‌دهند چگونه عملگر تعریف شده بر توابع هموار خطی است، ولی این خصوصیت در روش کار کردن بر دستگاه‌های مختصاتی مشهود نیست.

در حالت خاصی که ω یک ۱–فرم باشد، قضیهٔ ۴.۴.۷ فرمول ذیل را بیان می‌دارد:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

این فرمول امکان بیان دومی از قضیهٔ ۴.۲.۶ (قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس) براساس فرمهای دیفرانسیلی را فراهم می سازد. حلقهٔ $\Omega(M)$ را به صورت مجموع مستقیم حلقهٔ $\ell-$ فرمهای بر M با ℓ دلخواه، تعریف می‌کنیم، اگر Δ توزیعی $k-$ بعدی بر M باشد، آنگاه $\mathcal{D}(\delta) \subset \Omega(M)$ را بصورت حلقهٔ تولید شده توسط همهٔ فرمهای با خاصیت زیر تعریف می‌کنیم: اگر ℓ از درجهٔ ℓ باشد، آنگاه

$\omega(X_1, \cdots, X_\ell)$ هر گاه $X_1, \cdots, X_\ell$ به δ متعلق باشند.

روشن است که اگر $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}(\Delta)$ آنگاه $\omega_1 + \omega_2 = \mathcal{D}(\Delta)$ و نیز اگر $\eta \wedge \omega \in \mathcal{D}(\Delta)\eta \wedge \omega \in \mathcal{D}(\Delta)$. بنابراین $\mathcal{D}(\Delta)$ ایده آلی در حلقهٔ $\Omega(M)$ است. ایده آل $\mathcal{D}(\Delta)$ به شکل موضعی توسط $n-k$ یک فرم مستقل ω^{k+1}، $\cdots$ و ω^n تولید می‌گردد. در واقع، در همسایگی‌ای از هر نقطه $p \in M$، دستگاهی مختصاتی (x,U) چنان می‌توانیم انتخاب کنیم که بردارهای $\partial/\partial x^k\Big|_p$، $\cdots$ و $\partial/\partial x^k\Big|_p$ تار Δ_p را تولید می‌کنند. در این صورت عنصر $dx^1(p) \wedge \cdots \wedge dx^k(p)$ بر Δ_p ناصفر است. بنا به پیوستگی، این مطلب برای هر q نزدیک (باندازه کافی) به p نیز درست است، که براساس نتیجهٔ ۳.۲.۷ نتیجه می‌گیریم $dx^1(q)$، $\cdots$ و $dx^k(q)$ در Δ_q مستقل خطی هستند. بنابراین، توابع هموار f^α_β طوری وجود دارند که

$$dx^\alpha(q) = \sum_{\beta=1}^{k} f^\alpha_\beta(q)\, dx^\beta(q) \ (\text{تحدید شده به}\,\Delta) \qquad \alpha = k+1, \cdots, n$$

بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم

$$\omega^\alpha = dx^\alpha - \sum_{\beta=1}^{k} f^\alpha_\beta\, dx^\beta$$

۵.۷ قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس (نوع دوم)

۱.۵.۷ گزاره. (قضیهٔ انتگرالپذیری فروبینیوس؛ نوع دوم). توزیع Δ بر M وقتی و تنها وقتی انتگرالپذیر است که $d(\mathcal{D}(\Delta)) \subseteq \mathcal{D}(\Delta)$.

اثبات: به شکل موضعی ۱− فرمهای ω^1، $\cdots$ و ω^n را طوری می‌توانیم انتخاب کنیم که به ازاء هر q ای T_q^*M را تولید می‌کنند، وبعلاوه ω^{k+1}، $\cdots$ و w^n ایده‌آل $\mathcal{D}(\Delta)$ را تولید می‌کنند. گیریم X_1، $\cdots$ و X_n میدان‌های برداری با $\omega^i(x_j)\delta_j^i$ هستند. بنابراین، X_1، $\cdots$ و X_k توزیع Δ را تولید می‌کنند. پس وقتی و تنها وقتی Δ انتگرالپذیر است که توابع هموار C_{ij}^β چنان یافت شوند که

$$[X_i, X_j] = \sum_{\beta=1}^{k} C_{ij}^\beta X_\beta \qquad i,j = 1,\cdots,k$$

اکنون

$$d\omega^\alpha(X_i, X_j) = X_i(\omega^\alpha(X_j)) - X_j(\omega^\alpha(X_i)) - \omega^\alpha([X_i, X_j])$$

برای $j \leq k$ و $1 \leq i$ و $\alpha\rangle k$ دو جملهٔ اول در سمت راست صفرند. پس وقتی و تنها وقتی $d\omega^\alpha(X_i, X_j) = 0$ که $\omega^\alpha([x_i, X_j]) = 0$. اما، وقتی و تنها وقتی به ازاء هر α ای $\omega^\alpha([X_i, X_j]) = 0$ که هر $[X_i, X_j]$ ای به Δ متعلق است، (به عبارت دیگر، Δ انتگرالپذیراست.) حال آنکه هر $d\omega^\alpha(X_i, X_j)$ ای وقتی و تنها وقتی صفر است که هر $d\omega^\alpha$ ای به $\mathcal{D}(\Delta)$ متعلق باشد. □

توجه کنید که به ازاء فرم‌های q ای $(i < j)\omega^i \wedge \omega^j$ فضای $\Omega^2(T_qM)$ را تولید می‌کند. بنابراین، به ازاء فرم‌های θ_j^α بخصوص، می‌توانیم بنویسیم

$$d\omega^\alpha = \sum_{i<j} C_{ij}^\alpha \, \omega^i \wedge \omega^j = \sum_j \theta_j^\alpha \wedge \omega^j$$

اگر $\alpha\rangle k$ و $j_0, i_0 \leq k$ متمایز باشند، داریم

$$0 = d\omega^\alpha(X_{i_0}, X_{j_0}) = \sum_j (\theta_j^\alpha \wedge \omega^j)(X_{i_0}, X_{j_0}) = \theta_{j_0}^\alpha(X_{i_0})$$

و بنابراین، شرط $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\Delta)) \subseteq \mathcal{D}(\Delta)$ را به صورت

$$d\omega^\alpha = \sum_{\beta\rangle k} \theta_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta$$

می‌توان نوشت. چنانچه دستگاهی مختصاتی (x,U) چنان مطرح کنیم که باریکه‌های

$$\{q \in U : x^{k+۱}(q) = u^{k+۱}, \cdots, x^n(q) = a^n\}$$

منیفلدهای انتگرال Δ باشند، در این صورت $dx^{k+۱}$، $\cdots$ و dx^n پایداری برای $\mathcal{D}(\Delta)$ تشکیل می‌دهند، و لذا $\omega^{k+۱}$، $\cdots$ و ω^n بایستی ترکیبی خطی از آنها باشند. پس، ثابت شد که

۲.۵.۷ نتیجه. اگر $\omega^{k+۱}$، $\cdots$ و ω^n یک فرمهای مستقل خطی در یک همسایگی از $p \in M$ باشند، آنگاه ۱ $-$ فرمهای $(\alpha, \beta\rangle k)\theta^\alpha_\beta$ با

$$d\omega^\alpha = \sum_\beta \theta^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta$$

وقتی و تنها وقتی وجود دارند که توابع $(\alpha, \beta\rangle k) g^\beta, f^\alpha_\beta$ طوری وجود داشته باشند که

$$\omega^\alpha = \sum_\beta f^\alpha_\beta \; dg^\beta$$

با اینکه قضیهٔ ۴.۴.۷ در کانون توجه به تعاریف ناوردا قرار دارد، بکارگیری آن در حالتهای ۱ $k\rangle$ دشوار است (در فصل پایانی جلد ۵ یک استثنأً خاص آورده شده است). مسألهٔ ۱۸ تعریف ناوردای دیگری از $d\omega$ را بر اساس استقرأً بر درجهٔ ω را مطرح می‌کند، که بسیار ساده تر است. خواننده می‌تواند مشکلات موجود در بکارگیری تعریف در قضیهٔ ۴.۴.۷ برای اثبات ویژگی مهم ذیل از d را تجربه کند:

۳.۵.۷ گزاره. اگر $f : M \to N$ هموار و ω یک $k-$ فرم بر N باشد، آنگاه $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

اثبات: برای $p \in M$، فرض می‌کنیم (x,U) دستگاهی مختصاتی حول $f(p)$ است. می‌توانیم فرض کنیم

$$\omega = g\, dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

به استقرأً بر k عمل می‌کنیم. برای $k = ۰$ داریم

$$f^*(dg)(X) = dg(f_*X) = [f_*X](g) = X(g \circ f) = d(g \circ f)(X)$$

(و البته، f^*g را به صورت $g \circ f$ می‌توان تعبیر کرد). با فرض فرمول برای $k-۱$ داریم

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d((f^*g\, dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}}) \wedge f^*\, dx^{i_k}) \\ &= d(f^*g\, dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}}) \wedge f^*\, dx^{i_k} + ۰ \end{aligned}$$

(زیرا $d\, f^* dx^{i_k} = dd(x^{i_k} \circ f) = ۰$)

$$\begin{aligned} &= f^*(d(g\, dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}})) \wedge f^*\, dx^{i_k} \quad \text{(بنا به فرض استقراء)} \\ &= f^*(dg \wedge dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}}) \wedge f^*\, dx^{i_k} \\ &= d((f^*(dg \wedge dx^{i_۱} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-۱}} \wedge dx^{i_k}) = f^*(d\omega) \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

۶.۷ فرم بسته و دقیق

بنا به آنچه که در فصل قبل ملاحظه شد، خاصیتی کیفی از d وجود دارد که قضیه‌ای اساسی از هندسه دیفرانسیل را تشکیل می‌دهید: رابطهٔ $d^۲ = ۰$ طریقی قابل توجه برای بیان این مطلب است که مشتقات جزئی مرکب برابرند. مجموعه اصطلاحات دیگری برای بیان این مطلب وجود دارد. فرم ω را در صورتی بسته گوئیم که $d\omega = ۰$ و آنرا در صورتی دقیق گوئیم که به ازأ یک η ای $\omega = d\eta$. (اصطلاح «دقیق» کلاسیک است — فرم دیفرانسیل را ساده «دیفرانسیل» مینامند. پس دیفرانسیل وقتی دقیق گفته می‌شود که عملاً دیفرانسیل یک دیفرانسیل دیگر باشد. اصطلاح بسته مبتنی بر اصطلاح مشابهی در خصوص زنجیره‌ها است، که در فصل بعد مورد برسی قرار خواهد گرفت.) چون $d^۲ = ۰$، هر فرم دقیق، بسته است. به بیان دیگر، $d\omega = ۰$ شرط لازم برای حل $\omega = d\eta$ است. اگر ω یک ۱— فرم باشد (با $\omega = \sum_{i=۱}^{n} \omega_i\, dx^i$)، آنگاه شرط $d\omega = ۰$ به این معنی است که

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega^j}{\partial x^i}$$

و این شرایط برای حل $\omega = df$ لازمند به عبارت دیگر ما برای

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \omega_i$$

اکنون، براساس قضیهٔ ۲.۱.۶، این شرایط کافی نیزهستند در مورد ۲− فرمها وضعیت دشوارتر است اگر ω یک ۲− فرم در $\mathbb{R}^3$ به شکل

$$\omega = A\,dy \wedge dz - B\,dx \wedge dz + C\,dx \wedge dy$$

باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\omega = d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ که

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

شرط لازم $d\omega = 0$ عبارتست از

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

در حالت کلی، با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیچیده‌تری سروکار داریم (وبنابراین شرایط انتگرالپذیری پیچیده‌تری بدست می‌آید). ثابت می شود که این شرایط لازم، کافی هستند: اگر ω بسته باشد،آنگاه دقیق است ∘ این حکم نیز مثل سایر احکام ما در خصوص معادلات دیفرانسیل، موضعی هستند. البته، محدود کردن بحثها به حالت موضعی دلایل خاص خود را دارد. حالت ۱—فرم بسته ω بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید:

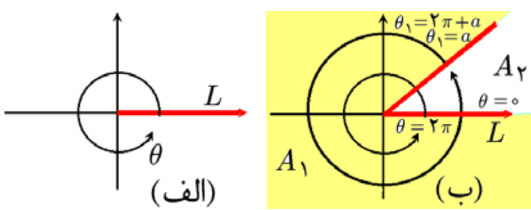
$$\omega = f\,dx + g\,dy \quad \text{با} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

می‌دانیم که چگونه تابعی α برکل $\mathbb{R}^2$ با $\omega = d\alpha$ می‌توانیم بیابیم؛ یعنی

$$\alpha(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} g(x,t)dt$$

ازسوی دیگر، اگر ω تنها بر $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ تعریف شود، وضعیت خیلی متفاوت خواهد شد. یادآور می‌شویم که هرگاه $L \subset \mathbb{R}^2$ برابر $\{0\} \times [0, \infty]$ باشد، آنگاه

$$\theta : \mathbb{R}^2 - L \to \mathbb{R}$$



شکل ۱.۷

به گونه‌ای که در فصل ۲ تعریف شد، هموار است (به قسمت (الف) از شکل ۱.۷ توجه شود)؛ در واقع

$$(r,\theta):\mathbb{R}^{۲}-L\to\{r\,:\,r>۰\}+(۰;۲\pi)$$

وارون نگاشت $(a,b)\mapsto(a\cos b, a\sin b)$ است، که دترمینان مشتق آن در (a,b) برابر $a\neq ۰$ است. باحذف شعاعی دیگر $L_۱$ بجای L، می‌توانیم تابعی دیگر $\theta_۱$ تعریف کنیم. در این صورت $\theta=\theta_۱$ بر ناحیهٔ $A_۱$ و $\theta_۱=\theta+۲\pi$ در ناحیهٔ $A_۲$. نتیجتاً، $d\theta$ و $d\theta_۱$ بر ناحیهٔ مشترکشان برابرند، ولذا یک ۱—فرم ω بر $\mathbb{R}^۲-\{۰\}$ تعریف می کنند۰ باکمی محاسبه (مسألهٔ ۲۰) می‌توان نشان داد که

$$\omega=\frac{-x}{x^{۲}+y^{۲}}dx+\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}dy$$

۱—فرم ω را معمولاً به شکل $d\theta$ نشان میدهند، اما این نمادگذاری ابهام دارد، زیرا $\omega=d\theta$ تنها بر $\mathbb{R}^۲-L$ برقرار است (به قسمت (ب) از شکل ۱.۷ توجه شود)۰ درواقع، ω به ازاء هیچ تابع هموار از کلاس $C^۱$ نظیر $f:\mathbb{R}^۲-\{۰\}\to\mathbb{R}$ به شکل df نیست چرا که اگر $\omega=df$ آنگاه $df=d\theta$ بر $\mathbb{R}^۲-L$ و بنابراین $d(f-\theta)=۰$، که درنتیجه $\partial f/\partial x=\partial\theta/\partial x$ و $\partial f/\partial y, \partial\theta/\partial y$. بایستی $f=\theta+$ «ثابت» بر $\mathbb{R}^۲-L$، که محال است. زیرا هیچ کجا $d\omega=۰$ نیست. (زیرا، $d(d\theta)=۰$ بر $\mathbb{R}^۲-L$ و $d(d\theta)$ بر $(\mathbb{R}^۲-L_۱)$. پس ω بسته است، ولی دقیق نیست. (بااین حال، در همسایگی‌ای از هر نقطهٔ $\mathbb{R}^۲-\{۰\}$ دقیق است.)

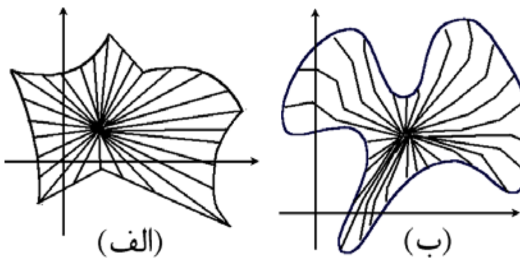
روشن است که ω در هیچ همسایگی حتی کوچک از ۰ دقیق نیست. این مثال نشان می‌دهد که شکل ناحیه، و نه اندازهٔ آن، دراینکه هر فرم بسته‌ای دقیق باشد یا نه دخالت دارد.

منیفلد M را در صورتی (به شکل هموار) **انقباض‌پذیر** گوئیم به نقطهٔ $p_۰\in M$ که تابعی هموار چون

$$H:M\times[۰;۱]\to M$$

چنان یافت گردد که به ازاء هر $p\in M$ ای $H(p,۱)=p$ و $H(p,۰p_۰$. مثلاً، $\mathbb{R}^n$ به $۰\in\mathbb{R}^n$ به شکل هموارانقباض‌پذیراست؛ تابع $H:\mathbb{R}^n\times[۰;۱]\to\mathbb{R}^n$ رابه صورت $H(p,t)=t_p$ می‌توانیم تعریف کنیم کلی تر، در صورتی $U\subset\mathbb{R}^n$ به نقطهٔ

$p_\circ \in U$ انقباض پذیراست که دارای این ویژگی باشد که اگر $p \in U$، آنگاه به اندازهٔ هر $t \in [\circ, 1]$ ای $p_\circ + t(p - p_\circ) \in U$ (چنین ناحیه‌ای U را **ستاره شکل** نسبت به $p_\circ$ می‌نامیم).البته، بسیاری از نواحی به نقطه قابل انقباض هستند. چنانچه $[\circ, 1]$ را نمایشگر بازدهٔ زمانی درنظر بگیریم، آنگاه به ازاء هر زمان مفروض t، نگاشت $p \mapsto H(p,t)$ از M بتوی خودش است؛ درلحظهٔ $t = 1$ درست همان نگاشت همانی است و در لحظهٔ $t = \circ$، نگاشت ثابت می‌باشد (به قسمت (الف) از شکل ۲.۷ توجه شود).



شکل ۲.۷

نشان خواهیم داد که اگر M بشکل هموارانقباض‌پذیر باشد به یک نقطه، آنگاه هرفرم بسته بر M دقیق است. (بالطبع،این حکم و تحلیل ما در مورد فرم $d\theta$ در بالا، از نظر شهودی روشن است که فضای $\mathbb{R}^2 - \{\circ\}$ به هیچ نقطه‌ای انقباض پذیراست؛ همین استدلال برای فضای $\mathbb{R}^n - \{\circ\}$ درست است، اما تا فصل بعد آنرا ثابت نمی‌کنیم.) تکنیک در اثبات حکم مااین است که $M \times [\circ; 1]$ (برای منیفلد دلخواه M) را بررسی می کنیم، و به سختی به کل H توجه می‌کنیم (به قسمت (ب) از شکل ۲.۷ توجه شود). برای هر $t \in [\circ; 1]$ ای نگاشت $i_t : M \to M \times [\circ; 1]$ را به صورت $i_t(p) = (p,t)$ تعریف می‌کنیم. ادعامی کنیم که اگر ω فرمی بر $M \times [\circ; 1]$ با $d\omega = \circ$ باشد، آنگاه $i_1^* w - i_\circ^* w$ دقیق است: بعداً خواهیم دید (و شما می‌توانید آنرا همین الان تحقیق کنید) که قضییه از این مطلب به صورت بدیهی نتیجه می‌شود

ابتدا یک ۱—فرم ω بر $M \times [\circ; 1]$ درنظر می‌گیرم. باکار در یک دستگاه مختصات بر $M \times [\circ; 1]$ آغاز می‌کنیم تابعی واضح t بر $M \times [\circ; 1]$ (یعنی، تصویر π برمختص دوم) وجود دارد، و اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی بر M باشد و π_M تصویر بر M، آنگاه

$$(x^1 \circ \pi_M, \cdots, x^n \circ \pi_M, t)$$

دستگاهی مختصاتی بر $U \times [\circ; \text{۱}]$ است $x^i \circ \pi_M$ را با $\bar{x}^i$ نشان می‌دهیم (به جهت خلاصه‌تر شدن بحث). بسادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$i_\alpha^* \left(\sum_{i=\text{۱}}^{n}, \omega_i \, d\bar{x}^i + f dt \right) = \sum_{i=\text{۱}}^{n} \omega_i(\circ, \alpha) dx^i$$

که $\omega_\text{۱}(\circ, \alpha)$ نمایشگر تابع $p \mapsto \omega_i(p, \alpha)$ است. حال، در مورد $\omega = \sum_{i=\text{۱}}^{n} \omega_i \, d\bar{x}^i + f dt$ داریم

$$d\omega = \left\{ \text{جملاتی که } dt \text{ را در بر دارند} \right\} - \sum_{i=\text{۱}}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} d\bar{x}^i \wedge dt + \sum_{i=\text{۱}}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i \wedge dt$$

سپس، از $d\omega = \circ$ نتیجه می‌گردد $\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}$. درنتیجه،

$$\omega_i(p, \text{۱}) - \omega_i(p, \circ) = \int_\circ^\text{۱} \frac{\partial \omega_i}{\partial t}(p, t) dt = \int_\circ^\text{۱} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}(p, t) dt$$

و لذا

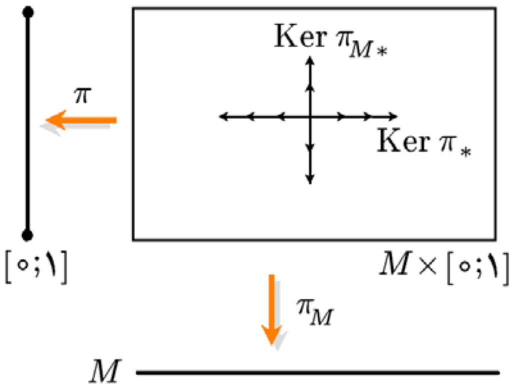
$$\sum_{i=\text{۱}}^{n} \omega_i(p, \text{۱}) dx^i - \sum_{i=\text{۱}}^{n} \omega_i(p, \circ) dx^i = \sum_{i=\text{۱}}^{n} \left(\int_\circ^\text{۱} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}(p, t) dt \right) dx^i \qquad (\text{۳.۷})$$

اگر $g : M \to \mathbb{R}$ را به صورت $g(p) = \int_\circ^\text{۱} f(p, t) dt$ تعریف کنیم، آنگاه

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}(p) = \int_\circ^\text{۱} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i}(p, t) dt \qquad (\text{۴.۷})$$

معادلات (۳.۷) و (۴.۷) نشان می‌دهند که $i_\text{۱}^* w - i_\circ^* = dg$. البته مشهود است که با اینکه از دستگاه مختصات استفاده کرده‌ایم، تابع f و در نتیجه g هم حقیقتاً مستقل ازانتخاب دستگاه مختصات هستند. توجه شود که در مورد فضای مماس $M \times [\circ; \text{۱}]$ داریم

$$T_{(p,t)}(M \times [\circ; \text{۱}]) = \mathrm{Kernel}(\pi_*) \oplus \mathrm{Kernel}(\pi_{M*}) \qquad (\text{۵.۷})$$



شکل ۳.۷

اگر فضای برداری V مجموع مستقیم $V = V_1 \oplus V_2$ زیر فضا باشد، آنگاه هر $\omega \in \Omega^i(V)$ ای را به صورت $\omega = \omega_1 + \omega_2$ می‌توان نوشت، که

$$\omega_1(v_1 + v_2) = \omega(v_1) = \omega(v_1) \qquad \omega_2(v_1 + v_2) = \omega(v_2)$$

با بکارگیری این مطلب در مورد تجزیهٔ (۵.۷)، ۱—فرم ω بر $[0;1] \times M$ رابه صورت $\omega_1 + \omega_2$ می‌توان نوشت، در نتیجه f ای منحصر بفرد هست که $\omega_2 = f\,dt$.

در کل، برای $k-$ فرم مفروض ω، بسادگی ملاحظه می‌شود (مسألهٔ ۲۲) که ω را به صورتی یکتا به شکل

$$\omega = \omega_1 + (dt \wedge \eta)$$

می‌توان نوشت، که $\omega_1(v_1, \cdots, v_k) = 0$ اگر به ازاء یک i ای $v_i \in \mathrm{Kernel}\pi_{M*}$، و η یک $(k+1)-$ فرم باخاصیتی مشابه است. $(k-1)-$ فرم $I\omega$ بر M را به شکل زیر تعرف می‌کنیم:

$$I\omega(p)(v_1, \cdots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta(p,t)(i_{t*}v_1, \cdots, i_{t*}v_{k-1})dt$$

ادعا می‌کنیم که از $d\omega = 0$ نتیجه می‌شود $i_1^* w - i_0^* = d(I\omega)$ در واقع، یافتن فرمولی برای $i_1^* w - i_0^* w$ که حتی وقتی $d\omega \neq 0$ بر قرار باشد، ساده‌تر است.

۱.۶.۷ قضیه. به ازاء هر $k-$ فرم ω بر $[0;1] \times M$ داریم

$$i_1^* w - i_0^* \omega = d(I\omega) + I(d\omega)$$

(نتیجتاً، اگر $d\omega=0$ آنگاه $i_1^*w - i_0^* = d(I\omega)$.)

اثبات: چون $I\omega$ را قبلاً به شکل نادر را تعریف کرده‌ایم، به خوبی می‌توانیم در دستگاهی مختصاتی کار کنیم. نظیر $(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n,t)$ روشن است که عملکرد I خطی است، و لذا تنها دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $\omega = f\,d\bar{x}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{x}^{i_k} = f\,d\bar{x}^I$، آنگاه

$$d\omega = \cdots + \frac{\partial f}{\partial t}dt\wedge d\bar{x}^I$$

بسادگی ملاحظه می گردد که

$$\begin{aligned} I(d\omega)(p) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\,dt\right) d\bar{x}^I(p) \\ &= \{f(p,1)-f(p,0)\}dx^I(p) = i_1^*(p) - i_0^*(p) \end{aligned}$$

چون $I\omega = 0$ این حکم را در این حالت ثابت می‌کند.

۲) اگر $\omega = f\,dt\wedge d\bar{x}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{x}^{i_{k-1}} = f\,dt\wedge d\bar{x}^I$، آنگاه $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$.
اکنون

$$\begin{aligned} I(d\omega)(p) &= I\left(-\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha}\,dx\wedge d\bar{x}^\alpha\wedge d\bar{x}^I\right)(p) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^n\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha}(p,t)dt\right) dx^\alpha\wedge dx^I \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= \left(\int_0^1 f(p,t)dt\right) dx^I \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\int_0^1 f(p,t)dt\right) dx^\alpha\wedge dx^I \end{aligned}$$

روشن است که در این صورت $I(d\omega)+d(I\omega)=0$. □

۷.۷ لم پوانکاره

۱.۷.۷ نتیجه. اگر M بطور هموار به نقطه‌ای $p_0\in M$ انقباض پذیر باشد، آنگاه هر فرم بسته ω بر M دقیق است.

اثبات: مطابق فرض $H : M \times [0,1] \to M$ ای داریم که به ازاً هر $p \in M$ ای $H(p, 0) = p_0$ و $H(p, 1) = p$. بنابراین $H \circ i_1 : M \to M$ نگاشت همانی است، $H \circ i_0 : M \to M$ نگاشت ثابت p_0 است، اما $d(H^*\omega) = H^*(d\omega) = 0$ و لذا بنا به قضیه

$$\omega - 0 = i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) = d(I(H^*\omega))$$

وبرهان تمام است. $\square$

نتیجه ۲.۵.۷ را برخی لم پوانکاره می‌دانند، در حالی که همه $d^2 = 0$ را لم پوانکاره می شناسند. (البته، من به هیچ وجه نمی‌دانم پوانکاره با آن چه ارتباطی داشته است.) در حالت زیر مجموعهٔ باز ستاره شکل U از $\mathbb{R}^n$، که فرمول صریح H را داریم، فرمول صریح برای $I(H^*\omega)$ را به ازاء هر فرم ω بر U می‌توانیم بیابیم (مسألهٔ ۳۲). چون فرم جدید با انتگرال ساخته می‌شود بنابراین دستگاه معادلات با مشتقات جزیی $\omega = d\eta$ را بکمک انتگرال‌ها می‌توانیم حل کنیم. قضایای کلاسیک در خصوص میدان‌های برداری در $\mathbb{R}^3$ وجود دارند، که قابل استنتاج از لم پوانکاره و وارون آن هستند (مسألهٔ ۲۷)، و در واقع منشأ طرح d در تعمیم یک شکل همهٔ این احکام بوده است. با اینکه لم پوانکارد و وارونش به شکل زیبایی در بحث ما و به صورت قضایای بنیادی هندسه دیفرانسیل مطرح شدند، اما همواره دلیل اهمیت d برای من یک راز بود. پاسخ این پرسش را پالیس درمقالهٔ «عملگرهای طبیعی بر فرم‌های دیفرانسیل» که در صفحات ۱۲۵ تا ۱۴۱ از مجلهٔ Trans. Amer. Math, Soc, 92(1959) به چاپ رسانده است، داده است. فرض کنید عملگری D از $k-$ فرم‌ها به $\ell-$فرمها داریم که به ازاء هر نگاشت هموار $f : M \to N$، دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} k-\text{فرمهای بر } M & \xleftarrow{\;f^*\;} & k-\text{فرمهای بر } M \\ \Big\downarrow D & & \Big\downarrow D \\ \ell-\text{فرمهای بر } M & \xleftarrow{\;f^*\;} & \ell-\text{فرمهای بر } M \end{array}$$

تعویض پذیر است. قضیهٔ پالیس اذعان می‌دارد که بجز مواردی بخصوص، همیشه $D = 0$. این موارد خاص به تعبیری چنین هستند: اگر $k = \ell$، آنگاه D می‌تواند مضربی از نگاشت همانی باشد، و نه چیز دیگر. اگر $\ell = k + 1$ آنگاه D تنها میتواند مضربی از d باشد. (در نتیجه، $d^2 = 0$، چرا که d^2 می‌تواند دیاگرام بالا را تعویض‌پذیر کند!) تنها یک حالت دیگر وجود دارد که D ی غیر صفر ممکن است وجود داشته باشد

وقتی k برابر بعد M است و $\ell = 0$. در این حالت، D می‌تواند مضربی از «انتگرال» باشد که در فصل بعد مورد بررسی قرار می گیرد.

۸.۷ تمرینات

۱. نشان دهید که اگر تعریف کنیم $\sigma(v_1, \cdots, v_k) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(k)})$ آنگاه $\sigma.p.(v_1, \cdots, v_k) = \sigma p.(v_1, \cdots, v_k)$.

۲. گیریم $\overline{\mathrm{Alt}}$ ولی بدون عامل $1/k!$ است، و تعریف کنیم $w\overline{\wedge}\eta = \mathrm{Alt}(w \otimes \eta)$. نشان دهید $\overline{\wedge}$ شرکتپذیر نیست. (حالت $\eta \in \omega^1(V)$ و ω و $\theta \in \omega^2(V)$ را بررسی کنید.)

۳. گیریم S' زیر گروه $S_{k+\ell}$ متشکل از همهٔ σ هایی است که هر دو مجموعهٔ $\{1, \cdots, k\}$ و $\{k+1, \cdots, k+\ell\}$ را حفظ می کنند. **برش موضعی** S' زیر مجموعه‌ای $k \subset S_{k+\ell}$ است که از هر همدستهٔ چپ S' درست یک عضو را در بردارد.

الف) نشان دهید که به ازاء هر برش گذری K داریم

$$\omega \wedge \eta(v_1, \cdots, v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in k} \mathrm{sgn}\, \sigma . w \otimes \eta(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

این تعریف راحتی در حالت میدانهای با مشخصهٔ متناهی می‌توان استفاده کرد.

ب) از این تعریف نشان دهید که $\omega \wedge \eta$ نوسانی است، و $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell}\eta \wedge \omega$. (اثبات شرکت‌پذیری خیلی شلوغ است.)

ج) جایگشت $\sigma \in S_{k+\ell}$ را در صورتی «جایگشت برزن» گوئیم که $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$ و نیز $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \cdots < \sigma(k+1)$ نشان دهید که مجموعه همهٔ جایگشت‌های برزن، یک برش گذری برای S' است.

۴. برای $v \in V$ و $w \in \omega^k(v)$ **ضرب داخلی یا انقباض** $v \rfloor w \in \Omega^{k-1}(V)$ را به صورت

$$(v\rfloor w)(v_1, \cdots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \cdots, v_{k-1})$$

تعریف می‌کنیم. نماد $i_v\, w$ نیز خیلی مرسوم است.

الف) نشان دهید

$$v\rfloor(w\rfloor w) = -w\rfloor(v\rfloor w)$$

ب) نشان دهید که اگر $v_۱$، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V با پایهٔ همزاد (دوگان) $\varphi_۱$، $\cdots$ و φ_n باشد، آنگاه

$$v_j\rfloor(\varphi_{i_۱}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k})=\begin{cases}۰ & \text{اگر } j \text{ با هیچ } i_\alpha \text{ ای برابر نباشد}\\ (-۱)^{\alpha-۱}\varphi_{i_۱}\wedge\cdots\wedge\widehat{\varphi}_{i_\alpha}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_k} & \text{اگر } j=i_\alpha\end{cases}$$

ج) ثابت کنید که اگر $\omega_۱\in\Omega^k(V)$ و $\omega_۲\in\Omega^\ell(V)$ آنگاه

$$v\rfloor(\omega_۱\wedge\omega_۲)=(v\rfloor\omega_۱)\wedge\omega_۲+(-۱)^k\omega_۱\wedge(v\rfloor\omega_۲)$$

(از (ب) و خطی بودن همه چیز استفاده کنید.)

د) فرمول (ج) را برای تعریف $\omega_۱\wedge\omega_۲$ به کمک استقراء بر $k+\ell$ میتوان استفاده کرد (که برای حالت فضای برداری بر میدان دلخواه عمل می کند): اگر $\wedge$ برای فرم‌های از درجهٔ با مجموع $\langle k+\ell$ تعریف شده باشد، تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}\omega_۱\wedge\omega_۲(v_۱,\cdots,v_{k+\ell}) &= [(v_۱\rfloor\omega_۱)\wedge\omega_۲](v_۲,\cdots,v_{k+\ell})\\ &\quad+(-۱)^k[\omega_۱\wedge(v_۱\rfloor\omega_۲)](v_۲,\cdots,v_{k+\ell})\end{aligned}$$

نشان دهید که $\omega_۱\wedge\omega_۲$ با این تعریف، متقارن کج است (کافی است بررسی شود که اگر $v_۱$ با $v_۲$ عوض کنیم، علامت سمت راست عوض می‌شود).

ه) به استقراء ثابت کنید که $\wedge$ دو خطی است وبعلاوه $\omega_۱\wedge\omega_۲=(-۱)^{k\ell}\omega_۲\wedge\omega_۱$.

و) اگر X میدانی برداری بر M و ω یک $k-$ فرم بر M باشد، $(k-۱)-$ فرم $X\rfloor w$ را به صورت $(X\rfloor w)(p)=X(p)\rfloor\omega(p)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر $\omega_۱$ یک $k-$ فرم باشد، آنگاه

$$X\rfloor(\omega_۱\wedge\omega_۲)=(X\rfloor\omega_۱)\wedge\omega_۲+(-۱)^k\omega_۱\wedge(X\rfloor\omega_۲)$$

۵. نشان دهید که n تابع $f_۱,\cdots,f_n:M\to\mathbb{R}$ وقتی و تنها وقتی در همسایگی‌ای از نقطهٔ $p\in M$ تشکیل یک دستگاه مختصات می‌دهند که $df_۱\wedge\cdots\wedge df_n(p)\neq ۰$.

۶. عنصر $w\in\Omega^k(V)$ را در صورتی **تجزیه‌پذیر** گوئیم که به ازاء یک $\varphi_i\in V^*=\Omega^۱(V)$ ای $\omega=\varphi_۱\wedge\cdots\wedge\varphi_k$. در این صورت نشان دهید که

الف) اگر $\dim V\leq ۳$ آنگاه $w\in\Omega^۲(V)$ ای تجزیه‌پذیر است.

ب) اگر φ_i های با $i=۱,\cdots,۴$ مستقل باشند، آنگاه $\omega=\varphi_۱\wedge\varphi_۱+\varphi_۳\wedge\varphi_۴$ تجزیه‌پذیر نیست.

[راهنمایی: به $\omega\wedge\omega$ توجه شود.]

۷. برای هر $\omega \in \Omega^k(V)$ پوچساز ω را $\mathrm{Ann}(\omega) = \{\varphi \in V^* : \varphi \wedge \omega = 0\}$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید $\dim \mathrm{Ann}(\omega) \leq k$ و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است، که ω تجزیه‌پذیر باشد.

ب) هر زیرفضا از V^* پوچساز $\mathrm{Ann}(\omega)$ یک ω تجزیه‌پذیر است، که در حد ضریب یکتا است.

ج) اگر ω_1 و ω_2 تجزیه‌پذیر باشند، آنگاه وقتی و تنها وقتی $\mathrm{Ann}(\omega_1) \subset \mathrm{Ann}(\omega_2)$ که به ازاء یک η ای $\omega_2 = \omega_1 \wedge \eta$.

د) اگر ω_i ها تجزیه‌پذیر باشند، آنگاه وقتی و تنها وقتی

$$\mathrm{Ann}(\omega_1) \cap \mathrm{Ann}(\omega_2) = \{0\}$$

که $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. در این حالت

$$\mathrm{Ann}(\omega_1) + \mathrm{Ann}(\omega_2) = \mathrm{Ann}(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

ه) اگر V با بعد n باشد، آنگاه هر $w \in \Omega^{n-1}(V)$ ای تجزیه‌پذیر است.

و) چون $v_i \in V$ ها را به عنوان اعضایی از V^{**} می‌توان تصور کرد، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Omega^k(V^*)$ قسمتهای (الف) تا (د) را بر حسب این $\wedge$ ضرب بیان کنید.

۸. الف) گیریم $w \in \Omega^2(V)$. نشان دهید پایه‌ای φ_1، $\cdots$ و φ_n از V^* چنان وجود دارد که

$$\omega(\varphi_1 \wedge \varphi_2) + \cdots + (\varphi_{2r-1} \wedge \varphi_{2r})$$

راهنمایی : اگر $\omega = \sum_{i<j} a_{ij}\psi_i \wedge \psi_j$، φ_1 را بین ψ_1، π_3، و ψ_n و φ_2 را بین ψ_2، $\cdots$ و ψ_n طوری انتخاب کنید

$$\omega = \varphi_1 \wedge \varphi_2 + w'$$

که w' نه ψ_1 را در بردارد و نه ψ_2 را.

ب) نشان دهید که ضرب گوه‌ای r تایی $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ تا صفر و تجزیه‌پذیر است، و ضرب گوه‌ای $(r+1)$ تایی ω در خودش صفر است. بنابراین، r خوشتعریف است؛ آنرا **رتبهٔ** ω است.

ج) اگر $\omega = \sum\limits_{i<j} a_{ij}\psi_i \wedge \psi_j$، نشان دهید رتبهٔ ω برابر رتبهٔ (a_{ij}) است.

۹. اگر $v_1 \cdots v_n$ پایه‌ای برای V باشد و $\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j$، نشان دهید
$$\det(\alpha_{ij})\omega_1^* \wedge \cdots \wedge \omega_n^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$$

۱۰. گیریم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ است. گیریم $1 \leq p \leq n$ ثابت است و $q = n - p$ به ازاء $H = h_1 < \cdots < h_p$ و $K = k_1 < \cdots < k_q$ تعریف می‌کنیم

$$B^H = \begin{vmatrix} a_{1,h_1} & \cdots & a_{1,h_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,h_1} & \cdots & a_{p,h_p} \end{vmatrix}, \quad C^K = \begin{vmatrix} a_{p+1,k_1} & \cdots & a_{p+1,k_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,k_1} & \cdots & a_{n,k_q} \end{vmatrix}.$$

الف) اگر v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V باشد و $\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$، نشان دهید

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \sum_H B^H v_H \qquad \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = \sum_K C^K v_K$$

ب) گیریم $H' = \{1, \cdots n\} - H$ (با ترتیب صعودی) است. نشان دهید

$$v_H \wedge v_K = \begin{cases} 0 & \text{اگر } K \neq H' \\ e_{H,H'} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n & \text{اگر } K = H' \end{cases}$$

که $e_{H,H'}$ علامت جایگشت زیر است

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p & k_1 & \cdots & k_q \end{pmatrix}$$

ج) بسط لاپلاس را ثابت کنید: $\det A = \sum\limits_H e_{H,H'} B^H C^{H'}$.

۱۱. **(لم کارتان).** گیریم $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$ و مستقلند و $\psi_1, \cdots, \psi_k \in V^*$ در رابطهٔ $\varphi_1 \wedge \psi_1 + \cdots + \varphi_k \wedge \psi_k = 0$ صدق می‌کنند. در این صورت اعداد a_{ij} با $a_{ij} = a_{ji}$ طوری وجود دارند که $\psi_i = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ji}\varphi_j$.

۱۲. علاوه بر فرم‌ها، برش‌های کلاف‌های ساخته شده از TM با استفاده از Ω و سایر عمل‌گرها را می‌توان در نظر گرفت. مثلاً، اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری باشد، می‌توانیم کلافی $\Omega^k(\xi^*)$ را در نظر بگیریم که تار در p از آن $\Omega^k(\{\pi^{-1}(p)\}^*)$

است. چون $\partial/\partial x^i\Big|_p$ را عنصری از $(T_pM)^{**}$ می‌توان در نظر گرفت، هر برش از $\Omega^k(T^*M)$ را به شکل موضعی به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$h\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}$$

الف) نشان می‌دهد که برش‌های $\Omega^n(T^*M)$، اشیاء هندسی متناظر به اسکالرهای نسبتی (زوج) به وزن ۱− در ۴ − ۱۰ است.

ب) گیریم $\mathcal{T}_\ell^{k[m]}(TM)$ نمایشگر فضای برداری همهٔ توابع چند خطی به شکل

$$\underbrace{V\times\cdots\times V}_{k \text{ تا}}\times\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{\ell \text{ تا}}\to\Omega^m(V)$$

است. نشان دهید برش‌های $\mathcal{T}_\ell^{k[n]}(TM)$ اشیاء هندسی متناظر به تانسورهای نسبی (زوج) از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ۱ هستند.

(توجه کنید که اگر v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V باشد، آنگاه اعضاء $\Omega^n(V)$ را به عنوان اعداد حقیقی می‌توان تعبیر نمود [در حقیقت، اعداد حقیقی ضرب در عامل مشترک $v_1^*\wedge\cdots\wedge v_n^*$.]

ج) اگر $\mathcal{T}^k_{\ell[m]}(V)$ به صورت مشابه تعریف گردد، بجز اینکه $\Omega^m(V)$ را با $\Omega^m(V^*)$ عوض کنیم، نشان دهید برش‌های $\mathcal{T}^k_{\ell[n]}(TM)$ اشیاء هندسی نظیر به تانسورهای نسبی (زوج) از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ۱− است.

د) نشان دهید که تانسور نسبی کواریان از نوع $\binom{\circ}{n}$ و وزن یک که در مسألهٔ ۴—۱۰ تعریف شد، چنانچه با مؤلفه‌های $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ باشد، به نگاشت

$$\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{n \text{ تا}}\to\Omega^n(V)$$

با ضابطهٔ $(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\mapsto\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ متناظر است. تاسنور نسبی با مؤلفه‌های $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ را به صورت مشابه تعبیر کنید.

ه) فرض کنید $\Omega^{n;w}(V)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ توابع $\eta : V\times\cdots\times V\to\mathbb{R}$ به شکل

$$\eta(v_1,\cdots,v_n)=[\omega(v_1,\cdots,v_n)]^w$$

باشد، که ω عددی صحیح است و $w\in\Omega^n(V)$ گیریم $\mathcal{T}_\ell^{k[n;w]}(V)$ شبیه $\mathcal{T}_\ell^{k[n]}$ تعریف شود، بجز اینکه $\Omega^n(V)$ را با $\Omega^{n;w}(V)$ عوض کنیم. نشان دهید برش‌های

$\mathcal{T}_\ell^{k[n;w]}(TM)$ اشیاء هندسی نظیر به تانسورهای نسبی (زوج) از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ω هستند.

به صورت مشابه با $\mathcal{T}^k_{\ell[n;w]}$ عمل کنید.

و) احکام ذیل بیان کرد مطالبی در خصوص ضرب تانسوری $V\otimes W$ و جبر خارجی $\wedge^k(V)$ است. $\mathcal{T}_\ell^k(V)$ را با

$$\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V := \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{k \text{ تا}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{\ell \text{ تا}}$$

می‌توان یکی گرفت. چون $\Omega^m(V)\simeq\Lambda^m(V^*)\simeq\{\Lambda^m(V)\}^*$، فضاهای برداری $\mathcal{T}_\ell^{k[m]}(V)$ و $\mathcal{T}^k_{\ell[m]}(V)$ را بترتیب با $\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\Lambda^m(V)$ و $\bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\Lambda^m(V^*)$ یکی می‌توان گرفت. به صورت مشابه، فضاهای برداری

$$\mathcal{T}_\ell^{k[m;w]}(V) := \bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\bigotimes^w \Lambda^m(V)$$

$$\mathcal{T}^k_{\ell[m;w]}(V) := \bigotimes^k V^*\otimes\bigotimes^\ell V\otimes\bigotimes^w \Lambda^m(V^*)$$

را در نظر بگیریم. توجه شود که $\Lambda^n(V)\otimes\cdots\otimes\Lambda^n(V)$ همیشه یک بعدی است. نشان دهید که برش‌های $\mathcal{T}_\ell^{k[n;w](TM)}$ و $\mathcal{T}_\ell^k[n;w](TM)$ بترتیب یه تانسورهای نسبی زوج از نوع $\binom{k}{\ell}$ و وزن ω و $-w$ متناظرند.

۱۳. الف) اگر V با بعد n بوده و $A:V\to V$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه نگاشت $A^*:\Omega^n(V)\to\Omega^n(V)$ بایستی مضربی از یک ثابت، کردن باشد. نشان دهید $c=\det A$. (این را به عنوان تعریف تابع $\det A$ می‌توان قلمداد کرد.)

ب) نتیجه بگیرید که $\det AB=(\det A)(\det B)$.

۱۴. یاد آور می شویم که چند جمله‌ای مشخصهٔ $A:V\to V$ عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\lambda) &:= \det(\lambda I-A)\\ &= \lambda^n-(\operatorname{trace} A)\lambda^{n-۱}+\cdots+(-۱)^n\det A\\ &= \lambda^n-c_۱\lambda^{n-۱}+c_۲\lambda^{n-۲}+\cdots+(-۱)^n c_n\end{aligned}$$

الف) نشان دهید C_k برابر اثر نگاشت $A^*:\Omega^k(V)\to\Omega^k(V)$ است.

ب) نتیجه بگیرید $c_k(AB)=c_k(BA)$.

ج) گیریم $\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k}$ مثل در مسالهٔ ۴–۵ (قسمت ۱۳) تعریف گردد. اگر $A: V \to V$ دارای ماتریس (a^j_i) (نسبت به یک پایه) باشد، نشان دهید

$$c_k(A) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k}} a^{j_1}_{i_1}\, a^{j_2}_{i_2} \cdots a^{j_k}_{i_k}\; \delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}$$

بنابراین ، اگر δ مثل در صفحهٔ تعریف گردد و A تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$ باشد، آنگاه تابع $p \mapsto c_k(A(p))$ را به صورت انقباض $(2k)$ تایی $A \otimes \cdots \otimes A \otimes \delta$ می‌توان تعریف نمود.

۱۵. گیریم $P(X_{ij})$ یک چند جمله‌ای با n^2 متغیر است. به ازاء هر ماتریس $n \times n$ چون $A(a_{ij})$، عدد $P(a_{ij})$ را به این ترتیب می‌توان تعریف کرد. یاد آور می شویم که P در صورتی **ناوردا** است که به‌ازاء هر A و هر ماتریس معکوس‌پذیر B داشته باشیم $P(A) = P(BAB^{-1})$ این مسألهٔ شمایی است از این حکم که هر P ناوردا به صورت چند جمله‌ای از چند جمله‌ایهای c_1، $\cdots$ و c_n معرفی شده در مسالهٔ ۱۴ هستند. به این حکم جبری نیاز داریم که چند جمله‌ای متقارن $Q(y_1, \cdots, y_n)$ با n متغیر y_1، $\cdots$ و y_n به صورت چند جمله‌ای از σ_1، $\cdots$ σ_n می‌توان نوشت، که σ_i عبارت از i امین چند جمله‌ای متقارن مقدماتی از y_1، $\cdots$ و y_n است.

یاد آور می‌شویم که σ_i ها را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد

$$\pi^n_{i=1}(y - y_i) = y^n - \sigma_1 y^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

بنابراین، صرف نظر از علامت σ_i ها ضرایب چند جمله‌ای با ریشه‌های y_1، $\cdots$ و y_n هستند. چون مقادیر ویژهٔ λ_1، $\cdots$ و λ_n هر ماتریس A بنا به تعریف، ریشه‌های چند جمله‌ای $X(\lambda)$ هستند، نتیجه می گیریم که

$$c_i(A) = \sigma_i(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

ابتدا ماتریسهای A روی اعداد مختلف $\mathcal{C}$ را در نظر می گیریم (ضرایب P ممکن است مختلط باشند).

الف) $Q(y_1, \cdots, y_n)$ را به صورت $P(A)$ تعریف می‌کنیم که A ماتریس نظری

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

است. در این صورت یک چند جمله‌ای R طوری وجود دارد که

$$Q(y_1, \cdots, y_n) = R(\sigma(y_1, \cdots, y_n), \cdots, \sigma_n(y_1, \cdots, y_n))$$

ب) چنانجه p با ضرایب حقیقی باشد، چند جمله‌ای R نیز هست.

ج) به ازاء هر ماتریس نظری A داریم $P(A) = R(c_1(A), \cdots, c_n(A))$.

د) مبین $D(A)$ به صورت $\pi_{i\neq j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$ تعریف می گردد، که λ_i ها مقادیر ویژهٔ A هستند. نشان دهید $D(A)$ را به صورت یک چند جمله‌ای از درآیه‌های A می‌توان نوشت.

ه) نشان دهید که هرگاه $D(A) \neq 0$، داریم $P(A) = R(c_1(A), \cdots, c_n(A))$. به کمک پیوستگی نتیجه بگیرید که تساوی برای همهٔ ماتریس‌های A روی $\mathcal{C}$ نیز درست است. (حتی اگر $\mathcal{C}$ را با هر میدان دیگر عوض کنیم، این استنتاج درست است، زیرا مجموعهٔ همهٔ A هایی که $D(A) \neq 0$ نسبت به توپولوژی زاریسکی چگال است).

حال فرض کنید ضرایب P حقیقی‌اند و به ازاء هر A ی حقیقی و هر B ی معکوس‌پذیر $P(A) = P(BAB^{-1})$.

و) همین معادله برای A ی مختلط و B ی مختلط معکوس‌پذیر درست است (معادله را به صورت n^2 معادلهٔ چند جمله‌ای بر حسب a_{ij} و b_{ij} در نظر بگیرید.

۱۶. الف) فرض کنید v_1، $\cdots$ و v_n پایه‌ای برای V است و $\omega_1, \cdots, \omega_2 \in V$ با $\omega_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} V_j$ هستند. نشان دهید که اگر $w \in \Omega * k(V)$، آنگاه

$$\omega(\omega_1, \cdots, \omega_k) = \sum_{I=i_1<\cdots<i_k} \alpha_I \omega(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})$$

که α_I دترمینان زیر ماتریس $k \times k$ از (α_{ij}) حاصل از حذف همهٔ سطرهای بجز سطرهای i_1، $\cdots$ و i_k است.

ب) قضیهٔ ۱.۳.۷ و نتیجهٔ ۲.۳.۷ را به حالت $k-$ فرم‌ها تعمیم دهید.

ج) مستقیماً از (ب) نتیجه بگیرید که تعریف d به دستگاه مختصات بستگی ندارد.

۱۷. نشان دهید $d(\sum_{i<j} \alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j)$ اگر و تنها اگر به ازاء هر i، j و k ای

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\alpha x^k} - \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x^i} = 0$$

۱۸. در مسالهٔ ۵—۱۴ عنصر $\mathcal{L}_X A$ را برای میدان تانسوری دلخواه A تعریف کردیم.

الف) نشان دهید که اگر ω یک $k-$ فرم باشد، آنگاه $\mathcal{L}_X w$ نیز هست.

ب) نشان دهید $\mathcal{L}_X(\omega_۱ \wedge \omega_۲) = \mathcal{L}_X\omega_۱ \wedge \omega_۲ + \omega_۱ \wedge \mathcal{L}_X\omega_۲$ ج) با استفاده از قسمت (ه) از مسالهٔ ۵—۱۴ نشان دهید

$$\begin{aligned} X(\omega(X_۱, \cdots, X_n)) &= \mathcal{L}_X(\omega(X_۱, \cdots, X_k)) \\ &= \mathcal{L}_X\omega(X_۱, \cdots, X_k) \\ &\quad + \sum_{\alpha=۱}^{k}(-۱)^{\alpha+۱}\omega([X, X_i], X_۱, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_k) \end{aligned}$$

د) دو فرمول زیر را اثبات کنید:

$$\begin{aligned} d\omega(X_۱, \cdots, X_{k+۱}) &= \sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\,\mathcal{L}_{X_i}\omega(X_۱, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{k+۱}) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-۱)^{i+j+۱}\omega([X_i, X_j], X_۱, \cdots, \hat{X}_i, \cdots \\ &\qquad \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{k+۱})\, d\omega(X_۱, \cdots, X_{k+۱}) \\ &= \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\{X_۱(\omega(X_۱, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{k+۱})) \\ &\qquad \mathcal{L}_{X_i}\omega(X_۱, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{k+۱}) \end{aligned}$$

ه) نشان دهید $X\rfloor d\omega = \mathcal{L}_X w - d(X\rfloor w)$ به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} d\omega(X_۱, \cdots, X_{k+۱}) &= (\mathcal{L}_{X_۱} w)(X_۲, \cdots, X_{k+۱}) \\ &\quad - d(X_۱\rfloor w)(X_۲, \cdots, X_{k+۱}) \end{aligned}$$

(این را به استقراء می‌توان استفاده کرده و تعریفی از d بدست آورد.)

و) با استفاده از (ه) نشان دهید که $d(\mathcal{L})_X = \mathcal{L}_X(d\omega)$.

۱۹. گیریم a_{ij} عبارت از $n^۲$ تابع بر R^n با $a_{ij} = a_{ji}$ باشند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه توابع $u_۱$، $\cdots$ u_n در یک همسایگی از هر نقطهٔ $\mathbb{R}$ به گونه‌ای یافت شوند که

$$a_{ij} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right\}$$

این است که به ازاء هر i، j و k ای

$$\frac{\partial^{2} a_{ij}}{\partial x^{k}\partial x^{\ell}}-\frac{\partial^{2} a_{ik}}{\partial x^{j}\partial x^{\ell}}=\frac{\partial^{2} a_{\ell j}}{\partial x^{k}\partial x^{i}}-\frac{\partial^{2} a_{\ell j}}{\partial x^{j}\partial x^{i}}$$

[راهنمایی : ابتدا معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزیی برای $f_{jk}\partial u_j\partial x^k - \partial u_k/\partial x^j$ را تشکیل داده و سپس از قضیهٔ ۲.۱.۶ استفاده کنید.]

۲۰. نشان دهید $\frac{xdy-ydx}{x^{2}+y^{2}}=$ "$d\theta$". (در بسیاری جاها θ برابر $\arctan(y/x)$ است بجز احتمالاً بعلاوهٔ یک ثابت.)

۲۱. الف) اگر ω یک فرم $f\,dx$ بر $[\circ;1]$ باشد، $f(\circ)=f(1)$ باشد، نشان دهید که یک عدد یکتا λ چنان وجود دارد که به ازاء یک تابع g با $g(\circ)=g(1)$ داریم $w-\lambda dx=dy$. [راهنمایی : معادلهٔ $w-\lambda dx=dy$ را بر $[\circ;1]$ انتگرال گرفته و λ رابیابید.]

ب) گیریم $i:S^{1}\to\mathbb{R}^{2}$ احتوی است و $\sigma'=i^{*}d\theta$. اگر $c:[\circ;1]\to S^{1}$ با ضابطه‌ی $c(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$ باشد، نشان دهید $c^{*}(\sigma')=dx$.

ج) اگر ω یک ۱− فرم بسته بر S^{1} باشد، نشان دهید عددی منحصر بفرد λ چنان وجود دارد که $w-\lambda\sigma'$ دقیق است.

۲۲. الف) نشان دهید که هر $w\in\Omega^{k}(V_{1}\oplus V_{2})$ را به صورت مجموع فرم‌های $\omega_{1}\wedge\omega_{2}$ می‌توان نوشت که ω_{1} از درجهٔ α و ω_{2} از درجهٔ $\beta=k-\alpha$ است و

اگر به ازاء یک i ای $v_i\in V_{2}$، آنگاه $\omega_{1}(v_{1},\cdots,v_{\alpha})=\circ$،

اگر به ازاء یک i ای $v_i\in V_{1}$، آنگاه $\omega_{2}(v_{1},\cdots,v_{\beta})=\circ$.

ب) اگر $\dim V_{2}=1$ و $\circ\neq\lambda\in V_{2}^{*}$، آنگاه ω را به صورتی یکتا به شکل $\omega_{1}+(\omega_{2}\wedge\lambda)$ می‌توان نوشت که ω_{1} یک $k-$ فرم است و ω_{2} یک $(k-1)-$ فرم است، به گونه‌ای که

اگر به ازاء یک i ای $v_i\in V_{2}$، آنگاه $\omega_{1}(v_{1},\cdots,v_{k})=\circ$،

اگر به ازاء یک i ای $v_i\in V_{2}$، آنگاه $\omega_{2}(v_{1},\cdots,v_{k-1})=\circ$.

۲۳. گیریم مجموعهٔ ستاره شکل نسبت به ∘ و باز است، و $H:[\circ;1]\to U$ را باضابطهٔ $H(p,t)=tp$ تعریف می‌کنیم. اگر

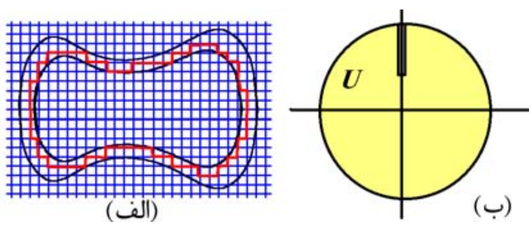
$$\omega=\sum_{i_{1}<\cdots<i_{k}}\omega_{i_{1}\cdots i_{k}}\,dx^{i_{1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k}}$$

بر U، نشان دهید

$$I(H^*\omega) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1}\omega_{i_1\cdots i_k}(tx)dt\right) x^{i\alpha} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

۲۴. الف) گیریم $U \subset \mathbb{R}^2$ یک مجموعهٔ باز کراندار است به گونه‌ای که $\mathbb{R}^2 - U$ همبند می‌باشد. نشان دهید U با $\mathbb{R}^2$ دیفئومورف است، و بنابراین به یک نقطه انقباض‌پذیر است. (عکس این مطلب در مسألهٔ ۸—۹ ثابت می‌شود.) [راهنمایی: U را به صورت اجتماعی صعودی از مجموعه‌هابنویسید، که k امین مجموعه برابر اجتماعی متناهی از مربع‌های شامل نقاطی در U باشد که فاصلهٔ $\leq \frac{1}{k}$ تالبهٔ U قرار دارند.] (به قسمت (الف) از شکل ۴.۷ توجه شود).

ب) مجموعهٔ باز کرانداری $U \subset \mathbb{R}^3$ چنان بیابید که $\mathbb{R}^3 - U$ همبند باشد، ولی U به هیچ نقطه‌ای انقباض‌پذیر نباشد.



شکل ۴.۷

۲۵. گیریم $U \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ ستاره شکل نسبت به ۰ و باز است. آیا U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است؟ (پاسخ این سؤال مثبت است ولی اثبات آن ساده نیست. زیرا، طول شعاع‌های واصل بین ۰ و مرز مجموعه ممکن است به شکل ناپیوسته تغییر کند.) (به قسمت (ب) از شکل ۴.۷ توجه شود).

۲۶. گیریم $\langle , \rangle$ ضرب داخلی معمولی در $\mathbb{R}^n$ است $\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

الف) اگر $v_1, \cdots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ نشان دهید برداری منحصر بفرد $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که به ازاء هر $w \in \mathbb{R}^n$ ای

$$\langle v_1 \times \cdots \times v_{n-1}, w\rangle = \det \begin{pmatrix} w \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

ب) نشان دهید $\times \cdots \times \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ و آنرا بر حسب e_i^* ها بسط دهید.

[راهنمایی: از بسط دترمینان بر حسب مینورها پیش استفاده کنید.]

ج) برای $\mathbb{R}^3$ نشان دهید که

$$v \times w = (v^2 w^3 - v^3 w^2, v^3 w^1 - v^1 w^3, v^1 w^2 - v^2 w^1)$$

[راهنمایی: ابتدا همهٔ $e_i \times e_j$ ها را بیابید.]

۲۷. الف) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ میدان برداری $\mathrm{grad}(f)$ (گرادیان f) بر $\mathbb{R}^n$ را به صورت

$$\mathrm{grad}(f) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} . \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} D_i f \frac{\partial}{\partial x^i}$$

تعریف می‌کنیم. با طرح نماد صوری $\nabla := \sum_{i=1}^{n} D_i \partial/\partial x^i$ می‌توانیم بنویسیم $\mathrm{grad}(f) = \nabla f$. اگر $f(p) = \omega_p$، نشان دهید $D_v f(p) = \langle v, w\rangle$، که $D_v f(p)$ مشتق استوادی f در نقطهٔ p و در راستای v است (چنانچه، فرض شود $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ آنگاه $(D_v f(p) = v_p(f)$). نتیجه بگیرید که $\nabla f(p)$ راستایی است که f در آن حداکثر تغییرات را در p انجام می‌دهد

ب) اگر $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial/\partial x^i$ میدانی برداری بر $\mathbb{R}^n$ باشد، دیورژانس X را به صورت $\mathrm{div} X = \sum_{i=0}^{n} \partial a/\partial x^i$ تعریف می‌کنیم. (به شکل نمادی می‌توانیم بنویسیم $\mathrm{div} X = \langle \nabla, X\rangle$.) همچنین، به ازاء $n = 3$ داریم (تعریف):

$$\begin{aligned} \mathrm{Curl}(X) &:= \nabla \times X \\ &:= \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned}$$

فرم‌های ω_X و η_X را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \omega_X &:= a^1 dx + a^2 dy + a^3 dz \\ \eta_X &:= a^1 dy \wedge dz + a^2 dz \wedge dx + a^3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

نشان دهید

$$df = \omega_{\mathrm{grad}(f)}, \qquad d(\omega_X) = \eta_{\mathrm{Curl}(X)}, \qquad d(\eta_X) = (\mathrm{div}X) dx \wedge dy \wedge dz.$$

ج) نتیجه بگیرید

$$\mathrm{Curl}(\mathrm{grad}(f)) = 0, \qquad \mathrm{div}(\mathrm{Curl}(X)) = 0.$$

د) اگر X میدانی برداری بر مجموعهٔ بازستاره شکل $U \subset \mathbb{R}^n$ باشد و $\mathrm{Curl}X = 0$، آنگاه به ازاء یک تابع $f : U \to \mathbb{R}$ ای به صورت مشابه، اگر $\mathrm{div}X = 0$ آنگاه به ازاء یک میدان برداری Y بر U ای $X = \mathrm{Curl}Y$.

فصل ۸

انتگرال‌گیری

۱.۸ انتگرال خط و سطح کلاسیک

مفهوم اصلی این فصل، تعمیم انتگرالهای خط و سطح است، که اول بار در عالم فیزیک مطرح شدند. مثلاً، فرض کنید $C : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ یک منحنی است و $\omega = f\,dx + g\,dy$ یک ۱-فرم بر $\mathbb{R}^2$ می‌باشد (که $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ و x و y توابع مختصاتی بر $\mathbb{R}^2$ هستند). افرازی $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ برای $[0; 1]$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت منحنی C به n قطعه تقسیم می‌شود که قطعهٔ i ام آن از $c(t_{i-1})$ تا $c(t_i)$ می‌باشد (به قسمت (الف) از شکل ۱.۸ توجه شود). در صورتی که تفاضلهای $t_i - t_{i-1}$ باندازهٔ کافی کوچک باشند، هر چنین قطعه‌ای را با یک پاره خط می‌توان تقریب زد: قطعهٔ i ام با پاره خطی تقریب می‌زنیم که تصویرافقی آن برابر $c^1(t_i) - c^1(t_{i-1})$ و تصویر عمودی آن $c^2(t_i) - c^2(t_{i-1})$ می‌باشد. نقاط $(C\xi_i)$ را بر هر قطعه با انتخاب $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ در نظر می‌گیریم. به ازاء هر افراز P و هر چنین انتخاب $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ مجموع

$$S(P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(c(\xi_i))[c^1(t_i) - c^1(t_{i-1})] + g(c(\xi_i))[c^2(t_i) - c^2(t_{i-1})]$$

را در نظر می‌گیریم. چنان ظرافت $\|P\|$ افراز P به صفر میل کند، یعنی ماکزیموم فواصل $t_i - t_{i-1}$ به صفر میل کنند، و این مجموعها به حدی مشخص همگرا شوند، مقدار حد را با $\int_c f\,dx + g\,dy$ نشان می‌دهیم. (این حد بسیار پیچیده است. به بیان دقیق تر، اگر

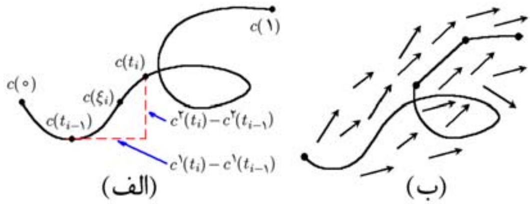
$\|P\| = \max_i\{t_i - t_{i-1}\}$ آنگاه تساوی

$$\lim_{\|P\|\longrightarrow 0} S(P,\xi) = \int_c f\,dx + g\,dy$$

یعنی: به ازاء هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ ای چنان یافت می‌شود که به ازاء همهٔ افرازهای P با $\|P\| < \delta$ و همهٔ انتخابهای ξ برای P، داشته باشیم

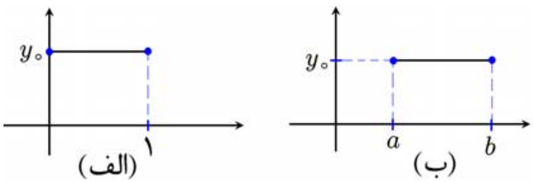
$$\left|S(P,\xi) - \int_c f\,dx - g\,dy\right| < \epsilon$$

که به وضوح بسیار پیچیده است.) حدی که به این ترتیب تعریف می‌گردد، **انتگرال خط** نامیده می شود؛ تعبیر فیزیکی روشنی دارد. اگر میدان نیروی $\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\dfrac{\partial}{\partial x} + g\dfrac{\partial}{\partial y}$ را در نظر بگیریم (به قسمت (ب) از شکل ۱.۸ توجه شود)، آنگاه $S(P,\xi)$ کار انجام شده توسط یک متحرک به جرم واحد در امتداد منحنی c است با این فرض که c بین هر t_{i-1} و t_i پاره خط است و f و g نیز بر آن پاره خط ثابت هستند؛ به این ترتیب، حد مذکور عملاً مقدار کار انجام شده در حالت کلی را محاسبه می‌کند. (از نقطه نظر کلاسیک، دیفرانسیل $f\,dx + g\,dy$ را به صورت کار انجام شده توسط میدان نیروبر



شکل ۱.۸

تغییر مکان بی‌نهایت کوچک با مؤلفه‌های dx و dy می‌باشد.)



شکل ۲.۸

قبل از اینکه بگوئیم این حد را در عمل چگونه محاسبه می‌کنیم، حالت خاص $c(t) = (t, y_0)$ را در نظر می‌گیریم (به قسمت (الف) از شکل ۲.۸ توجه شود). در این حالت

$c^1(t_i) - c^1(t_{i-1}) = t_i - t_{i-1}$ در حالی که $c^2(t_i) - c^2(t_{i_1}) = 0$ بنابراین

$$S(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, y_0)(t_i - t_{i-1})$$

به وضوح، این مجموعها به حد ذیل می‌گرایند:

$$\int_c f\,dx + g\,dy = \int_0^1 f(x,y_0)\,dx$$

از سوی دیگر، اگر $c(t) = (tb + (1-t)a, y_0)$ (به قسمت (ب) از شکل ۲.۸ توجه شود)، آنگاه $c^1(t_i) - c^1(t_{i-1}) = (b-a)(t_i - t_{i-1})$ و لذا

$$S(P,\xi) = (b-a).\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i b + (1-\xi_i)a; y_0)(t_i - t_{i-1})$$

این مجموعها نیز به حد زیر می گرایند

$$(b-a)\int_0^1 f(xb + (1-x)a, y_0)\,dx = \int_a^b f(x_{y_0})(t_i - t_{i-1})$$

در کل، با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، در مورد هر c دلخواه داریم

$$c^1(t_i) - c^1(t_{i-1}) = c^{1'}(\alpha_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \alpha_i \in [t_{i-1}; t_i]$$
$$c^1(t_i) - c^2(t_{i-1}) = c^{2'}(\beta_i)(t_i - t_{i-1}) \qquad \beta_i \in [t_{i-1}; t_i]$$

بنابراین

$$S(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \{f\,(c(\xi_i))c^{1'}(\alpha_i) + g(c(\xi_i))c^{2'}(\beta_i)\}(t_i - t_{i-1})$$

می‌شود نشان داد که این مجموع به چیزی شبیه خودش (مسألهٔ ۱) می‌گراید

$$\int_0^1 \left\{f\,(c(t))c^{1'}(t) + g(c(t))c^{2'}(t)\right\} dt$$

نمادگذاری فیزیکی، به یاد آوری این حکم را راحت‌تر می‌کند (به قسمت (الف) از شکل ۳.۸ توجه شود). چنانچه مؤلفه‌های c^1 و c^2 منحنی c را بترتیب با x و y نشان دهیم [یعنی، $x \circ c$ را با x و $y \circ y$ نشان دهیم!] [از نظر فیزیکی، گفته می‌شود $x = x(t)$ و $y = y(t)$]،انتگرال بالا را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\int_c f\,dx + g\,dy = \int_0^1 \left\{f(x,y)\frac{dx}{dt} + g(x,y)\frac{dy}{dt}\right\} dt$$

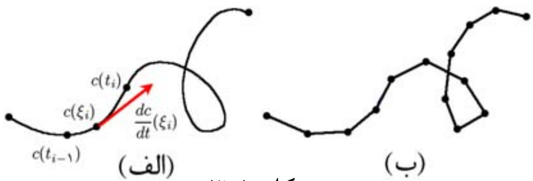
در مقابل تعبیر فیزیکی «انتگرال خط»، تعبیر هندسی‌تری می‌توانیم مطرح کنیم. یاد آور می‌شویم که $dc/dt(\xi_i)$ نمایشگر بردار مماس به c در لحظهٔ ξ_i است. در این صورت، روشن است که مجموعهای

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(c(\xi_i))\frac{dc}{dt}(\xi_i).(t_i-t_{i-1}) = \tag{۱.۸}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{f(c(\xi_i))c^{1'}(\xi_i)+g(c(\xi_i))c^{2'}(\xi_i)(t)\right\}dt$$

نیزبه همان انتگرال

$$\int_0^1\{f(c(t))c^{1'}(t)+g(c(t))c^{2'}(t)\}dt$$

می‌گراید. حالت خاصی که c بر هر بازهٔ (t_{i-1},t_i) با سرعت ثابت حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. در هر بازه عنصری $\xi_i\in(t_{i-1},t_i)$ ای انتخاب می‌کنیم (به قسمت (ب) از شکل ۳.۸ توجه شود). در این صورت



شکل ۳.۸

$$\begin{aligned}\text{سرعت ثابت بر } (t_{i-1};t_i) &= \text{طول } \frac{dc}{dt}(\xi_i)\\ &= \frac{1}{t_i-t_{i-1}}(\text{طول پاره خط از } c(t_{i-1}) \text{ تا } c(t_i))\end{aligned}$$

در نتیجه

$$(\text{طول پاره خط از } c(t_{i-1}) \text{ تا } c(t_i)) = \left(\text{طول } \frac{dc}{dt}(\xi_i)\right).(t_i-t_{i-1})$$

در این حالت،

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\text{طول } \frac{dc}{dt}(\xi_i)\right).(t_i-t_{i-1})$$

طول c است، و در نتیجه، مجموع (۱.۸) چنانچه همگرا باشد، به **طول** c میل می‌کند. این را تعریف طول c می‌گیریم. به عبارت دیگر، انتگرال خط

$$\int_c \omega = \text{حد مجموعهای در (۱.۸)}$$

را به صورت طول c می‌توان تعبیر نمود، مشروط به آنکه خطکش به صورت پیوسته به طریقی که ω مشخص می‌کند. تغییر کند: توجه شود که تحدید $\omega(c(t))$ به زیر فضای یک بعدی تولید شده توسط dc/dt از $T_{c(t)}\mathbb{R}^۲$ برابر یک ثابت ضرب «در طول جهت‌دار» است. طریق طبیعی مشخص کردن یک تغییر پیوستهٔ طول در امتداد c، تعیین طول بر هر یک از بردارهای مماسش می‌باشد: این بیان امروزی مفهوم کلاسیکی است که چنین اظهار می‌دارد: چنانچه c را به بی‌نهایت قعطهٔ کوچک تقسیم کنیم، تکهٔ بی‌نهایت کوچک در نقطهٔ $c(t)$ و با مؤلفه‌های dx و dy بطول $f(c(t))\,dx + g(c(t))\,dy$ می‌باشد.

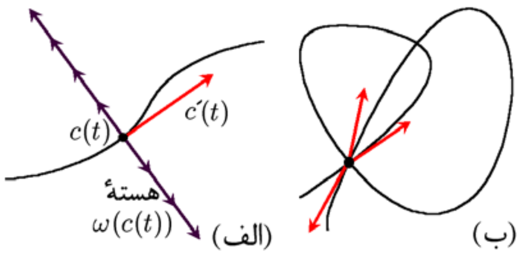
پیش از آنکه به تعابیر هندسی بیشتری بپردازیم، متذکر می‌شویم که هیچ ۱−فرم ω بر $\mathbb{R}^۳$ وجود ندارد که

$$\int_c \omega = c \text{ طول} \qquad \text{به ازاء هر منحنی } c \text{ ای}$$

ثابت می‌شود که به ازاء منحنی یک به یک c، فرمی ω می‌توان ساخت که در مورد c در رابطهٔ بالا صدق می کند؛ $\omega(c(t)) \in \Omega^۱(T_{c(t)}\mathbb{R}^۲)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\omega(c(t)) = \left(\frac{dc}{dt}\right) = ۱$$

(به قسمت (الف) از شکل ۴.۸ توجه شود) (با انتخاب هستهٔ ω دلخواه) و سپس توسیع ω به $\mathbb{R}^۲$ تعمیم داده می‌شود. اما اگر c یک به یک نباشد، این کار ممکن نیست؛ مثلاً، در حالتی که در شکل مقابل است، هیچ عنصری از $\Omega^۱(T_{c(t)}\mathbb{R}^۲)$ وجود ندارد که بر هر سه بردار مورد نظر با مقدار یک باشد (به قسمت (ب) از شکل ۴.۸ توجه شود).



شکل ۴.۸

در کل، به ازاء هر ω دلخواه بر $\mathbb{R}^۲$ که در همه جا ناصفر است، زیر فضاهای «هستهٔ $\omega(p)$ = Δ_p» توزیعی یک بعدی بر $\mathbb{R}^۲$ تشکیل می‌دهند؛ هر منحنی واقع در یک زیر منیفلد انتگرال برای Δ، الزاماً بطول صفر است. بعداً خواهیم دید که اگر مایل به محاسبهٔ طول معمولی یک منحنی باشیم، این مشکل قابل رفع است. فعلاً، متذکر

می‌شویم که اگر c یک منحنی در منیفلدی مفروض چون M باشد (که بر آن مفهوم طول وجود ندارد) و ω یک ۱–فرم بر M باشد، مجموعهای بشکل (۱.۸) با معنی هستند، و بنابراین $\int_c \omega$ را بصورت حد این مجموعها می‌توان تعریف نمود.

اکنون ویژگی‌ای از انتگرال خط را مطرح می‌کنیم که از دید تعریف اولیه بدیعی است و بعلاوه برای تعریف جدید نیز درست می‌باشد. اگر $p : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ تابعی صعودی و یک به یک از $[0;1]$ بروی $[0;1]$ باشد، آنگاه منحنی $c \circ p : [0;1] \longrightarrow M$ را **تجدید پارامتره شدهٔ** c می‌نامیم (برد این منحنی برابر برد همان c است، ولی با ضابطهٔ احتمالاً متفاوتی حرکت می‌کند. به وضوح، هر مجموع $S(P,\xi)$ برای c با مجموعی $S(P',\xi')$ برای $c \circ p$ برابر است، و بالعکس، از تعریف اولیهٔ ما معلوم است که به ازاء هر منحنی $c : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ داریم

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega$$

(انتگرال ω بر c از تجدید پارامتر مستقل است). این مطلب هنگامی که در مورد منحنی به شکل $c : [0;1] \longrightarrow M$ در نظر گرفته شود، چندان واضح به نظر نمی‌رسد. در حالی که در مورد منحنی به شکل $c[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ کار دشواری نیست. در حالت مجموعهای (۱.۸) به حدی چون

$$\int_0^1 \left\{ f(c(t))c^{1\prime}(t) + g(c(t))c^{2\prime}(t) \right\} dt$$

میل می‌کنند. سپس حکم مورد نظر از حسابان نتیجه می‌گردد: با جایگذاری $t = p(u)$ داریم

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\{ f(c(t))c1'(t) + g(c(t))c^{2\prime}(t) \right\} dt = \\
&= \int_{p^{-1}(0)}^{p^{-1}(1)} \left\{ f(c(p)(u))c^{1\prime}(p(u)) + g(c(p(u)))c^{2\prime}(p(u)) \right\} p'(u)\, du \\
&= \int_0^1 \left\{ f(c \circ p(u))(c \circ p)^{1\prime}(u) + g(c \circ p)^{2\prime}(u) \right\} du
\end{aligned}$$

در مورد یک منحنی c در $\mathbb{R}^n$ و یک ۱–فرم $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, dx^i$، محاسبات مشابهی قابل اجرا است؛ در مورد منیفلد دلخواه M، می‌توانیم دستگاهی مختصاتی برای انجام محاسبات چنان انتخاب کنیم که $c([0;1])$ را در بر داشته باشد و یا حداقل قسمتی از آن را قطع کند. در حالت اخیر محاسبات به چند محاسبهٔ مشابه (بر دستگاههای مختلف)

شکسته می‌شود. اکنون بر آنیم تا تعریف سومی را مطرح کنیم، که انتخاب عملی ما می‌باشد. باز هم حالت یک ۱–فرم ω بر $\mathbb{R}^۲$ را در نظر بگیرید، که

$$\int_c \omega = \int_۰^۱ \left\{ f(c(t))c^{۱'}(t) + g(c(t))c^{۲'}(t) \right\} dt$$

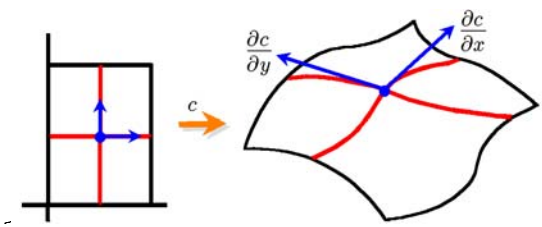
توجه شود که اگر t دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه در مورد نگاشت $c : [۰;۱] \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ داریم

$$\begin{aligned} c^*(f\,dx + g\,dy) &= (f \circ c)c^*(dx) + (g \circ c)c^*(dy) \\ &= (f \circ c)\,d(x \circ c) + (g \circ c)\,d(y \circ c) \\ &= (f \circ c)c^{۱'}(t)dt + (g \circ c)c^{۲'}(t)\,dt \end{aligned}$$

بنابراین، از نقطه نظر سوری، عملاً از $c^*(f\,dx + g\,dy)$ انتگرال گرفته می‌شود؛ به بیان دقیق‌تر، می‌نویسیم $c^*(f\,dx + g\,dy) = hdt$ (که تنها به یک صورت ممکن است) و سپس از h بر $[۰;۱]$ انتگرال می‌گیریم.

هر چه در مورد منحنیهای $c : [۰;۱] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ گفتیم، در مورد توابع تعمیم یافتهٔ $c : [۰;۱]^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نیز می‌توان مطرح نمود. اگر x و y توابع مختصاتی بر $\mathbb{R}^۲$ باشند، فرض می‌کنیم

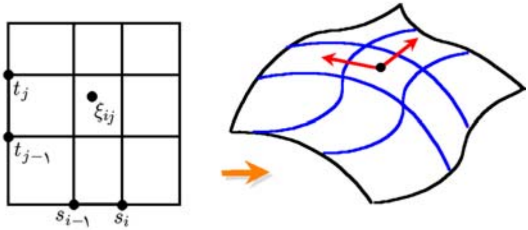
$$\frac{\partial c}{\partial x} = c_*\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \;\; , \;\; \frac{\partial c}{\partial y} = c_*\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$



شکل ۵.۸

به ازاء هر دو افراز $s_۰ < \cdots < s_m$ و $t_۰ < \cdots < t_n$ از $[۰;۱]$، چنانچه $\xi_{ij} \in [s_{i-۱};s_i] \times [t_{j-۱},t_j]$ و ω یک ۲–فرم بر $\mathbb{R}^n$ باشد، داریم: مجموع

$$\omega(c(\xi_{ij}))\Big(\frac{\partial c}{\partial x}(\xi_{ij}), \frac{\partial c}{\partial y}(\xi_{ij})\Big)(s_i - s_{i-۱})(t_j - t_{j-۱})$$



شکل ۶.۸

برابر مساحت تعمیم یافتهٔ متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط بردارهای $\frac{\partial c}{\partial x}(\xi_{ij})$ و $\frac{\partial c}{\partial y}(\xi_{ij})$ است. حد مجموع این جملات را به عنوان «مساحت تعمیم یافتهٔ c» می‌توان دانست. برای کوتاه کردن این داستان، بهتر است چند تعریف رسمی بیاوریم.

۲.۸ انتگرال بر k–مکعب تکین

تابع $M \longrightarrow [0;1] : c$ را در صورتی k–**مکعب تکین** در M گوئیم که هموار باشد. اصطلاح **تکین** بر این نکته اشاره دارد که لزومی به یکبیک بودن c نیست. فرض می‌کنیم (قرارداد) که $\mathbb{R}^0\{0\} \in \mathbb{R} = [0,1]^0$ و بنابراین، ۰–مکتب تکین c، به معنی مشخص کردن نقطه‌ای $c(0) \in M$ بخصوص است. نگاشت احتوای از $[0;1]^k$ در $\mathbb{R}^k$ را با نماد $I^k : [0;1]^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ نشان می‌دهیم و به آن k–**مکعب استاندارد** می‌گوئیم.

اگر ω یک k–فرم بر $[0;1]^k$ و x^1، $\cdots$ و x^1 توابع مختصاتی باشند، آنگاه ω را به صورتی یکتا به شکل $\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ می‌توان نوشت. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\int_{[0;1]^k} f := \int_{[0;1]^k} f(x^1,\cdots,x^k)\,dx^1\cdots dx^k$$

که انتگرال آخری به معنی کلاسیک آن است.

اگر ω یک k–فرم بر M و c یک k–مکعب تکین در M باشد، تعریف می‌کنیم

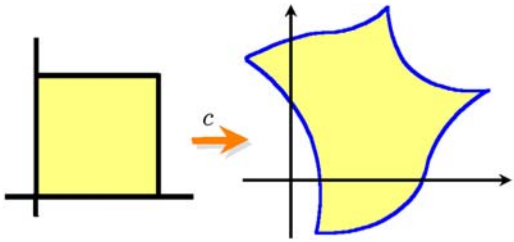
$$\int_c \omega := \int_{[0;1]^k} c^*\omega$$

که سمت راستی را چند خط بالاتر تعریف نمودیم. در مورد $k = 0$، تعریفی خاص داریم: ۰–فرم به معنی یک تابع است و برای هر ۰–مکعب تکین تعریف می‌کنیم

$$\int_c f = f(c(0))$$

۱.۲.۸ گزاره. گیریم $c : [\circ; 1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک n–مکعب تکین و یکبیک است که $\det c' \geq \circ$ بر $[\circ; 1]^n$. گیریم ω یک n–فرم $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ است. در این صورت

$$\int_c \omega = \int_{c([\circ;1]^n)} f$$



شکل ۷.۸

اثبات: بنا به تعریف

$$\begin{aligned}\int_c \omega &= \int_{[\circ;1]^n} c^*(\omega)\\ &\overset{(1)}{=} \int_{[\circ;1]^n} (f \circ c)(\det c')\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\\ &\overset{(2)}{=} \int_{[\circ;1]^n} (f \circ c)|\det c'|\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\\ &\overset{(3)}{=} \int_{c([\circ;1]^n)} f\end{aligned}$$

توضیح اینکه در (۱) از قضیهٔ ۱.۳.۷، در (۲) از تعریف و در (۳) از قاعدهٔ تغییر متغیر استفاده شده است. □

۲.۲.۸ نتیجه. گیریم $p : [\circ; 1]^k \longrightarrow [\circ; 1]^k$ نگاشتی یکبیک و پوشا است که $\det p' \geq \circ$ گیریم c یک k–مکعب تکین در M است و ω یک k–فرم در M می‌باشد. در این صورت

$$\int_c \omega = \int_{c\circ p} \omega$$

اثبات: داریم

$$\int_{c\circ p}\omega=\int_{[\circ;\text{۱}]^k}(c\circ p)^*\omega=\int_{[\circ;\text{۱}]^k}p^*(c^*\omega)\overset{(\text{۱})}{=}\int_{[\circ;\text{۱}]^k}c^*(\omega)$$

توضیح اینکه در (۱) از از پوشایی p و گزاره بالا استفاده شده است. □

نگاشت $c\circ p:[\circ;\text{۱}]^k\longrightarrow M$ را در صورتی **تجدید پارامتر** c گوئیم که $p:[\circ;\text{۱}]^k\longrightarrow[\circ;\text{۱}]^k$ نگاشتی یکبیک، پوشا، هموار و با $\det p'\neq\circ$ باشد، (بنابراین، $p^{-\text{۱}}$ نیز هموار است)؛ این را در صورتی **حافظ جهت** یا **جهت برگردان** گوئیم که به ترتیب، در همه جا $\det p'>\circ$ یا در همه جا $\det p'<\circ$ باشد. نتیجه نشان می‌دهد که انتگرال ω بر c مستقل از تجدید نظرهای حافظ جهت است؛ روشن است که تجدید پارامتر جهت برگردان، علامت انتگرال را عوض می‌کند. توجه شود که اگر سعی کنیم انتگرال یک تابع هموار $f:M\longrightarrow M$ بر منحنی c را به صورت

$$\int_{[\circ;\text{۱}]^k}f\circ c$$

تعریف کنیم، حکم مشابه نتیجهٔ ۲.۲.۸ در این حالت غلط خواهد بود. مثلاً اگر $c:[\circ;\text{۱}]\longrightarrow M$، آنگاه در حالت کلی

$$\int_\circ^{\text{۱}}f(c(p(t)))dt\quad,\quad\int_\circ^{\text{۱}}f(c(t))dt$$

متفاوتند. از دیدگاه نظری، چیزهایی که از آنها می‌توان انتگرال گرفت، فرمهای دیفرانسیل هستند، زیرا به شکل صحیح تبدیل می‌شوند (یعنی، بر طبق قضیهٔ ۱.۳.۷، فرمول تغییر متغیر برقرار است)؛ از توابع بر منیفلدها نمی‌توان انتگرال گرفت (تنها از یک تابع f بر منیفلد $\mathbb{R}^k$ می‌توان انتگرال گرفت، چرا که موجب فرم دیفرانسیل $f\,dx^{\text{۱}}\wedge\cdots\wedge dx^k$ بر $\mathbb{R}^k$ می‌شود).

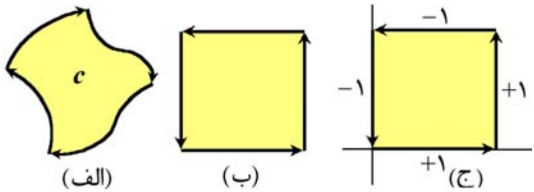
۳.۸ انتگرال بر k–زنجیر

تعریف انتگرال یک k–فرم ω روی یک k–مکعب تکین c را بی‌درنگ می‌توان تعمیم داد. منظور از k–**زنجیر** مجموعی صوری (و متناهی) از k–مکعبهای تکین ضرب در اعداد صحیح است. به عبارت دیگر، عباراتی نظیر $\text{۳}c_{\text{۳}}+\text{۲}c_{\text{۲}}-\text{۱}.c_{\text{۱}}$. k–زنجیر $\text{۱}.c_{\text{۱}}$ را به صورت ساده‌تر $c_{\text{۱}}$ نیز می‌توان نوشت. k–زنجیرها را به شکل کاملاً صوری می‌توان با هم جمع و یا عددی را در آنها ضرب نمود. نظیر

$$\text{۲}(c_{\text{۱}}+\text{۳}c_{\text{۴}})+(-\text{۲})(c_{\text{۱}}+c_{\text{۲}}+c_{\text{۳}})=-\text{۲}c_{\text{۲}}-\text{۲}c_{\text{۳}}+\text{۶}c_{\text{۴}}$$

به علاوه، انتگرال ω بر k–زنجیر به شکل $c = \sum_i a_i c_i$ را به صورت بدیهی تعریف می‌کنیم:

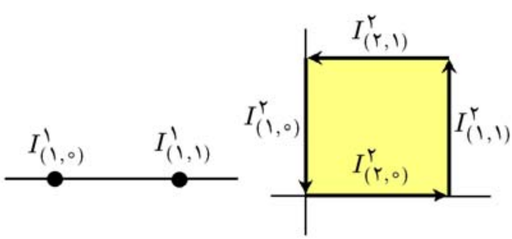
$$\int_{\Sigma_i a_i c_i} \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega$$



شکل ۸.۸

دلیل طرح k–زنجیر این است که به هر k–زنجیر c (که می‌تواند تنها یک k–مکعب باشد) یک $(k-1)$–زنجیر ∂c به نام مرز c می‌توانیم نظیر کنیم که برابر مجموع $(k-1)$–مکعبهای در سراسر مرز هر یک از k–مکعبهای در c فرض می‌شود. به ویژه، به شکل خیلی روشن می‌توان این ایده را اصلاح نمود. مثلاً، مرز I^2 به صورت مجموع چهار ۱–مکعب تکین مشخص شده در شکل سمت چپ نیست، بلکه بایستی ضریب متناظر در سمت راست را اعمال کرد. (توجه شود که این کار باعث تغییر انتگرال یک ۱–فرم روی ∂I^2 را تغییر نمی‌دهد.) به ازاء هر i با $1 \leq i \leq n$، ابتدا دو $(n-1)$–مکعب تکین $I^n_{(i,0)}$ و $I^n_{i,0}$ (به نام $(i, 0)$–وجه $(i, 1)$–وجه I^n) به شکل زیر تعریف می‌کنیم: اگر $[0; 1]^{n-1}$، آنگاه

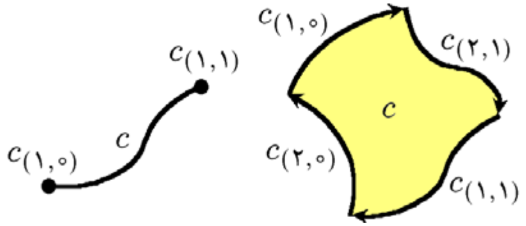
$$\begin{aligned}
I^n_{(i,0)}(x) &= I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1}) \\
&= (x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1}) \\
I^n_{(i,1)}(x) &= I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1}) \\
&= (x^1, \cdots, x^{i-1}, 1, x^i, \cdots, x^{n-1})
\end{aligned}$$



شکل ۹.۸

به این ترتیب، (i,α)–وجه n–مکعب تکین c را به صورت $c_{i,\alpha} = c \circ (I^n_{i,\alpha})$ تعریف می‌کنیم. اکنون، تعریف می‌کنیم

$$\partial c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$



شکل ۱۰.۸

سرانجام، مرز n–زنجیر $\sum_i a_i c_i$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

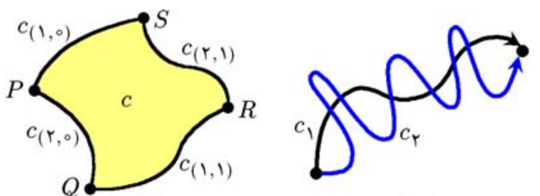
$$\partial(\sum_i a_i c_i) = \sum_i a_i \partial(c_i) = \sum_i a_i$$

تمام این تعاریف در مورد $n \geq 1$ با معنی هستند. در حال ۰–مکعب $c : [0,1]^0 \longrightarrow M$، که ما اغلب آن را با تک نقطهٔ $p = c(0)$ یکی می‌گیریم، ∂c را عدد $1 \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم؛ و در مورد ۰–زنجیر $\sum_i a_i c_i$ تعریف می‌کنیم

$$\partial(\sum_i a_i c_i) = \sum_i a_i \partial(c_i) = \sum_i a_i$$

توجه شود که در مورد ۱–مکعب $c : [0,1] \longrightarrow M$ داریم $\partial c = c_{(1,1)} - c_{(1,0)}$ بنابراین $\partial(\partial c) = 1 - 1 = 0$. همچنین، در مورد ۲–مکعب تکین $c : [0;1]^2 \longrightarrow M$ ملاحظه می‌گردد که

$$\partial c = c_{(1,1)} - c_{(2,1)} - c_{(1,0)} + c_{(2,0)}$$
$$\partial(\partial c) = (R-Q) - (R-S) - (S-P) + (Q-p)$$



(الف) (ب)

شکل ۱۱.۸

به کمک ترسیم شکل (نظیر قسمت (الف) از شکل ۱۱.۸) می‌توان ملاحظه کرد که همین مطلب برای هر ۳–مکعب تکین صحیح است. تجسم اینکه مرز یک ۳–مکعب چه می‌تواند باشد، تمرین خوبی است. در کل، داریم:

۱.۳.۸ گزاره. اگر c یک n–مکعب دلخواه در M باشد، آنگاه $\partial(\partial c) = 0$ به اختصار $\partial^2 = 0$.

اثبات: گیریم $1 \leq j \leq n-1$ و $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ را در نظر می‌گیریم. در مورد $x \in [0;1]^{n-2}$ به کمک تعریف داریم

$$
\begin{aligned}
(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)) \\
&= I^n_{(i,\alpha)}(x^1, \cdots, x^{j-1}, \beta, x^j, \cdots, x^{n-2}) \\
&= I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \cdots, x^{j-1}, \beta, x^j, \cdots, x^{n-2})
\end{aligned}
$$

به صورت مشابه

$$
\begin{aligned}
(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} &= I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)) \\
&= I^n_{(j+1,\beta)}(x^1, \cdots, x^{i-1}, \alpha, x^i, x^{n-2}) \\
&= I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \cdots, x^{j-1}, \beta, x^j, \cdots, x^{n-2})
\end{aligned}
$$

بنابراین، به ازاء هر $1 \leq j \leq n-1$ داریم $(I^n)_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$. از این مطلب به سادگی نتیجه می‌گردد که به ازاء هر n–مکعب تکین c و به ازاء هر $i \leq j \leq n-1$ داریم

$$(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$$

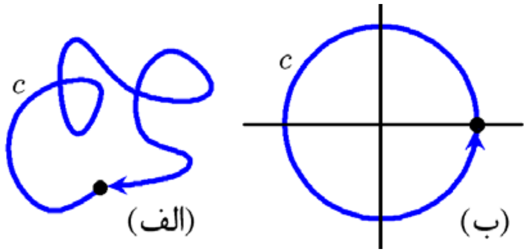
به این ترتیب

$$
\begin{aligned}
\partial(\partial c) &= \partial\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=0,1} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}
\end{aligned}
$$

در این مجموع $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ و $(c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ با علامت متفاوت ظاهر می‌شوند. بنابراین، همهٔ جملات دو به دو حذف می‌شوند و در نتیجه $\partial(\partial c) = 0$. چون قضیه برای

n−مکعبهای تکین درست است، به وضح برای کلیهٔ n−زنجیرهای تکین نیز درست است. □

توجه کنید که ممکن است برای یک n−زنجیر c نه فقط $\partial(\partial c) = 0$ بلکه $\partial c = 0$. مثلاً، چنانچه $c = c_1 - c_2$ که c_1 و c_2 دو ۱−مکعب با $c_1(0) = c_2(0)$ و $c_1(1) = c_2(1)$ باشند، این وضع رخ می‌دهد (به قسمت (الف) از شکل ۱۱.۸ توجه شود). اگر c تنها یک ۱−مکعب تکین باشد، آنگاه $\partial c = 0$ تنها در صورتی ممکن است که $c(0) = c(1)$؛ به بیان دیگر c منحنی بسته باشد. در کل، k−زنجیر c را در صورتی **بسته** گوئیم که $\partial c = 0$ (به قسمت (الف) از شکل ۱۲.۸ توجه شود).



شکل ۱۲.۸

۴.۸ قضیهٔ استوکس

یادآور می‌شویم که فرم دیفرانسیل ω با $d\omega = 0$ را نیز **بسته** می‌نامیم؛ این اصطلاح در راستای اصطلاح مشابه در مورد زنجیرها انتخاب شده است (از سوی دیگر، هر زنجیر به شکل ∂c را بر طبق این روند به صورت کلاسیک **دقیق** نمی‌گویند، بلکه اصطلاح **مرز** در این مورد استفاده می‌شود). این اصطلاحات موازی نه به خاطر تشابه ظاهری d و ∂ است، بلکه به واسطهٔ وجود روابط $d^2 = 0$ و $\partial^2 = 0$ می‌باشد. ارتباط بین فرم و زنجیر عمیق‌تر از این است. مثلاً، ملاحظه کردیم که بر $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ یک ۱−فرم $d\theta$ بسته ولی غیر دقیق وجود دارد. همچنین، یک ۱−زنجیر c وجود دارد که بسته است ولی مرز نیست، یعنی، یک منحنی بستهٔ در $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ که مبداء را دور می‌زند. البته، از نظر شهودی روشن است که c مرز هیچ ۲−زنجیر در $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ نیست. ولی اثبات دقیق آن عملاً به معنی اثبات مجدد حکم زیر درخصوص رابطهٔ بین d و ∂ به شرح زیر است (به قسمت (ب) از شکل ۱۲.۸ توجه شود).

۱.۴.۸ قضیه (قضیهٔ استوکس). اگر ω یک $(k-۱)$–بر M و c یک k–زنجیر در M باشد، آنگاه $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

اثبات: قسمت اعظم اثبات در ارتباط با حالت خاصی است که ω یک $(k-۱)$–فرم بر $\mathbb{R}^k$ است و نیز $c = I^k$. در این حالت، ω مجموعی از $(k-۱)$–فرمهای به شکل

$$f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

هستند، و لذا کافی است قضیه برای هر یک از اینها اثبات گردد. اکنون محاسبه می‌کنیم. ابتدا، با کمی ترجمهٔ نمادها ملاحظه می‌گردد که

$$\int_{[۰;۱]^{k-۱}} I^{k^*_{(j,\alpha)}}(f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge (dx^k)) =$$
$$= \begin{cases} ۰ & \text{اگر } j \neq i \\ \int_{[۰;۱]^k} f(x^۱, \cdots, \alpha, \cdots, x^k)\, dx^۱ \cdots dx^k & \text{اگر } j = i \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^k} f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k &= \\ &= \sum_{j=۱}^{k} \sum_{\alpha=۰,۱} (-۱)^{j+\alpha} \int_{[۰;۱]^{k-۱}} I^{k^*_{(j,\alpha)}}(f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= (-۱)^{i+۱} \int_{[۰;۱]^k} f(x^۱, \cdots, ۱, \cdots, x^k)\, dx^۱ \cdots dx^k \\ &\quad + (-۱)^i \int_{[۰;۱]^k} f(x^۱, \cdots, ۰ \cdots, x^k)\, dx^۱ \cdots dx^k \end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} \int_{I^k} d(f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) &= \\ &= \int_{[۰;۱]^k} D_i f\, dx^i \wedge dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= (-۱)^{i-۱} \int_{[۰;۱]^k} D_i f \end{aligned}$$

بنا به قضیهٔ فوبینی و نیز قضیهٔ بنیادی حسابان، داریم

$$\int_{I^k} d(f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^k) =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{i-1}\int_0^1 \cdots (\int_0^1 D_i f(x^1,\cdots,x^k)\,dx^i)\,dx^1\cdots\widehat{dx}^i\cdots dx^k\\
&= (-1)^{i-1}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big\{f(x^1,\cdots,1,\cdots,x^k)\\
&\qquad -f(x^1,\cdots,0,\cdots,x^k)\Big\}\,dx^1\cdots\widehat{dx}^i\cdots dx^k\\
&= (-1)^{i-1}\int_{[0;1]^k} f(x^1,\cdots,1,\cdots,x^k)\,dx^1\cdots dx^k\\
&\qquad (-1)^i\int_{[0;1]^k} f(x^1,\cdots,0,\cdots,x^k)\,dx^1\cdots dx^k
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k}\omega$$

در مورد، یک k–مکعب تکین دلخواه، با توجه به تعریف داریم

$$\int_{\partial c}\omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega$$

بنابراین

$$\int_c d\omega = \int_I c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c}\omega$$

اکنون، به وضوح قضیه برای k–زنجیر دلخواه نیز نتیجه می‌گردد. $\square$

توجه شود که قضیهٔ استوکس تنها به کمک قضیهٔ بنیادی حسابان اثبات گردید، وی در حالت خاص $c = I^1$ و $\omega = f$، عملاً به همان قضیه منتهی می‌شود.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ استوکس، نشان می‌دهیم که منحنی $c : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ با ضابطهٔ $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ با اینکه بسته است، به ازاء هیچ ۲–زنجیر c^2 ای ∂c^2 نیست. چنانچه $c = \partial c^2$، بایستی داشته باشیم

$$\int_c d\theta = \int_{\partial c^2} d\theta = \int_{c^2} d(d\theta) = \int_{c^2} 0 = 0$$

اما محاسبهٔ مستقیم (که به خودی خود مهم است) نشان می‌دهد که

$$\int_c d\theta = \int_c \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi$$

(استدلال غیر محاسباتی در این زمینه نیز وجود دارد، که در آن از این واقعیت استفاده می شود که $d\theta$ واقعاً به ازاء یک $\theta : \mathbb{R}^2 - ([1;\infty)\times\{0\})$ ای به شکل $d\theta$ است: داریم

$$\int_{c|[\epsilon;1-\epsilon]} d\theta = \theta(1-\epsilon) - \theta(\epsilon)$$

و $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow ۰} (\theta(۱-\epsilon)-\theta(\epsilon)) = ۲\pi$.)

در حالی که از این اثبات برای نشان دادن مرز نبودن c استفاده کردیم، از آن برای نشان دادن اینکه $\omega =$ "$d\theta$" دقیق نیست نیز می‌توان بهره برد. زیرا، اگر به ازاء یک تابع هموار $f : \mathbb{R}^۲ - \{۰\} - \mathbb{R}$ ای $\omega = df$، آنگاه بایستی داشته باشیم

$$۲\pi = \int_c \omega = \int_c df = \int_{\partial c} f = \int_۰ f = ۰$$

قبلاً با استدلال ساده‌تری قادر به اثبات دقیق نبودن "$d\theta$" بودیم، اما قضیهٔ استوکس ابزاری است که ما را قادر به پرداختن به فرمهای بر $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ می‌سازد. مثلاً، قادر به طرح ۲−فرم ω بر $\mathbb{R}^۳ - \{۰\}$ هستیم که بسته است ولی دقیق نیست:

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{۳/۲}}$$

در حال حاضر منشاء ظهور ω را مخفی نگه می‌داریم، ولی با محاسبهٔ مستقیم می‌توان نشان داد که $d\omega = ۰$. برای اثبات اینکه ω دقیق نیست، از آن بر یک ۲−زنجیر که قادر به نمایش ۲−کره $\mathbb{S}^۲ \subseteq \mathbb{R}^۳ - \{۰\}$ است، انتگرال می‌گیریم. روشهای متعددی برای این کار وجود دارد، ولی نتیجهٔ همهٔ آنها یکی است. در واقع، ابتدا می‌خواهیم روشی برای انتگرال‌گیری از n−فرمها روی n−منیفلدها را تشریح کنیم. این تنها وقتی ممکن است که M جهت‌پذیر باشد؛ دلیل این مطلب از حکم بعدی که برای تعریف ما اساسی است، روشن می‌باشد.

۵.۸ انتگرال بر منیفلد

۱.۵.۸ قضیه. گیریم M یک n−منیفلد همراه با جهت μ است، و $c_۱, c_۲ : [۰;۱]^n \longrightarrow M$ دو n−زنجیر تکین هستند که آنها را به دیفیومورفیسمهای در همسایگیهای از $[۰;۱]^n$ می توان توسیع داد. فرض کنید $c_۱$ و $c_۲$ حافظ جهت هستند (نسبت به جهت μ بر M و جهت معمولی بر $\mathbb{R}^n$). اگر ω یک n−فرم بر M باشد به گونه‌ای که

$$\sup(\omega) \subseteq c_۱([۰;۱]^n) \cap c_۲([۰;۱]^n)$$

آنگاه

$$\int_{c_۱} \omega = \int_{c^۲} \omega$$

اثبات: از نتیجهٔ ۲.۲.۸ می‌توانیم استفاده کنیم، و بنویسیم

$$\int_{c^{2}} \omega = \int_{c_2 \circ (c_2^{-1} \circ c_1)} \omega = \int_{c_1} \omega$$

تنها مشکل این است که $c_2^{-1} \circ c_1$ بر کل $[0;1]^n$ تعریف نمی‌شود (چون c_1 و c_2 هر دو حافظ جهت هستند، داریم $\det(c_2^{-1} \circ c_1)' \geq 0$). اما، با کمی توجه به اثبات نتیجهٔ ۲.۲.۸ نشان می‌دهد که چون $\sup(\omega)$ هم در $c_1([0;1]^n)$ قرار دارد و هم در $c_2([0;1]^n)$، این قضیه از نتیجهٔ ۲.۲.۸ قابل استنتاج است.

عدد مشترک $\int_c \omega$ برای n–مکعبهای تکین $M \longrightarrow c : [0;1]^n$ با $\sup \omega \subseteq c([0;1]^n)$ و حافظ جهت، را با $\int_M \omega$ نشان می‌دهیم. اگر ω یک n–فرم دلخواه بر M باشد، آنگاه پوششی V برای M به وسیلهٔ مجموعه‌های باز U وجود دارد، که هر یک در یک $c([0;1]^n)$ ای قرار دارد، که c یک n–مکعب از این قسم است؛ اگر Φ افرازی یکانی و زیردست این پوشش باشد، آنگاه $\int_M \varphi.\omega$ برای هر φ از Φ قابل تعریف است. می‌خواهیم تعریف کنیم

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi.\omega$$

این تعریف را تنها وقتی می‌توانیم بپذیریم که ω با محمل فشرده باشد، که در این حالت عملاً مجموع متنهای است، زیرا محمل ω تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\{p : \Phi(p) \neq 0\}$ را قطع می‌کند، چرا که گردایه‌ای موضعاً متناهی تشکیل می‌دهند. اگر Ψ افراز یکانی دیگری (زیردست V') باشد، آنگاه

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi.\Phi = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \sum_{\psi \in \Psi} \psi.\varphi.\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi.\varphi.\omega$$

که همهٔ این مجموعها متناهی‌اند، و به وضوح مجموع آخر را به شکل

$$\sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi.\psi.\omega = \sum_{\psi \in \Psi} \int_M \psi.\omega$$

نیز می‌توان نوشت. در نتیجه، تعریف ما مستقل از انتخاب افراز یکانی است. (حقیقتاً، بهتر است این مجموع را با نماد $\int_{(M,\mu)} \omega$ نشان دهیم. زیرا در مورد جهت μ– برای M، به وضوح داریم

$$\int_{(M,-\mu)} \omega = -\int_{(M,\mu)} \omega$$

با این حال، مطابق مرسوم، μ را ذکر نمی‌کنیم)

با کمی اصلاح در تعریف $\int_M \omega$، حتی برای حالتی که M منیفلد n بعدی مرزدار باشد نیز می‌توان $\int_M \omega$ را تعریف کرد. اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد مرزدار n–بعدی باشد و $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ با محمل فشرده باشد، آنگاه

$$\int_M f\, dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_M f$$

که سمت راست یک انتگرال عادی را نشان می‌دهد. این نتیجه‌ای ساده از گزارهٔ ۱.۲.۸ است. به صورت مشابه، اگر $f : M^m \longrightarrow N^n$ دیفئومورفیسم برو باشد و ω یک n–فرم با محمل فشرده بر N باشد، آنگاه

$$\int_M f^*\omega = \begin{cases} \int_N \omega & \text{اگر } f \text{ حافظ جهت باشد} \\ -\int_N \omega & \text{اگر } f \text{ جهت برگردان باشد} \end{cases}$$

۶.۸ المان حجم

با اینکه n–فرمها را تنها روی منیفلدهای جهت‌پذیر می‌ةوان تصور کرد، روشی برای توصیف انتگرال‌گیری بر منیفلدهای جهت‌گیری وجود دارد. فرض کنید W تابعی بر M است به گونه‌ای که به ازاء هر $p \in M$ ای داریم

$$W(p) = \|n_p\| \quad \text{به ازای } \eta_p \in \Omega^n(T_pM) \text{ ای}$$

به عبارت دیگر، به ازاء هر n بردار $v_{۱}, \cdots, v_n \in T_pM$ داریم

$$W(p)(v_{۱}, \cdots, v_n) = |\eta_p(v_{۱}, \cdots, v_n)| \geq ۰$$

چنین تابعی W را المان حجم می‌نامند (بر هر فضای برداری، روشی برای اندازه‌گیری حجم n–بعدی (نه حجم علامتدار) وجود دارد) اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه می‌توانیم بر U بنویسیم

$$W = f\,|dx^{۱} \wedge \cdots \wedge dx^n| \quad \text{به ازای یک } f \geq ۰ \text{ ای}$$

یادآور می‌شویم که ω در صورتی المان حجم هموار است که f هموار باشد. یک راه برای بدست آوردن المان حجم این است که از یک n–فرم η آغاز نموده و سپس

تعریف کنیم $\omega(p) = |\eta(p)|$. البته، این طور نیست که هر المان حجمی به این صورت حاصل شده باشد — ممکن است فرم η_p نسبت به p به شکل پیوسته تغییر نکند. مثلاً، نوار موبیوس M نشانده شود در $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. چون T_pM را به صورت زیرفضایی از $T_p\mathbb{R}^۳$ می‌توان در نظر گرفت، می‌شود تعریف کرد.

$$\omega(p)(v_p, w_p) = \text{مساحت متوازی الضلاع تولید شده توسط } v \text{ و } w$$

مشاهدهٔ اینکه ω المان حجم است، کار دشواری نیست؛ ω به شکل موضعی به فرم $\omega = |\eta|$ است که η یک ۲—فرم می‌باشد. اما این برای کل M نمی‌تواند درست باشد، زیرا هیچ ۲—فرم η بر M وجود ندارد که در همه جا ناصفر باشد.

قضیهٔ ۱.۳.۷ اصلاحی واضح در مورد المانهای حجمی دارد:

۱.۶.۸ قضیه. اگر $f : M \longrightarrow N$ تابعی هموار بین n—منیفلدها باشد، (x, U) دستگاهی مختصاتی حول $p \in M$ و (y, V) دستگاهی مختصاتی حول $q = f(p) \in N$ باشد، آنگاه تابع نامنفی $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$f^*(g|dy^۱ \wedge \cdots \wedge dy^n|) = (g \circ f).\left|\det\left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right)\right| |dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n|$$

اثبات: کافی است به اثبات قضیهٔ ۱.۳.۷ رفته و هر کجا لازم است از نماد قدر مطلق استفاده کنید. $\square$

۲.۶.۸ نتیجه. اگر (x, u) و (y, v) دو دستگاه مختصات بر M باشند و

$$g|dy^۱ \wedge \cdots \wedge dy^n| = h\,|dx^۱ \wedge \cdots \wedge x^n| \quad (g, h \geq ۰)$$

آنگاه $h = g.\left|\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\right|$.

(این نتیجه نشان می‌دهد که المانهای حجم، اشیاً هندسی متناظر به «چگالیهای اسکالر فرد» معرفی شده در مسألهٔ ۱۰ از فصل ۴ می‌باشد.)

با توجه به مطالب فوق الذکر، موضوع انتگرال‌گیری از یک المان حجم ω روی منیفلد دلخواه، کار ساده‌ای است. ابتدا تعریف می‌کنیم

$$\int_{[۰;۱]^n} \omega = \int_{[۰;۱]^n} f \quad \text{برای } \omega = f\,|dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n| \text{ با } f \geq ۰$$

و سپس در مورد n–زنجیر $c : [\circ;\text{۱}]^n \longrightarrow M$ تعریف می‌کنیم

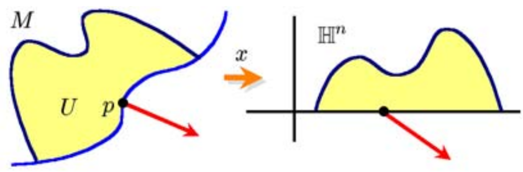
$$\int_c \omega := \int_{[\circ;\text{۱}]^n} c^*\omega$$

قضیهٔ ۱.۳.۷ نشان می‌دهد که گزارهٔ ۱.۲.۸ برای المان حجم $\omega = f\,|dx^\text{۱}\wedge\cdots\wedge dx^n|$ برقرار است، حتی اگر $\det c' \leq \circ$ نباشد. بنابراین، نتیجهٔ ۲.۲.۸ در مورد المان حجم درست است حتی اگر $p' \leq \circ$ نباشد. از این نتیجه می‌گیریم که نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۵.۸ در مورد المان حجم دلخواه M برقرار است، حتی اگر فرض حافظ جهت بودن $c_\text{۱}, c_\text{۲}$ در میان نباشد (یا M جهت‌پذیر نباشد). نتیجتاً، $\int_M \omega$ را در مورد هر المان حجم ω با عمل فشرده می‌شود تعریف نمود.

البته، وقتی M جهت‌پذیر است، این مباحث بی‌موردند. زیرا یک n–فرم در همه جا ناصفر η بر M وجود دارد، و نتیجتاً هر المان حجمی را به شکل $\omega = f|\eta|$ برای یک $f \geq \circ$ می‌توان نوشت. اگر جهتی μ برای M چنان انتخاب کنیم که به ازای هر پایهٔ با جهت مثبت چون $v_\text{۱}, \cdots, v_n$ داشته باشیم $\omega(v_\text{۱}, \cdots, v_n)$، آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم

$$\int_M \omega := \int_{(M,\mu)} f\eta$$

المان حجم بعداً مهم است، اما در ادامهٔ این فصل به انتگرالگیری از فرمها روی منیفلدهای جهتدار می‌پردازیم. در واقع حکم ما در خصوص انتگرال فرمها بر منیفلدها، حکمی است شبیه قضیهٔ استوکس در مورد انتگرال از فرمها بر زنجیرها، و این حکم در مورد المان حجم کارایی ندارد.



شکل ۱۳.۸

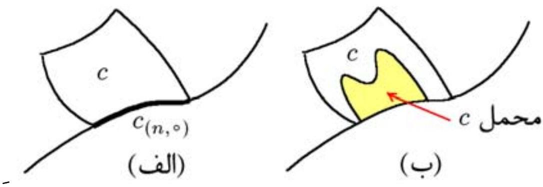
از مسألهٔ ۱٦ از فصل ۳ به یاد می‌آوریم که اگر M منیفلد بدون مرز باشد و $p \in \partial M$، آنگاه بردارهایی $v \in T_pM$ را می‌توان کشخص نمود، با این خصوصیت که به ازای هر دستگاه مختصات $x : v \longrightarrow v$ حول n بردار M بروتسوی باشد. چنین بردارهایی $v \in T_pM$ را **بروتسوی** می گوییم. اگر M دارای جهت M باشد، **جهت القایی** $\partial\mu$ بر ∂M را با انتخاب $[v_\text{۱}, \cdots, v_{n-\text{۱}}] \in (\partial\mu)_p$ ها به گونه ای که به ازاء یک بردار بروتسوی

$\omega \in T_pM$ ای $[\omega, v_1, \cdots, v_{n-1}] \in \mu_p$ تعریف می کنیم. اگر μ جهت معمولی بر $\mathcal{H}^n$ باشد، آنگاه به ازاء $p = (a, 0) \in \mathcal{H}^n$ داریم

$$\begin{aligned} \mu_p &= [(e_1)_p, \cdots, (e_n)_p] \\ &= (-1)^{n-1}[(e_n)_p, (e_1)_p, \cdots, (e_{n-1})_p \\ &= (-1)^n[(-e_n)_p, (e_1)_p, \cdots, (e_{n-1})_p] \end{aligned}$$

چون بردار $(-e_n)_p$ بروتسوی است، این نشان می‌دهد که جهت القایی بر $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \partial\mathbb{H}^n$ برابر $(-1)^n$ در جهت معمولی است. دلیل این انتخاب، مشاهدهٔ به شرح ذیل است: گیریم c یک $n-$مکعب تکین حافظ جهت در (M, μ) است به گونه‌ای که $\partial M \cap c([0;1]^n) = c_{(n,0)}([0;1]^{n-1})$ در این صورت $c_{n,0} : [0;1]^{n-1} \longrightarrow (\partial M, \partial M)$ برای n های فرد حافظ جهت و برای n های زوج جهت بر گردان است. اگر ω یک $(n-1)-$فرم بر M باشد که محمل آن در درون تصویر c قرار دارد (این درون ،نقاط در تصویر $c_{(n,0)}$ را شامل است)، آنگاه

$$\int_{c_{(n,0)}} \omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega$$



شکل ۱۴.۸

اما $C_{(n,0)}$ در ∂C با ضریب $(-1)^n$ ظاهر می‌گردد. بنابراین

$$\int_{\partial C} \omega = \int_{(-1)^n c_{(n,0)}} \omega = (-1)^n \int_{e_{(n,0)}} \omega = \int_{\partial\mu} \omega \qquad (۲.۸)$$

چنانچه این انتخاب را برای $\partial\mu$ در نظر نمی گرفتیم ،علامت منهنی ناجوری در قضیهء ذیل رخ می‌داد.

۷.۸ قضیهٔ استوکس

۱.۷.۸ قضیهٔ استوکس. اگر M یک منیفلد n بعدی ،مرزدار وجهتوار باشد و بر ∂M جهت القایی قرار داشته باشد وω یک $(n-1)$ فرم بر M با محمل فشرده باشد

۰، آنگاه

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

اثبات: ابتدا فرض کنید یک n مکعب تکین حافظ جهت c در $M - \partial M$ چنان وجود دارد که محمل ω در درون تصویر ω قرار دارد . در این صورت

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega \overset{(۱)}{=} \int_{\partial c} \omega \overset{(۲)}{=} ۰$$

توضیح اینکه در (۱) از قضیهٔ ۱.۴.۸ استفاده شده است و در (۲) از این نکته استفاده شده است که محمل ω در درون تصویر c قرار دارد. حال آنکه به وضوح داریم

$$\int_{\partial M} \omega = ۰$$

حال فرض کنیم یک n مکعب حافظ جهت c در M چنان وجود دارد که $\partial M \cap c([۰;۱]^n) = c_{(n,۰)}([۰;۱]^{n-۱})$ و محمل $\omega \subset$ درون تصویر c قرار دارد. در این صورت نیز ،به کمک (۲.۸) داریم

$$\int_M d\omega = \int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

در کل ،یک پوشش باز O برای M و یک افراز یکانی Φ زیر دست به O چنان وجود دارد که به ازاء هر $\varphi \in \Phi$ فرم $\varphi.\omega$ به یکی از دو صورت مشروط در این صورت ،داریم

$$۰ = d(۱) = d(\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi) = \sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi$$

و بنابراین،

$$\sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi \wedge \omega = ۰$$

چون ω بامحمل فشرده است، این مجموع در اساس متناهی، و نتیجه اینکه

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = ۰$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{y\in\Phi} \int_M \varphi.d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi \wedge \omega + \varphi\, d\omega \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d(\varphi.\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\partial M} \varphi.\omega = \int_{\partial M} \omega\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

یکی از ساده ترین کاربردهای قضیهٔ استوکس، در صورتی است که n-منیفلد جهتدار (M,μ) فشرده است (و لذا هر فرمی بر آن با محمل فشرده است) و $\partial M=\phi$. در این حالت، اگر ν یک $(n-۱)$-فرم دلخواه باشد، آنگاه

$$\int_M d\nu=\int_{\partial M}\nu=۰$$

بنابراین، یک n-فرم ω بر M می‌توانیم بیابیم که دقیق نیست (و حتی این فرم بسته نیز هست، زیرا همهٔ $(n+۱)$-فرمهای بر M صفرند). برای این منظور کافی است فرمی ω را بیابیم که

$$\int_M \omega\neq ۰$$

چنین فرمی همواره وجود دارد. چرا که می‌دانیم یک فرم ω چنان وجود دارد که به ازاء هر $v_۱$، $\cdots$ و v_n از T_pM داریم

$$\omega(v_۱,\cdots,v_n)>۰ \quad \text{اگر} \quad [v_۱,\cdots,v_n]=\mu_p \qquad (۳.۸)$$

اگر $c:[۰;۱]^n\longrightarrow(M,\mu)$ حافظ جهت باشد، آنگاه فرم $c^*\omega$ بر $[۰;۱]^n$ به وضوح به ازاء یک $g>۰$ بر $[۰;۱]^n$ به شکل $g\,dx^۱\wedge\cdots\wedge dx^n$ است. در نتیجه $\int_c\omega>۰$. نتیجه اینکه $\int_M\omega>۰$. یعنی، بعلاوه نیازی به انتخاب فرمی ω که درهمه جا در (۳.۸) صدق کند، نیست؛ می‌توانیم $>$ را با $\geq$ عوض کنیم . پس حتی یک n-فرم غیر دقیق بر M می‌توانیم چنان بیابیم که محملش در یک همسایگی مختصات قرار بگیرد.

این حکم به خودی خود یک قضیه است: هر منیفلد جهتدار فشرده امکان ندارد به شکل هموار به یک نقطه منقبض گردد. همان طورکه قبلا گفتیم، شکل M نه اندازهٔ آن در این تعیین این موضوع که هر فرم بسته بر M دقیق است، نقش دارد. به تعبیری، با تحلیل بیشتر اینکه در چه صورت فرمهای بسته الزاماً دقیق می‌شوند، اطلاعات بیشتری در خصوص شکل M می‌توانیم بدست بیاوریم. بخصوص، مایلیم بپرسیم که چه میزان از n-فرمهای غیر دقیق بر یک n-منیفلد جهتدار فشرده وجود دارند. طبیعی است که اگر ω دقیق نباشد این مطلب برای کلیهٔ $\omega+d\nu$ هایی که ν یک $(n-۱)$-فرم دلخواه است، درست می‌باشد. بنابراین، بجا است که ω و $\omega+d\nu$ را هم‌ارز بگیریم. یعنی، به این ترتیب، رفتن به فضاهای خارج قسمتی، مسیری طبیعی در این مطالعه است. این ساخت را نه تنها در مورد n-فرمها، بلکه در مورد فرمهای از هر مرتبه‌ای اجرا می‌کنیم.

۸.۸ کوهومولوژی دورام

به ازاء هر k، گردایهٔ $Z^k(M)$ همهٔ k−فرمهای بسته بر M فضایی برداری است. فضای $B^k(M)$ همهٔ k−فرمهای دقیق، زیر فضایی از آن است (زیرا $d^۲ = ۰$)، و لذا امکان در نظر گرفتن فضای خارج قسمتی

$$H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$$

وجود دارد؛ این فضای برداری $H^k(M)$ را فضای برداری **کوهو مولوژی دورام** k−بعدی نظیر به M گفته می‌شود. [قضیه دورام اذعان می‌دارد که این فضای برداری با یک فضای برداری بخصوص که اساساً بر حسب توپولوژی M تعریف می‌گردد، ایزومورف است. (که M دلخواه است)؛ آن فضا را گروه کوهومولوژی k−بعدی از M با ضرایب حقیقی نامیده می‌شود؛ نمادهای Z^k و B^k به نمادهای رایج در توپولوژی جبری مربوطند، که این گروهها موجب می‌گردند.]

هر عضو از $H^k(M)$ دسته‌ای هم‌ارزی $[\omega]$ از یک k−فرم بسته ω است. دو k−فرم بستهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را در صورتی هم ارز می‌گیریم که تفاضل آنها دقیق باشد. به زبان این فضاهای برداری، لم پوانکاره چنین اذعان می‌دارد که $H^k(\mathbb{R}^n) = ۰$ (یعنی، فضای برداری با تنها عضو ۰ است) مشروط به آنکه $k > ۰$ و یا حتی کلیتر، اگر M انقباض‌پذیر باشد و $k > ۰$، آنگاه $H^k(M) = ۰$.

برای محاسبهٔ $H^\circ(M)$ ابتدا توجه می‌کنیم که $B^\circ(M) = ۰$ (هیچ ۰−فرم دقیق غیر صفری وجود ندارد، زیرا هیچ (۱−)−فرمی در اختیار نداریم که از آن دیفرانسیل بگیریم). پس $H^\circ(M)$ به عنوان فضای برداری همهٔ توابع هموار به شکل $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ با $df = ۰$ است. چنانچه M همبند باشد، از شرط $df = ۰$ نتیجه می‌گیرد f ثابت است، بنابراین $H^\circ(M) \simeq \mathbb{R}$. (در کل، بعد $H^\circ(M)$ برابر تعداد مؤلفه‌های M است.)

صرف نظر از این نکات بدیهی، ما عملاً یک مطلب دیگر درخصوص $H^k(M)$ می‌دانیم — اگر M فشرده و همبند باشد، آنگاه $H^n(M)$ با بعد ≤ ۱ است. مطالعهٔ بیشتر $H^k(M)$ به توجه دقیق‌تر به کره‌ها و فضاهای اقلیدسی نیاز دارد.

بر $\mathbb{S}^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n - \{۰\}$ انتخابی طبیعی از یک $(n-۱)$−فرم σ با $\int_{\mathbb{S}^{n-۱}} \sigma' > ۰$ وجود دارد: به ازاء هر $(v_۱)_p, \cdots, (v_{n-۱})_p \in T_pS^{n-۱}$ تعریف می‌کنیم.

$$\sigma'((v_۱)_p, \cdots, (v_{n-۱})_p) = \det \begin{pmatrix} p \\ v_۱ \\ \vdots \\ v_{n-۱} \end{pmatrix}$$

به وضوح وقتی $\{(v_1)_p, \cdots, (v_{n-1})_p\}$ پایه‌ای با جهت مثبت باشد، عبارت بالا مثبت است. در واقع، به این ترتیب، عملاً یک جهت بر $\mathbb{S}^{n-1}$ تعریف می‌کنیم— این جهت درست همان جهت القایی بر $\mathbb{S}^{n-1}$ به عنوان مرز گوی بستهٔ واحد $\{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\}$ است؛ که جهت بر آن نیز از $\mathbb{R}^n$ به ارث برده می‌شود. با بسط دترمینان بر حسب مینورهایش نسبت به سطر بالا، ملاحظه می‌کنیم که σ' تحدید فرم σ بر $\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x^i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

بروی زیرمنیفلد $\mathbb{S}^{n\circ 1}$ است.

اکنون از فرم σ' بر $\mathbb{S}^{n-1}$ استفاده کرده و $(n-1)$–فرمی بر $\mathbb{R}^n - \{0\}$ می‌یابیم که بسته است، ولی دقیق نیست (و لذا نشان داده‌ایم $H^{n-1}(\mathbb{R}^\circ - \{0\}) \neq 0$). نگاشت $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ با ضابطهٔ

$$r(p) = \frac{p}{\|p\|} = \frac{p}{v(p)}$$

را در نظر بگیرید. روشن است که اگر $p \in \mathbb{S}^{n-1}$، آنگاه $r(p) = p$؛ به بیان دیگر، اگر $i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ احتوا باشد، آنگاه $r \circ i$ برابر نگاشت همانی $\mathbb{S}^{n-1}$ است. (در کل، اگر $A \subset X$ و $i : X \longrightarrow A$ به ازاء $a \in A$ ای در $r(a) = a$ صدق کند، آنگاه r را یک **انقباض** از X بروی A می‌نامند.)

به وضوح، σ' بسته است، زیرا $d(r^*\sigma') = r^* \, d\sigma' = 0$. اما، دقیق نیست، زیرا اگر $r^*\sigma' = d\nu$، آنگاه $\sigma' = i^* r^* \sigma' = d i^* \nu$. در حالی که می‌دانیم σ' دقیق نیست.

به عنوان تمرینی مشکل ولی آمونده، بجا است نشان دهید که

$$\begin{aligned} r^*\sigma' &= \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{v^2} = d\theta \\ r^*\sigma' &= \frac{x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{v^s}(x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy) \end{aligned}$$

چون عملاً لازم است $r^*\sigma'$ را در حالت کلی بدانیم، آنها را به طریقی دیگر محاسبه می‌کنیم:

۱.۸.۸ لم. اگر σ فرمی با ضابطهٔ $\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x^i \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge$

dx^n بر $\mathbb{R}^n$ باشد و σ' تحدید $i^*\sigma$ به $\mathbb{S}^{n-1}$ باشد، آنگاه

$$r^*\sigma'(p) = \frac{\sigma(p)}{\|p\|^n} \tag{۴.۸}$$

بنابراین

$$r^*\sigma' = \frac{1}{v^n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x^i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

اثبات: در هر نقطهٔ $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$، فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ توسط p_p و بردارهای مماس v_p در فضای مماس به کرهٔ $\mathbb{S}^{n-1}(\|p\|)$ به شعاع $\|p\|$ تولید می‌گردد. بنابراین، کافی است تحقیق شود که دو طرف (۴.۸) وقتی به هر یک از $n-1$ بردار تأثیر می‌کنند، به یک نتیجه می‌رسند. اما p_p بردار مماس به منحنی ∂ واقع در امتداد خط راست گذرنده از ۰ و p است؛ این منحنی توسط نگاشت r به تک نقطهٔ $r(p)$ تصویر می‌گردد، و بنابراین $r_*(p_p) = 0$. از سوی دیگر

$$\sigma(p)(p_p, (v_1)_p, \cdots, (v_{n-2})_p) = \det\begin{pmatrix} p \\ p \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2}c \end{pmatrix} = 0$$

بنابراین، کافی است دو سوی (۴.۸) را بر بردارهای در فضای مماس به $\mathbb{S}^{n-1}(\|p\|)$ تأثیر دهیم. بنابراین (مطابق مسألهٔ ۱۵) کافی است نشان دهیم که به ازاء هر چنین بردار v_p ای، داریم

$$r_*(v_p) = \frac{1}{\|p\|}\, v_{r(p)}$$

اما این تقریباً بدیهی است، یرا بردار v_p بردار مماس به دایره γ واقع در $\mathbb{S}^{n-1}(\|p\|)$ و مماس بر $\mathbb{S}^{n-1}$ در p با بردار مماس v است، و لذا منحنی $r \circ \gamma$ در $\mathbb{S}^{n-1}$ قرار دارد و همزمان به $1/\|p\|$ می‌رود. □

۲.۸.۸ نتیجه (انترالگیری در مختصات قطبی). گیریم $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ که $B = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| \leq 1\}$ و $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

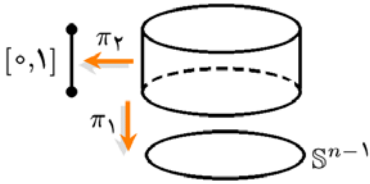
$$g(p) := \int_0^1 u^{n-1} f(u-p)du$$

تعریف کنیم. در این صورت

$$\int_B f = \int_B f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma'$$

اثبات: فضای $\mathbb{S}^{n-1} \times [0;1]$ و دو نگاشت تصویری

$$\pi_1 : \mathbb{S}^{n-1} \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \quad \pi_2 : \mathbb{S}^{n-1} \times [0;1] \longrightarrow [0;1]$$



شکل ۱۵.۸

را در نظر می‌گیریم. از اختصار نویسیهای

$$\sigma' \wedge dt = \pi_1^*\sigma' \wedge \pi_1^* dt$$

استفاده می‌کنیم. اگر (y, U) دستگاهی مختصاتی بر $\mathbb{S}^{n-1}$ باشد، دستگاه مختصاتی $\tilde{y}, t = (y \circ \pi_1, \pi_2)$ را بر $\mathbb{S}^{n-1} \times [0;1]$ نظیر می‌کنیم و نیز فرض می‌کنیم

$$\sigma' \alpha\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1}$$

در این صورت روشن است که

$$\sigma' \wedge dt = \alpha \circ \pi_1 d\tilde{y}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{y}^{n-1} \wedge dt$$

از این به سادگی ملاحظه می‌گردد که اگر $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $h(p,u) = u^{n-1} f(up)$ تعریف کنیم، در این صورت

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}\times[0;1]} h\sigma' \wedge dt$$

اکنون دیفئومورفیسمی $\varphi : B - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times (0;1]$ با ضابطهٔ

$$\varphi(p) = (r(p), v(p)) = (p/\|p\|, \|p\|)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}\varphi^*(\sigma' \wedge dt) &= \varphi^*(\pi_1^*\sigma' \wedge \pi_2^* dt) = \varphi^*\pi_1^*\sigma' \wedge \varphi^*\pi_2^* dt \\ &= (\pi \circ \varphi)^*\sigma' \wedge (\pi_2 \circ \varphi)^* dt = r^*\sigma \wedge v^* dt \\ &= \frac{1}{v_n}(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, x^i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n) \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{v}\, dx^i \\ &= \frac{1}{v^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{v^{n-1}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi^*(h\sigma' \wedge dt) &= (h \circ \varphi)\varphi^*(\sigma' \wedge dt) = v^{n-1}\, f.\frac{1}{v^{n-1}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\end{aligned}$$

و لذا

$$\begin{aligned}\int_B f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= \int_{B-\{0\}} \varphi^*(h\sigma' \wedge dt) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}\times(0;1]} h\sigma' \wedge dt = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma'\end{aligned}$$

(مرحله آخر به کمی بررسی نیاز دارد، که احتمالاً به خواننده کمک می‌کند، زیرا فرمهای درگیر دارای عمل فشده بر منیفلدهای $(B-\{0\})$ و $\mathbb{S}^{n-1}\times(0;1]$ که بر آنها تعریف شده‌اند، ندارند.)

اکنون آماده‌ایم تا $H^k(M)$ را برای چند حالت بخصوص دیگر نیز محاسبه کنیم. برآنیم تا محاسبات را به محاسبات در خلال همسایگیهای مختصاتی تقلیل دهیم، که زیرمنیفلدهایی فشرده در M هستند. بنابراین، لازم است گردایه‌ای از فضاهای برداری دیگر را مطرح کنیم که در این حالت قابل توجه می‌باشند.

فضاهای برداری کوهومولوژی دورام با محمل فشرده $H_c^k(M)$ را به صورت $H_c^k(M) := Z_c^k(M/B_c^k(M)$ تعریف می‌کنیم، که $Z_c^k(M)$ فضای برداری k-فرمهای بستهٔ با محمل فشرده است، و $B_c^k(M)$ فضای برداری همهٔ k-فرمهای به شکل $d\nu$ است که ν یک $(k-1)$-فرم با محمل فشرده است. البته، اگر M فشرده باشد، آنگاه $H_c^k(M) = H^k(M)$. توجه شود که $B_c^k(M)$ همان مجموعهٔ همهٔ k-فرمهای دقیق با محمل فشرده نیست. مثلاً، اگر $f \geq 0$ بر $\mathbb{R}^n$، تابعی با محمل فشرده باشد و در نقطه‌ای $f > 0$، آنگاه $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ دقیق است (هر فرم بسته بر $\mathbb{R}^n$ چنین است) و با محمل

فشرده می‌باشد، ولی ω به ازاء هیچ فرم ν با محمل فشردهٔ ν ای به شکل $\omega = d\nu$ نیست. در حقیقت، اگر $\omega = d\nu$ که ν با محمل فشرده است، آنگاه بنا به قضیهٔ استوکس

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\nu = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \nu = 0$$

این مثال نشان می‌دهد که $H^n_c(\mathbb{R}^n) \neq 0$، و استدلالی مشابه نشان می‌دهد که اگر M منیلد جهت‌پذیر دلخواهی باشد، آنگاه $H^n_c(M \neq) 0$. اکنون برآنیم که نشان دهیم به ازاء هر منیفلد جهت‌پذیر همبند M، عملاً $H^n_c(M) \approx \mathbb{R}$. این نشان می‌دهد که اگر ω ی ثابتی با $\int_M \omega \neq 0$ انتخاب شود، آنگاه به ازاء هر n–فرم ω' با محمل فشرده، عددی حقیقی α چنان وجود دارد که $\omega' - \alpha\omega$ دقیق است. عدد α را به راحتی می‌توان توصیف کرد: اگر $\omega' - \alpha\omega = \nu$ آنگاه

$$\int_M \omega' - \int_M \alpha\omega = \int_M d\nu = 0$$

در نتیجه $\alpha = \int_M \omega' / \int_M \omega$. البته، مسأله نشان دادن وجود η است. توجه شود که ادعای $H^n_c(M) \approx \mathbb{R}$ با این ادعا معادل است که $[\omega] \longmapsto \int_M \omega$ ایزومورفیسمی از $H^n_c(M)$ بروی $\mathbb{R}$ می‌باشد. به عبارت دیگر، هر فرم بستهٔ ω با عمل فشرده برابر دیفرانسیل فرم دیگری با محمل فشرده است، مشروط به اینکه $\int_M \omega = 0$.

۳.۸.۸ قضیه. اگر M یک n–منیفلد جهت‌پذیر همبند باشد، آنگاه $H^n_c(M) \approx \mathbb{R}$.

اثبات: قضیه را در سه مرحله اثبات می‌کنیم:

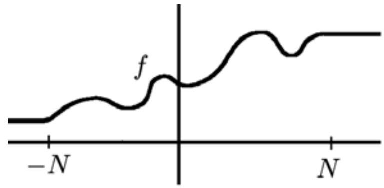
۱) قضیه برای $M = \mathbb{R}$ درست است.

۲) قضیه برای $(n-1)$–منیفلدها اگر درست باشد، به ویژه برای $\mathbb{S}^{n-1}$، آنگاه قضیه برای $\mathbb{R}^n$ درست است.

۳) اگر قضیه برای $\mathbb{R}^n$ درست باشد، آنگاه برای هر n–منیفلد همبند و جهت‌دار دلخواه درست است.

مرحلهٔ ۱. گیریم ω یک ۱–فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}$ است طوری که $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$. تابعی f (نه لزوماً با محمل فشرده) طوری وجود دارد که $\omega = df$. چون محمل ω فشرده است، df بر خارج بازه‌ای به شکل $[-N; N]$ صفر است. در نتیجه، f بر $(-\infty; -N)$ ثابت c_1 و بر $[N; \infty)$ برابر ثابت c_2 است. به علاوه

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} df = \int_{\mathbb{R}} f'(t)dt = c_2 - c_1$$



شکل ۱۶.۸

در نتیجه $c_۱ = c_۲ = c$ و داریم $\omega = d(f - c)$، که $f - c$ با محمل فشرده است.

مرحلهٔ ۲. گیریم $\omega = f\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge dx^n$ یک n–فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}^n$ است به گونه‌ای که $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = ۰$. برای ساده‌تر شدن بحث، فرض می‌کنیم محمل $\omega \subset \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| < ۱\}$. می‌دانیم یک $(n-۱)$–فرم η بر $\mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که $\omega = d\eta$. در واقع، از مسألهٔ ۲۳ از فصل ۷، به یک فرمول صریح برای η می‌رسیم

$$\eta(p) = \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i-۱} \Big(\int_۰^۱ t^{n-۱} f(t.p)\, dt \Big)\, x^i\, dx^۱ \wedge \cdots \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

با جایگزینی $u = \|p\| t$ در این فرمول، داریم

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \left(\int_۰^{\|p\|} u^{n-۱} f\Big(u.\frac{p}{\|p\|}\Big)\, du \right) \frac{۱}{\|p\|^n}. \\ &\quad .\sum_{i=۱}^{n} (-۱)^{i-۱}\, x^i\, dx^۱ \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &\overset{(۱)}{=} \Big(\int_۰^{\|p\|} u^{n-۱}\, f\Big(u.\frac{p}{\|p\|}\Big)\, du \Big).r^*\sigma'(p) \end{aligned}$$

که در (۱) از لم ۱.۸.۸ استفاده شده است. $g : \mathbb{S}^{n-۱} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$g(p) = \int_۰^۱ u^{n-۱}\, f(u.p)du$$

تعریف می‌کنیم. بر مجموعهٔ $A = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| > ۱\}$ داریم $f = ۰$ و لذا بر A داریم

$$\eta(p) = \left(\int_۰^۱ u^{n-۱} f\Big(u.\frac{p}{\|p\|}\Big)\, du \right).r^*\sigma'(p)$$

یا $\eta = (g\circ r).r^*\sigma' = r^*(g\sigma')$. به علاوه، بنا به نتیجهٔ ۲.۸.۸، به ازاء یک $(n-1)-$ فرم $g\sigma'$ بر $\mathbb{S}^{n-1}$ داریم

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g\sigma' = \int_B f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{R^n} \omega = 0$$

در نتیجه، بنابه مفروضات مرحلهٔ ۲ داریم

$$g\sigma' = d\lambda \qquad \text{به ازای یک } (n-2)-\text{ فرم } \lambda \text{ بر } S^{n-1}$$

بنابراین $\eta = r^*(d\lambda) = d(r^*\lambda)$. گیریم $h : R^n \longrightarrow [0;1]$ تابعی هموارست که بر A برابر یک و در همسایگی‌ای از صفر برابر است صفر است. در این صورت $hr^*\lambda$ فرمی هموار بر r^n است و $\omega = d\eta = d(\eta - d(hr^*\lambda)) = 0$. در این صورت، فرم $\eta - d(hr^*\lambda)$ با محمل فشرده است، زیرا بر A داریم

$$\eta - d(h^*r^*\lambda) = \eta - d(r^*\lambda) = 0$$

مرحلهٔ ۳ یک $n-$فرم ω چنان انتخاب می‌کنیم که $\int_M \omega \neq 0$ و ω دارای محمل فشرده در یک مجموعهٔ باز $U \subset M$ است، که U با R^n دیفئومورف است. اگر ω' یک $n-$فرم دیگر و با محمل فشرده باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که عددی c و فرمی η با محمل فشرده، طوری وجود دارند که $\omega' = c\omega + d\eta$. با استفاده از یک افراز یکانی، می‌توانیم بنویسیم $\omega = \varphi_1\omega + \cdots + \varphi_k\omega$، که هر یک از $\varphi_i\omega$ها محملی فشرده در یک مجموعهٔ باز $U_i \subset M$ است که U_i با $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف است. به وضوح، کافی است c_i ها و η_i هایی بیابیم که به ازاء هر i ای داشته باشیم $\varphi_i\omega = c_i\,\omega + \eta_i$. به عبارت دیگر، می‌توانیم فرض کنیم ω' دارای محمل فشردهٔ در یک مجموعهٔ باز $V \subset M$ است که با $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف است.

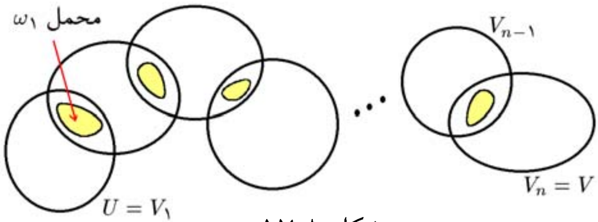
با توجه به همبندی M، روشن است که دنباله‌ای از مجموعه‌های باز

$$U = V_1, \cdots, V_r = V$$

دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ طوری می‌توانیم بیابیم که $V_i \cap V_{i+1} \pm \phi$. فرمهای ω_i را طوری انتخاب می‌کنیم که محمل ω_i زیر مجموعهٔ $V_i \cap V_{i+1}$ است و $\int_{V_i} \omega_i \neq 0$. چون درستی قضیه را برای $\mathbb{R}^n$ به عنوان فرض داریم، در نتیجه

$$\omega_1 - c_i\omega = d\eta_1 \quad , \quad \omega_2 = c_2\omega_1 = d\eta_2, \cdots, \omega' = c_r\omega_{r-1} = d\eta_r$$

که همهٔ η_i با محمل فشرده $(V_i \supset)$ است. از این موضوع به وضوح، حکم مورد نظر استنتاج می‌شود. $\square$



شکل ۱۷.۸

روش به کار رفته در مرحلهٔ آخر را برای استخراج حکم دیگری می‌توان استفاده نمود.

۴.۸.۸ قضیه. اگر M یک $n-$منیفلد جهت ناپذیر همبند باشد، آنگاه $H_c^n(M) = 0$.

اثبات: یک $n-$فرم ω با محمل فشردهٔ واقع در یک مجموعهٔ باز U دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ طوری در نظر می‌گیریم که $\int_U \omega \neq 0$ (چون U جهت‌پذیر است، این انتگرال با معنی است). به وضوح کافی است نشان دهیم که به ازاء یک فرم η با محمل فشرده، $\omega = d\eta$. دنباله‌ای از دستگاه‌های مختصاتی (V_i, x_i) به صورت

$$U = V_1, \cdots, V_r = V$$

در نظر می‌گیریم که هر یک از $x_i \circ x_{i+1}^{-1}$ ها حافظ جهتند. فرمهای ω_i در مرحلهٔ سوم را با استفاده از جهت V_i که $x_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حافظ جهت باشد، طوری انتخاب می‌کنیم که $\int_{V_i} \omega_i > 0$؛ در این صورت، همچنین داریم $\int_{V_{i+1}} \omega_i > 0$. نتیجتاً، اعداد

$$c_i := \int_{V_i} \omega_i / \int_{V_i} \omega_{i-1}$$

مثبتند. نتیجه اینکه $\omega_i = c\omega + \eta$ با $c > 0$. حال اگر M جهت‌ناپذیر باشد، چنین دنباله‌ای از V_i ها یافت می‌شود که $V_r = V_1$، ولی $x_r \circ x_1^{-1}$ حافظ جهت نیست. با فرض $-\omega = \omega$ داریم $-\omega - c\omega + d\eta$ با $c > 0$. در نتیجه $(-c-1)\omega = d\eta$ برای یک c با $c \neq -1$. □

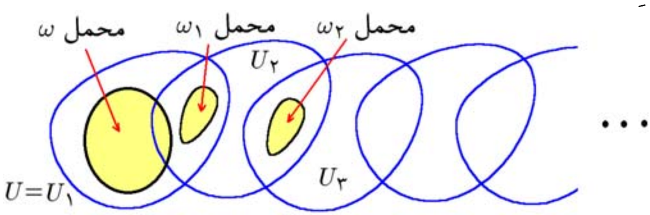
$H^n(M)$ را برای M های غیر فشرده نیز می‌توان استفاده نمود.

۵.۸.۸ قضیه. اگر M یک $n-$منیفلد غیر فشردهٔ همبند (جهت‌پذیر و یا غیر جهت‌پذیر) باشد، آنگاه $H^n(M) = 0$.

اثبات: یک $n-$فرم ω با محمل فشردهٔ مشمول در یک دستگاه مختصاتی U که با $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف باشد، در نظر بگیرید. چون M فشرده نیست، دنباله‌ای نامتناهی

$$U = U_1, U_2, U_3, \cdots$$

از چنین دستگاه‌های مختصاتی به گونه‌ای یافت می‌شود که $U_i \cap U_{i+1} \neq \phi$، و چنین دنباله‌ای عملاً در تکمیل یک مجموعهٔ فشردهٔ دلخواه است.



شکل ۱۸.۸

حال، n–فرمهای ω_i با محمل فشردهٔ مشمول در $U_i \cap U_{i+1}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\int_{U_i} \omega_i \neq 0$. اعداد ثابت c_i و فرمهای η_i با محمل فشردهٔ زیر مجموعهٔ U_i چنان وجود دارند که

$$\begin{aligned} \omega &= c_1\omega_1 + d\eta_1 \\ \omega_i &= c_{i+1}\omega_{i+1} + d\eta_{i+1} \qquad\qquad i \leq 1 \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \omega &= d\eta_1 + c_1\omega_1 \\ &= d\eta_1 + c_1 d\eta_1 + c_1c_2\omega_2 \\ &= d\eta_1 + c_1 d\eta_2 + c_1c_2 d\eta_3 + c_1c_2c_3\omega_3 \\ &= \cdots \end{aligned}$$

چون هر نقطهٔ $p \in M$ ای اساساً در متمم یکی از U_i ها قرار دارد، داریم

$$\omega = d\eta_1 + c_-1 d\eta_1 + c_1c_2 d\eta_3 + c_1c_2c_3 d\eta_3 + \cdots$$

که سمت راست به علت اینکه U_i ها عملاً خارج هر مجموعهٔ فشرده هستند، با معنی است.

اکنون می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲۰) که عملاً چنین دنباله‌ای U_1، U_2، U_3 و $\cdots$ یافت می‌شود که اجتماعشان کل M است (تکرار جملات مجاز است)، و U_i ها می‌توانند بسیاری از U_j های با $j < 1$ را قطع کنند، ولی دنباله همچنان خارج مجموعه‌ای فشرده قرار دارد). پوشش $O = \{U_i\}$ به این ترتیب، موضعاً متناهی است. گیریم $\{\varphi_{U_i}\}$ یک

افراز یکانی زیر دست O است. اگر ω یک n–فرم بر M باشد، آنگاه به ازاء هر U_i ای ملاحظه می‌گردد که
$\varphi_{U_i}\,\omega = d\eta_i$ که η_i دارای محمل فشردهٔ در $U_i \cup U_{i+1} \cup U_{i+2} \cup \cdots$ است. بنابراین

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{U_i}\,\omega = \sum_{i=1}^{\infty} d\eta_i = d(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i)$$

و برهان تمام است. □

۹.۸ خلاصه‌ای از احکام به دست آمده

(۱)

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \text{ اگر} \\ 0 & k > 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

(۲) اگر M یک n–منیفلد همبند باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} H^0(M) &\approx \mathbb{R} \\ H^n_c(M) &\approx \begin{cases} \mathbb{R} & \text{اگر } M \text{ جهت‌پذیر باشد} \\ 0 & \text{اگر } M \text{ جهت‌پذیر نباشد} \end{cases} \\ H^n(M) &\approx \begin{cases} H^n_c & \text{اگر } M \text{ فشرده باشد} \\ 0 & \text{اگر } M \text{ فشرده نباشد} \end{cases} \end{aligned}$$

همچنین، می‌دانیم که $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \neq 0$، ولی در این احکام فهرست نشده است، زیرا اساساً آنرا اثبات نکردیم. به منظور ادامهٔ بحث در خصوص فضاهای برداری کوهرمولوژی دورام، لازم است رفتار آنها نسبت به نگاشتهای هموار $f : M \longrightarrow N$ را بررسی کنیم. اگر ω یک k–فرم بسته بر N باشد، آنگاه $f^*\omega$ نیز بسته است ($d\,f^*\,\omega = f^*d\omega = 0$)، و لذا f^* فضای $Z^k(N)$ را بتوی $Z^k(M)$ تصویر می‌کند. از سوی دیگر، f^* فضای برداری $B^k(N)$ را نیز بتوی $B^k(M)$ تصویر می‌کند، زیرا $f^*(d\eta) = d(f^*\eta)$. این نشان می‌دهد که f^* نگاشتی به فرم

$$Z^k(N)/B^k(N) \longrightarrow Z^k(M)/B^k(M)$$

القاء می‌کند، که آن را نیز با نماد f^* نشان می‌دهیم: $f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$.

مثلاً، حالت $k = \circ$ را در نظر بگیرید. اگر N همبند باشد، آنگاه $H^\circ(N)$ دقیقاً عبارت است از مجموعهٔ توابع ثابت $c : N \longrightarrow \mathbb{R}$. در نتیجه $f^*(c) = c \circ f$ نیز تابعی ثابت است. اگر M همبند باشد، آنگاه $f^* : H^\circ(N) \longrightarrow H^\circ(M)$ دقیقاً عبارت است از نگاشت همانی، البته با اعمال یکی گیری $H^\circ(N)$ و $H^\circ(M)$ با $\mathbb{R}$– اگر M همبند نباشد و مؤلفه‌های آن $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ باشند، آنگاه $H^\circ(M)$ با جمع مستقیم $\bigoplus_{\alpha\in A} \mathbb{R}_\alpha$ ایزومورف است، که هر یک از $\mathbb{R}_\alpha$ ها با $\mathbb{R}$ دیفئومورفند؛ نگاشت f^* ثابت $c \in \mathbb{R}$ را به عنصری از فضای $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}_\alpha$ می‌برد که همهٔ درآیه‌های آن ثابت و برابر c هستند. اگر N نیز عنصر غیر همبند باشد، و مؤلفه‌های آن $\{N_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ باشد، آنگاه

$$f^* : \bigoplus_{\beta\in\mathcal{B}} \mathbb{R}_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}_\alpha$$

عناصر $\{c_\beta\}$ از $\bigoplus_{\beta\in\mathcal{B}}$ را به $\{c')_\alpha\}$ از $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{R}_\alpha$ می‌نگارد که $c'_\alpha = c_\beta$ وقتی $f(M_\alpha) \subset N_\beta$.

حالت جالب‌تر، و حالتی که عملاً به آن در این جا توجه می‌کنیم، حالت $k = n$ است. یعنی نگاشت $f^* : H^n(N) \longrightarrow H^n(M)$، که M و N هر دو منیفلد n بعدی جهت‌پذیر، همبند و فشرده هستند. هیچ راه طبیعی برای ایزومورف نمودن $\mathbb{R}$ با $H^n(M)$ وجود ندارد، به دنبال محاسبهٔ

$$\int_M f^*\omega \quad \text{و} \quad \int_N \omega$$

برای n–فرم دلخواه ω بر N هستیم. $\omega_\circ$ای با $\int_N \omega_\circ \neq \circ$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، عددی a چنان یافت می‌شود که

$$\int_M f^*\omega_\circ = a.\int_N \omega_\circ$$

چون $\omega \mapsto \int_N \omega$ ایزومورفیسمی از $H^n(M)$ به $\mathbb{R}$ است (و به صورت مشابه برای N)، نتیجه می‌گیریم که به ازاء هر فرم ω داریم

$$\int_M f^*e\omega = a.\int_N \omega$$

عدد $a = \deg f$، که تنها به f بستگی دارد، را **درجهٔ** f می‌نامیم. اگر M و N فشرده نباشد، ولی f سره باشد (تصویر وارون هر مجموعهٔ فشرده، فشرده باشد)، آنگاه نگاشت

$f^* : H_c^n(N) \longrightarrow H_c^n(M)$ را داریم. بعلاوه عددی $\deg f$ چنان یافت می‌شود که به ازاء هر فرم ω بر N با محمل فشرده

$$\int_M f^* \omega = (\deg f) \int_N \omega$$

مادامی که قضیهٔ ذیل اثبات نگردد، باور این مطلب که همواره این عدد، عددی صحیح است، کار دشواری می‌باشد.

۱.۹.۸ قضیه. گیریم $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت سره بین n–منیفلدهای جهت‌دار و همبند (M, μ) و (N, v) است. گیریم $q \in N$ مقدار منظم برای f است. به ازاء هر $p \in f^{-۱}(q)$ فرض کنیم

$$\operatorname{sgn}_p f := \begin{cases} ۱ & \text{اگر } f_{*p} : T_pM \longrightarrow T_qN \text{ حافظ جهت باشد، } \mu_p \\ & \text{البته با جهت } \mu_p \text{ بر } T_pM \text{ و } v_p \text{ بر } T_qN \\ -۱ & \text{اگر } f_{*p} \text{ جهت برگردان باشد.} \end{cases}$$

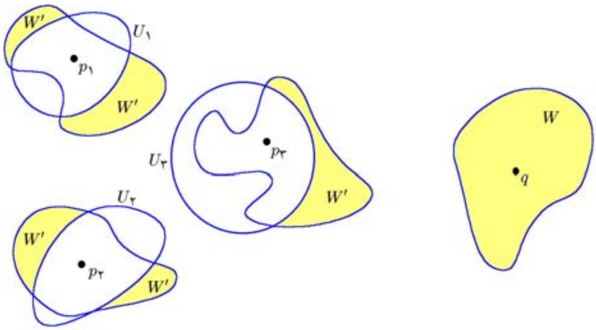
در این صورت

$$\deg(f) = \int_{p \in f^{-۱}(q)} \operatorname{sgn}_p(f)$$

و اگر $f^{-۱}(p) = \phi$، آنرا صفر تعریف می‌کنیم.

اثبات: ابتدا توجه شود که بنا به قضیهٔ سارد، مقادیر منظم وجود دارند. بعلاوه، $f^{-۱}(q)$ متناهی است، زیرا فشرده است و نقاط ایزوله دارد، و لذا مجموع بال بر مجموعه‌ای متناهی صورت می‌پذیرد.

گیریم $f^{-۱}(q) = \{p_۱, \cdots, p_k\}$. دستگاه‌های مختصاتی (U_i, x_i) به گروه p_i ها را چنان انتخاب می‌کنیم که همهٔ نقاط در U_i مقادیر منظم f باشند، و U_i ها مجزا باشند. می‌خواهیم دستگاهی مختصاتی (V, y) حول q چنان بیابیم که $f^{-۱}(V) = U_۱ \cup \cdots \cup U_k$. برای این منظور، ابتدا، یک همسایگی فشرده ω از q انتخاب نموده و $W' \subset M$ را مجموعهٔ فشردهٔ $W' = f^{-۱}(W) - (U_۱ \cup \cdots \cup U_k)$ می‌گیریم.



شکل ۱۹.۸

در این صورت، $f(W')$ مجموعه‌ای بسته است که q را در بر ندارد. بنابراین، می‌توانیم V را زیرمجموعه‌ای از $W' - f(W')$ بگیریم. این به ما اطمینان می‌دهد که $f^{-1}(V) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$. بالاخره، هر یک U_i را با $U_i \cap f^{-1}(V)$ عوض می‌کنیم.

اکنون ω را بر N به شکل $\omega = g\,dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ انتخاب می‌کنیم که $g \geq 0$ دارای محمل فشردهٔ در V است. در این صورت محمل $f^*\omega$ زیر مجموعهٔ $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ استو بنابراین

$$\int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} f^*\omega$$

چون f دیفئومرفیسمی از هر یک از U_i ها به V است، داریم

$$\begin{aligned} \int_{U_i} f^*\omega &= \int_V \omega && \text{اگر } f \text{ حافظ جهت باشد} \\ &= -\int_V \omega && \text{اگر } f \text{ جهت برگردان باشد} \end{aligned}$$

چون f جهت‌پذیر [جهت] است، این درست وقتی ممکن است که $\mathrm{sgn}_p f = 1$ [یا به صورت مشابه $\mathrm{sgn}_p f = -1$] و برهان تمام است. □

به عنوان کاربردی بلافصل از قضیه، درجهٔ نگاشت متقاطر $A : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ با ضابطهٔ $A(p) = -p$ را محاسبه می‌کنیم. قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که A در کلیهٔ نقاط حافظ جهت است و یا جهت برگردان است، مشروط به اینکه n فرد باشد یا زوج. چون $A^{-1}(p)$ درست یک عضو دارد، نتیجه می‌گیریم که $\deg A = (-1)^{n-1}$. از این حکم نتیجه‌ای جالب می‌توانیم استخراج کنیم، ولی پیش از آن به یک مفهوم مهم دیگر نیاز می‌باشد. دو تابع $f, g : M \longrightarrow N$ بین منیفلدهای هموار را در صورتی (به شکل

هموار) هوموتوپ گوئیم که تابعی هموار $H : M \times [۰; ۱] \longrightarrow N$ چنان یافت گردد که

$$\forall p \in M : \quad H(p, ۰) = f(p) \ \ , \ \ H(p, ۱) = g(p)$$

نگاشت H را یک هوموتوپی (هموار) بین f و g می‌نامیم. توجه شود که M وقتی و تنها وقتی به نقطهٔ $p_۰ \in M$ به شکل هموار انقباض‌پذیر است که نگاشت ثابت $p_۰$ هوموتوپ باشد. یادآور می‌شویم که به ازای هر K—فرم ω بر $M \times [۰; ۱]$، یک $(k - ۱)$—فرم $I\omega$ بر M چنان وجود دارد که $i_۱^*\omega - i_۰\omega = d(I\omega) + I(d\omega)$. از این واقعیت برای نشان دادن اینکه همهٔ فرمهای بسته بر هر منیفلد به شکل هموار انقباض‌پذیر، دقیق هستند، استفاده می‌کنیم. حال حکمی کلی‌تر را ثابت می‌کنیم.

۲.۹.۸ قضیه. اگر $f, g : M \longrightarrow N$ به شکل هموار هوموتوپ باشند، آنگاه نگاشتهای

$$f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M) \quad g^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$$

برابراند، $f^* = g^*$.

اثبات: بنابه فرض، نگاشتی هموار $H : M \times [۰; ۱] \longrightarrow N$ با $f = H \circ i_۰$ و $g = H \circ i_۱$ وجود دارد. هر عضو از $H^*(N)$ دستهٔ هم‌ارزی $[\omega]$ یک k—فرم بسته ω بر N است. در این صورت

$$\begin{aligned} g^*\omega - f^*\omega &= (H \circ i_۱)^*\omega - (H \circ i_۰)^*\omega \\ &= i_۱^*(H^*\omega) - i_۰^*(H^*\omega) \\ &= d(IH^*\omega) + I(dH^*\omega) \\ &= d(IH^*\omega) + ۰ \end{aligned}$$

اما این به این معنی $g^*([\omega]) = f^*([\omega])$ است.

۳.۹.۸ نتیجه. اگر M و N دو n—منیفلد جهت‌پذیر و فشرده باشند و $f, g : M \longrightarrow N$ هوموتوپ، آنگاه $\deg\ f = \deg\ g$.

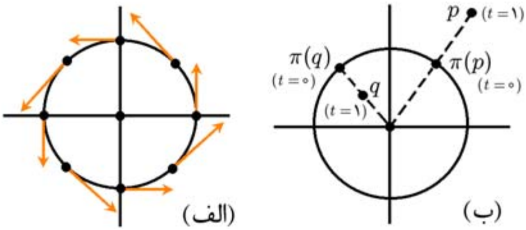
۴.۹.۸ نتیجه. اگر n زوج باشد، آنگاه هیچ میدان برداری همه جا ناصفر بر $\mathbb{S}^n$ وجود ندارد.

اثبات: قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که درجهٔ نگاشت متناظر $A : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ برابر $(-۱)^{n-۱}$ است. چون نگاشت همانی از درجهٔ یک است، در حالت n زوج، A با نگاشت همانی نمی‌تواند هوموتوپ باشد. اما اگر یک میدان برداری همه‌جا ناصفر بر $\mathbb{S}^n$ موجود باشد، آنگاه یک هوموتوپی بین A و نگاشت همانی به شکل ذیل می‌توانیم بسازیم. به ازای هر p، یک نیم—دایرهٔ بزرگ منحصر بفرد ∂_p از p تا $A(p) = -p$ وجود دارد که بردار مماس در p از آن، مضربی از $X(p)$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم $H(p,t) = \partial_p(t)$. □

به ازای n زوج، یک میدان برداری همه‌جا ناصفر بر $\mathbb{S}^n$ می‌توانیم بسازیم. به ازای $p = (x_۱, \cdots, x_{n+۱}) \in \mathbb{S}^n$ تعریف می‌کنیم

$$X(p) = (-x_۱, x_۰, -x_۳, x_۲, \cdots, -x_{n+۱}, x_n)$$

$X(p)$ به $p = (x_۱, x_۲, \cdots, x_{n+۱})$ در $\mathbb{R}^{n+۱}$ عمود است، و بنابراین در T_pS^n قرار دارد. (این نگاشت در حالت $\mathbb{S}^۱$ به شکل استاندارد زیر است.) میدان برداری X بر $\mathbb{S}^n$ را برای ساخت یک هوموتوپی بین A و نگاشت همانی استفاده می‌کنیم.



شکل ۲۰.۸

به عنوان کاربرد دیگری از قضیهٔ ؟؟، انقباض $\vec{r} : \mathbb{R}^{-}\{۰\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-۱}$ با ضابطهٔ $r(p) = p\backslash\|p\|$ را در نظر می‌گیریم. اگر $i : \mathbb{S}^{n-۱} \longrightarrow \mathbb{R}^{-}\{۰\}$ احتوی باشد، آنگاه $r \circ i : \mathbb{S}^{n-۱} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-۱}$ نگاشت همانی Id از $\mathbb{S}^{n-۱}$ به $\mathbb{S}^{n-۱}$ است. اما، نگاشت $i \circ r : \mathbb{R}^n - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{۰\}$ با ضابطهٔ $i \circ r(p) = p\backslash\|p\|$ همانی است، ولی با نگاشت همانی وموتوپ است؛ هوموتوپی H را با ضابطهٔ $H(p,t) = t_p + (۱-t)r(p) \in \mathbb{R}^n - \{۰\}$ تعریف می‌کنیم. انقباضی با این ویژگی را **انقباض دگردیسی** می‌گوئیم. هرگاه r انقباض دگردیسی باشد، نگاشتهای $(r \circ i^*)$ و $(i \circ r)^*$ یکی هستند. بنابراین ، در حالت $\mathbb{S}^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n - \{۰\}$ داریم

$$H^k(\mathbb{S}^{n-۱}) \xrightarrow{r^*} H^k(\mathbb{R}^n - \{۰\}) \xrightarrow{i^*} H^k(\mathbb{S}^{n-۱})$$

و به علاوه

همانی $i^*\circ r^* = (r\circ i)^* = H^k(\mathbb{S}^{n-1})$ همانی $r^*\circ i^* = (i\circ r)^* = H^k(\mathbb{R}^n-\{0\})$
پس i^* و r^* وارون یکدیگرند، در نتیجه

$$H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \text{ به ازای هر } k \text{ ای}$$

به ویژه، داریم $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$. مولد $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ فرم بستهٔ $r^*\sigma'$ است.

حال به محاسبهٔ $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$ به ازای k های مختلف می‌پردازیم. برای این منظور به مشاهدهٔ دیگری نیاز داریم. روشن است که منیفلد $M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}^l$ انقباض‌پذیر دگردیسی از $M \times \mathbb{R}^l$ است. بنابراین، به ازای هر l ای $H^k(M) \approx H^k(M \times \mathbb{R}^l)$.

۵.۹.۸ قضیه. به ازاء هر $0 < k < n-1$ داریم

$$H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$$

اثبات: به استقراء بر n عمل می‌کنیم. حالتاولی که چیزی برای اثبات آن عملاً وجود دارد، حالت $n = 3$ است. ادعا می‌کنیم که $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0$.
گیریم ω یک ۱–فرم بسته بر $\mathbb{R}^3$ است. گیریم A و B دو مجموعه باز در $\mathbb{R}^3$ به شرح زیرند:

$$A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0) \times (-\infty; 0]\} \quad B = \mathbb{R}^3 - \{(0,0) \times [0; +\infty)\}$$

چون A و B ستاره شکلند (نسبت به نقاط به ترتیب $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$)، لذا ۰–فرمهای f_A و f_B به ترتیب بر A و B چنان وجود دارند که

$$\omega = d\,f_A \text{ بر } A \qquad \omega = d\,f_B \text{ بر } B$$

در نتیجه

$$d(f_A, f_B) = 0 \quad \text{بر} \quad [\mathbb{R}^2 - \{0\}] \times \mathbb{R} = A \cap B$$

بنابراین، $f_A - f_B$ بر $A \cap B$ ثابت c است. در نتیجه، ω دقیق است، زیرا

$$\omega = \begin{cases} d(f_A - c) & A \text{ بر} \\ d(f_B) & B \text{ بر} \end{cases}$$

و $f_A - c = f_B$ بر $A \cap B$.

اگر ω یک ۱−فرم بسته بر $\mathbb{R}^۴$ باشد، با استدلالی مشابه و با استفاده از

$$A = \mathbb{R}^۴ - \{(۰,۰,۰)\times(-\infty;۰)\} \qquad B = \mathbb{R}^۴ - \{(۰,۰,۰)\times[۰;\infty)\}$$

می‌توان عمل کرد. چنانچه ω یک ۲−فرم بسته بر $\mathbb{R}^۴$ باشد، آنگاه ۱−فرمهای η_A و η_B را طوری بدست می آوریم که

$$A \text{ بر } \omega = d\eta_A \quad , \quad B \text{ بر } \omega = d\eta_B$$

اکنون $d(\eta_A - \eta_B) = ۰$ بر $A \cap B$ و

$$H^۱(A\cap B) = H^۱([\mathbb{R}^۳ - \{۰\}]\times\mathbb{R}) \approx H^۱(\mathbb{R}^۳ - \{۰\}) = ۰$$

در نتیجه، به ازاء یک ۰−فرم λ بر $A\cap B$ داریم $\eta_A - \eta_B = d\lambda$. بر خلاف حالت قبل، نمی‌توانیم خیلی ساده $\eta_A - d\lambda$ را در نظر بگیریم، زیرا بر A تعریف نمی‌شود. برای رفع این مشکل، توجه می‌کنیم که یک افراز یکانی $\{\varphi_A, \varphi_B\}$ برای پوشش $\{A, B\}$ از $\mathbb{R}^۳ - \{۰\}$ وجود دارد:

$$\varphi_A + \varphi_B = ۱ \quad d\varphi_A + d\varphi_B = ۰ \quad \mathrm{Supp}\,\varphi_A \subseteq A \quad \mathrm{Supp}\varphi_B \subseteq B$$

حال اگر $\varphi_B\lambda$ را برای نمایش تابع

$$\begin{cases} \varphi_B\lambda & A\cap B \text{ بر} \\ ۰ & A-(A\cap B) \text{ بر} \end{cases}$$

استفاده می‌کنیم و به صورت مشابه $\varphi_A\lambda$ را تعریف کنیم، داریم

$\varphi_B\lambda$ یک فرم هموار بر A است　　,　　$\varphi_A\lambda$ یک فرم هموار بر B است

به علاوه، بر $A\cap B$ داریم

$$\begin{aligned} \eta_A - d(\varphi_B\lambda) &= \eta_A - \varphi_B d\lambda - d\varphi_B \wedge \lambda = \eta_A - d\lambda + d(\varphi_A\lambda) \\ &= \eta_A - d\lambda + d(\varphi_A\lambda) = \eta_B + d(\varphi_A\lambda) \end{aligned}$$

پس با فرض $\eta_A - d(\varphi_B\lambda)$ بر A و نیز $\eta_B + d(\varphi_A\lambda)$ بر B، می‌توانیم یک فرم هموار بر $A\cup B = \mathbb{R} - \{۰\}$ تعریف کنیم. به وضوح

$$\omega = \begin{cases} d\eta_A = d(\eta_A - d(\varphi_B\lambda)) & A \text{ بر} \\ d\eta_B = d(\eta_B - d(\varphi_A\lambda)) & B \text{ بر} \end{cases}$$

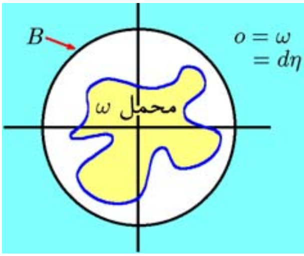
و لذا ω دقیق است.

مرحلهٔ کلی استقراء به شکل مشابه است. □

این فصل را با محاسبه‌ای دیگر، که در فصل ۱۱ به کار خواهد آمد، به پایان می‌بریم.

۶.۹.۸ قضیه. به ازاء هر $0 \leq k < n$، داریم $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$.

اثبات: اثبات اینکه $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$ به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده است.



شکل ۲۲.۸

گیریم ω یک k–فرم با محمل فشرده بر $\mathbb{R}^n$ است، که $0 < k < n$. می‌دانیم که به ازاء یک $(k-1)$–فرم η بر $\mathbb{R}^n$ داریم $\omega = d\eta$. گیریم B یک گوی بستهٔ شامل محمل ω است. در این صورت $A = \mathbb{R}^n - B$ داریم $d\eta = 0$. چون A با $\mathbb{R}^n - \{0\}$ دیفئومورف است و $k-1 < n-1$، از قضیهٔ ۵.۹.۸ می‌دانیم که

$$\text{به ازاء یک } (k-2) - \text{ فرم } \lambda \text{ بر } A \text{ داریم } \eta = d\lambda$$

گیریم $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0;1]$ تابعی هموار است که بر یک همسایگی از B برابر صفر، و بر $\mathbb{R}^n - 2B$ برابر یک است، که $2B$ نمایشگر گوی با شعاع دو برابر B است. در این صورت، $d(f\lambda)$ بر کل $\mathbb{R}^n$ با معنی است و $\omega = d\eta = d(\eta - d(f\lambda))$؛ فرم $\eta - d(f\lambda)$ به وضوح با محمل فشردهٔ در $2B$ می‌باشد. $\square$

۱۰.۸ تمرینات

۱. نوع انتگرال ریمان برای انتگرال داربو. گیریم $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ کراندار است. به ازای هر افراز $P = \{t_1 < \cdots < t_n\}$ از $[a;b]$، فرض می‌کنیم $m_i = m_i(f)$ اینفیموم f بر $[t_{i-1};t_i]$ است و به صورت مشابه $M_i = M_i(f)$ را تعریف می‌کنیم. منظور از یک انتخاب برای P، یک n–تایی $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ با $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ است. مجموع پایین، مجموع بالا و مجموع ریمان برای افراز P و انتخاب ξ را به ترتیب به صورت

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f).(t_i - t_{i-1}) \quad (\text{مجموع پایین})$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f).(t_i - t_{i-1}) \quad \text{(مجموع بالایی)}$$
$$S(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).(t_i - t_{i-1}) \quad \text{(مجموع ریمان)}$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح $L(f,P) \leq S(f,P,\xi) \leq U(f,P)$ .f را در صورتی **انتگرال‌پذیر—داربو** گوییم که سوپریموم همهٔ $L(f,P)$ ها برابر اینفیموم همهٔ $U(f,P)$ ها باشد؛ این سوپریموم و یا اینفیموم را **انتگرال داربوی** f بر $[a;b]$ می‌نامیم. f را در صورتی انتگرال‌پذیر ریمان گوئیم که

$$\lim_{\|P\|\longrightarrow 0} S(f,P,\xi)$$

موجود باشد؛ مقدار این حد را انتگرال ریمان f بر $[a,b]$ می‌نامیم.

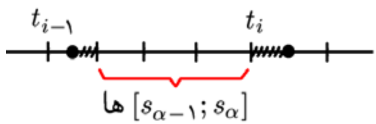
الف) $S(f,P,\xi)$ را حتی اگر f بی‌کران باشد، می‌توان تعریف نمود. اما نشان دهید که اگر f بی‌کران باشد، آنگاه $\lim_{\|P\|} \longrightarrow 0(f,P,\xi)$ وجود ندارد.

ب) اگر f بر $[a;b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر داربو و نیز انتگرال‌پذیر ریمان است، و در این حالت، دو انتگرال برابرند. (از پیوستگی یکنواخت f بر $[a;b]$ استفاده کنید.

ج) اگر f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر داربو است و هر دو انتگرال با هم برابرند.

د) گیریم $M \leq f \leq m$ بر $[a;b]$. گیریم $P = \{s_0 < \cdots < s_m\}$ و $Q = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ دو افراز برای $[a;b]$ هستند. به ازای هر $i = 1, \cdots, n$ فرض می‌کنیم

$$e_i = [t_{i-1};t_i] \text{ طول } - \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموع طول همهٔ } [s_{\alpha-1};s_\alpha] \text{ ها} \\ \text{که مشمول در } [t_{i-1};t_i] \text{ نیستند} \end{array} \right\}$$



شکل ۲۳.۸

نشان دهید که اگر M_i نمایشگر سوپریموم f بر $[t_{i-1};t_i]$ باشد، آنگاه

$$U(f,P) \leq U(f,Q) + \sum_{i=1}^{n}(M - M_i)e_i \leq U(f,Q) + (M-m)\sum_{i=1}^{n} e_i$$

حکمی مشابه در مورد مجموع پایین وجود دارد.

ه) نشان دهید که هرگاه $\circ \longrightarrow \|P\|$ به صفر می‌راید، $\sum_{i=1}^{n} e_i\|P\|$ و قضیهٔ داربو را نتیجه بگیرید:

$$\sum_{\|P\|\longrightarrow \circ} U(f,P) = inf\{U(f,Q) : \text{است } [a;b] \text{ افرازی از } Q\}$$
$$\lim_{\|P\|\longrightarrow \circ} L(f,P) = \sup\{L(f,Q) : \text{است } [a;b] \text{ افرازی از } Q\}$$

و) اگر f انتگرال‌پذیر داربو بر $[a;b]$ باشد، آنگاه f بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

ز) (**قضیهٔ اسگود**). گیریم f و g بر $[a;b]$ انتگرال‌پذیرند. نشان دهید که به ازای هر دو انتخاب ξ و ξ' برای P، داریم

$$\sum_{\|P\|\longrightarrow \circ} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1} = \int_a^b fg)$$

راهنمایی: اگر $|g| \leq M$ بر $[a;b]$، آنگاه $|f(\xi_i'),(\xi_i')-f(\xi_i),(\xi_i')| \leq M|f(\xi_i')-f(\xi_i)|$.

ح) نشان دهید $\int_c f\,dx+g\,dy$ چنانچه به صورت حد مجموع تعریف گردد، با مقدار زیر برابر است

$$\int_a^b [f(c(t))c^{1'}(t) + g(c(t))c^{2'}(t)]dt$$

۲. $\int_c d\theta = \int_{[\circ;1]} c^* d\theta$ را محاسبه کنید، که $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ با $\circ \leq t \leq 1$.

۳. به ازای هر عدد صحیح nو هر $R > \circ$، گیریم $C_{R,n} : [\circ;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{\circ\}$ با ضابطهٔ زیر است:

$$c_{R,n}(t) = (R\cos(2n\pi t), R\sin(2n\pi t))$$

الف) نشان دهید که یک ۲ـمکعب تکین $c : [\circ;1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{\circ\}$ چنان وجود دارد که $c_{R_1,n} - c_{R_2,n} = \partial c$

ب) اگر $c : [\circ;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{\circ\}$ منحنی دلخواه با $c(\circ) = c(1)$ باشد، نشان دهید که n ای چنان وجود دارد که $c - c_{1,n}$ یک مرز در $\mathbb{R}^2 - \{\circ\}$ است.

ج) نشان دهید n منحصر بفرد است. این عدد را **عدد چرخش**c حول 0 می‌نامیم.

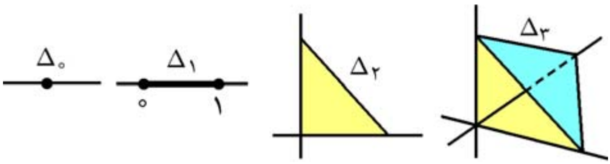
۴. گیریم $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک چند جمله‌ای $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ است، که $n \geq 1$. نگاشت $\mathbb{C}_{R,f} : [0;1] \longrightarrow C$ را با ضابطهٔ $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید که اگر R باندازهٔ کافی بزرگ باشد، آنگاه $c_{R,f} - c_{R,n}$ مرز یک زنجیر در $\mathbb{C} - \{0\}$ است. **راهنمایی** : توجه شود که $c_{R,n}(t) = [c_{R,1}(t)]^n$ و بنویسید

$$f(z) = z^n\Big(1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\Big)$$

ب) نشان دهید که به ازای یک $z \in \mathbb{C}$ ای $f(z) = 0$ (قضیهٔ اساسی جبر). **راهنمایی**: اگر به ازای هر z با $|z| \leq R$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$، آنگاه $c_{R,f} -$ $c_{0,f}$ یک مرز است.

۵. روشی برای انتگرال‌گیری به کمک مجتمعهای بجای مکعبهای تکین وجود دارد. البته در این حالت و قضیهٔ استوکس پیچیده‌تر می‌شود، با این حال همانطور که در مسألهٔ بعد خواهیم دید، دارای مزایایی خاص به خود است. گیریم $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ مجموعهٔ همهٔ $x \in \mathbb{R}^n$ هایی باشد که $\sum_{i=1}^{n}$ و $0 \leq x^i \leq 1$.



شکل ۲۵.۸

n—سادک تکین در M، تابعی است هموار چون $c : \Delta^n \longrightarrow M$ و n—زنجیر عبارت است از یک مجموع سوری از n—مجتمعهای تکین. همانند قبل، گیریم $I^n : \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت احتوی است. به ازای $0 \leq i \leq n$ تعریف می‌کنیم $\partial_i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$

$$\partial_i(x) = \begin{cases} \Big(1 - \sum_{i=1}^{n-1}, x^1, \cdots, x^{n-1}\Big) & \text{اگر } i = 1 \\ (x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1}) & \text{اگر } 0 < i < n \end{cases}$$

و در مورد n–سادک نکین c تعریف می‌کنیم $\partial_i c = c \circ \partial_i$. سپس، تعریف می‌کنیم $\partial c = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i c$

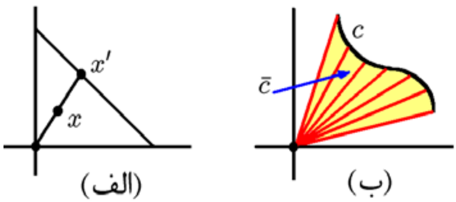
الف) شکل $\partial_i(\Delta_{n-1})$ در Δ_n را از نظر هندسی توصیف کنید.

ب) نشان دهید $\partial^2 = 0$.

(ج) نشان دهید که اگر $\omega = f\, dx^i \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n$ یک $(n-1)$–فرم بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\int_{I^n} d\omega = \int_{\partial I^n} \omega$. (اثبات در مورد مکعبها را محدود کنید.)

د) به ازاء هر k–زنجیر c در M و هر k–فرم ω بر M انتگرال $\int_c \omega$ را تعریف نموده و ثابت کنید که به ازاء هر $(k-1)$–فرم ω داریم $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$.

۶. هر $x \in \Delta_{k+1}$ را به صورت tx' می‌توان نوشت که $0 \leq t \leq 1$ و $x' \in \partial_0(\Delta_k)$. بعلاوه، وقتی $t = 0$ نقطهٔ x' منحصر بفرد است. به ازاء هر k–سادک تکین $c : \Delta_k \longrightarrow \mathbb{R}^n$، نگاشت $\bar{c} : \Delta_{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ $\bar{c}(x) = t.c(x')$ تعریف می‌کنیم. به ازاء هر زنجیر c و $\bar{c}$ به شکل بدیهی تعریف می‌گردد.



شکل ۲۶.۸

الف) نشان دهید که از $\partial c = 0$ نتیجه می‌شود $c = \partial \bar{c}$.

ب) گیریم $c : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ یک منحنی بسته است. نشان دهید c مرز هیچ مجموع σ از ۲–مکعبهای تکین نیست. **راهنمایی:** اگر $\partial \sigma = \sum_i a_i c_i$، در بارهٔ $\sum_i a_i$ می‌توان پرسید.

ج) نشان دهید که می‌توان نوشت $c = \partial \sigma + c'$، که c' **بتاهیده** است، یعنی $c'([0; 1])$ تک نقطه است.

د) اگر $c_1(0) = c_2(0)$ و $c_1(1) = c_2(1)$، نشان دهید $c_1 - c_2$ یک مرز است، چه با استفاده از – مکعبها و چه با استفاده از سادکها.

۷. گیریم ω یک ۱−فرم بر منیفلد M است. فرض کنید به ازای هر منحنی بستهٔ c در M، $\int_c \omega = ۰$. نشان دهید ω دقیق است. **راهنمایی:** اگر داشته باشیم $\omega = df$، آنگاه به ازای هر منحنی c ای داریم $\int_c \omega = f(c(۱)) - f(c(۰))$.

۸. منیفلد M را در صورتی **همبند ساده** گوئیم که M همبند بوده و هر نگاشت هموار $f : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{S}^n$ انقباض‌پذیر هموار به یک نقطه باشد. [عملاًیک فضای دلخواه (نه لزوماً منیفلد) را در صورتی همبند ساده گوئیم که همبند بوده و هر نگاشت پیوسته $f : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow M$ به شکل پیوسته انقباض‌پذیر به یک نقطه باشد.]

الف) اگر به شکل هموار انقباض‌پذیر به یک نقطه باشد، آنگاه M همبند راهی است.

ب) $\mathbb{S}^۱$ همبند راهی نیست.

ج) به ازای هر $n > ۱$ ای $\mathbb{S}^n$ همبند راهی است. **راهنمایی:** نشان دهید هر $f : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{S}^n$ هموار، الزاماً غیر پوشا است.

د) اگر M همبند راهی بوده و $p \in M$، آنگاه هر نگاشت هموار $f : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow M$ به شکل هموار به p انقباض‌پذیر است.

ه) اگر $M = U \cup V$ که U و V زیر مجموعه‌های همبتد راهی با $u \cap V$ همبند باشند، آنگاه M همبند ساده است. (این اثباتی دیگر برای همبند راهی بودن $\mathbb{S}^n$ است.) **راهنمایی:** به ازای $f : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow M$ مفروض، $\mathbb{S}^۱$ را به تعدادی متناهی قوس طوری تقسیم کنید که هر یک یا در U قرار دارد و یا در V.

و) اگر M همبند راهی باشد، آنگاه $H^۱(M) = ۰$. (به مسألهٔ ۷ توجه شود.)

۹. الف) گیریم $U \subset \mathbb{R}^۲$یک مجموعهٔباز کراندار است به گونه‌ای که $\mathbb{R}^۲ - U$ همبند نیست. نشان دهید که U به شکل هموار به یک نقطه انقباض‌پذیر است. (عکس مسألهٔ ۲۴ از فصل ۷.) **راهنمایی:** اگر p یک مؤلفهٔ کراندار از $\mathbb{R}^۲ - U$ باشد، نشان دهید که یک منحنی در U وجود دارد که p را دور می‌زند (احاطه می‌کند). به قسمت (الف) از شکل ۲۷.۸ توجه شود.

ب) هر مجموعهٔ باز همبند و کراندار $U \subset rr^۲$ وقتی و تنها وقتی به یک نقطه به شکل هموار انقباض‌پذیر است که همبند راهی باشد.

ج) این مطلب در مورد زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^۳$ غلط است.

۱۰. گیریم ω یک n–فرم بر منیفلد جهتدار M^n است. گیریم Φ و Ψ دو افراز یکانی از توابع با محمل فشرده هستند، و بعلاوه $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi.|\omega| < \infty$. ثابت کنیللف)
از این نتیجه می‌گردد که مجموع $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi.\omega$ همگرای مطلق است.

ب) نشان دهید

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi.\omega = \sum_{\varphi\in\Phi}\sum_{\Psi\in\Psi}\int_M \Psi.\varphi.\omega$$

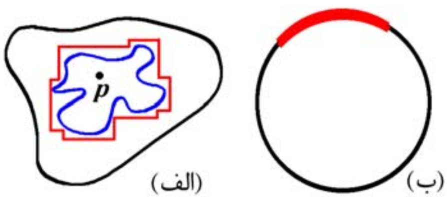
و اگر ω را با $|\omega|$ عمض کنیم، همین رابطه درست است. (نوجه کنید که به ازای هر φ، تنها تعدادی متناهی Ψ وجود دارد که بر $\sup p\varphi$ ناصفر است.)

ج) نشان دهید که $\sum_{\psi\in\Psi}\int_M \psi.|\omega| < \infty$ و نیز $\sum_{\psi\in\Psi}\int_M \psi.\omega = \sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi.\omega$. این مجموع مشترک را $\int_M \omega$ تعریف می‌کنیم.

د) گیریم $A_n \subset (n; n+۱)$ مجموعه‌های بسته‌اند. گیریم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار با $\int_{A_n} = (-۱)^n/n$ است و $\text{Supp}f \subset \bigcup_n A_n$. دو افراز یکانی Φ و Ψ طوری بیابید که $\sum_{\varphi\in\Phi}\int_{\mathbb{R}} \varphi.f\,dx$ و $\sum_{\psi\in\Psi}\int_{\mathbb{R}} \psi.f\,dx$ هر دو موجود و همگرای مطلق باشند، ولی متفاوت.

۱۱. در ادامهٔ تمرین ۱۲ از فصل ۷، اشیاء هندسی متناظر به تانسورهای نسبی فرد از نوع $\binom{k}{\ell}$ و به وزن ω را تعریف می‌کنیم (که ω عددی است حقیقی).

۱۲. الف) گیریم M مجموعهٔ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : |(x,y)| < ۱\}$ به همراه بخشی مشخص از مرزش می‌باشد، و نیز $\omega = xdy$. نشان دهید $\int_M d\omega \neq \int_{\partial M}\omega$ حتی اگر هر دو طرف با معنی باشند. از مسألهٔ ۱۰ استفاده شود. (محاسبه نیاز نیست، توجه کنید که تساوی تنها وقتی برقرار است که کل مرز را داشته باشیم.) به قسمت (ب) از شکل ۲۷.۸ توجه شود.



شکل ۲۷.۸

ب) به صورت مشابه، مثال نقضی برای قضیهٔ استوکس بیابید که در آن $M = (0;1)$ و ω یک 0–فرمی است که محمل آن فشرده نیست.

ج) با بررسی یک افراز یکانی برای $(0;1)$ توسط توابع با محمل فشرده، نشان دهید که چرا حکم قضیهٔ استوکس در این حالت نقض می‌گردد.

۱۳. فرض کنید M یک n–منیفلد جهت‌پذیر و فشرده (بدون مرز) است، و θ یک $(n-1)$–فرم بر M می‌باشد. نشان دهید که $d\theta$ در نقطه‌ای صفر است.

۱۴. گیریم $M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ و M_1 دو n–منیفلد مرزدار و فشرده‌اند که $M_2 \subset M_1 - \partial M_1$. نشان دهید که به ازای هر $(n-1)$–فرم ω بر M_1 داریم $\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega$ به قسمت (الف) از شکل ۲۸.۸ توجه شود.

۱۵. عامل $1/\|p\|^n$ در لم ۷ را حساب کنید (در این لم گفته می‌شود که $r_*(V_p) = (1/\|p\|)v_{r(p)}$) توجیهی برای عامل $1/\|p\|^{n-1}$ است، زیرا $n-1$ تا بردار $u_{n-1}, \cdots, v_1$ وجود دارد).

۱۶. با استفاده از فرمول برای r^*dx^i (مسألهٔ ۱ از فصل ۴) $R^*\sigma'$ را محاسبه کنید. (توجه شودکه $r^*\sigma' = r^*i^*\sigma = (i\circ r)^*\sigma$؛ نگاشت $i\circ r : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\})$ درست r است، به شرطی که به عنوان نگاشتی بتوی $\mathbb{R}^n - \{0\}$ در نظر گرفته شود.)

۱۷. الف) گیریم M^n و N^m منیفلد جهتدارند و ω و η به ترتیب n–فرم با محمل فشرده بر M و N هستند. $M \times N$ را مجاز دانستن $\{v_1, \cdots, v_n, \omega_1, \cdots, \omega_m\}$ در $T^{M\times N}_{p,q}\tilde{T}_p M \oplus T_q N$ تعریف می‌کنیم، که $\{v_1, \cdots, v_n\}$ و $\{\omega_1 \cdots, \omega_m\}$ پایه‌های مثبت در به ترتیب T_pM و T_qN هستند. اگر $\pi_1 : M\times N \longrightarrow M$ و $\pi_2 : M\times N \longrightarrow N$ تصاویر بدیهی باشند، نشان دهید

$$\int_{M\times N} \pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta = \int_M \omega . \int_N \eta$$

ب) اگر $h : M\times N \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه $\int_{M\times N} h\pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta \int_M g\omega$ که

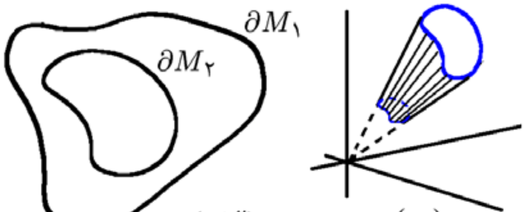
$$g(p) = \int_N h(p,0)\pi_2^*\eta \qquad h(p,0) = q \mapsto h(p,q)$$

ج) هر $(m+n)$–فرم بر $M\times N$ به ازای یک ω و η ای به شکل $\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\eta$ است.

۱۸. الف) گیریم $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. گیریم $\omega_1, \cdots, \omega_{n-2} \in T_p\mathbb{R}^n$ و $\nu \in T_p\mathbb{R}^n$ به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ ای بشکل $(\lambda p)_p$ باشد. نشان دهید که

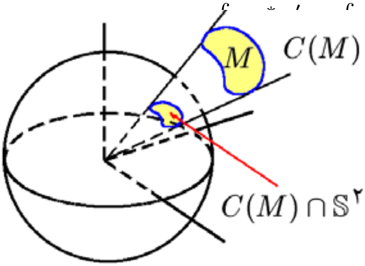
$$r^*\sigma'(\nu, \omega_1, \cdots, \omega_{n-2}) = 0$$

ب) گیریم $M \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$ یک $(n-1)$–منیفلد مرزدار و فشرده است که اجتماعی از پاره‌خطهای از شعاعهای گذرنده از مبدأ O می‌باشد. نشان دهید $\int_M r^*\sigma' = 0$. به قسمت (ب) از شکل ۲۸.۸ توجه شود.



شکل ۲۸.۸

ج) گیریم $M \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ یک $(n-1)$–منیفلد مرزدار فشرده است که هر شعاع گذرنده از 0 را یکبار قطع می‌کند و $c(M) = \{\lambda p : p \in M, \lambda \geq 0\}$. نشان دهید که $\int_M r^*\sigma' = \int_{C(M)\cap\mathbb{S}^2} r^*\sigma'$

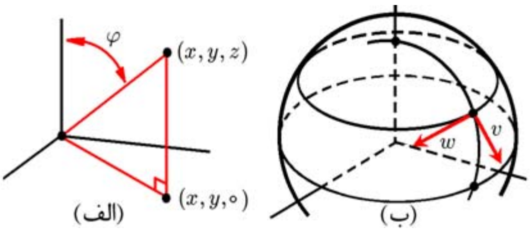


شکل ۲۹.۸

انتگرال آخر مقدار زاویهٔ حجمی M را محاسبه می‌کند. به همین دلیل اغلب انتگرال را با $d\theta_n$ نشان می‌دهند.

۱۹. به ازاء همهٔ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ بجز آنهایی که $x = 0$، $y = 0$ یا $z \in (-\infty; 0)$، $\varphi(x, y, z)$ را زاویهٔ بین z–محور و شعاع واصل بین مبدأ و (x, y, z) تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید $\varphi(x, y, z) = \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2})$.



شکل ۳۰.۸

ب) اگر $P(p) = \|p\|$، و θ به عنوان تابعی با ضابطهٔ $\theta(x,y,z) = \arctan\frac{y}{x}$ بر $\mathbb{R}^۳$ باشد، در این صورت نشان دهید که (p,θ,φ) یک دستگاه مختصات بر مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون $(x,,y,z)$ در $\mathbb{R}^۳$ بجز آنهایی که $y = \circ$ و $y \in [\circ;\infty)$ و یا آنهایی که $x = \circ$، $y = \circ$ و $z \in (-\infty;\circ]$، تشکیل می‌دهند.

ج) اگر v بردار مماس یکهٔ بر کرهٔ $\mathbb{S}^۲(r)$ به شعاع r باشد، ثابت کنید $d\varphi(v) = ۱$. چنانچه ω بردار یکهٔ مماس در نقطهٔ $p = (x,y,z) \in \mathbb{S}^۲(r)$ باشد، ثابت کنید $d\theta(\omega_p) = ۱/\sqrt{x^۲+y^۲}$.

د) اگر θ و φرا به معنی تحدید θ و φ به $\mathbb{S}^۲$ (البته بخشی مشخص از آن) در نظر بگیریم، نشان دهید که در این صورت $\sigma' = hd\theta \wedge dy$ که $h : \mathbb{S}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع $h(x,y,z) = -\sqrt{x^۲+y^۲}$ است (منهی به دلیل جهت‌دار بر $\mathbb{S}^۲$ است).

ه) نتیجه بگیرید که $\sigma' = d(-\cos\varphi d\theta)$.

و) گیریم $r_۲ : \mathbb{R}^۲ - \{\circ\} \longrightarrow \mathbb{S}^۱$ انقباض به گونه‌ای که $d\theta = r_۲^* i^* \sigma$ برای یک فرم σ بر $\mathbb{R}^۲$. نشان دهیدی $r_۲^* d\theta = d\theta$. اگر $\pi : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ تصویر طبیعی باشد، آنگاه فرم $d\theta$ بر (قسمتی از) $\mathbb{R}^۳$ درست $\pi^* d\theta$ است، که $d\theta$ فرمی بر (قسمتی از) $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد. از این استفاده نموده و ثابت کنید که $r^* d\theta = d\theta$.

ز) با استفاده از قسمت (ج) و اینکه به ازای هر v مماس به $\mathbb{S}^۲(\|p\|)$ داریم $r_*(v_p) = v_{r(p)}/\|p\|$، مستقیماً ثابت کنید $r^* d\theta = d\theta$.

ح) نتیجه بگیرید که $d\theta_۳ = r^*\sigma' = d(-\cos(\varphi \circ r) d\theta) = d(-\cos\varphi d\theta)$ (ط به صورت مشابه $d\theta_n$ را بر $\mathbb{R}^n - \{\circ\}$ بر حسب $d\theta_{n-۱}$ بر $\mathbb{R}^{n-۱} - \{\circ\}$ بسط دهید.

۲۰. ثابت کنید که هر منیفلد همبند به شکل اجتماع $U_۱ \cup U_۲ \cup U_۳ \cup \cdots$ است، که U_i ها دستگاههای مختصاتی هستند، $U_i \cap U_j \neq \rho$، و دنباله عاقبت در خارج مجموعه‌ای فشرده قرار دارد.

۲۱. گیریم $f : M^n \longrightarrow N^n$ یک نگاشت سره بین n–منیفلدها به گونه‌ای که $f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ حافظ جهت است، مادامی که ρ نقطه‌ای منظم باشد. نشان دهید که اگر N همبند باشد، آنگاه f بروی N است، و یا درغیر این صورت، همهٔ نقاط، نقطهٔ تکین f هستند.

۲۲. الف) نشان دهید که هر نگاشت چند جمله‌ای $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $f(z) = z^n + a_۱ z^{n-۱} + \cdots + a_n$ سره است ($۱ \leq n$).

ب) گیریم $f'(z) = nz^{n-۱} + (n-۱)a_۱ z^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}$. نشان دهید $f'(z) = \lim_{\omega \longrightarrow ۰} \dfrac{f(z+\omega) - f(z)}{\omega}$ که ω بر اعداد مختلط حرکت می‌کند.

ج) برای توابع با مقدار حقیقی u و v ای می‌نویسیم $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. نشان دهید

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

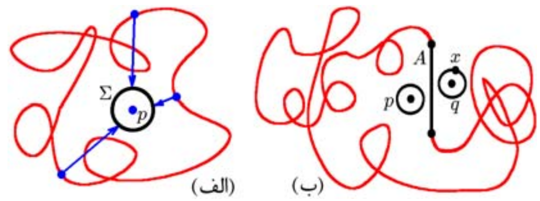
راهنمایی:یکبار ω را عددی حقیقی و بار دیگر، آنرا ih بگیرید.

د) نتیجه بگیرید $|f'(x+iy)|^۲ = \det f'(x,y)$، که f' در سمت چپ همان است که در قسمت (ب) تعریف شد و f' در سمت راست، تبدیل خطی تعریف شده برای هر نگاشتی چون $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ می‌باشد.

ه) به کمک مسألهٔ ۲۱، اثباتی دیگر برای قضیهٔ اساسی جبر ارائه کنید.

و) استدلالی ساده‌تر، بدون استفاده از مسألهٔ ۲۱ (که بسیاری از قضایای این فصل را بکار–می‌برد) وجود دارد. مستقیماً نشان دهید که اگر $f : M \longrightarrow N$ سره باشد، آنگاه تعداد نقاط در $f^{(-۱)}(a)$ تابعی موضعاً ثابت بر مجموعهٔ مقادیر منظم f است. نشان دهید که این مجموعه برای هر چند جمله‌ای $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ همبند است، و نتیجه بگیرید که f همهٔ مقادیر را اختیار می‌کند.

۲۳. گیریم $M^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد همبند فشرده است. به ازاء $p \in \mathbb{R}^n - M$، یک کرهٔ $(n-۱)$–بعدی $\sum$ حول p چنان انتخاب می‌کنیم که همهٔ نقاط داخل $\sum$ در $\mathbb{R}^n - M$ قرار داشته باشد. گیریم $r_p : \mathbb{R}^n - \{p\} \longrightarrow \sum$ انقباض بدیهی است. **عدد چرخشی** $\omega(p)$ منیفلد M حول نقطهٔ مفروض p را درجهٔ $r_p|M$ تعریف می‌کنیم.



شکل ۳۱.۸

الف) نشان دهید که این تعریف با آنچه که در مسألهٔ ۳ آورده شد مطابقت دارد.

ب) نشان دهید که این تعریف به انتخاب $\sum$ بستگی ندارد.

ج) نشان دهید که ω در یک همسایگی از p ثابت است. نتیجه بگیرید که ω بر هر مؤلفه از $\mathbb{R}^n - M$ ثابت است.

د) فرض کنید M قسمتی از $(n-۱)$–صفحه را دربردارد. گیریم p و q نقاطی بر این صفحه‌اند، اما در دو طرف مختلف. نشان دهید $\omega(q) = \omega(p) \pm ۱$. (نشان دهید $r_q|M$ با نگاشتی که بر $M - A$ برابر $r_p|M$ است و هیچ نقطه‌ای از A را بروی n نمی‌برد، هموتوپ است.)

ه) نشان دهید که در کل، اگر M جهت‌پذیر باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - M$ حداقل دو مؤلفه دارد. چند مسألهٔ بعد نشان می‌دهند که همین حکم را حتی در حالتی که M جهت‌ناپذیر باشد، چگونه می‌توان اثبات نمود. مطلب دقیق‌تر در این خصوص، در فصل ۱۱ آورده شده است.

۲۴. گیریم M و N دو n–منیفلد فشرده‌اند و $f, g : M \longrightarrow N$ به شکل هموار هموتوپند، با هموتوپی هموار $H : M \times [۰; ۱] \longrightarrow N$.

الف) گیریم $q \in N$ مقداری منظم برای H است. گیریم $\#f^{-۱}(q)$ نمایشگر تعداد (متناهی) نقاط در $f^{-۱}q$ است. نشان دهید (پیمانه ۲) $\#f^{-۱}(q) \equiv \#g^{-۱}(q)$.
راهنمایی: $H^{-۱}(q)$ یک ۱–منیفلد مرزدار فشرده است. تعداد نقاط بر مرزش به وضوح زوج است. (اینجا جایی است که از شکل قوی‌تر قضیهٔ سارد استفاده می‌شود.)

ب) کلیتر، نشان دهید که این حکم در صورتی که q مقدار منظم مشترک f و g باشد، باز هم برقرار است.

۲۵. در صورتی که $f, g : M \longrightarrow N$، برای نمایش اینکه g, f به شکل هموار هموتوپند، از $f\tilde{g}$ استفاده می‌کنیم.

الف) اگر $f\tilde{g}$، آنگاه یک هوموتوپی هموار $H' : M \times [\circ ; ۱] \longrightarrow N$ چنان وجود دارد که

$$H'(p,t) = \begin{cases} f(p) & \text{به ازاء } t \text{ های در یک همسایگی از } \circ \\ g(p) & \text{به ازاء } t \text{ های در یک همسایگی از } ۱ \end{cases}$$

ب) ? رابطه‌ای هم‌ارزی است.

۲۶. اگر f به شکل هموار توسط هوموتوپی هموار H با g هوموتوپ باشد، به گونه‌ای که $p \mapsto H(p,t)$ به ازاء هر t دیفئومورفیسم است، می‌گوئیم f به شکل هموار با g **ایزوتوپ** است.

الف)] به شکل هموار ایزوتوپ بودن، رابطه‌ای هم‌ارزی است.

ب)] گیریم $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار است که بر درون یک گوی واحد مثبت است و در سایر جاها صفر. به ازاء $p \in \mathbb{S}^{n-۱}$، نگاشت $H' : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ صادق در روابط را در نظر بگیرید (بنا به قضیهٔ ۶.۲.۵، هر جواب این مسأله به ازاء همهٔ t ها تعریف می‌گردد.) نشان دهید که هر یک از توابع $x \mapsto H(tmn)$ دیفئومورفیسم هستند و به شکل هموار با نگاشت همانی ایزوتوپند و همهٔ نقاط در خارج یک گوی واحد ثابت را ثابت نگاه می‌دارند.

ج) با انتخاب مناسب p و t نشان دهید که می‌توان $H(t, \circ)$ را هر نقطهٔ بخصوص ا درون‌گوی واحد گرفت.

د) اگر M همبند بوه و $p, q \in M$، آنگاه دیفئومورفیسمی $f : M \longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $f, f(p) = q$ به شکل هموار با نگاشت همانی ایزوتوپ است.

ه) با استفاده از قسمت (د)، اثباتی دیگر برای قسمت مرحلهٔ سوم از اثبات قضیهٔ ۴.۸.۸ فراهم کنید.

و) اگر M و N دو n−منیفلد هموار باشند و $f : M \longrightarrow N$، در این صورت دهید که به ازاء مقادیر منظم $q_۱, q_۲ \in N$ داریم (پیمانه ۲) $\#f^{-۱}(q_۱) \equiv \#f^{-۱}(q_۲)$. (که $\#f^{-۱}(q)$ در مسألهٔ ۲۳ تعریف شده است). این عدد را **درجهٔ** f به پیمانهٔ ۲ می‌نامیم.

ز) نشان دهید که با تعویض «درجه» با «درجهٔ به پیمانهٔ ۲» در مسألهٔ ۲۳، چنانچه $M \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد فشردهٔ $(n-۱)$−بعدی باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - M$ حداقل دو مؤلفه دارد.

۲۷. گیریم $\{X^t\}$ خانواده‌ای هموار از میدانهای برداری هموار بر منیفلد فشردهٔ M است (به بیان دقیق‌تر، فرض کنید X یک میدان برداری هموار بر $M \times [\circ; ۱]$ است. در این صورت $\pi_M^* X_)(p,t)$ را با نماد $X^t(p)$ نشلن می‌دهیم. از ضمیمهٔ فصل ۵ و نیز استدلال بکار رفته در اثبات قضیهٔ ۶.۲.۵ نتیجه می‌گردد که خانواده‌ای هموار $\{\varphi_t\}$ از دیفئومورفیسمهای M (نه لزوماً گروه ۱–پارامتری) به گونه‌ای وجود دارد که $\{X^t\}$ را تولید می‌کند. به عبارت دیگر، به ازاء هر تابع هموار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$(X^t f)(p) = \lim_{h \longrightarrow \circ} \frac{۱}{h}(f(\varphi_{t+h}(p)) - f(\varphi_t)(p))$$

برای هر خانواده ω_t از k–فرمهای بر M، k–فرمی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega_t := \lim_{h \longrightarrow \circ} \frac{۱}{h}(\omega_{t+h} - \omega_t)$$

الف) نشان دهید $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_) t) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X^t}\omega_t + \omega_t^\circ)$.

ب) گیریم $\omega_\circ$ و $\omega_۱$ در n–فرم هیچ کجا صفر بر یک n–منیفلد جهتدار فشردهٔ M هستند. نشان دهید خانوادهٔ φ_t دیفئومورفیسمهای تولید شده توسط $\{Xt\}$ وقتی و تنها وقتی در شرط $\varphi_t^* \omega_t = \omega_\circ$ صدق می‌کند که داشته باشیم $\mathcal{L}_X \omega_t = \omega_\circ - \omega_۱$.

ج) با استفاده از مسألهٔ ۱۸ از فصل ۷، نشان دهید که این وقتی و تنها وقتی ممکن است که $d(X^t \rfloor \omega_t) = \omega_\circ - \omega_۱$.

د) فرض کنید $\int_M \omega_۱ = \int_M \omega_\circ$ و لذا به ازای یک λ ای $\omega_\circ - \omega_۱ = d\lambda$. نشان دهید دیفئومورفیسمی $f_۱ : M \longrightarrow M$ چنان وجود دارد که $\omega_\circ = f^* \omega_۱$.

۲۸. گیریم $f : M^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $g : N^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتهایی هموارند، که M و N منیفلدهای جهت‌پذیر فشرده‌اند، $n = k + \ell + ۱$ و $f(M) \cap g(N) = \phi$. نگاشت $\alpha_{f,g} : M \times N \longrightarrow \mathbb{S}^{n-۱} \subset \mathbb{R}^n - \{\circ\}$ را به صورت

$$\alpha_{f,g}(p,q) = r(g(q) - f(p)) = \frac{g(q) - f(p)}{|g(q) - f(p)|}$$

عدد برخورد (ربط) f و g را به صورت $\ell(f,g) = deg\alpha_{f,g}$ تعریف می‌کنیم، که $M \times N$ به تعبیر در مسألهٔ ۱۸ جهت‌پذیر و دارای جهت است.

الف) ثابت کنید $\ell(f,g) = (-۱)^{k+\ell+۱}\ell(g,f)$.

ب) گیریم $H : M \times [\circ; \text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $k : N \times [\circ; \text{۱}]$ دو هوموتوپی هموار با

$$H(p, \circ) = f(p) \quad H(p, \text{۱}) = f'(p) \quad K(q, \circ) = g(q) \quad K(q, \text{۱}) = g'(q)$$

به گونه‌ای که به ازای هر t ای $\{H(p,t) : p \in M\} \cap \{K(q,t) : q \in N\} = \phi$.
نشان دهید

$$\ell(f, g) = \ell(f', g')$$

ج) نشان دهید که اگر $f, g : \mathbb{S}^\text{۱} \longrightarrow \mathbb{R}^\text{۳}$، آنگاه

$$\ell(f,g) = \frac{-\text{۱}}{\text{۶}\pi} \int_\circ^\text{۱} \left[\int_\circ^\text{۱} \frac{A(u,v)}{\{r(u,v)\}^\text{۳}}\, du \right] dv$$

که $r(u,v) = |g(v) - f(u)|$ و

$$A(u,v) = \det \begin{pmatrix} (f^\text{۱})'(u) & (f^\text{۲})'(u) & (f^\text{۳})'(u) \\ (g^\text{۱})'(v) & (g^\text{۲})'(v) & (g^\text{۳})'(v) \\ g^\text{۱}(v) - f^\text{۱}(u) & g^\text{۲}(v) - f^\text{۲}(u) & g^\text{۳}(u) - f^\text{۳}(v) \end{pmatrix}$$

(عامل $\text{۱}/\text{۴}\pi$ به این دلیل است که $\int_{\mathbb{S}^\text{۲}} \sigma' = \text{۴}\pi$ [مسألهٔ ۱۴ از فصل ۹]).

د)] نشان دهید که اگر f و g هر دو در یک صفحه واقع باشند، آنگاه $\ell(f,g) = \circ$ (این را ابتدا برای xy–صفحه انجام دهید). مسألهٔ بعد نشان می‌دهد که چگونه $\ell(f,g)$ را بدون محاسبه می‌توان بدست آورد.

۲۹. الف) به ازای $(a,b,c) \in \mathbb{R}^\text{۳}$ تعریف می‌کنیم

$$d\Theta_{a,b,c} = \frac{(x-a)dy \wedge dz - (y-b)\,dx \wedge dz + (z-c)\,dx \wedge dy}{((x-a)^\text{۲} + (y-b)^\text{۲} + (z-c)^\text{۲})^{\text{۳}/\text{۲}}}$$

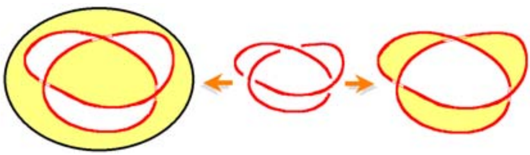
به ازای ۲–منیفلد جهت‌دار و بدون مرز $M \subseteq \mathbb{R}^\text{۳}$ و $(a,b,c) \notin M$، فرض کنیم $\Omega(a,b,c) = \int_M d\Theta_{(a,b,c)}$. گیریم (a,b,c) و (a',b',c') نقاطی در نزدیکی $p \in M$ هستند، که در دو طرف M قرار دارند. فرض کنید (a,b,c) در همین جهتی است که بردار $\omega_p \in T_p\mathbb{R}^\text{۳} - T_pM$ قرار دارد به گونه‌ای که $\{\omega_p, (v_\text{۱})_p, (v_\text{۲})_p\}$ در $T_p\mathbb{R}^\text{۳}$ با جهت مثبت است هرگاه $\{(v_\text{۱})_p, (v_\text{۲})_p\}$ در T_pM با جهت مثبت باشد. نشان دهید $\lim\limits_{(a,b,c) \longrightarrow p} \Omega(a,b,c) - \Omega(a',b',c') = -\text{۴}\pi$.

شکل ۳۲.۸

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که $M = \partial N$ نتیجه می‌دهد به ازای هر $(a,b,c) \in N - M$ ای $\Omega(a,b,c) = -۴\pi$ و به ازای هر $(a,b,c) \notin N$ ای $\Omega(a,b,c) = ۰$.

ب) گیریم $f : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ نشاننده‌ای است که به ازای یک ۲−منیفلد لبه‌دار، جهت‌دارو فشردهٔ M ای $f(\mathbb{S}^۱) = \partial M$.(چنین M ای هموار وجود دارد. مثلاً، به صفحهٔ ۱۳۸ از فورت، توپولوژی ۳−منیفلدها، توجه گردد.)

شکل در سمت چپ قسمتی از یک رویهٔ جهتپذیر را نشان می‌دهد که مرز آن گرهٔ سه لایی ? است. سایر قسمتهای رویه، یک نیم‌کره است که در پشت کاغذ قرار دارد و مرز آن خارج دایره است. رویهٔ سمت راست جهتپذیر نیست.



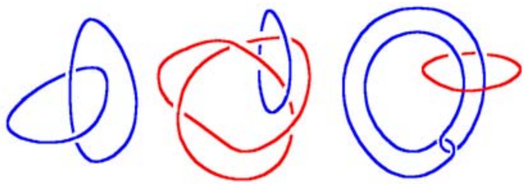
شکل ۳۳.۸

گیریم $g : \mathbb{S}^۱ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ و وقتی $g(t) = p \in M$، داشته باشیم $dg/dt \notin T_pM$. گیریم n^+ تعداد برخوردهایی است که dg/dt در همان جهت که بردار ω_p از قسمت (الف) قرار دارد، واقع می‌باشد، و n^- تعداد سایر برخودها است. نشان دهید که $n = n^+ - n^- = \frac{-۱}{۴\pi}\int_{\mathbb{S}^۱} g^*(d\Omega)$.

ج) نشان دهید

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial a}(a,b,c) &= \int_{\mathbb{S}^۱} f^*\Big(\frac{(y-b)\,dz-(z-c)\,dy}{\|(x,y,z)\|^۳}\Big)\\
\frac{\partial\Omega}{\partial b}(a,b,c) &= \int_{\mathbb{S}^۱} f^*\Big(\frac{(z-c)\,dx-(x-a)\,dz}{\|(x,y,z)\|^۳}\Big)\\
\frac{\partial\Omega}{\partial c}(a,b,c) &= \int_{\mathbb{S}^۱} f^*\Big(\frac{(x-a)\,dy-(y-b)\,dx}{\|(x,y,z)\|^۳}\Big)
\end{aligned}$$

د) نشان دهید $n = \ell(f,g)$. مقدار $\ell(f,g)$ را برای هر یک از جفت منحنیهای زیر محاسبه کنید:



شکل ۳۴.۸

۳۰. الف) گیریم $p,q\in\mathbb{R}^n$ متفاوتند. مجموعه‌های باز $A,B\subset\mathbb{R}^n-\{p,q\}$ را چنان انتخاب کنید که A و B با $\mathbb{R}^n-$د دیفئومورفند، و $A\cap B$ با $\mathbb{R}^n$، دیفئومورف است. با استدلالی مشابه آنچه که در اثبات قضیهٔ ۵.۹.۸ بکار رفت نشان دهید که به ازای هر $0<k<n-1$ ای $H^k(\mathbb{R}^n-\{p,q\})=0$، و نیز $H^{n-1}(\mathbb{R}^n-\{p,q\})$ دو بعدی است.

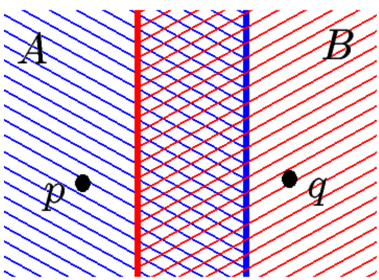
ب) فضاهای برداری کوهمولوژی دورام $\mathbb{R}^n-F$ را بیابید، که $F\subseteq\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای متناهی است.

۳۱. حاصل‌ضرب فنجانی $U : H^k(M)\times H^\ell(M)\longrightarrow H^{k+\ell}(M)$ را به صورت $[\omega]\wedge[\eta]=[\omega\wedge\eta]$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید U خوش‌تعریف است. به عبارت دیگر اگر ω دقیق و η بسته باشد، آنگاه $\omega\wedge\eta$.

ب) نشان دهید U دو خطی است.

ج) نشان دهید که اگر $\alpha\in H^\ell(M)$ و $\beta\in H^k(M)$، آنگاه $\alpha\cup\beta=(-1)^{k\ell}\beta\cup\alpha$.



شکل ۳۵.۸

د) در صوورتی که $f : M \longrightarrow N$، $\alpha \in H^k(N)$ و $\beta \in H^\ell(N)$، ثابت کنید $f^*(\alpha \cup \beta) = f^*\alpha U f^*\beta$.

ه) حاصل‌ضرب خارجی $\times : H^k(M)\times H^\ell(N) \longrightarrow H^{k+\ell}(M\times N)$ را به صورت $[\omega] \times [\eta] = [\pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta]$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\times$ خوشتعریف است و $\alpha \times \beta = \pi_M^*\alpha \cap \pi_N^*\beta$.

و) اگر $\Delta : M \longrightarrow MM \times M$ با ضابطهٔ $\Delta(p) = (p,p)$ باشد، نشان دهید $\alpha \cup \beta = \Delta^*(\alpha \times \beta)$.

۳۲. فرض کنید بر تیوب n−بعدی $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (حاصل‌ضرب n کپی از $\mathbb{S}^1$) $d\theta^i$ نمایشگر $\pi_i^* d\theta$ است، که $\pi_i : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{S}^1$ تصویر بر مؤلفهٔ i ام است.

الف) نشان دهید که همهٔ $d\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\theta^{i_k}$ ها عناصر مختلفی از $H^k(\mathbb{T}^n)$ را نشان می‌دهند. این ار را با یافتن زیر منیفلدهایی از $\mathbb{T}^n$ که بر آنها انتگرالهای مختلف دارند، استفاده کنید. در نتیجه $\dim H^k(\mathbb{T}^n) \geq \binom{n}{k}$.

ب) نشان دهید که $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ از درجهٔ صفر است. **راهنمایی:** از مسألهٔ ۲۵ استفاده کنید.

فصل ۹

متر ریمان

۱.۹ ضرب داخلی

در فصول قبل تقریباً همهٔ ساختهای ممکن با فضاهای برداری، و لذا ساختهای با کلافها را مطرح کردیم. اما، یک مورد مهم از قلم افتاده است — هرگز راجع به ضرب داخلی سختی بگفتیم. اکنون زمان آن رسیده است که این ابزار جا افتاده را معرفی کنیم.

منظور از یک **ضرب داخلی** بر فضای برداری V بر میدان F، تابعی است دو خطی از $V \times V$ به F، که با نماد $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ نشان می‌دهیم، و بایستی متقارن بوده، یعنی $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ و ناتباهیده باشد: اگر $v \neq ۰$، آنگاه $w \neq ۰$ ای چنان وجود دارد که $\langle v, w\rangle \neq ۰$. از این پس، هیأت (میدان) F را $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) می‌گیریم.

به ازای هر r با $۰ \leq r \leq n$، یک ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_r$ بر $\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ

$$\langle a, b\rangle_r := \sum_{i=۱}^{r} a^i b^i - \sum_{i=r+۱}^{n} a^i b^i$$

می‌توانیم تعریف کنیم. این نابتاهیده است، چرا که اگر $a \neq ۰$، آنگاه

$$\Big\langle (a^۱, \cdots, a^n), (a^۱, \cdots, a^r, -a^{r+۱}, \cdots, -a^n) \Big\rangle = \sum_{i=۱}^{n} (a^i_i)^۲ > ۰$$

به ویژه، برای $r = n$، به ضرب داخلی استاندارد $\langle\langle , \rangle\rangle$ بر $\mathbb{R}^n$ می‌رسیم: $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \sum_{i=۱}^{n} a^i b^i$. در مورد این ضرب داخلی، به ازای هر $a \neq ۰$ ای داریم $\langle\langle a, a\rangle\rangle > ۰$.

در کل، یک تابع دو خطی متقارن $\langle,\rangle$ را در صورتی **مثبت معین** گوئیم که به ازای هر $v \neq ۰$ ای $\langle v,v\rangle > ۰$ روشن است که هر تابع دو خطی مثبت معین، نابتاهیده است و در نتیجه، یک ضرب داخلی است.

توجه کنید که هر ضرب داخلی $\langle,\rangle$ بر V منحصری از $\mathcal{T}^۲(V)$ است، و لذا اگر $f : V \to w$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه $F^*\langle,\rangle$ یک تابع دو خطی متقان بر W است. این تابع دو خطی متقارن ممکن است بتاهیده باشد حتی اگر f یک‌به‌یک باشد. مثلاً، اگر $\langle,\rangle$ ضرب $\langle a,b\rangle = a^۱b^۱ - a^۲b^۲$ بر $\mathbb{R}^۲$ باشد و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$ تابع $f(a) = (a,a)$. با این حال، اگر f ایزومورفیسمی بروی V باشد، آنگاه به وضوح $f^*\langle,\rangle$ نابتاهیده است. همچنین اگر $\langle,\rangle$ مثبت معین باشد، آنگاه $f^*\langle,\rangle$ وقتی و تنها وقتی مثبت معین است که f یک‌به‌یک باشد.

به ازای هر پایه $v_۱,\cdots,v_n$ برای V، با پایهٔ دوگان نظیر $v_۱^*,\cdots,v_n^*$ برای V^*، می‌توانیم بنویسیم

$$\langle,\rangle = \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}\, v_i^* \otimes v_j^*$$

که در این عبارت

$$g_{ij} := \langle v_i, v_j\rangle$$

بنابراین، متقارن بودن $\langle,\rangle$ ایجاب می‌کند که ماتریس (g_{ij}) متقارن باشد: $g_{ij} = g_{ji}$. ماتریس (g_{ij}) تعبیر مهم دیگری نیز دارد. چون هر ضرب داخلی $\langle,\rangle$ نسبت به مؤلفهٔ دومش خطی است، نگاشتی خطی $\varphi_v \in V^*$ به ازای هر $v \in V$ می‌توانیم تعریف کنیم: $\varphi_v(w) = \langle v,w\rangle$. چون $\langle,\rangle$ نسبت به مؤلفهٔ اولش نیز خطی است، نگاشت $v \mapsto \varphi_v$ تبدیلی خطی از V به V^* می‌باشد. نابتاهیدگی $\langle,\rangle$ ایجاب می‌کند که اگر $v \neq ۰$، آنگاه $\varphi_v \neq ۰$. بنابراین، اگر V با بعد متناهی باشد، هر ضرب داخلی $\langle,\rangle$، یک ایزومورفیسم $\alpha : V \to V^*$ با ضابطهٔ

$$\langle v,w\rangle = \alpha(v)w$$

به ما می‌دهد. به وضوح، ماتریس (g_{ij}) درست ماتریس $g : V \to V^*$ نسبت به پایه‌های $\{v_i\}$ برای V و $\{v_i^*\}$ برای V^* است. بنابراین، نابتاهیدگی $\langle,\rangle$ معادل با شرط زیر است:

$$(g_{ij}) \text{ ناتکین است یعنی و } \det(g_{ij}) \neq ۰$$

مثبت معین بودن $\langle,\rangle$ به شرطی پیچیده‌تر در مورد (g_{ij}) متناظر است: (g_{ij}) باید مثبت معین باشد، یعنی

به ازای هر $a^1, \cdots, a^n$ که لااقل یکی از آنها مخالف صفر است، داریم $\sum_{i=1}^{n} g_{ij}a^i a^i > 0$

به ازای هر ضرب داخلی مثبت معین $\langle\langle,\rangle\rangle$ بر V، فرم $\|.\|$ نظیر را به صورت

$$\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2} \quad \text{(ریشه‌از عددی مثبت گرفته شده است)}$$

تعریف می‌کنیم. فرم متناظر به $\langle,\rangle$ در $\mathbb{R}^n$ را با نماد

$$\|a\| = \langle a, a\rangle^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{n}(a^i)^2\Big)^{1/2}$$

نشان می‌دهیم. خواص اصلی $\|.\|$ در ذیل آمده است:

۱.۱.۹ قضیه. به ازای هر $v, w \in V$ ای داریم

۱) $\|av\| = |a|.\|v\|$، که $a \in \mathbb{R}$.

۲) $\langle v, w\rangle \leq \|v\|.\|w\|$، که که تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که v و w وابستهٔ خطی باشند، یعنی $\lambda \in \mathbb{R}$ یافت شود که $v = \lambda w$ (نامساوی شوارتز).

۳) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

اثبات:

(۱) بدیهی است.

(۲) اگر v و w مستقل خطی نباشند، به وضوح تساوی برقرار است. در غیر این صورت، یعنی اگر v و w مستقل خطی باشند، آنگاه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ای $\lambda v - w \neq 0$ و لذا

$$0 < \|\lambda v - w\|^2 = \langle \lambda v - w, \lambda v - w\rangle = \lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

پس سمت راست یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب λ است و هیچ ریشه‌ای ندارد. در نتیجه، باید مبین آن منفی باشد. پس

$$4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \langle 0$$

و برهان تمام است.

(۳) بنابه (۲) داریم

$$\begin{aligned}\|v+w\|^{۲} &= \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^{۲}+\|w\|^{۲}+۲\langle v,w\rangle \\ &\leq \|v\|^{۲}+\|w\|^{۲}+۲\|v\|,\|w\| = (\|v\|+\|w\|)^{۲}\end{aligned}$$

اکنون کافی است از طرفین جذر بگیریم.

تابع $\|.\|$ خواص نامطلوبی دارد —مثلاً، تابع $|.|$ بر $\mathbb{R}^n$ در $\circ \in \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل‌پذیر نیست — که تابع $\|.\|^{۲}$ این مشکلات را ندارد. تابع اخیر، تابعی درجه دوم بر V است — بر حسب پایهٔ $\{v_i\}$ برای V، آنرا به صورت یک چند جمله‌ای همگن از درجهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\Big\|\sum_{i=۱}^{n} a^i v^i\Big\|^{۲} = \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}a^i a^j$$

به بیان دیگر

$$\|.\|^{۲} = \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}v_i^*.v_j^*$$

با توجه به قضیهٔ ذیل می‌توان تعریفی ناوردا برای تابع درجه دوم بدست آورد (مسألهٔ ۱).

۲.۱.۹ قضیه (اتحاد قطبی سازی). اگر $\|,\|$ فرم متناظر به ضرب داخلی $\langle,\rangle$ بر V باشد، آنگاه

$$(۱)\quad \langle v,w\rangle = \frac{۱}{۲}\{\|v+w\|^{۲}-\|v\|^{۲}-\|w\|^{۲}\}$$

$$(۲)\quad \langle v,w\rangle = \frac{۱}{۴}(\|v+w\|^{۲}-\|v-w\|^{۲})$$

اثبات: محاسبه است. □

قضیهٔ ۲.۱.۹ نشان می‌دهد که هر دو ضرب داخلی که یک فرم را القاء کنند، با هم برابرند. به ضرورت مشابه اگر $f : V \to W$ حافظ فرم باشد (یعنی به ازای هر $v \in V$ ای $\|f(v)\| = \|v\|$)، آنگاه f حافظ ضرب داخلی نیز هست (یعنی، به ازای هر $v,w \in V$ ای $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v,w\rangle$).

حال نشان می‌دهیم که در حد ایزومورفیسم تنها یک ضرب داخلی مثبت معین بر هر فضای برداری وجود دارد.

۳.۱.۹ قضیه. اگر $\langle,\rangle$ یک ضرب داخلی مثبت معین بر فضای برداری $n-$بعدی V باشد، آنگاه پایه‌ای $\{v_1,\cdots,v_n\}$ برای V چنان وجود دارد که $\langle v_i,v_i\rangle=\delta_ij$. (چنین پایه‌ای را، پایهٔ **متعامد** نسبت به $\langle,\rangle$ می‌نامیم.) نتیجتاً، ایزومورفیسمی $f:\mathbb{R}^n\to V$ وجود دارد که

$$\langle a,b\rangle=\langle f(a),f(b)\rangle \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

به عبارت دیگر، $f^*\langle,\rangle=\langle,\rangle$.

اثبات: گیریم $\{w_1,\cdots,w_n\}$ پایه‌ای دلخواه برای V است. با بکارگیری الگوریتم متعامدسازی گرام—اثمیت، این پایه را بدست می‌آوریم. چون $w_1\neq 0$، می‌توانیم تعریف کنیم $v_1:=w_1/\|w_1\|$، و به وضوح $\|v_1\|=1$. فرض کنید موفق به ساخت $v_k,\cdots,v_1$ شده‌ایم. پس

$$\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$$

و بعلاوه

$$\{v_1,\cdots,v_k\}=-\quad\{w_1,\cdots,w_k\}$$

بنابراین، w_{k+1} نسبت به v_1، $\cdots$ و v_k مستقل خطی است. گیریم

$$w'_{k+1}:=w_{k+1}-\langle v_1,v_{k+1}\rangle v_1-\cdots-\langle v_k,v_{k+1}\rangle v_k\neq 0$$

به سادگی مشاهده می‌گردد که

$$\langle w'_{k+1},v_i\rangle=0 \qquad i=1,\cdots,k$$

و لذا می‌توانیم تعریف کنیم $w_{k+1}:=w'_{k+1}/\|w'_{k+1}\|$ به استقراء ادامه می‌دهیم. □

برخی اوقات، ضرب داخلی مثبت معین $\langle$ و $\rangle$ بر V را، **تراقلیدسی** بر V می‌نامند. دلیل آن این است که با تعریف $p(v,w)=\|v-w\|$، به یک تراقلیدسی بر V می‌رسیم. نامساوی مثلثی (قسمت (۳) از قضیهٔ ۱.۱.۹) نشان می‌دهد که p عملاً یک متر است. $\|v\|$ را **طول** v می‌نامند.

برای آغاز به کار، به تنها یک نکتهٔ جبری دیگر نیاز داریم. یادآور می‌ش.یم که هر ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ بر V یک ایزومورفیسم $\alpha : v \to V^*$ با $\alpha(v)(w) = \langle v, w\rangle$ بر V تعریف می‌کند. به کمک ایزومورفیسم طبیعی $i : V \to V^{**}$ تعریف می‌کنیم

$$i(v)(\lambda) = \lambda(v)$$

به این ترتیب، ایزومورفیسم

$$\beta : V^* \xrightarrow{\alpha^{-1}} V \xrightarrow{i} (V^*)^*$$

را داریم. اکنون از β برای تعریف یک تابع دو خطی $\langle\ ,\ \rangle^*$ بر V^* با ضابطهٔ

$$\langle\lambda, \mu\rangle^* = \beta(\lambda)(\mu) = i\alpha^{-1}(\lambda)(\mu) = \mu(\alpha^{-1}(\lambda))$$

می‌توانیم استفاده کنیم. اکنون متقارن بودن $\langle\ ,\ \rangle$ را به صورت

$$\alpha(v)(w) = \alpha(w)(v)$$

می‌توان توضیح داد. با فرض $\alpha(v) = \lambda$ و $\alpha(w) = \mu$، این رابطه را به صورت

$$\lambda(\alpha^{-1}(\mu)) = \mu(\alpha^{-1}(\lambda))$$

می‌توان نوشت، که نشان می‌دهد $\langle\ ,\ \rangle^*$ نیز متقارن است. $\langle\lambda, \mu\rangle^* = \langle\mu, \lambda\rangle^*$ نتیجتاً، $\langle\ ,\ \rangle^*$ یک ضرب داخلی بر V^* است (در واقع، همان β است).

برای اینکه ببینیم این کلاً به چه معنی است، پایه‌ای $\{v_i\}$ برای V در نظر گرفته گرفته و فرض می‌کنیم $\{v_i^*\}$ پایهٔ دوگان نظیر برای V^* است و

$$\langle,\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, v_i^* \otimes v_j^*$$

در این صورت (g_{ij}) ماتریس $\alpha : V \to V^*$ نسبت به $\{v_i\}$ و $\{v_i^*\}$ است. بنابراین g_{ij}^{-1} پایهٔ V $\alpha^{-1} : V^* \to V$ نسبت به $\{v_i^*\}$ و $\{v_i\}$ است. بنابراین $(g_{ij})^{-1}$ ماتریس $\beta : V^* \to V^{**}$ نسبت به $\{v_i^*\}$ و $\{v_i^{**}\}$ است. ورنتیجه، اگر تعریف کنیم $(g^{ij})-(g_{ij})^{-1}$، آنگاه

$$\sum g^{ik}\, g_{kj} = \delta^i_j$$

و به علاوه، اگر v_i را عضوی V^{**} بگیریم:

$$\langle,\rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, v_i^{**} \otimes v_j^{**} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, v_i \otimes v_j$$

توجه کنید که اگر $\langle\ ,\ \rangle$ مثبت معین باشد، آنگاه به ازاء $\alpha(v)=\lambda$ داریم

$$\lambda(\alpha^{-1}(\lambda))=\beta(\lambda)(\lambda)>0 \quad \text{به ازاء هر } \lambda\neq 0 \text{ ای}$$

بنابراین، $\langle\ ,\ \rangle^*$ نیز مثبت معین است. این را مستقیماً از تعریف بر حسب پایه‌ها می‌توان اثبات نمود. در حالت مثبت معین، ساده‌ترین راه برای توصیف $\langle\ ,\ \rangle^*$ به شرح ذیل است: پایهٔ $\{v_1^*,\cdots,v_n^*\}$ برای V^* وقتی و تنها وقتی نسبت به $\langle\ ,\ \rangle^*$ متعامد است که $\{v_1,\cdots,v_n\}$ نسبت به $\langle\ ,\ \rangle$ متعامد باشد.

تکنیک‌های مشابهی را (مسألهٔ ۴) برای تهیهٔ ضرب داخلی بر کلیهٔ فضاهای برداری $\mathcal{T}^k(V)$، $\mathcal{T}_k(V)=\mathcal{T}^k(V^*)$ و $\Omega^k(V)$ می‌توان اجرا کرد. البته ما تنها به یک حالت توجه داریم، که بطور کامل به شکل ناوردا قابل توصیف نیست. فضای برداری $\Omega^n(V)$ یک بعدی است، بنابراین برای تعریف یک ضرب داخلی بر آن، به تنها دو عنصر w و $-w$ بطول یک نیاز داریم. گیریم $\{v_1,\cdots,v_n\}$ و $\{w_1,\cdots,w_n\}$ دوپایه‌ای برای V اند که نسبت به $\langle\ ,\ \rangle$ متعامد می‌باشند. اگر بنویسیم $w_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\,v_j$، در این صورت

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \langle w_i,w_j\rangle=\Big\langle \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}\,v_k\ ,\ \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_{\ell j}\,v_\ell\Big\rangle\\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n}\langle v_k,v_\ell\rangle=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}\,\alpha_{kj}\end{aligned}$$

بنابراین، ترانهاد A^t ماتریس A در رابطهٔ $AA^t=I$ صدق می‌کند، که از آن ایجاب می‌شود $\det A=\pm 1$. از قضیه‌ی ۷—۵ نتیجه می‌گردد که به ازاء هر $w\in\Omega^n(v)$ ای داریم

$$w(v_1,\cdots,v_n)=\pm w(w_1,\cdots,w_n)$$

از این به وضوح نتیجه می‌گردد که

$$v_1^*\wedge\cdots\wedge v_n^*=\pm w_1^*\wedge\cdots\wedge w_n^*$$

بنابراین، دو عنصر متفاوت از $\Omega^n(V)$ داریم؛ آنها به شکل $\pm v_1^*\wedge\cdots\wedge v_n^*$ نسبت به پایه‌ای متعامد $\{V_i\}$ برای V هستند. آنها را عناصر به طول یک در $\Omega^n(V)$ می‌نامیم. اگر جهتی μ نیز در اختیار باشد، آنها را باز هم می‌توان بیشتر از هم متمایز کرد و یکی از بردارها $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ که به صورت $[v_1,\cdots,v_n]=\mu$ است، مثبت می‌نامیم، آن را عنصر به طول مثبت یک در $\Omega^n(V)$ می‌نامیم.

برای بسط عناصر به طول یک بر حسب یک پایه‌ای دلخواه $\{w_1, \cdots, w_n\}$، پایه‌ای متعامد $\{v_1, \cdots, v_n\}$ متعامد انتخاب کرده و می‌نویسیم $w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_j$ ایجاب می‌گردد که

$$\det(\alpha_{ij})\, w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$$

اگر بنویسیم

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, w_i^* \otimes w_j^*$$

آنگاه

$$g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, v_k, \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell j}\, v_\ell \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, \alpha_{kj}$$

و لذا اگر $A = (\alpha_{ij})$، آنگاه

$$\det(g_{ij}) = \det(A^t.A) = (\det A)^2$$

به ویژه، $\det(g_{ij})$ **هموار مثبت** است. نتیجتاً عناصر به طول یک در $\Omega^n(V)$ عبارتند از

$$\pm\sqrt{\det(g_{ij})}\, w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^* \qquad , \qquad g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$$

۲.۹　متر ریمان

اکنون این ابزار جدید را در مورد کلاف‌های برداری بکار می‌گیریم. اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری باشد، تابعی $\langle\ \rangle$ و $\langle\ \rangle$ که به هر $p \in B$ یک ضرب داخلی مثبت معین $\langle\ \rangle_p$ را نسبت می‌دهد (بر فضای $\pi^{-1}(p)$) و پیوسته است، به این تعبیر که به ازاء هر دو برش پیوستهٔ $s_1, s_2 : B \to E$، تابع

$$\langle s_1, s_2 \rangle = p \mapsto \langle s_1(p), s_2(p) \rangle$$

نیز پیوسته است، **یک متر ریمان** بر ξ می‌گوئیم. اگر ξ یک کلاف برداری هموار بر منیفلد هموار B باشد، از متر ریمان هموار می‌توانیم سخن بگوئیم.

[روش دیگری هم برای تعریف وجود دارد. گیریم $\mathrm{Euc}(V)$ مجموعهٔ همهٔ ضرب‌های داخلی مثبت معین بر V است. اگر هر $\pi^{-1}(p)$ را با $\mathrm{Euc}(\pi^{-1}(p))$ تعویض کنیم و فرض شود

$$\mathrm{Euc}(\xi) = \bigcup_{p\in B} \mathrm{Euc}(\pi^{-1}(p))$$

در این صورت، منظور از یک متر ریمان بر ξ، برشی از $\mathrm{Euc}(\xi)$ است. تنها مشکل این است که $\mathrm{Euc}(V)$ فضای برداری نیست. به همین دلیل $\mathrm{Euc}(\xi)$ یک نمونه از ساختار کلی‌تر بنام کلاف تاری است.]

۱.۲.۹ قضیه. گیریم $\xi = \pi : E \to M$ یک کلاف $k-$صفحه‌ای (به ترتیب هموار) روی منیفلد هموار M است. در این صورت یک متر ریمان (به ترتیب هموار) بر ξ وجود دارد.

اثبات: یک پوشش موضعاً متناهی U برای M مرکب از مجموعه‌های باز U وجود دارد که بر هر یک از آنها یک بدیهی سازی (به ترتیب هموار) $t_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ در اختیار است. بر $U \times \mathbb{R}^K$ به وضوح یک متر ریمان $\langle (p,a),(p,b)\rangle_p = \langle a,b\rangle$ وجود دارد. چنانچه $v,w \in \pi^{-1}(p)$، تعریف می‌کنیم

$$\langle v,w\rangle_p^U := \langle t_U(v), t_U(w)\rangle_p^U$$

در این صورت، $\langle\ \text{و}\ \rangle^U$ یک متر ریمانی (به ترتیب، هموار) بای $\xi\Big|_U$ است. گیریم $\{\varphi_U\}$ یک افراز یکانی زیردست U است. $\langle\ \text{و}\ \rangle$ را به صورت

$$\langle v,w\rangle_p := \sum_{U\in U} \varphi_U(p)\langle v,w\rangle_p^U \qquad v,w\in\pi^{-1}(p)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\langle\ \text{و}\ \rangle$ پیوسته (به ترتیب هموار) است و به ازاء p ای $\langle v,w\rangle_p$ بر $\pi^{-1}(p)$ تابعی دوخطی و متقارن است. برای نشان دادن مثبت معین بودن آن، توجه می‌کنیم که

$$\langle v,v\rangle_p = \sum_{U\in u} \varphi_U(p).\langle v,v\rangle_p^U$$

و هر یک از $\varphi_v(p)\langle v,v\rangle_p^U$ ها نامنفی‌اند، و به ازای یکی از U ها مثبت است. □

شبیه همین استدلال نشان می‌دهد که هر کلاف برداری روی یک فضای پارافشرده، متر ریمان می‌پذیرد.

توجه شود که استدلال مرحلهٔ آخر در حالتی که ناتباهیدگی ضربهای داخلی $\langle,\rangle_U$ را از قبل نداشتیم، درست نبود. در واقع (مسألهٔ ۷) بر $T\mathbb{S}^{۲}$ هیچ $\langle,\rangle$ ای وجود ندارد که بر هر $T_p\mathbb{S}^{۲}$ ای تابع — متقارن دوخطی القاء کند که مثبت معین باشد، ولی نابتاهیده نباشد.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۴، چند پرسش در مورد کلاف‌های برداری که تاکنون مانده، حل می‌کنیم.

۲.۲.۹ نتیجه. اگر $\xi = \pi : E$ یک کلاف k–صفحه‌ای باشد، آنگاه $\xi = \xi$.

اثبات: گیریم $\langle,\rangle$ یک متریمانی برای ξ است. در این صورت به ازای هر $p \in M$، ایزومورفیسمی

$$\alpha_p : \pi^{-۱}(p) \to \{\pi^{-۱}(p)\}^*$$

با ضابطهٔ

$$\alpha_p(v)(w) = \langle v, w\rangle_p \qquad v, w \in \pi^{-۱}(p)$$

داریم پیوستگی $\langle,\rangle$ ایجاب می‌کند که گردایه همهٔ α_p ها هومورفیسمی از E به $E' = \bigcup_{p\in M}\{\pi^{-۱}(p)\}^*$ تعریف می‌کند. □

۳.۲.۹ نتیجه. اگر $\xi = \pi : E \to M$ کلاف ۱ – صفحه‌ای باشد، آنگاه ξ وقتی و تنها وقتی بدهی است که جهت‌پذیر باشد.

اثبات: قسمت تنها اگر بدیهی است. اگر ξ دارای جهت μ بوده و $\langle,\rangle$ متر ریمانی بر M باشد، آنگاه $s(p) \in \pi^{-۱}(p)$ ای منحصر بفرد وجود دارد که

$$\langle s(p), s(p)\rangle_p = ۱ \quad , \quad [s(p)] = \mu_p$$

به وضوح s یک برش است؛ سپس هم‌ارزی $f : E \to M \times \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(\lambda s(p)) = (p, \lambda)$ تعریف می‌کنیم.

۴.۲.۹ اثباتی دیگر. می‌دانیم (به توضیح پس از قضیهٔ ۷—۹ توجه کنید) که اگر ξ جهت‌پذیر باشد، آنگاه یک برش همه جا ناصفر برای $\xi^* = \Omega^{۱}(\xi)$ وجود دارد، و لذا ξ^* بدهی است. اما $\xi\tilde{\xi}^*$. □

همهٔ این مشاهدات هنگامی اهمیت بیشتر پیدا می‌کنند که کلاف ما، کلاف مماس TM به یک منیفلد هموار M باشد. در این حالت، به یک متر ریمان هموار $\langle,\rangle$ برای

TM، که بر هر T_pM ای یک ضرب داخلی مثبت معین القاء می‌کند، را **متر ریمان بر** M می‌نامیم. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی بر M باشد، متر ریمان $\langle , \rangle$ را بر U به صورت

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^i$$

می‌توان نوشت، که توابع هموار $g - ij$ در رابطهٔ $g_{ij} = g_{ji}$ صدق می‌کنند، چرا که $\langle , \rangle$ متقارن است، و $\det(g_{ij}) > 0$ زیرا $\langle , \rangle$ مثبت معین است.

البته روشن است که هر متر ریمان $\langle , \rangle$ بر M، تانسوری کواریان از مرتبهٔ دو است. پس به ازای هر نگاشت هموار $f : N \to M$، تانسوری کواریان $f^*\langle , \rangle$ بر N وجود دارد، که به وضوح دو خطی است؛ این وقتی وتنها وقتی متر ریمان بر N است که f ایمرشن باشد (یعنی به ازای هر $p \in N$ ای f_{*p} یک‌به‌یک باشد).

متر ریمان $\langle , \rangle^*$ القایی توسط $\langle , \rangle$ بر کلاف دوگان T^*M، یک تانسور کنترل واریان از مرتبهٔ دو است می‌توانیم بنویسیم

$$\langle , \rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

توصیف ضرب داخلی بر V^* نشان می‌دهد که به ازای هر p، ماتریس $(g^{ij}(p))$ وارون ماتریس $(g_{ij}(p))$ است؛ در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$$

به صورت مشابه، به ازای هر $p \in M$، متر ریمان $\langle , \rangle$ بر M دو عنصر از $\Omega^n(T_pM)$ را مشخص می‌کند: عناصر بطول یک. قبلاً دیده‌ایم می‌توان نوشت

$$\pm\sqrt{\det(g_{ij}(p))} dx^1(p) \wedge \cdots \wedge dx^n(p)$$

اگر M دارای جهت μ باشد، آنگاه μ_p امکان تعیین عنصر بطول یک مثبت را فراهم می‌سازد، و به این ترتیب به یک $n-$ فرم بر M می‌رسیم؛ اگر $x : U \to \mathbb{R}^n$ حافظ جهت باشد، آنگاه این فرم را بر U به صورت

$$\sqrt{\det(g_{ij})} |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$$

می‌توان نوشت. این المان حجم را با نماد dV نشان می‌دهیم، که البته d در اینجا بی معنی است (حتی وقتی M جهت‌پذیر باشد و آنرا بتوان به‌عنوان یک $n-$ فرم بتوان

تصور کرد) و آن را المان حجم مشخص شود توسط متر $\langle , \rangle$ می‌نامیم. به این ترتیب، حجم M را به صورت $\int_M dV$ می‌توانیم تعریف کنیم. روشن است که اگر M فشرده باشد، این فرمول با معنی است، در حالت M غیر فشرده (به مسألهٔ ۸—۱۰ توجه کنید) یا این انتگرال عددی مشخص است و یا از هر عدد بزرگ دلخواه بزرگتر است (بر زیر مجموعه‌های فشردهٔ M برابر هر عدد بزرگ دلخواه می‌شود). در این حالت می‌گوییم M به حجم نامتناهی است.

اگر M یک $n-$ منیفلد مرزدار در $\mathbb{R}^n$ بامتر ریمان معمولی $\langle , \rangle = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i$ باشد، آنگاه $g_{ij} = \delta_{ij}$. در نتیجه، $dV = |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$ و «حجم» به معنی معمولی آن می‌شود.

۳.۹ طول منحنی

ساخت مهمتری نظیر به هر متر ریمان بر M وجود دارد که تا پایان فصل به آن می‌وردازیم.

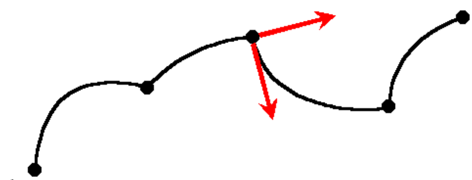
به ازای هر منحنی هموار $\gamma : [a, b] \to M$، بردارهای مماس

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$$

را داریم، و بنابراین از $\langle , \rangle$ برای محاسبهٔ طول آن می‌توان استفاده کرد

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} \qquad \left(= \left[\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle_{\gamma(t)}\right]^{1/2} \text{ دقیق‌تر} \right)$$

اگر γ **هموار تکه‌ای** باشد، به این معنی که افرازی $a = t_0 \langle \cdots \langle t_n = b$ برای $[a; b]$ چنان وجود داشته باشد که γ بر هر یک از $[t-i-1; t_i]$ ها هموار است (البته با مشتقات چپ و راست مختلف در $(t_1, \cdots, t_{n-1})$، طول γ را به صورت



شکل ۱.۹ : منحنی تکه‌ای هموار

$$\ell_a^b(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{t_{i-1}}^{k_i}\left(\gamma\Big|_{[t'_{i-1}, t_i]}\right)$$

می‌توان تعریف کرد. هرگاه ابهامی در میزان محاسبهٔ ℓ_a^b وجود داشته باشد، تنها از نماد ℓ می‌توان استفاده کرد. استدلالی مختصر (مسألهٔ ۱۵) نشان می‌دهد که به ازای هر منحنی تکه‌ای هموار در $\mathbb{R}^n$، با متر ریمان معمولی، این تعریف طول کوچکترین کران بالایی طول منحنی‌های چند ضلعی واقع بر منحنی، یکی است.

همچنین، تابعی $s : [a; b] \to \mathbb{R}$ به نام تابع طول قوس γ به صورت

$$s(t) = \ell_a^t(\gamma) = \int_a^\gamma \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt$$

می‌توان تعریف نمود. طبیعتاً

$$s'(t) = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \tag{۱.۹}$$

در نتیجه، $d\gamma/dt$ دقیقاً در صورتی به طول یک است که $s(t) = t$، و این دقیقاً به این معنی است که $s(t) = t = a$. در این صورت $a - b = s(b) = \ell_a^b(\gamma)$. منحنی γ را به صورت منحنی‌ای بر $[0; b-a]$ با ضابطهٔ $\overline{\gamma}(t) = \gamma(t-a)$ می‌توان تجدید پارامتر کرد. در مورد این منحنی جدید $\overline{\gamma}$ داریم

$$s(t)_{\text{جدید}} = \ell_0^t(\overline{\gamma}) = \ell_a^{t+a}(\gamma) = s(t+a)_{\text{قدیم}} - s(a)_{\text{قدیم}} = t$$

چنانچه γ در شرط $s(t) = t$ صدق کند، می‌گوئیم γ **توسط طول قوس پارامتره شده** است. (و لذا می‌توان به جای t از s استفاده کرد).

در کتب کلاسیک، فرم $\|,\|$ بر M را با ds نشان می‌دهند و این نماد اصطلاح شده است. معادلهٔ (۱.۹) چنین اذعان می‌دارد که به ازاء هر منحنی γ و $s : [a; 1] \to \mathbb{R}$ نظیر، بر $[a; b]$ داریم $|ds| = \gamma^*(\|,\|)$.

نتیجتاً، در نوشتجات کلاسیک، مورد

$$ds^2 = \sum_{i,j=1} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

وجود دارد. امروزه، این معادله را به صورت

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

تعبیر می‌کنند، ولی عملاً آن را به معنی

$$\|,\|^{۲} = \sum_{i,j=۱} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

می‌گیرند. نماد $dx^i dx^j$ در اینجا، جایگزین $dx^i \otimes dx^i$ به شکل کلاسیک نیست — مقدار $dx^i dx^j$ در p (یعنی، $((dx^i dx^j)(p)$) را به صورت‌تابعی دوخطی نمی‌توان تعبیر کرد، تابعی است درجه دوم

$$v \mapsto dx^i(p).dx^j(p)(v) \qquad v \in T_pM$$

و امروزه از همین نماد استفاده می‌شود. روش کلاسیک کار بار $dx^i \otimes dx^j$ بسیار دشوار است: می‌شود نوشت

$$\sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}\, dx^i\, \delta x^j$$

که dx و δx دو بینهایت کوچک مستقل هستند. (از نظر کلاسیک، متر ریمان تابعی بر بردارهای مماس نیست، بلکه ضرب داخلی دو تغییر مکان بینهایت کوچک dx و δx است.)

حال یک متر ریمان $\langle,\rangle$ بر منیفلد همبند M در نظر بگیرید. اگر p و q دو نقطهٔ دلخواه باشند، آنگاه حداقل یک منحنی تکه‌ای هموار $\gamma : [a;b] \to M$ از p به q وجود دارد (حتی می‌شود ثابت کرد که منحنی‌ای هموار از p به q وجود دارد). تعریف می‌کنیم

$$d(p,q) := \inf \left\{ \ell(\gamma) \text{ که در آن } \gamma \text{ یک منحنی تکه‌ای هموار از } p \text{ به } q \text{ است} \right\}$$

روشن است که $d(p,q) \geq ۰$ و $d(p,p) = ۰$. به علاوه، اگر $r \in M$ نقطهٔ سومی باشد، به ازاء هر $\varepsilon > ۰$، منحنی‌های تکه‌ای هموار

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_۱) - d(p,q) &< \varepsilon \text{ با } q \text{ به } p \text{ از } \gamma_۱ : [a;b] \to M \\ \ell(\gamma_۲) - d(q,r) &< \varepsilon \text{ با } r \text{ به } q \text{ از } \gamma_۲ : [b;c] \to M \end{aligned}$$

را انتخاب می‌کنیم. چنانچه $\gamma : [a;c] \to M$ را بر $[a;b]$ به صورت $\gamma_۱$ و بر $[b;c]$ به صورت $\gamma_۲$ تعریف کنیم، در این صورت γ منحنی تکه‌ای هموار از p به r است و

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_۱) + \ell(\gamma_۲) < d(p,q) + d(q,r) + ۲\varepsilon$$

چون این مطلب به ازاء هر ε ای درست است، نتیجه می‌گیریم که

$$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$$

[چنانچه منحنی‌های تکه‌ای هموار را مجاز نمی‌دانستیم، در چسبانیدن γ_1 و γ_2 مشکلاتی رخ می‌داد، اما همچنان d این ویژگی را می‌داشت (مسألهٔ ۱۷).] تابع $d : M\times M \to \mathbb{R}$ کلیهٔ خواص متر را دارد، به جز اینکه روشن نیست که اگر $p \neq q$ آنگاه حتماً $d(p,q) > 0$. این به شکل زیر حل می‌شود.

۱.۳.۹ قضیه. تابع $d : M\times M \to \mathbb{R}$ متری بر M است، و اگر $p : M\times M \to \mathbb{R}$ متر اولیه بر M باشد (که M را به منیفلد توپولوژیک تبدیل می‌کند)، آنگاه (M,d) با (M,p) معادل است.

اثبات: به وضوح هر دو بخش قضیه، نتایج لم زیرند. $\square$

۲.۳.۹ لم. گیریم U همسایگی بازی از گوی $B = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| \leq 1\}$ است. گیریم $\langle,\rangle_e$ متر ریمان معمولی با اقلیدسی بر U است: $\langle,\rangle_e = \sum_{i,j=1}^{n} dx^i \otimes dx^j$.
همچنین، فرض کنیم $\langle,\rangle$ متر ریمان دلخواهی بر U است. گیریم $\|,\|_e = |,|$ و $\|,\|$ فرم‌های نظیر هستند. در این صورت اعداد $m, M > 0$ چنان وجود دارند که

$$m.|,| \leq \|,\| \leq M.|,|$$

و نتیجتاً، به ازاء هر $\gamma : [a;b] \to B$ ای، داریم

$$m.\ell_e(\gamma) \leq \ell(\gamma) \leq M.\ell_e(\gamma)$$

اثبات: $G : B \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ را به صورت $G(p,a) := \|a_p\|_p$ نعریف می‌کنیم. در این صورت G پیوسته و مثبت است. چون $B \times \mathbb{S}^{n-1}$ فشرده است، اعداد $m, M > 0$ ای چنان یافت می‌شوند که

$$m < G < M \quad \text{بر} \quad B \times \mathbb{S}^{n-1}$$

حال اگر $p \in B$ و $0 \neq b_p \in T_p\mathbb{R}^n$، گیریم $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ برابر $a = b/|b|$ باشد. در این صورت

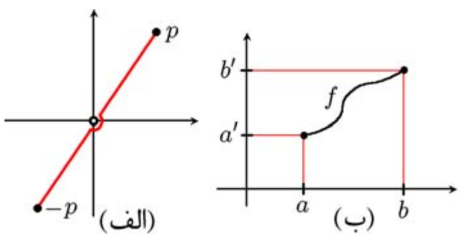
$$m|b| < |b|\, G(p,a) < M|b|$$

چرا که

$$|b|G(p,a) = |b|.|a_p|_p = \|(|b|a)_p\|_p = \|b|_p$$

این نامساوی مورد نظر را نتیجه می‌دهد، که به وضوح برای حالت $b = ۰$ هم درست است. □

توجه کنید که فاصلهٔ $d(p,q)$ تعریف شده ممکن است با طول $\ell(\gamma)$ هیچ منحنی تکه‌ای هموار از p به q برابر نباشد. مثلاً، ممکن است منیفلد M برابر $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ باشد، و q برابر $-p$. اما اگر $d(p,q) = \ell(\gamma)$ به ازای یک γ ای برقرار باشد، آنگاه γ به وضوح کوتاهترین منحنی هموار تکه‌ای از p به q است (ممکن است بیش از یک کوتاهترین منحنی موجود باشد. به عبارت دیگر، دو نیم دایرهٔ بین نقاط p و $-p$ بر $\mathbb{S}^۱$) به قسمت الف از شکل ۲.۹ توجه شود.



شکل ۲.۹

۴.۹ حساب تغییرات

به منظور مطالعهٔ بیشتر مسایل در خصوص کوتاهترین منحنی‌ها، به تکنیکهایی از حساب تغییرات نیاز داریم. برای توضیح اینگونه روش‌ها، با مساله‌ای ساده شدوع می‌کنیم. فرض کنید تابعی (با اندازهٔ کافی دیفرانسیل‌پذیر) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در اختیار است. در بین توابع $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ با $f(a) = a'$ و $f(b) = b'$ (به قسمت ب از شکل ۲.۹ توجه شود) به دنبال آن تابعی هستیم که کمیت

$$\int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$

را ماکزیمم (یا مینیمم) می‌سازد. مثلاً اگر $F(t,x,y) = \sqrt{۱ + y^۲}$ آنگاه به دنبال تابعی f بر $[a;b]$ هستیم که به ازای آن، منحنی $t \mapsto (t, f(t))$ بین (a,a') و (b,b') کوتاهترین طول را دارد

$$\int_a^b \sqrt{۱ + (f'(t))^۲}\, dt$$

به عنوان دومین مثال، چنانچه $F(t,x,y)=x\sqrt{1+y^2}$ ، به دنبال مینیمم کردن مساحت سطح حاصل از دوران نمودار تابع f حول $x-$ محور هستیم (به قسمت الف از شکل ۳.۹ توجه شود):

$$\int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}dt$$

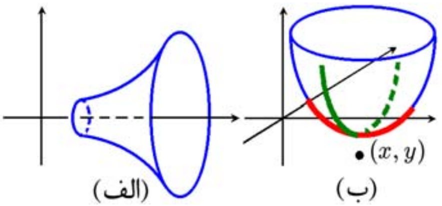
به جهت پرداختن به این نوع مسایل، ابتدا روش‌های مورد استفاده در انواع ساده‌تر این مسایل، درخصوص ماکزیمم و مینیمم توابع به شکل $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای حل این مسئله، **نقاط تکی** f را در نظر می‌گیریم ـ نقاطی x که $f'(x)=0$. نقطه تکی لزومی ندارد که ماکزیمم یا مینیمم، و یا حتی ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد، با این حال نقاط تکی تنها کاندید برای ماکزیمم و مینیمم هستند، به شرط آنکه f در همه جا دیفرانسیل‌پذیر باشد. به صورت مشابه، به ازای هر تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ مفروض، نقاطی $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم که برای آنها

$$D_1f(x,y)=D_2f(x,y)=0 \tag{۲.۹}$$

(به قسمت ب از شکل ۳.۹ توجه شود) این بدان معنی است که منحیهای

$$t\mapsto f(x+t,y) \qquad t\mapsto f(x,y+t)$$

در $t=0$ مشتق صفر دارند. ممکن است با در نظر گرفتن شرط ذیل، اطلاعات بیشتری به دست آید: به ازای هر منحنی دلخواه $c:(-\varepsilon;\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$ ای $(f\circ c)'(0)=0$ که $c(0)=(x,y)$. ولی اثبات می‌گردد که به کمک قاعده زنجیری مشتق، همه این شرایط از (۲.۹) قابل استنتاج هستند.



شکل ۳.۹

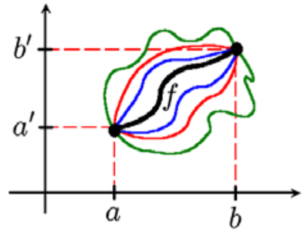
مایلیم برای یافتن ماکزیمم و مینیمم

$$J(f)=\int_a^b F(t,f(t),f'(t))dt$$

به طریق مشابه عمل کنیم. در این راستا منحنی‌های در مجموعهٔ همه توابع $f\ :\ [a;b] \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. این را با در نظر گرفتن «تغییر f» یعنی تابعی $\alpha\ :\ (-\varepsilon;\varepsilon) \times [a;b] \to \mathbb{R}$ که $\alpha(\circ, t) = f(t)$، انجام می‌دهیم (به شکل ۴.۹ توجه شود). در این صورت توابع $t \mapsto \alpha(u,t)$ ، خانواده‌ای از توابع بر $(-\varepsilon,\varepsilon)$ است که به ازای $u = \circ$ از f می‌گذرد. این تابع را با $\overline{\alpha}(u)$ نشان می‌دهیم. پس $\overline{\alpha}$ تابعی از $(-\varepsilon,\varepsilon)$ به مجموعه توابع $f\ :\ [a;b] \to$ است. اگر هر $\overline{\alpha}(u)$ ای در شرط $\overline{\alpha}(u)(a) = a'$ و $\overline{\alpha}(u)(b) = b'$ صدق کند، به عبارت دیگر، به ازای هر $u \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ ای

$$\alpha(u,a) = a' \quad , \quad \alpha(u,b) = b'$$

آنگاه می‌گوییم α تغییری از f است که نقاط انتهایی را ثابت نگاه می‌دارد.



شکل ۴.۹

حال به ازای هر تغییر α ، داریم

$$\begin{aligned}
\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\bigg|_{u=\circ} &= \frac{d}{du}\bigg|_{u=\circ} \int_a^b F\Big(t, \alpha(u,t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u,t)\Big)\, dt \\
&= \int_a^b \Big\{ \frac{d}{du}\bigg|_{u=\circ} F\Big(t, \alpha(u,t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u,t)\Big)\Big\}\, dt \\
&= \int_a^b \Big\{ \frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ, t)\frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)) \\
&\qquad + \frac{\partial^{۲} u}{\partial u \partial t}(\circ, t)\frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\Big\}\, dt
\end{aligned}$$

چون $\frac{\partial^{۲}\alpha}{\partial t \partial u} = \frac{\partial^{۲}\alpha}{\partial u \partial t}$، از قاعده جزء به جزء در مورد جمله دوم انتگرال بالا می‌توانیم استفاده کنیم، و به دست بیاوریم

$$\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\bigg|_{u=\circ} = \int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ, t)\Big\{\frac{\partial \alpha}{\partial x}(t, f(t), f'(t))$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big)\Big\}\,dt \quad (۳.۹)$$
$$+\frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ,t)\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big|_a^b$$

چنانچه α نقاط انتهایی را حفظ کند، جمله دوم صفر است، و لذا داریم

$$\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=\circ} = \int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t)))\Big\}\,dt \quad (۴.۹)$$

در مباحث کلاسیک حساب تغییرات، تغییرات α ای در نظر گرفته می‌شود که به شکل خاص

$$\alpha(u,t) = f(t) + u\eta(t)$$

است، که $\eta : [a;b] \to \mathbb{R}$ تابعی با $\eta(a) = \eta(b) = \circ$ است. به این ترتیب، داریم

$$\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=\circ} = \int_a^b \eta(t)\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big)\Big\}\,dt$$

البته، حکم نهایی در هر دو حالت یکی است. مشتق $dJ(\overline{\alpha}(u))/du(\circ)$ را «اولین تغییر» J نامیده و به صورت

$$\delta J = \int_a^b \eta\Big\{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}\Big\}\,dt$$

در کتب کلاسیک نشان داده می‌شود. در نمادگذاری کلاسیک، اغلب متغیرهای تابع جلو و یا عقب اسم تابع ذکر می‌شود و نه در پرانتز ـ در این حالت نه تنها متغیرهای t و $(t,f(t),f'(t))$ حذف شده‌اند (نتیجه این است که تابع هدف fL عملاً ناپدید شده است) بلکه بستگی δJ به α نیز مشخص نشده است (که کمی ابهام در پی دارد).

اگر f تابعی J را ماکزیمم یا مینیمم کند، آنگاه $\delta J(\alpha)$ بایستی به ازای هر تغییر α از f که نقاط انتهایی را حفظ می کند، صفر باشد. همچون در حالت حسابان یک — بعدی، دلیلی وجود ندارد که از برقراری شرط $\delta J(\alpha) = \circ$ به ازای هر α، ایجاب گردد که حتی f ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی برای J است. بر این اساس یک تعریف می آوریم.

f نقطه تکین J (یااکسترمال J) است که به ازای همه تغییرات α از f که حافظ دو انتها هستند، داشته باشیم $\delta J(\alpha)$. شکل خاص (۴.۹) اکنون موجب می‌گردد که شرط زیر را به راحتی بتوانیم مطرح کنیم.

۱.۴.۹ قضیه (معادله اولر). تابع f از کلاس $C^۲$ وقتی و تنها وقتی یک نقطه تکین J است که f در شرط زیر صدق کند:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t))-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big)=\circ$$

اثبات: روشن است که بایستی f انتگرال در (۴.۹) را به ازای هر $\eta(t)=\partial\alpha/\partial u$ ای که a و b صفر می‌شود، صفر کند. پس، قضیه از لم ساده زیر نتیجه می‌گردد.

۲.۴.۹ لم. اگر تابعی پیوسته $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ ، به ازای هر تابع هموار η بر $[a;b]$ با $\eta(a)=\eta(b)$ در شرط $\int_a^b \eta(t)g(t)dt=\circ$ صدق کند، آنگاه $g=\circ$.

اثبات: η را φg می‌گیریم که φ بر $(a;b)$ مثبت است و $\varphi(a)=\varphi(b)=\circ$. □

به عنوان مثال، حالتی را در نظر بگیرید که $F(t,x,y)=\sqrt{۱+y^۲}$. معادله اولر، در این حالت چنین است:

$$\begin{aligned}\circ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{f'(t)}{\sqrt{۱+(f'(t))^۲}}\Big)=\frac{f''\sqrt{۱+f'^۲}-f'(f'/\sqrt{۱+f'^۲})}{۱+(f')^۲}\\ &= (۱+f'^۲)f''-f'f''=(۱-f'+f'^۲)f''\end{aligned}$$

در نتیجه $f''=\circ$ و لذا f خطی است.

توجه کنید که اگر حالت $F(t,x,y)=۱+y^۲$ را در نظر می‌گرفتیم نیز همین نتیجه حاصل می‌شد. زیرا در این حالت معادله اولر به شکل ساده $\frac{d}{dt}(۲f'(t))=\circ$ می‌شود. این شباهت بسیاری با حالت در حسابان یک بعدی دارد، که نقاط تکین $\sqrt{f}$ همچون نقاط تکین f اند، چرا که $(\sqrt{f})'=f'/۲\sqrt{f}$.

در حالت رویه دوار، که $F(t,x,y)=x\sqrt{۱+y^۲}$ ، معادله اولر

$$\circ=\sqrt{۱+(f'(t))^۲}\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{f(t)f'(t)}{\sqrt{۱+(f'(t))^۲}}\Big)$$

است. این به معادله $۱+f'^۲-f'f''=\circ$ منتهی می‌گردد، که آن را به شکل کلاسیک به صورت

$$۱+(\frac{dy}{dx})^۲\ \ y\frac{d^۲y}{dx^۲}=\circ$$

می‌توان نوشت. برای حل این معادله، یکی از ?? تا تکنیک استاندارد را مورد استفاده قرار می‌دهیم (این جمله را برای خودتان تحلیل کنید). گیریم $p=y'=\frac{dy}{dx}$. در این

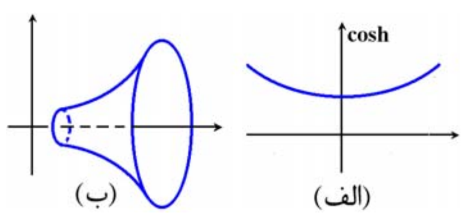
صورت

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

بنابراین، معادله ما چنین می‌شود

$$\begin{aligned} ۱ + p^۲ - yp\frac{dp}{dy} = ۰ \quad &\Rightarrow \quad \frac{p}{۱+p^۲}dp = \frac{۱}{y}dy \\ &\Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}\log(۱+p^۲) = \log y + \text{ثابت} \\ &\Rightarrow \quad y = \text{ثابت} \times \sqrt{۱+p^۲} \\ &\Rightarrow \quad p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{cy^۲ - ۱} \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{cy^۲-۱}} = dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{۱}{c}\cosh^{-۱}(cy) = x + k \end{aligned}$$

(در مورد تعریف و خواص «کسینوس هیپر بولیک» cosh و وارونش به مسئله ۲۰ توجه کنید).



شکل ۵.۹

با تعویض c با $\frac{۱}{c}$ این معادله را به صورت

$$y = c\cosh\left(\frac{x+k}{c}\right) \qquad (۵.۹)$$

می‌توان نوشت که $\cosh x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$، به شکل مقابل است و ملاحظه می‌گردد که نمودار آن نسبت $y-$محور متقارن است، با افزایش $x \geq ۰$ صعودی است؛ با کاهش $x \leq ۰$ نزولی است. پس رویه‌ها به شکل ذیل است. اینکه همواره بتوان ثابتهای c, k را طوری تعیین که نمودار (۵.۹) از (a, a') و (b, b') بگذرد، به هیچ وجه ساده و بدیهی نیست. در مسألهٔ ۲۱ حالت خاص $a' = b'$ ذکر شده است.

تعمیم این مشاهدات در حالتی که $f : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ و $J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt$ برای $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ساده است. در این حالت، $\alpha : (-\varepsilon;\varepsilon) \times [a;b]$ با $\overline{\alpha}(\circ) = f$ در نظر گرفته و به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=\circ} = \int_a^b \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \alpha^{2}}{\partial u}(\circ, t)\Big\{\frac{\partial F}{\partial y^\ell}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y\ell}(t, f(t), f'(t))\Big)\Big\}\, dt + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial u}(\circ, t)\frac{\partial F}{\partial y^\ell}(t, f(t), f'(t))\Big|_a^b \qquad (6.9)$$

بنابراین، هر نقطهٔ تکین f از J بایستی در n معادلهٔ به شرح زیر صدق کند:

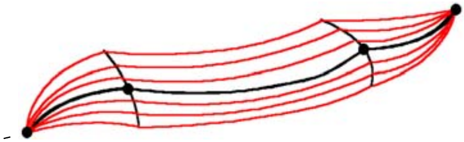
$$\frac{\partial F}{\partial x^\ell}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y^\ell}(t, f(t), f'(t)) = \circ \qquad \ell = 1, \cdots, n$$

اکنون این احکام را در مورد مسألهٔ یافتن کوتاهترین مسیرهای در یک منیفلد دلخواه M، بکار می‌گیریم. اگر $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}$ یک منحنی تکه‌ای هموار با $\gamma(a) = p$ و $\gamma(b) = q$ باشد، تغییر γ را تابعی چون $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a;b] \to M$ با $\varepsilon > \circ$ تعریف می‌کنیم که

(۱) $\alpha(\circ, t) = \gamma(t)$.

(۲) افرازی $a = t_\circ < t_1 < \cdots < t_N = b$ از $[a;b]$ چنان وجود دارد که α بر هر نوار $(-\varepsilon;\varepsilon) \times [t_{i-1}; t_i]$ هموار است. α را در صورتی یک تغییر از γ حافظ نقاط انتهایی گوئیم که

(۳) به ازاء هر $u \in (-\varepsilon;\varepsilon)$ ای $\alpha(u, b)$ و نیز $\alpha(y, a) = p$.



شکل ۵.۹

همچون قبل، فرض کنیم $\overline{\alpha}(u)$ مسیر $t \mapsto \alpha(u,t)$ است. مایلیم مسیرهای γ ای را بیابیم که در شرط $\frac{dL(\overline{\alpha}w)}{du}\Big|_{u=0} = 0$ به ازاء هر تغییر α حافظ نقاط انتهایی صدق می‌کنند، هستیم. البته، تجربه‌ای از اولین مثال داریم، و ابتدا نقاط تکین

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 dt = \frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt$$

را در نظر می‌گیریم، که مناسب‌ترین تابع انتگرال را دارد؛ پیش از هر کاری، ارتباط بین انتگرال‌ها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

می‌توانیم فرض کنیم که هر $\gamma\Big|_{[t_{i-1};t_i]}$ ای در یک دستگاه مختصات (x,U) قرار دارد (در غیر این صورت، بازه‌ها را کوچکتر می‌کنیم). اگر (u,t) دستگاه مختصات استاندارد در $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a;b]$ باشد، می‌نویسیم

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t) = \alpha_*\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,t)}\Big) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t) = \alpha_*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(u,t)}\Big)$$

بنابراین، $\partial\alpha/\partial t(u,t)$ بردار مماس در لحظهٔ t به منحنی $\overline{\alpha}(u)$ است. اگر خلاصه نویسی‌های

$$\alpha^i(u,t) = x^i(\alpha(u,t)) \qquad \gamma^i(t) = x^i(\gamma(t)) = \alpha^i(0,t)$$

را مطرح کنیم، در این صورت

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial\alpha^i}{\partial t}(u,t).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(u,t)}\\
\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial\alpha^i}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
E\Big(\gamma\Big|_{t_{i-1};t_i}\Big) &= \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(\gamma(t))\left\langle\frac{d\gamma^i}{dt},\frac{d\gamma^i}{dt}\right\rangle dt
\end{aligned}$$

اگر از دستگاه مختصات x برای یکی گیری U با $\mathbb{R}^n$ استفاده کنیم، و g_{ij} ها را به عنوان توابعی بر $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم، در این صورت $\int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\gamma(t),\gamma'(t))dt$ را در نظر می‌گیریم که

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x).y^i y^j$$

بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial x^\ell}\Big(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\Big)=\frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial y^\ell}\Big(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\Big)=\sum_{r=۱}^{n}g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^\ell}(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\Big)=\sum_{r=۱}^{n}g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^r}{dt^۲}+\sum_{r,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt}$$

به جهت اینکه شکل ظاهری معادلات متقارن‌تر می‌شود، توجه می‌کنیم که

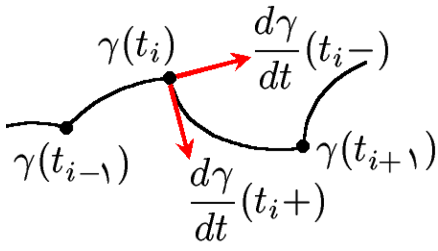
$$\begin{aligned}\sum_{r,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt}&=\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}\\&=\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{r,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt}=\frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}+\frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}$$

از $(***)$، اکنون بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\Big(E(\overline{\alpha}(u))\Big|_{[t_{i-۱};t_i]}\Big)\Big|_{u=\circ}=-\int_{t_{i-۱}}^{t_i}\sum_{\ell=۱}^{n}\frac{\partial\alpha^\ell}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\sum_{r=۱}g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^r}{dt^۲}\\+\sum_{i,j=۱}\frac{۱}{۲}\Big\{\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}(\gamma(t))-\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^i}(\gamma(t))+\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^i}(\gamma(t))\Big\}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\Big\}dt\\+\sum_{\ell=۱}^{n}\frac{\partial\alpha^\ell}{\partial u}(\circ,t)\sum_{r=۱}^{n}g_{\ell r}\,(\gamma(t))\frac{d\gamma^r}{dt}\Big|_{t_{i-۱}}^{t_i}\end{aligned}$$



شکل ۶.۹

یادآور می‌شویم که γ تنها تکه‌ای هموار است. گیریم میدان برداری دست راست γ در $t_i = \frac{d\gamma}{dt}(t_i+)$ میدان برداری سمت چپ γ در $t_i = \frac{d\gamma}{dt}(t_i-)$ توجه شود که مجموع آخری در فرمول بالا، بطور ساده عبارت است از

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ, t_i), \frac{d\gamma}{dt}(t_i-)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ, t_{i-1}), \frac{d\gamma}{dt}(t_{i-1}+)\right\rangle$$

به منظور ساده‌تر شدن انتگرال، نمادهای زیر را

$$[ij,\ell] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\right)$$

مطرح می‌کنیم. این توابع به دستگاه مختصاتی بستگی دارند، ولی انتگرال

$$-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial\alpha^\alpha}{\partial u}(\circ, t)\left\{\sum_{r=1}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}[ij,\ell](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\right\} dt$$

که در حکم ما ظاهر می‌گردد، به وضوح چنین نیست. نتیجتاً درست همین عبارت را برای هر $[t_{i-1}; t_i]$ استفاده می‌کنیم حتی اگر دستگاه‌های مختصاتی متفاوت در میان باشد (و لذا g_{ij} ها و γ^i ها متفاوتند).

حال این احکام را جمع‌بندی می‌کنیم. گیریم

$$\Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i-) \qquad i = 1, \cdots, N-1$$

$$\Delta_{t_\circ}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t_\circ+) \qquad \Delta_{t_N}\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\gamma}{dt}(t_N-)$$

بنابراین، فرمول زیر را داریم (که در انتگرال از یک خلاصه نویسی استفاده شده است).

۵.۹ اولین فرمول تغییراتی و ژئودزی

۱.۵.۹ قضیه (اولین فرمول تغییراتی).

$$\begin{aligned}\frac{dE(\overline{(}\alpha)(u))}{du}\Big|_{u=\circ} &= -\int_a^b \sum_{\ell=\text{۱}}^{n} \frac{\partial\alpha^\ell}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\sum_{r=\text{۱}}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^{\text{۲}}\gamma^{\text{۲}}}{dt^{\text{۲}}} \\ &+ \sum_{i,j=\text{۱}}^{n}[ij,\ell](\gamma(t))\frac{\gamma^i}{dt}\frac{\gamma^j}{dt}\Big\}\,dt \\ &- \sum_{i=\circ}^{n}\Big\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ,t_i),\Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt}\Big\rangle\end{aligned}$$

(در حالت تغییر حافظ دو انتها مجموع را از ۱ تا $N-$ ۱ می‌توان گرفت.)

این حکم چندان زیبا نیست، ولی نمونهٔ زیبای آن وجود دارد. بایستی توجه شود که $[ij,\ell]$ ها مؤلفه‌های هیچ تانسوری نیستند. پس از این هیچ تغییر ناوردایی برای اولین فرمول تغییراتی نداریم. در بخش مانده از این فصل، البته با عذر خواهی، همین روند وابسته به مختصات را ادامه می‌دهیم. البته، حکم سادهٔ زیر در مورد نقاط تکین E از اولین فرمول تغییراتی به دست می‌آید.

۲.۵.۹ نتیجه. اگر $\gamma:[a;b]\to M$ مسیری هموار باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی γ یک نقطهٔ تکین E_a^b است که به ازاء هر دستگاه مختصات (x,U) داشته باشیم

$$\sum_{r=\text{۱}}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^{\text{۲}}\gamma^{\text{۲}}}{dt^{\text{۲}}} + \sum_{i,j=\text{۱}}^{n}[ij,\ell](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt} = \circ \qquad \gamma(t)\in U \text{ با } t \text{ به ازای هر}$$

اثبات: فرض کنید γ نقطه‌ای تکین است. به ازای هر t با U $\in$ $\gamma(t)$، افرازی $[a;b]$ با $t\in(t_{i-\text{۱}};t_i)$ به ازای یک i ای، انتخاب می‌کنیم که $\gamma\Big|_{[t_{i-\text{۱}};t_i]}$ در U واقع باشد. اگر α تغییری از γ با نقاط انتهایی ثابت باشد، آنگاه می‌توان در اولین فرمول تغییراتی فرض کرد که قسمت انتگرال از $t_{i-\text{۱}}$ تا t_i بر حسب (x,U) نوشته شده است. جملهٔ نهایی در فرمول صفر است، زیرا γ همپار است. حال روش بکار رفته در اثبات لم ۸ را استفاده نموده و همهٔ $\partial\alpha^\ell/\partial u(\circ,t)$ ها را صفر می‌گیریم، بجز یکی که در خارج از $(t_{i-\text{۱}}t_i)$ صفر است، اما تابعی مثبت ضرب در براکتهای بر $(t_{i-\text{۱}},t_i)$ است.

به جهت بیان معادلات در نتیجهٔ ۱۰ به شکل استاندارد، نمادهای زیر را مطرح

می‌کنیم:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}[ij,\ell] = \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial g_{i\ell}}{dx^j}+\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\Big\}$$

به این ترتیب، معادلات مذکور را به شکل

$$\frac{d^2\gamma^2}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0$$

می‌توان نوشت. از قضیهٔ استاندارد در خصوص دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (مسألهٔ ۵—۴) می‌دانیم که به ازای هر $p \in M$ و هر $v \in T_pM$، $\gamma : (-\varepsilon;\varepsilon) \to M$ ای منحصر بفرد (به ازای یک $\varepsilon > 0$) وجود دارد، به گونه‌ای که

$$\begin{cases} \gamma(0)=p \\ \dfrac{d\gamma}{dt}(0)=v \\ \dfrac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0 \end{cases}$$

بعلاوه، این γ بر $(-\varepsilon,\varepsilon)$ هموار است. این حکم آخر نشان می‌دهد که اگر $\gamma_1 : [0;\varepsilon) \to M$ و $\gamma_\varepsilon : (-\varepsilon;0) \to M$ توابعی هموار و صادق در این روابط باشند، و نیز اگر

$$\gamma_1(0)=\gamma_2(0) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt}(0+)=\frac{d\gamma_2}{dt}(0-)$$

آنگاه γ_1 و γ_2 همراه با هم یک تابع هموار بر $(-\varepsilon,\varepsilon)$ تشکیل می‌دهند. طبیعی است که 0 را با هر مقدار دیگری از t می‌توان تعویض نمود. حال حکمی دقیق‌تر بیان می‌کنیم.

۳.۵.۹ نتیجه. سیر تکه‌ای هموار $\gamma : [a;b] \to M$ وقتی و تنها وقتی یک نقطهٔ تکین E_a^b است که γ عملاً بر $[a;b]$ هموار باشد و به ازای هر دستگاه مختصاتی (x,U) ای که برد γ را قطع می‌کند، در معادلات زیر صدق کند:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}=0 \qquad \text{به ازای هر } t \text{ ای که } \gamma(t)\in U$$

اثبات: گیریم γس نقطه‌ای تکین است. α^ℓ را مثل قبل انتخاب کرده (همهٔ α^ℓ ها خارج (t_{i-1},t_i) صفرند) و مشاهده می‌کنیم که $\gamma|[t_{i-1};t_i]$ در معادله صدق می‌کند،

زیرا جملهٔ آخر در اولین فرمول تغییراتی باز هم صفر است. حال α را طوری می‌گیریم که

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ; t_i) = \Delta_{t_i} \frac{d\gamma}{dt} \qquad i = ۱, \cdots, N - ۱$$

از قبل می‌دانیم که همهٔ $\Delta_i \frac{d\gamma}{dt}$ ها صفرند. بنابه اشارات بالا، این درست به معنی این است که γ عملاً بر کل $[a; b]$ هموار است.

مثل در ساده‌ترین حالت، متر ریمان اقلیدسی بر $\mathbb{R}^n$، یعنی $\langle , \rangle = \sum_{i=۱}^{n} dx^j \otimes dx^i$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا $g_{ij} = \delta_{ij}$ و لذا همهٔ $\partial g_{ij}/\partial x_k$ ها صفرند و بنابراین همهٔ Γ_{ij}^k ها نیز صفرند. نقاط تکین γ برای تابع انرژی بایستی در معادلات

$$\frac{d^۲ \gamma^k}{dt^۲} = \circ \qquad k = ۱, \cdots, n$$

صدق کنند. بنابراین، γ بر یک خط راست واقع است. به همین ترتیب، هر نقطهٔ تکین برای تابع طول قوس نیز چنین است. چنانچه ما تنها منحنی‌های به شکل $t \mapsto (t, f(t))$ را در نظر بگیریم، بسیار وضعیت متفاوت خواهد بود. در حالت کلی مورد بررسی قرار گرفته، چنانچه γ یک نقطهٔ تکین باشد، آنگاه هر تجدید پارامتر آن نیز جواب مساله است، چرا که طول مستقل از پارامتره کردن است (مسألهٔ ١٦). این نشان می‌دهد که نقاط تکین برای طول وجود دارد که مشخصاً نقطهٔ تکین انرژی نیستند، زیرا کمی قبل ملاحظه کردیم که برای اینکه γ نقطهٔ تکین برای انرژی باشد، لازم است مؤلفه‌های γ خطی باشند و لذا بایستی γ حتماً به صورت تابعی خطی از طول قوس پارامتره شود. چنین وضعیتی بسیار شایع است.

۴.۵.۹ قضیه. اگر $\gamma : [a; b] \to M$ نقطه‌ای تکین برای E باشد، آنگاه γ به صورت نسبتی از طول قدس پارامتره شده است.

اثبات: ابتدا از تعاریف ملاحظه می‌گردد که

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} = [i\ell, j] + [j\ell, i] \tag{۷.۹}$$

اکنون داریم

$$\frac{d}{dt}\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^۲ = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}(\gamma(t)). \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} \Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t))\frac{d\gamma^\ell}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\\
&\quad+\sum_{r,j=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}\frac{d\gamma^j}{dt}+\sum_{i,r=1}^{n} g_{ir}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}
\end{aligned}
$$

با جایگزاری مقدار $\partial g_{ij}/\partial x^\ell$ از (۷.۹) می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 &= \frac{d\gamma^j}{dt}\Big(\sum_{r=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}+\sum_{j,\ell=1}^{n}[i\ell,j](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{g\gamma^\ell}{dt}\Big)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{d\gamma^j}{dt}\Big(\sum_{r=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}+\sum_{j,\ell=1}^{n}[j\ell,i](\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{g\gamma^\ell}{dt}\Big)
\end{aligned}
$$

چون γ نقطه‌ای تکین برای E است، هر دو جملهٔ دو پرانتز صفرند (نتیجهٔ ۱۰). بنابراین طول $\|d\gamma/dt\|$ همواره ثابت است. □

فرمول (۷.۹) مطرح شده در اثبات قضیهٔ بالا، بعداً به مناسبت‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آن همچنین برای کسب فرمولی برای $\partial g^{ij}/\partial x^k$ می‌توان استفاده کرد. برای استخراج آن، ابتدا از فرمول $\sum_{m=1}^{n} g_{\ell m}\, g^{mj}=\delta_{ij}$ مشتق می‌گیریم، بنابراین

$$
\sum_{m=1}^{n} g_{\ell m}\frac{\partial g^{mj}}{\partial y^k} = -\sum_{m-1}^{n}\frac{\partial g_{\ell m}}{\partial y^k}\, y^{mj}
$$

از حل این دستگاه معادلات، داریم

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k} &= \sum_{\ell,m} g^{i\ell}\, g_{\ell m}\frac{\partial g^{mj}}{\partial y^k} = -\sum_{\ell,m} g^{i\ell}\, g^{mj}\frac{\partial g_{\ell m}}{\partial y^k}\\
&= -\sum_{\ell,m} g^{i\ell}\, g^{mj}([\ell k,m]+[mk,\ell]) \qquad \text{(بنا به ۷.۹)}\\
&= -\sum_{\ell} g^{i\ell}\Gamma^i_{\ell k}-\sum_{m} g^{mj}\,\Gamma^i_{mk}
\end{aligned}
$$

و در نتیجه

$$
\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k} = -\sum_{\ell=1}^{n}(g^{i\ell}\Gamma^j_{\ell k}+g^{\ell j}\Gamma^i_{\ell k}) \qquad (۸.۹)
$$

درست به همان شیوه‌ای که نقاط تکین تابع انرژی را به دست آوردیم، می‌توانیم معادلات برای نقاط تکین برای تابع طول را به دست بیاوریم. فعلاً، تنها منحنی‌هایی $\gamma:[a;b]\to$

M را در نظر می‌گیریم که در همه جا $d\gamma/dt \neq ۰$. در مورد بخش $\gamma\big|_{[t_{i-۱};t_i]}$ از γ واقع در یک دستگاه مختصاتی (x,U) مفروض، داریم

$$L(\gamma|[t_{i-۱};t_i]) = \int_{t_{i-۱}}^{t_i} \sqrt{\sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}}\, dt$$

با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}^n$، عملاً در این حالت با

$$F(x,y) = \sqrt{\sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}(x)\, y^i\, y^j}$$

مواجه هستیم. فرض کنیم $s(t) = \mathcal{L}_a^t(\gamma)$ تابع طول قوس است. در این صورت

$$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = F\Big(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x^\ell}\Big(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big) &= \frac{۱}{۲}\frac{\sum_{i,j=۱}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \\
\frac{\partial F}{\partial y^\ell}\Big(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big) &= \frac{\sum_{r=۱}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d\gamma^r}{dt}}{\frac{ds}{dt}}
\end{aligned}$$

پس از کمی محاسبات بیشتر، سرانجام به معادلات به شرح زیر برای نقاط تکین $\mathcal{L}$ می‌رسیم:

$$\frac{d^۲\gamma}{dt^۲} + \sum_{i,j=۱}^{n} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} - \frac{d\gamma^k}{dt}\frac{d^۲ s/dt^۲}{ds/dt} = ۰$$

از این فرمول مشهود است که نقاط تکین E، نقاط تکین $\mathcal{L}$ نیز هستند (زیرا در $d^۲ s/dt^۲ =$ ۰ صدق دارند.) بالعکس، به ازاء هر نقطه تکین γ برای $\mathcal{L}$، تابع $\forall t: d\gamma/dt \neq= ۰$ دیئومورفیسم است، و منحنی تجدید پارامتر شده $S:[a;b] \to [۰;\mathcal{L}_a^b(\gamma)]$ را می‌توانیم در نظر بگیریم. این منحنی تجدید پارامتره شدهٔ $\gamma.s^{-۱}:[۰\,\mathcal{L}_a^b(\gamma)] \to M$ را می‌توانیم در نظر بگیری. این منحنی پارامتره شده، به طور خودکار یک نقطه تکین برای $\mathcal{L}$ است،

و لذا بایستی در همین معادلات دیفرانسیل صدق کند. چون این منحنی تجدید پارامتره شده، با پارامتر طول قوس پارامتره شده است، دومین جمله صفر است، و لذا $\gamma \circ s^{-1}$ یک نقطه تکین برای E می‌باشد.

تنها یک نکته ناگفته مانده است و آن این که ممکن است نقطه تکینی برای $\mathcal{L}$ باشد که در نقطه‌ای چاه ($\sin k$) است (یعنی به شکل مقابل)، ولی همچنان هموار است، زیرا دارای بردار مماس صفر است. در این حالت امکان ندارد که بتوان γ را توسط طول قوس پارامتره نمود. مسئله ۳۷ نشان می‌دهد که این وضعیت ممکن نیست.

از این پس، به هر نقطه تکین برای E، **ژئودزی** بر M (برای متر ریمان $\langle,\rangle$) می گوئیم. این اصطلاح از علم ژئودزی آورده شده است، که در ارتباط با اندازه‌گیری زوایای خطوط مداری و نصف‌النهارها می‌باشد، و شامل شاخه‌ای به نام نقشه‌برداری (از زمین) است. هر ژئودزی بر سطح زمین، قطعه‌ای از یک دایرهٔ عظیمه است، که کوتاهترین مسیر بین نقاط می‌باشد و پیش از اینکه بگوئیم این مطلب در مورد ژئودزی‌های کلی درست است یا خیر، که از قبل می‌دانیم نقاط تکین برای طول هستند، بایستی ژئودزی‌ها را به شکل موضعی مطالعه کنیم.

خواص مقدماتی‌تر ژئودزی‌ها تنها به احکام در مورد معادلات دیفرانسیل بستگی دارد. توجه کنید که معادلات ژئودزی

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0$$

هستند، که خاصیت مهمی به شرح ذیل دارند: اگر γ ژئودزی باشد، آنگاه $t \mapsto \gamma(ct)$ نیز به وضوح ژئودزی است. این جنبه از معادله امکان اصلاح احکام به کمک قضایای وجود و یکتایی اساسی را فراهم می‌سازد.

۵.۵.۹ قضیه. گیریم $p \in M$. همسایه‌ای U از p و عددی $\varepsilon > 0$ چنان وجود دارد که به ازای هر $q \in U$ و هر بردار مماس $v \in T_qM$ با $\|v\| \langle \varepsilon$، ژئودزی منحصر به فردی $\gamma_v : (-2,2) \to M$ وجود دارد که

$$\gamma_v(0) = q \quad , \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v$$

اثبات: قضیه وجود یکتایی اساسی می‌گوید که همسایگی‌ای U از p و اعداد $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ چنان وجود دارد که $q \in U$ و $v \in T_qM$ با $\|v\| \langle \varepsilon_1$، ژئودزی منحصر به فردی $\gamma_v : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \to M$ با شرایط اولیه مورد نظر وجود دارد.

گیریم $\varepsilon \langle \varepsilon_1\varepsilon_2$: در این صورت اگر $|v| \langle \varepsilon$ و $|t| \langle 2$، داریم $\|v/\varepsilon_2\| \langle \varepsilon_1$ و $|\varepsilon_2 t| \langle 2\varepsilon_2$.

پس می‌توانیم $\gamma_v(t)$ را $\gamma_{U/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$ تعریف کنیم. □

۶.۹ نگاشت نمایی

اگر $v \in T_qM$ برداری باشد که برای آن ژئودزی $\gamma : [\circ; 1] \to M$ صادق در $\gamma(\circ) = q$ و $\frac{d\gamma}{dt}(\circ) = v$ باشد، آنگاه **نمای** v را به صورت

$$\exp(v) = \exp_q(v) = \gamma(1)$$

می‌توانیم تعریف کنیم. (دلیل این اسم‌گذاری در فصل بعد مشخص می‌گردد.) بنابراین، ژئودزی را به صورت

$$\gamma(t) = \exp_q(tv)$$

می‌توان توصیف نمود. چون T_qM فضای برداری $n-$ بعدی است، طریقی طبیعی برای تعیین ساختار هموار بر آن وجود دارد. اگر $V \subseteq T_qM$ مجموعه همه بردارهایی $v \in T_qM$ باشد که به ازای آنها $\exp_q(v)$ تعریف می‌گردد، در این صورت نگاشت $\exp_q : V \to M$ هموار است، زیرا جواب‌های معادلات دیفرانسیل برای ژئودزی‌ها، دارای شار هموار است. با یکی گیری فضای مماس $T_v(T_qM)$ در $v \in T_qM$ با T_qM، به نگاشت القایی

$$(\exp_q)_{v*} : T_qM \to T_{\exp_q} M$$

می‌رسیم. به ویژه، ادعا می‌کنیم که نگاشت $(\exp_q)_{\circ *} : T_qM \to T_qM$ همانی است. در واقع، برای به دست آوردن منحنی c در منیفلد T_qM با $\frac{dc}{dt}(\circ) = v \in T_qM$ (البته با یکی گیری T_qM با $(T_\circ(T_qM)$)، می‌توانیم فرض کنیم $c(t) = tv$. در این صورت $\exp_q \circ c(t) = \exp_q(tv)$، ژئودزی با بردار مماس v در زمان $\circ$ و در نتیجه

$$(\exp_q)_{\circ *}(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=\circ} \exp_q(c(t)) = v$$

قبل از اثبات حکم بعدی، چند حکم در مورد منیفلد TM را یادآور می‌شویم. اگر (x, U) دستگاهی مختصات بر M باشد، آنگاه برای $q \in U$ می‌توانیم هر بردار $v \in T_qM$ ای را به صورت یکتا به شکل $v = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q$ بست دهیم. چنانچه a^i را با $x^i(v)$ نشان دهیم، داریم

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(v)}$$

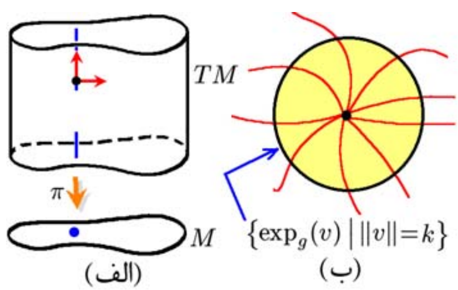
که $\pi : TM \to M$ تصویر طبیعی است. در این صورت

$$(x^1 \circ \pi, \circ, x^n \circ \pi, \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n) = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$$

دستگاهی مختصاتی بر $\pi^{-1}(U)$ است. به ازاء $v \in T_qM$ و $q \in U$، بردارهای مماس

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\Big|_v, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\Big|_v \in T_v(TM)$$

را داریم. همه بردارهای $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\Big|_v$ به زیرمنیفلد $T_qM \subseteq TM$ مماس هستند، حال آنکه بردارهای $\partial/\partial \bar{x}^i\Big|_v$، زیر فضای متمم T_qM در TM را تولید می‌کند (به قسمت الف از شکل ۷.۹ توجه شود).



شکل ۷.۹

۱.۶.۹ قضیه. به ازاء هر $p \in M$، همسایگی W و عدد $\varepsilon > 0$ چنان وجود دارند که هر دو نقطه از W توسط یک ژئودزی منحصر به فرد در M به طول $\langle \varepsilon$ متصل می‌شود.

(۲) گیریم $v(q, q')$ نمایشگر بردار منحصر به فرد $v \in T_qM$ به طول $\varepsilon > 0$ است به گونه‌ای که $\exp_q(v) = q'$. در این صورت $v(q, q') \mapsto (q, q')$ تابعی هموار از $W \times W$ به TM است.

(۳) به ازاء هر $q \in W$، نگاشت $\exp_q$، ε−گوی باز در T_qM را به شکل دیفئومورف به روی مجموعه‌ای باز U_q که W را در بر دارد می‌نگارد.

اثبات: قضیه ۱۳ می‌گوید که بردار $0 \in T_pM$ یک همسایگی V در منیفلد TM دارد به گونه‌ای که $\exp$ بر V تعریف می‌گردد. تابع همراه $F : V \to M \times M$ را با ضابطه $F(v) = (\pi(v), \exp(v))$ تعریف می‌کنیم.

گیریم (x,U) دستگاه مختصاتی حول p است. از دستگاه مختصات $(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n,\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$ توصیف شده در بالا برای $\pi^{-1}(U)$ استفاده می‌کنیم. اگر $\pi_1 : M\times M\to M$ تصویر بر مؤلفهٔ i ام باشد، در این صورت

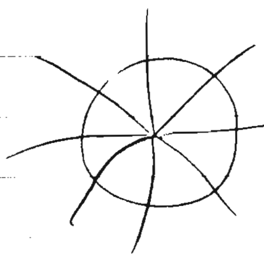
$$(x^1\circ\pi_1,\cdots,x^n\circ\pi_1,x^1\circ\pi_2,\cdots,x^n\circ\pi_2)=(x_1^n,\cdots,x_1^n,x_2^1,\cdots,x_2^n)$$

دستگاه مختصاتی بر $U\times U$ است. حال با استفاده از اینکه $(\exp_p)_{\circ *} : T_pM\to T_pM$ همانی است، مشاهده این که در $0\in T_pM$ روابط زیر برقرار است، کار دشواری نیست.

$$F_*\Big(\frac{\partial}{\partial\bar{x}^i}\Big|_0\Big)=\frac{\partial}{\partial x_1^i}\Big|_{(p,p)}+\frac{\partial}{\partial x_2^i}\Big|_{(p,p)}\quad,\quad F_*\Big(\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\Big|_0\Big)=\frac{\partial}{\partial x_2^i}\Big|_{(p,p)}$$

نتیجتاً F_* در $0\ \in T_pM$ یکبیک است، و لذا F همسایگی ای V' از 0 را به صورت دیفئومورف بروی همسایگی از $(p,p)\in M\times M$

نتیجتاً F_* در $0 \in T_pM$ یکبیک است، ولذا F همسایگی ای V' از ۰ را به صورت دیفئومورف بروی همسایگی ای از $(p,p) \in M \times M$ می نگارد. می توانیم فرض کنیم که V' از همهٔ بردارهای $v \in T_qM$ با q در یک همسایگی U' از p و $\|v\| < \varepsilon$ تشکیل شده است. W را همسایگی ای به اندازهٔ کافی کوچک از p می گیریم که $W \times W \subseteq F(V')$. □



$\{\exp_q(v) : \|v\| = k\}$

به ازای هر W مانند در قضیهٔ بالا و هر $q \in W$، ژئودزیهای گذرنده از q به شکل $t \longmapsto \exp_q(tv)$ با $\|v\| < \varepsilon$ را در نظر می گیریم. اینها T_qU را پر می کنند.

تحلیل بهتر ژئودزیها به حکم ذیل بستگی دارد.

۱۵. لم (لم گاوس). در T_qU، ژئودزیهای گذرنده از q به ابررویه‌های

$$\{\exp_p(v) : \|v\| = \text{ثابت} < \varepsilon\}$$

عمودند.

اثبات اول: گیریم $v : \mathbb{R} \longrightarrow T_qM$ منحنی هموار با "$\|v(t)\| = k < \varepsilon$ ثابت" به ازاء همهٔ tها است و تعریف کنیم

$$\alpha(u,t) = \exp_q(u \cdot v(t)) \qquad -1 < u < 1$$

ادعا می کنیم که به ازاء هر چنین αای

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t) \right\rangle = 0 \qquad \text{به ازاء هر } (u,t) \text{ ای}$$

محاسباتی درست شبیه آنچه که در اثبات قضیهٔ ۱۲ آمد، ثابت می کند که معادلهٔ ذیل (که در آن متغیرهای (u,t) و $\alpha(u,t)$ حذف شده اند (به جهت ایجاد سادگی) برقرارند:

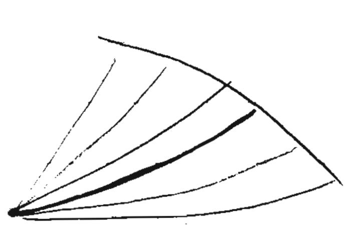
$$\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha^j}{\partial t}\left(g_{rj}\frac{\partial^2\alpha^r}{\partial u^2} + \sum_{i,j=1}^{n} [il,j]\frac{\partial\alpha^i}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial u} \right) \tag{1}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\alpha^i}{\partial u}\left(\sum_{r=1}^{n} g_{ir}\frac{\partial^2\alpha^r}{\partial u\,\partial t} + \sum_{j,l=1}^{n} [jl,i]\frac{\partial\alpha^j}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial t} \right)$$

اولین جملهٔ سمت راست صفر است، زیرا هر منحنی $u \longmapsto \alpha(u,t)$ ژئودزی است. به صورت مشابه داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial u} \right\rangle = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\alpha^i}{\partial u}\left(\sum_{r=1}^{n} g_{ir}\frac{\partial^2\alpha^r}{\partial u\,\partial t} + \sum_{j,l=1}^{n} [jl,i]\frac{\partial\alpha^j}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial t} \right) \tag{2}$$

که درست دو برابر جملهٔ دوم در سمت راست (1) است. اما $\partial\alpha/\partial u(u,t)$ درست بردار مماس به ژئودزیک $u \longmapsto \exp_q(u \cdot v(t))$ در لحظهٔ u است که $\|v(t)\| = k$؛ پس $\|\partial\alpha/\partial u\|$ برابر k است. بنابراین دومین جمله در سمت راست (2) نیز صفر است. پس $\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\rangle$ مستقل از u است. اما $\alpha(0,t) = \exp_q(0) = q$ ولذا $\partial\alpha/\partial t(0,t) = 0$. نتیجه اینکه به ازاء هر (u,t)ای $\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\rangle = 0$.

<ins>اثبات دوم</ins>: گیریم $v:\mathbb{R}\longrightarrow T_qM$ منحنی همواری با $\|v(t)\|=k$ ثابت $<\varepsilon$ به ازای هر t است، و تعریف کنیم $\beta(u,t)=\exp_q(t\cdot v(u))$. (در مورد نقش t و u دقت شود). در این صورت، β تغییری از ژئودزی $\gamma(t)=\exp_q(t\cdot v(0))$ است که بر $[0;1]$ تعریف می‌گردد. بنا به اولین فرمول تغییراتی، داریم



$$\frac{dE(\bar\beta(u))}{du}\Big|_{u=0}=-\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1),\frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial u}(0,0),\frac{d\gamma}{dt}(0)\right\rangle$$
$$=-\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1),\frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle$$

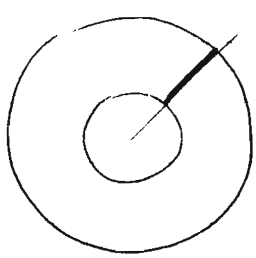
پس، چون γ ژئودزی است، انتگرال صفر می‌شود. اما هر منحنی $\bar\beta(u)$ دارای انرژی

$$E(\bar\beta(u))=\int_0^1\left\|\frac{d\bar\beta(u)(t)}{dt}\right\|^2dt=\int_0^1k^2dt=k^2$$

است. در نتیجه

$$0=\frac{dE(\bar\beta(u))}{du}\Big|_{u=0}=-\left\langle\frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1),\frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle$$

و برهان تمام است. □



۱۶. <ins>نتیجه</ins>. گیریم $c:[a;b]\longrightarrow T_qU-\{q\}$ یک منحنی تکه‌ای هموار با ضابطهٔ $c(t)=\exp_q(u(t)\cdot v(t))$ که $0<u(t)<\varepsilon$ و $\|v(t)\|=1$ است. در این صورت $\mathcal{L}_a^b\,c>|u(b)-u(a)|$، که تساوی وقتی و تنها وقتی ممکن است که u یکنوا و v ثابت باشد؛ یعنی c یک ژئودزی شعاعی واصل بین دو کرهٔ هم‌مرکز به گرد q است.

<ins>اثبات</ins>: اگر $\alpha(u,t)=\exp_q(u\cdot v(t))$، در این صورت $c(t)=\alpha(u(t),t)$،

$$\frac{dc}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

چون $\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle=0$ و $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right\|=1$، داریم

$$\left\|\frac{dc}{dt}\right\|^2=|u'(t)|^2+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\geqslant|u'(t)|^2$$

که تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که $\partial\alpha/\partial t=0$، و لذا $v'(t)=0$. بنابراین

$$\int_0^b\left\|\frac{dc}{dt}\right\|dt\geqslant\int_0^b|u'(t)|\,dt\geqslant|u(b)-u(a)|$$

و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که u یکنوا و v ثابت باشد. □

۱۷. نتیجه. گیریم W و ε همچون در قضیهٔ ۱۵ باشند. گیریم $\gamma: [0,1] \to M$ ژئودزی بطول $< \varepsilon$ واصل بین $q, q' \in W$ است، و $c: [0,1] \to M$ مسیری تکه‌ای هموار از q به q' است. در این صورت $L(\gamma) \le L(c)$، که تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که c تجدید پارامتر γ باشد.

اثبات: میتوانیم فرض کنیم $q' = \exp_q(rv) \in T_qU - \{q\}$ (در غیر این صورت c را به قطعات کوچک میکنیم). به ازاء $0 < \delta$، مسیر c باید پاره خطی که پوستهٔ کروی به گرد δ را به پوستهٔ کروی به گرد r متصل میکند، شامل باشد، در بین آنها قرار دارد. بنا به نتیجهٔ ۱۶، طول این قطعه $\ge r - \delta$ است. پس طول $c \ge r$؛ به وضوح c بایستی یک تجدید پارامتر از γ باشد، برای اینکه تساوی برقرار شود. □

تا اینجا دیدیم که قطعات باندازهٔ کافی کوچک از ژئودزیها، مسیرهای حداقل طول نسبت به طول توس هستند. از نتیجهٔ ۱۷ برای تعیین ژئودزیهای برای بسیاری از سطوح ساده، بدون هیچ گونه محاسبه‌ای، میتوانیم استفاده کنیم، مشروط به آنکه ابتدا یک مفهوم کلیدی در این زمینه را مطرح کنیم.

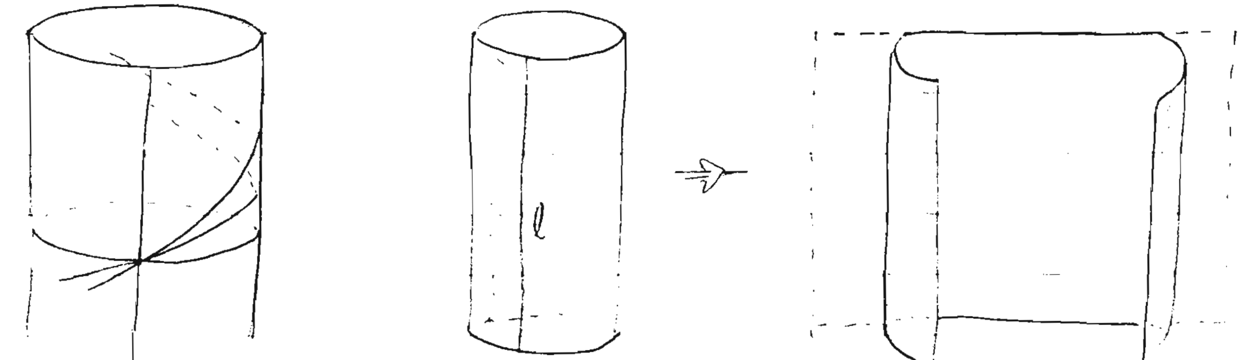
اگر $(M, \langle\, ,\rangle)$ و $(M', \langle\, ,\rangle')$ دو منیفلد هموار با متر ریمانی باشند، در این صورت تابع یکبیک و هموار $f: M \to M'$ را در صورتی ایزومتری از M به M' گوئیم که $\langle\, ,\rangle = f^*\langle\, ,\rangle'$. بعنوان مثال، انعکاس نسبت به صفحهٔ $E^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (دلخواه)، یک ایزومتری $I: S^n \to S^n$ است. روشن است که اگر $c: [0,1] \to M$ منحنی هموار باشد، آنگاه طول c نسبت به $\langle\, ,\rangle$ با طول $f \circ c$ نسبت به $\langle\, ,\rangle'$ برابر است؛ و اگر c ژئودزی باشد، آنگاه $f \circ c$ نیز هست.

در مورد ایزومتری $I: S^n \to S^n$ مطرح شده در بالا، مجموعهٔ نقطه ثابت ایزومتری I عبارت است از دایرهٔ عظیمهٔ $C = S^n \cap E^2$. گیریم $q \in C$ و p دو نقطه با یک ژئودزی منحصربفرد C' با طول حداقل بین آنها باشند. در این صورت $I(C')$ ژئودزی با همان طول است (طول C') بین $I(p) = p$ و $I(q) = q$. پس $C' = I(C')$، که ایجاب میکند $C' \subset C$، و لذا C ژئودزی است. چون از هر نقطه از S^n دایرهٔ عظیمه میگذرد (و البته با هر جهت دلخواه مفروض)، همهٔ اینها ژئودزی هستند.

توجه کنید که هر بخش از یک دایرهٔ عظیمه که بزرگتر از یک نیم دایره است، مشخصاً بطول حداقل نیست، حتی بین همهٔ مسیرهای در نزدیکی اش. نقاط متقاطر بر کره، بینهایت ژئودزی بطول حداقل بینشان وجود دارد. سایر نقاط بر کره دارای ژئودزی با حداقل طول منحصربفرد بینشان دارند، اما بینهایت ژئودزی غیرحداقل، بسته به اینکه ژئودزی به چه

تعداد گرد کره بگردد شود یا به بی‌نهایت پیچ خورد، وجود دارد.

ژئودزیهای بر استوانهٔ مستدیر قائم Z عبارتند از خطوط مولد، دوایر قطایی حاصل از برخورد صفحات قائم با استوانه، و مارپیچهای بر Z. در واقع، اگر L یک خط مولد برای Z باشد، آنگاه با غلتاندن Z بروی $\mathbb{R}^2$ یک ایزومتری $I : Z - L \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حاصل می‌گردد:



ژئودزیهای بر Z دقیقاً عبارتند از تصویر خطوط راست در $\mathbb{R}^2$ توسط I^{-1}. بین هر دو نقطه از Z بینهایت ژئودزی وجود دارد.

اکنون موقعیت آن است که بحث در خصوص متر ریمان بر M را با اثبات ارتباط مهمی بین متر ریمان $\langle , \rangle$ و متر $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ مشخص شده توسط آن بر M، یعنی

$$d(p,q) = \inf \{ L(\gamma) : \text{است } \gamma \text{ یک منحنی تکه‌ای هموار از } p \text{ به } q \}$$

توجه کنید که هم در حالت کره و هم در حالت استوانه، هر ژئودزی γ تعریف شده بر یک بازه $[a,b]$ را به یک ژئودزی بر کل $\mathbb{R}$ میتوان تعمیم داد. این مطلب درمورد استوانهٔ با ارتفاع متناهی، یعنی بخشی کراندار از $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{R}^n - \{0\}$، غلط است. در حالت کلی، یک منیفلد M با یک متر ریمان $\langle , \rangle$ را درصورتی کامل ژئودزیک گوئیم که هر ژئودزی $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ قابل گسترش به یک ژئودزی از $\mathbb{R}$ به M باشد.

۱۸. قضیه (هوپف - راینو - دورام). اگر $\langle , \rangle$ متر ریمان بر M باشد، آنگاه وقتی وتنها وقتی M بطور ژئودزی کامل است که نسبت به متر d مشخص شده توسط $\langle , \rangle$، M کامل باشد. بعلاوه، هر دو نقطه از یک منیفلد بطور ژئودزی کامل را با یک ژئودزی بطول حداقل میتوان بهم متصل نمود.

اثبات: فرض کنید M بطور ژئودزی کامل است. بازاء هر $p, q \in M$ با $d(p,q) = r > 0$، مجموعهٔ U_p را مثل در قضیهٔ ۱۴ انتخاب می‌کنیم. گیریم $S \subseteq U_p$ پوستهٔ کروی به شعاع $\delta < \varepsilon$ است. نقطهای $p_0 = \exp_p \delta v$ با $\|v\| = 1$ بر S بگونه‌ای وجود دارد که بازاء هر $s \in S$ ای $d(p_0, q) \le d(s,q)$. ادعا می‌کنیم

$$\exp_p (rv) = q \qquad (*)$$

این نشان میدهد که ژئودزی $\gamma(t) = \exp_p (tv)$، یک ژئودزی با طول حداقل بین p و q است. برای اثبات این حکم، ثابت می‌کنیم که

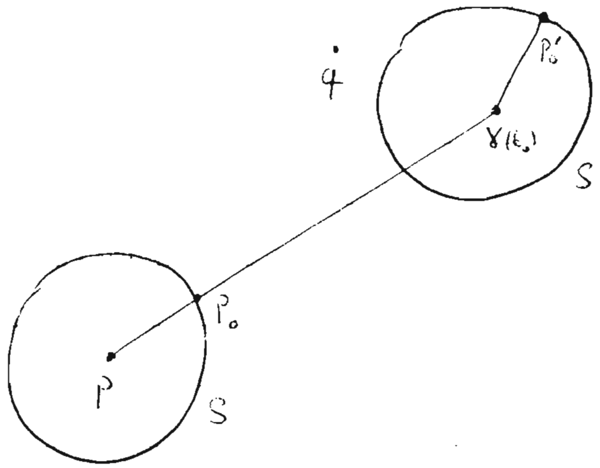
(**) $\quad d(\gamma(t), q) = r - t \qquad t\in[\delta; r]$

اول از همه، چون هر منحنی از p به q باید S را قطع کند، به وضوح داریم

$$d(p,q)=\min_{s\in S}\big(d(p,s)+d(s,q)\big) = \delta + d(p_0,q)$$

پس $d(p_0,q)=r-\delta$. این ثابت می‌کند که (**) به ازاء $t=\delta$ درست است.

حال فرض کنیم $t_0\in[\delta;r]$ که کوچکترین کران بالایی همهٔ tهای صادق در (**) است، در این صورت (**) به ازاء t_0 نیز درست است، بنا به پیوستگی. فرض کنیم $t_0<r$. گیریم S' پوسته‌ای کروی به شعاع δ' حول $\gamma(t_0)$ است و $p'_0\in S'$ نقطه‌ای است به نزدیکی q.



در این صورت

$$d(\gamma(t_0),q)=\min_{s\in S}\big(d(\gamma(t_0),s)+d(s,q)\big) = \delta' + d(p_0',q)$$

پس

$$(***)\qquad d(p_0',q)=(r-t_0)-\delta'$$

بنابراین

$$d(p,p_0')\ge d(p,q)-d(p_0',q) = t_0+\delta'$$

اما مسیر c حاصل از طی γ از p تا $\gamma(t_0)$ و سپس ژئودزی حداقل طول از $\gamma(t_0)$ به p_0' به طول دقیقاً $t_0+\delta'$ است. پس c مسیری بطول حداقل است، و بنابراین بایستی ژئودزی باشد؛ و این یعنی تطابق آن با γ است. در نتیجه $p_0'=\gamma(t_0+\delta')$. در نتیجه، از (***) نتیجه می‌شود $d(\gamma(t_0+\delta'),q)=r-(t_0+\delta')$، و بنابراین (**) به ازاء $t_0+\delta'$ برقرار است. این با چگونگی انتخاب t_0 در تضاد است، ولذا بایستی $t_0=r$. به بیان دیگر، (**) برای $t=r$ برقرار است، که (*) را ثابت می‌کند.

از این حکم براحتی نتیجه می‌گردد که M نسبت به متر d کامل است. درواقع، اگر $A\subset M$ با قطر d باشد، و $p\in A$، آنگاه نگاشت $\exp_p: T_pM\to M$ دیسک بستهٔ به شعاع d در T_pM را بروی مجموعه‌ای فشرده که A را دربردارد می‌نگارد. به بیان دیگر، مجموعه‌های کراندار در M، بستار کراندارند. از این به وضوح همگرایی دنباله‌های کوشی نتیجه می‌گردد.

بالعکس، فرض کنیم M بعنوان فضای متری کامل است. به ازاء هر ژئودزی $\gamma:(a;b)\to M$، دنباله‌ای $\{t_n\}$ همگرا به b درنظر می‌گیریم. به وضوح $\gamma(t_n)$ دنباله‌ای کوشی در M است، ولذا به نقطه‌ای $p\in M$ همگرا است. به کمک قضیهٔ ۱۴، با کمی کار میتوان ثابت کرد که γ میتوان طوری گسترش یابد که از b بگذرد. نتیجتاً، بنابه یک استدلال مبتنی بر کوچکترین کران بالایی، هر ژئودزی را به $\mathbb{R}$ میتوان توسیع داد. □

بعنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۸ چنین میتوان گفت که هر دو نقطه از یک منیفلد فشرده را با یک ژئودزی بطول حداقل میتوان بهم متصل کرد.

۱۳۸۳/۳/۱۴

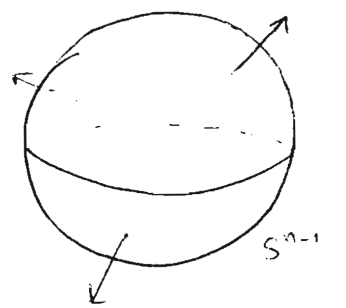
ضمیمه. همسایگی جدولی

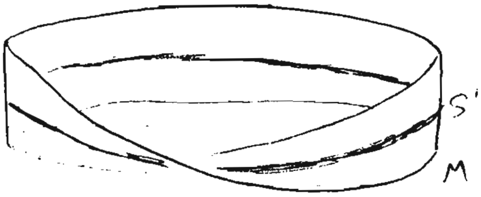
فرض کنیم $M^n \subseteq N^{n+k}$ زیرمنیفلدی از N با نگاشت احتوای $i: M \to N$ است. پس به ازاء هر $p \in M$ ای $i_*(T_pM) \subseteq T_pN$. اگر $\langle\ ,\ \rangle$ یک متر ریمان بر N باشد، آنگاه $T_pM^\perp \subset T_pN$ را به صورت

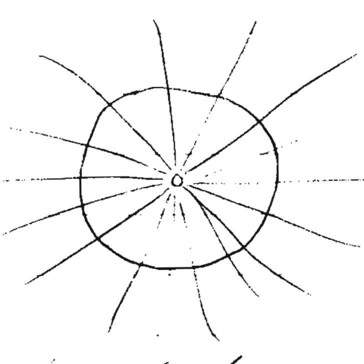
$$T_pM^\perp = \{v \in T_pN : \langle v, i_* w\rangle = 0 \text{ به ازاء هر } w \in T_pM \text{ ای}\}$$

میتوانیم تعریف کنیم. فرض کنیم $E = \biguplus_{p\in M} T_pM^\perp$ و $\varpi : E \to M$ کل $T_pM^\perp$ را به p تصویر کند. شاهده این مطلب که $\nu = \varpi : E \to M$ یک کلاف k-صفحه‌ای روی M است، کار دشواری نیست. این را کلاف قائم M در N می‌نامیم.

مثلاً: کلاف قائم ν کره $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ یک کلاف ۱-صفحه‌ای بدیهی است، زیرا ν برشی فراگیر مرکب از بردارهای قائم یکه برون‌سوی دارد. از سوی دیگر، اگر M نوار موبیوس باشد و $S^1 \subset M$ دایره به گرد مرکز آن، در این صورت مشاهده این مطلب که کلاف قائم ν با کلاف (غیربدیهی) $M \to S^1$ ایزومورف است، کار دشواری نیست. چنانچه $S^1 \subset M \subset \mathbb{P}^2$ را درنظر بگیریم، در این صورت S^1 در $\mathbb{P}^1$ کلاف قائمی دارد که درست همان کلاف قائم S^1 در M است، ولذا آن نیز غیربدیهی است.







هدف ما اثبات این مطلب است که به ازاء هر منیفلد فشرده M، کلاف قائم M در N همواره با کلافی $\pi : U \to M$ که در آن U یک همسایگی باز از M در N است، و برای آن برش صفر $s : M \to U$ درست همان نگاشت احتوای M در N می‌باشد، هم‌ارز است. درحالی که N فضای کلی یک کلاف روی M است، این همسایگی باز را کل فضای کلی N میتوان گرفت. اما در حالت کلی، ممکن است این همسایگی تمام N نباشد. مثلاً، همسایگی مناسب $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ را $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ میتوانیم بگیریم.

کلاف $\pi : U \to M$ که U همسایگی بازی از M در N است و به ازاء آن، برش صفر $s : M \to U$ نگاشت احتوای M در U میباشد، همسایگی جدولی M در N نامیده می‌شود. قبل از اثبات وجود همسایگیهای جدولی، چند نکته و یک لم ذکر می‌کنیم.

اگر $\pi : U \to M$ همسایگی جدولی باشد، آنگاه

$\pi \circ s =$ نیز M همانی است.

$s \circ \pi =$ با نگاشت همانی U هموتوپ است.

پس π یک انقباض دگردیسی است، و $H^k(U) \approx H^k(M)$؛ بنابراین، کوهومولوژی دورام M همچون همسایگی باز U در N است. بعلاوه، اگر یک متر ریمان $\langle\ ,\ \rangle$ برای $\pi : U \to M$ انتخاب شود و تعریف کنیم

$D = \{ e \in U : \langle e, e \rangle \le 1 \}$، آنگاه D یک زیرمنیفلد مرزدار از U است، و نگاشت $\pi|_D : D \to M$ نیز انقباض دگردیسی است. پس M نیز همان گروه‌های هومولوژی دوران مجموعهٔ (همسایگی) بستهٔ D در N را دارد.

۱۹. لم. گیریم X یک فضای متری فشرده است و $X_0 \subset X$ زیرمجموعه‌ای بسته. گیریم $f : X \to Y$ همئومورفیسم موضعی است به گونه‌ای که $f|X_0$ یکبیک می‌باشد. در این صورت یک همسایگی U از X_0 به گونه‌ای وجود دارد که $f|U$ نیز یکبیک است.

اثبات: گیریم $C = \{ (x, y) \in X \times X : x \neq y \text{ و } f(x) = f(y) \} \subset X \times X$. در این صورت C بسته است؛ زیرا اگر (x_n, y_n) دنباله‌ای در C با $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$ باشد، آنگاه

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(y)$$

و بنابراین، چون f موضعاً یکبیک است، پس $x \neq y$ و لذا $(x, y) = \lim (x_n, y_n)$ به C متعلق است.
اگر $g : C \to \mathbb{R}$ به صورت $g(x, y) := d(x, X_0) + d(y, X_0)$ تعریف شود، آنگاه g بر C مثبت است. چون C فشرده است، $\varepsilon > 0$ ای چنان یافت می‌شود که $g > 2\varepsilon$ بر C. در این صورت f بر یک ε-همسایگی از X_0 یکبیک است. □

۲۰. قضیه. گیریم $M \subset N$ زیرمنیفلدی فشرده از N است. در این صورت M دارای یک همسایگی جدولی $\pi : U \to M$ در N است که با کلاف قائم M در N هم‌ارزی باشد.

اثبات: یک متریک ریمانی $\langle , \rangle$ برای N انتخاب کرده، نرم نظیرش را $\| \ \|$ و متر متناظرش را $d : N \times N \to \mathbb{R}$ می‌گیریم. فرض کنیم

$$E := \{ v : v \in T_pN ,\ v \in T_pM^{\perp} \text{ به ازای یک } p \in M \text{ ای} \}$$

$$E_\varepsilon := \{ v \in E : \|v\| < \varepsilon \} \qquad U_\varepsilon := \{ q \in N : d(q, M) < \varepsilon \}$$

اکنون از قضیهٔ ۱۳ و فشردگی M به سادگی نتیجه می‌گردد که $\exp$ به ازاء $\varepsilon > 0$ به اندازهٔ کافی کوچک بر E_ε تعریف می‌گردد. ادعا می‌کنیم که نگاشت $\exp$ برای $\varepsilon > 0$ به اندازهٔ کافی کوچک، یک دیفئومورفیسم از E_ε بروی U_ε می‌باشد. این به وضوح قضیه را اثبات می‌کند.

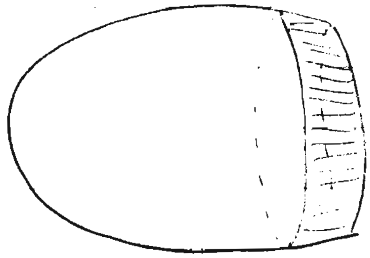
گیریم $V \subset E$ مجموعهٔ نقاط غیرتکین $\exp$ است. در این صورت $M \subset V$ (به عنوان زیرمجموعه‌ای از E توسط برش صفر در نظر گرفته شده است)؛ و $V_1 = (V \cap E_1)$ فشرده است؛ چون $\exp$ بر $M \subset V_1$ یکبیک می‌باشد، از لم ۱۹ نتیجه می‌گیریم که نگاشت $\exp$ برای ε به اندازهٔ کافی کوچک یک دیفئومورفیسم بر E_ε می‌باشد.

همچنین روشن است که $\exp(E_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$. برای اثبات اینکه $\exp$ بروی U_ε می‌باشد، یک $q \in U_\varepsilon$

دنقطه‌ای $p \in M$ در نزدیکی q انتخاب می‌کنیم. اگر $\gamma : [0,1] \to N$ ژئودزی به طول $\varepsilon >$ با $\gamma(0) = p$ و $\gamma(1) = q$ باشد، به سادگی ملاحظه می‌گردد که γ در p به M عمود است (با دومین اثبات از لم گاوس مقایسه گردد). این بدین معنی است که $q = \exp_p(d\gamma/dt(0))$ که $d\gamma/dt(0) \in E_\varepsilon$. □

یکی از جالب‌ترین جنبه‌های قضیهٔ ۲۰، این است که در اثبات آن از همهٔ قدرت متر ریمان و ژئودزی‌ها استفاده شده است، ولی در صورت قضیه از هیچ کدام آنها خبری نیست. از قضیهٔ ۲۰ تنها در فصل ۱۱ استفاده می‌شود که در آنجا هم از نوع اصلاح شدهٔ به شرح زیر استفاده می‌گردد:

۲۱. قضیه. گیریم N یک منیفلد مرزدار، با مرز فشردهٔ ∂N است. در این صورت ∂N دارای همسایگی‌های (به اندازه کافی کوچک) باز [و به ترتیب، بسته] است که برای آنها انقباض دگردیسی بروی ∂N وجود دارد.



اثبات: درست مثل قضیهٔ ۲۰ است، منتهی باید از بردارهای نرمال به سمت داخل استفاده شود. □

مسایل فصل ۹

۱. گیریم V فضای برداری بر هیأت F با مشخصهٔ $\neq 2$ است و $h : V \times V \to F$ دوخطی متقارن است.

(الف) $q : V \to F$ را به صورت $q(v) = h(v,v)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ پایه‌ای برای V^* باشد، آنگاه به ازاء یک سری a_{ij} ها $q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i^* \cdot v_j^*$.

(ب) نشان دهید $q(-v) = q(v)$ و $h(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$.

(ج) فرض کنید $q : V \to F$ در شرط $q(-v) = v$ صدق کرده و $h(u,v) = q(u+v) - q(u) - q(v)$ دوخطی باشد. نشان دهید که

$$q(u+v+w) - q(u) - q(v+w) = q(u+v) - q(u) - q(v) - q(u+w) - q(u) - q(w)$$

نتیجه بگیرید که $q(0) = 0$ و $q(2u) = 4q(u)$. سپس نشان دهید که $q(v) = h(v,v)$.

۲. گیریم $\langle\, ,\, \rangle$ یک متر اقلیدسی بر V^* است. فرض کنید $\psi_i \in V^*$ و φ_i ها در روابط $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k \neq 0$

صدق می‌کنند و W_φ و W_ψ زیرفضاهای تولیدشده توسط φ_iها و ψ_iها در V^* هستند.

الف) نشان دهید دقیقاً وقتی و تنها وقتی $\omega \in W_\varphi$ که $\omega \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = 0$. نتیجه بگیرید $W_\varphi = W_\psi$.

ب) گیریم σ_1، ...، و σ_k پایه‌ای متعامد برای $W_\varphi = W_\psi$ است. اگر $\varphi_i = \sum_j a_{ji}\sigma_j$، نشان دهید حجم k-بعدی متوازی‌السطوح تولیدشده توسط φ_1، ...، و φ_k برابر $\det(a_{ij})$ است. (علامت درصورتی $+$ است که φ_1، ...، و φ_k دارای همان جهت ψ_1، ...، و ψ_k باشد، و درغیراین صورت $-$ است.)

ج) در مقایسه با مسألهٔ ۷-۹ نشان دهید که این حجم برابر همان حجم برای ψ_1، ...، و ψ_k است.

د) بالعکس اگر $W_\varphi = W_\psi$ و حجم متوازی‌السطوح آنها یکی باشند، نشان دهید $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$.

چنانچه V را با V^{**} یکی بگیریم، از ضرب گوه‌ای $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ بردارهای در V، $v_i \in V$ می‌توان سخن گفت. به این ترتیب، شرطی هندسی برای تساوی $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ با آن داریم. الی کارتان در کتاب «درسهایی در هندسهٔ فضاهای ریمانی» این شرط را برای تعریف $\Omega^k(V^*)$ به صورت مجموعهای صوری از دسته‌های هم‌ارزی از k بردار تعریف کرده است؛ او سپس شرایط متناظر بر مختصات v_iها و w_iها را به صورت تحلیلی مطرح کرده است.

۳- گیریم V یک فضای برداری n-بعدی است و $\langle\, ,\rangle$ ضربی داخلی بر V است که الزاماً مثبت معین نیست. پایهٔ $\{v_1, \dots, v_n\}$ برای V را درصورتی قائم گوییم که به ازای i و j ای $\langle v_i, v_j\rangle = \pm\delta_{ij}$.

(الف) اگر $V \neq \{0\}$، آنگاه برداری $v \in V$ وجود دارد که $\langle v, v\rangle \neq 0$.

(ب) به ازای $W \subset V$، تعریف می‌کنیم $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0$ به ازای هر $w \in W\}$. ثابت کنید که $\dim W^\perp \geq n - \dim W$. راهنمایی: اگر $\{w_i\}$ پایه‌ای برای W باشد، تابعی‌های خطی $\lambda_i : V \to \mathbb{R}$ را به صورت $\lambda_i(v) = \langle v, w_i\rangle$ تعریف می‌کنیم.

(ج) اگر $\langle\, ,\rangle$ بر W ناتباهیده باشد، آنگاه $V = W \oplus W^\perp$ و $\langle\, ,\rangle$ بر $W^\perp$ نیز ناتباهیده است.

(د) V پایه‌ای (متعامد) قائم دارد. بنابراین، ایزومورفیسمی $f : \mathbb{R}^n \to V$ وجود دارد که به ازای یک r ای داریم $f^*\langle\, ,\rangle = \langle\, ,\rangle_r$ (ضرب داخلی $\langle\, ,\rangle_r$ در صفحهٔ تعریف شده است).

(ه) شاخص ضرب داخلی $\langle\, ,\rangle$ عبارتست از بزرگترین بعد زیرفضای $W \subset V$ به گونه‌ای که $\langle\, ,\rangle|W$ منفی معین است. نشان دهید شاخص $\langle\, ,\rangle$ برابر $n-r$ است و سپس نشان دهید که r منحصربفرد است («قانون بقای سیلوستر»).

۴- گیریم $\langle\, ,\rangle$ یک ضرب داخلی (نه لزوماً مثبت معین) بر V است و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای قائم (مسألهٔ ۳) بر V است. با دانستن اینکه

$$v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \qquad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

پایه‌ای قائم با

$$\langle v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*, v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \rangle^k = \det(\langle v_{i_\alpha}, v_{i_\beta}\rangle)$$

است، ضرب داخلی $\langle\, , \rangle^k$ بر $\Omega^k(V)$ تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید $\langle\, , \rangle^k$ مستقل از تعریف با استفاده از پایهٔ $\{v_1, \dots, v_k\}$ است (مسألهٔ ۷-۱۶).

(ب) نشان دهید

$$\langle \varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k, \psi_1\wedge\dots\wedge\psi_k\rangle^k = \det(\langle\varphi_i,\psi_j\rangle^*) = \det(\langle \varphi_i, \psi_j \rangle')$$

(ج) اگر $\langle\, , \rangle$ با شاخص i باشد، آنگاه $\langle v_1^*\wedge\dots\wedge v_n^*, v_1^*\wedge\dots\wedge v_n^*\rangle = (-1)^i$.

(د) برای آنهایی که با $\otimes$ و $\wedge^k$ آشنا هستند. با استفاده از ایزومورفیسم $\otimes^k V^* \approx (\otimes^k V)^*$ و $\wedge^k(V^*) \approx (\wedge^k V)^*$ ضرب داخلی بر $\otimes^k V$ و نیز بر $\wedge^k V$ تعریف کنید، در اینجا از ایزومورفیسم $V \to V^*$ مطرح شده توسط ضرب داخلی بر V استفاده می‌شود. نشان دهید که این ضرب داخلی‌ها، با آنها که در بالا تعریف شدند، یکی اند.

۵. تعریف $v_1\times\dots\times v_{n-1}$ را از مسألهٔ ۷-۲۶ به یاد بیاورید.

(الف) نشان دهید که به ازاء هر iای $0 = \langle v_i, v_1\times\dots\times v_{n-1}\rangle$،

(ب) نشان دهید $|v_1\times\dots\times v_{n-1}| = \sqrt{\det(g_{ij})}$ که $g_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. راهنمایی: از حکم در صفحه‌ی برای بدست آوردن زیرفضای $(n-1)$-بعدی بخصوص از $\mathbb{R}^n$ استفاده کنید.

۶. گیریم $\xi = \pi: E \to B$ کلاف برداری است. متر نامعین بر ξ، انتخابی پیوسته از یک ضرب داخلی نامثبت معین $\langle\, , \rangle_p$ بر هر یک از $\pi^{-1}(p)$ ها تعریف می‌کنیم. نشان دهید که شاخص $\langle\, , \rangle_p$ بر هر مؤلفهٔ B ثابت است.

۷. این مسأله به اطلاعاتی در خصوص همبند ساده بودن و فضاهای پوششی بستگی دارد.

(الف) هیچ طریقی برای انتخاب پیوستهٔ زیرفضاهای ۱-بعدی از T_pS^2 به ازاء $p \in S^2$ های مختلف وجود ندارد. (فضای متشکل از دو بردار یکه در هر زیرفضا را درنظر بگیرید.)

(ب) هیچ متریکی با شاخص ۱ بر S^2 وجود ندارد.

۸. گیریم $\langle\, , \rangle$ و $\langle\, , \rangle'$ دو متریک بر کلاف برداری $\xi = \pi: E \to B$ هستند. گیریم S مجموعهٔ همهٔ $e \in E$های با $\langle e, e\rangle = 1$ است، و S' را به صورت مشابه تعریف می‌کنیم. نشان دهید S با S' همئومورف است. اگر ξ کلاف هموار روی منیفلد M باشد، نشان دهید S با S' دیفئومورف است.

۹. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که اگر توابع g_{ij} و g'_{ij} به صورت

$$g'_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}$$

با $\det(g_{ij}) \neq 0$ مرتبط باشند و توابع g^{ij} و g'^{ij} به صورت

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \qquad \sum_{k=1}^{n} g'^{ik} g'_{kj} = \delta^i_j$$

تعریف شوند. در این صورت

$$g'^{\alpha\beta} = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^j}$$

این طریق کلاسیک برای تعریف تانسور (با مؤلفه‌های) g^{ij} است.

۱۰. (الف) گیریم $\langle\ ,\ \rangle$ یک متریک ریمان بر M است و A تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$. پس به ازاء هر $p \in M$ ای $A(p): T_pM \to T_pM$. تانسور B از نوع $\binom{2}{0}$ را به صورت $B(p)(v_1, v_2) = \langle A(p)(v_1), v_2 \rangle$ تعریف می‌کنیم. اگر بیان A در دستگاهی مختصاتی به شکل $A = \sum_{i,j=1}^{n} A^j_i\, dx^i \otimes \partial/\partial x^j$ باشد، نشان دهید $B = \sum_{i,k} B_{ik}\, dx^i \otimes dx^k$ که $B_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A^j_i g_{jk}$.

(ب) به صورت مشابه، تانسوری از نوع $\binom{0}{2}$ به صورت $C(p)(\lambda_1, \lambda_2) = \langle A(p)^*(\lambda_1), \lambda_2 \rangle$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر مؤلفه‌های C عبارت از C^{kj} باشند، در این صورت $C^{kj} = \sum_{i=1}^{n} g^{ki} A^j_i$.
تانسورهای B و C مشروح در بالا را تانسورهای حاصل از A به ترتیب با بالابری و پائین بری اندیس‌ها می‌نامیم.

۱۱. (الف) گیریم $X_1, \ldots, X_n$ میدانهای برداری مستقل خطی بر منیفلد M با متریک ریمان $\langle\ ,\ \rangle$ هستند. نشان دهید که روش گرام اشمیت را می‌توان برای این میدانهای برداری بکار گرفت، و به n میدان برداری در همه جا متعامد $Y_1, \ldots, Y_n$ رسید.

(ب) در حالت متریک غیر مثبت معین، $Y_1, \ldots, Y_n$ را در همسایگی ای از هر نقطه به گونه‌ای بیابید که $\langle Y_i, Y_j \rangle = \pm \delta_{ij}$.

۱۲. (الف) اگر $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ مثبت باشد، نشان دهید مساحت رویهٔ حاصل از دوران نمودار f حول x-محور $\int_a^b 2\pi f \sqrt{1+(f')^2}$ است.

(ب) مساحت S^2 را ثابت کنید.

۱۳. گیریم $M \subset \mathbb{R}^n$ زیرمنیفلدی $(n-1)$-بعدی با جهت μ است. بردار یکهٔ برونسوی $\nu(p)$ در نقطهٔ $p \in M$ را به صورت برداری در $T_p\mathbb{R}^n$ بطول یک تعریف می‌کنیم که $\{\nu(p), (v_1)_p, \ldots, (v_{n-1})_p\}$ در $T_p\mathbb{R}^n$ با جهت مثبت باشد، به شرط آنکه $\{(v_1)_p, \ldots, (v_{n-1})_p\}$ در T_pM با جهت μ مثبت باشد.

(الف) اگر به ازاء یک منیفلد مرزدار n-بعدی $N \subset \mathbb{R}^n$ ای $M = \partial N$، نشان دهید که $\nu(p)$ها مانند در فصل ۸ برونسوی است.

(ب) گیریم dV_{n-1} المان حجم M حاصل از متریک، به عنوان زیرمنیفلد M از $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که اگر $\nu(p)$ را عنصری از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$dV_{n-1}(p)\left((v_1)_p,\dots,(v_{n-1})_p\right)=\det\begin{pmatrix} v(p)\\ v_1\\ \vdots\\ v_{n-1}\end{pmatrix}$$

نتیجه بگیرید که تحدید عنصر زیر به T_pM دقیقاً $dV_{n-1}(p)$ است:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}v^i(p)\,dx^1(p)\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i(p)}\wedge\dots\wedge dx^n(p)$$

(ج) توجه کنید که به ازای یک $\alpha\in\mathbb{R}$ ای $v_1\times\dots\times v_{n-1}=\alpha v(p)$ (بنابه مسألهٔ ؟). نشان دهید که به ازای $w\in\mathbb{R}^n$ داریم

$$\langle w,v(p)\rangle\cdot\langle v_1\times\dots\times v_{n-1},v(p)\rangle=\langle w,v_1\times\dots\times v_{n-1}\rangle$$

نتیجه بگیرید که تحدید عنصر زیر به T_pM عبارتست از $v^i(p)\cdot dV_{n-1}(p)$:

$$(-1)^{i-1}dx^1(p)\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i(p)}\wedge\dots\wedge dx^n(p)$$

(د) گیریم $M\subset\mathbb{R}^n$ یک منیفلد مرزدار n-بعدی فشرده است، و v نرمال یکهٔ برونسوی بر ∂M است. المان حجم M را با dV_n نشان داده و المان حجم ∂M را با dV_{n-1}. گیریم $X=\sum_i a^i\partial/\partial x^i$ میدانی برداری بر M است. قضیهٔ دیورژانس را اثبات کنید:

$$\int_M \operatorname{div}(X)\,dV_n=\int_{\partial M}\langle X,v\rangle\,dV_{n-1}$$

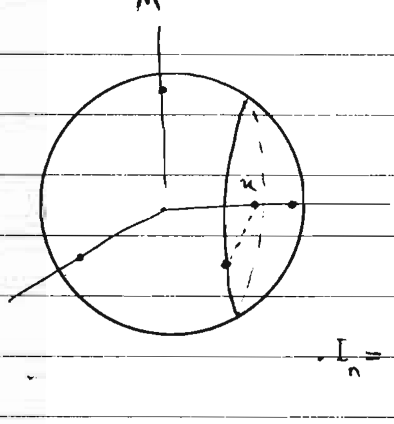
که $\operatorname{div}(X)$ در مسألهٔ ۷-۲۷ تعریف شده است. راهنمایی: فرم ω بر M با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a^i\,dx^1\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n$$

(هـ) گیریم $M\subseteq\mathbb{R}^3$ یک منیفلد مرزدار ۲-بعدی فشرده با جهت μ و نرمال یکهٔ برونسوی v است. گیریم T میدان برداری بر ∂M متشکل از بردارهای یکهٔ با جهت مثبت است. المان حجم بر M را با dA و المان حجم بر ∂M را با ds نشان دهید. گیریم X میدانی برداری بر M است. قضیهٔ (اولیهٔ) استوکس را ثابت کنید:

$$\int_M\langle\nabla\times X,v\rangle\,dA=\int_{\partial M}\langle X,T\rangle\,ds$$

که $\nabla\times X$ در مسألهٔ ۷-۲۷ تعریف شده است.



۱۴. (الف) گیریم V_n حجم گوی یکه در $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که

$$V_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,V_{n-1}\,dx$$

(ب) فرض کنید $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}dx$، نشان دهید $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

(ج) با توجه به اینکه $V_1=2$ و $V_2=\pi$، نشان دهید

$$V_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & n \text{ زوج}\\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\cdot\pi^{(n-1)/2}}{1\cdot3\cdot5\cdots n} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

این را برحسب تابع Γ به صورت $\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ میتوان نوشت.

(د) گیریم A_{n-1} عبارت از $(n-1)$-حجم S^{n-1} است. با استفاده از روش در اثبات نتیجهٔ ۸-۸، اما بعوض ترتیب انتگرالگیری، نشان دهید

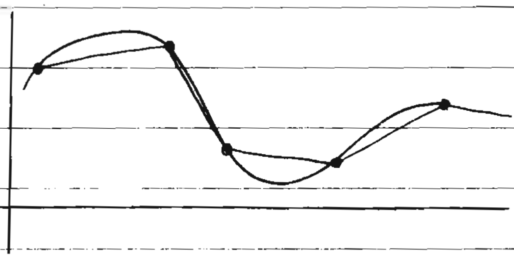
$$V_n = \int_0^1 r^{n-1} A_{n-1}\, dr = \frac{1}{n} A_{n-1}$$

(هـ) همین حکم را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس (مسألهٔ ۱۳) و $X(p) = p_p$ بدست آورید.

۱۵-۱. (الف) گیریم $c:[0,1]\to \mathbb{R}^n$ یک منحنی دیفرانسیل‌پذیر است، که $\mathbb{R}^n$ دارای متر ریمان معمولی $\sum_i dx^i\otimes dx^i = \langle\ ,\ \rangle$ است. نشان دهید

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n (c^{i\prime}(t))^2}\, dt$$

(ب) در حالت خاص $c:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $c(t)=(t,f(t))$، نشان دهید که این طول $\int_0^1\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ کوچکترین کران بالایی طول منحنی‌های چندضلعی استوار بر آن است. راهنمایی: بازای $0=t_0<\dots<t_n=1$ داریم

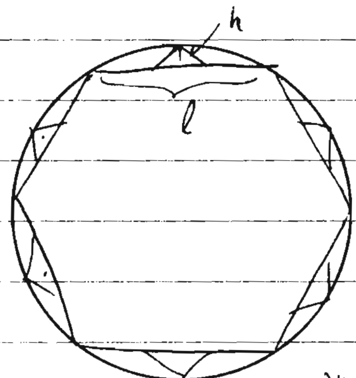


$$|c(t_i)-c(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2}$$
$$= \sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+f'(\xi_i)^2(t_i-t_{i-1})^2}$$

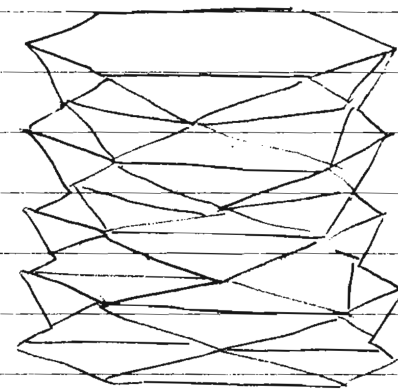
بازای یک $\xi_i\in[t_{i-1}, t_i]$.

(ج) همین حکم را در حالت کلی اثبات کنید. راهنمایی: از احکام مسألهٔ ۸-۱ و پیوستگی یکنواخت $\sqrt{\ }$ بر مجموعه‌ای فشرده بحث کنید.

طبیعی است فرض کنیم که مساحت رویه را به صورت مشابه به شکل کوچکترین کران بالایی مساحت رویه‌های چندوجهی استوار بر آن تعریف کرد. اما مثالی مشهور از ه. شوارتز هست که نشان میدهد این کوچکترین کران بالایی برای بخشی کراندار از یک استوانه، بینهایت است! من به جهت ارائهٔ مثال شوارتز از شکل زیر استفاده میکنم که در کتاب ... از ... آمده است.



نمای بالا



برای افزایش تعداد مثلثها، شکل شش‌وجهی‌ها را تغییر نمی‌دهیم، بلکه ترتیب صفحات شامل شش‌ضلعی‌ها را به هم نزدیک میکنیم. به این ترتیب مثلثها در صفحات موازی‌تری قرار میگیرند تا که همگی با قاعده موازی شوند.

بدین طریق تعداد مثلثها را به شکل نامحدودی می‌شود زیاد کرد، که مساحت هر یک به $h\ell/2$ میل می‌کند. موضوع مساحت رویه برای رویه‌های غیر دیفرانسیل‌پذیر، بسیار پیچیده است و به آن وارد نمی‌شویم.

۱۶. گیریم $c:[0,1]\to M$ یک منحنی در منیفلد M با متر ریمانی $\langle\ ,\ \rangle$ است. اگر $p:[0,1]\to[0,1]$ دیفئومورفیسم باشد، نشان دهید $\mathcal{L}(c)=\mathcal{L}(c\circ p)$.

۱۷. نشان دهید متر d بر M را بجای منحنی‌های تکه‌ای هموار، به کمک منحنیهای هموار می‌توان تعریف نمود. راهنمایی: نشان دهید که به ازاء هر $\varepsilon>0$ چگونه می‌توان گوشه‌های هر منحنی تکه‌ای هموار را طوری اصلاح کرد که طول تغییر کرده کمتر از ε شود؛ بیاد بیاورید که فرمول طول تنها مشتقات مرتبه اول دارد.

۱۸. (الف) گیریم M ، $B\subset M$ با گوی $\{p\in\mathbb{R}^n : |p|\le 1\}$ همیومورف است و $S\subset M$ زیرمجموعهٔ با $\{p\in\mathbb{R}^n : |p|=1\}$ متناظر است. نشان دهید $M-S$ ناهمبند است؛ به این ترتیب که $M-B$ و $M-S$ دو زیرمجموعهٔ باز مجزا از $M-S$ هستند.

(ب) اگر $p\in B-S$ و $q\in M-B$، نشان دهید $d(p,q)\ge \min\limits_{q'\in S} d(p,q')$. با استفاده از این و نیز لم V' اثبات قضیهٔ V را تکمیل کنید. (در نظریهٔ منیفلدهای با بعد نامتناهی، این احکام بسیار مهم هستند، زیرا $M-S$ ناهمبند نیست و قضیهٔ V غلط است.)

۱۹. (الف) با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء در مورد اولین معادلهٔ در صفحهٔ ، نشان دهید که

$$\left.\frac{dJ(\bar{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=0}=\int_a^b \frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial t}(0,t)\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))-\int_a^t\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t))\right\}dt$$

اگر تنها f از کلاس C^1 باشد، این حکم با معنی است.

(ب) لم دوبوآ ریمون. اگر تابع پیوستهٔ g بر $[a,b]$ به ازاء هر تابع هموار η بر $[a,b]$ با $\eta(a)=0=\eta(b)$ در شرط $\int_a^b \eta'(t)g(t)\,dt=0$ صدق کند، در این صورت g ثابت است. راهنمایی: با ثابت c برابر $c=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(u)\,du$ باشد. به وضوح داریم $\int_a^b \eta'(t)(g(t)-c)\,dt$ و لذا کافی است η ای مناسب با $\eta'(t)=g(t)-c$ انتخاب شود.

(ج) نتیجه بگیرید که اگر تابع از کلاس C^1 چون f یک نقطهٔ تکین J باشد، آنگاه همچنان f در معادلات اویلر صدق می‌کند (که اگر f از کلاس C^2 نباشد، از قبل این حکم بدیهی نیست).

۲۰. توابع سینوس، کسینوس و تانژانت هیپربولیک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\qquad \cosh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\qquad \tanh(x)=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(الف) توابع $\sinh$، $\cosh$ و $\tanh$ را ترسیم کنید.

(ب) نشان دهید $\cosh^2-\sinh^2=1$، $\tanh^2+1/\cosh^2=1$، $\sinh'=\cosh$، $\cosh'=\sinh$ و

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$

(ج) آنهایی که با سریهای توان مختلط آشنایند، ثابت کنند

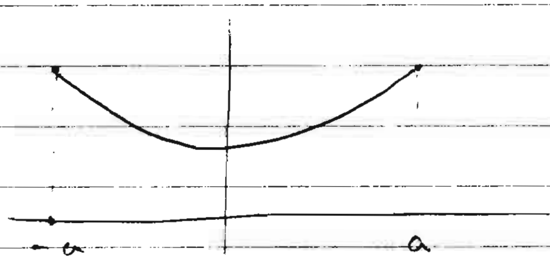
$$\sinh x=\frac{1}{i}\sin(ix) \qquad \cosh x=\cos ix$$

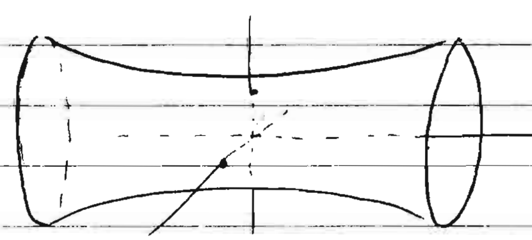
(د) توابع وارون $\sinh$ و $\tanh$ را به ترتیب با $\sinh^{-1}$ و $\cosh^{-1}$ نشان میدهیم. وارون تابع $\cosh|_{[0,\infty)}$ را با $\cosh^{-1}$ نشان میدهیم. ثابت کنید:

$$\sinh(\cosh^{-1}x)=\sqrt{x^2-1} \qquad \cosh(\sinh^{-1}x)=\sqrt{1+x^2} \qquad \cosh(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sinh^{-1})'(x)=1/\sqrt{1+x^2} \qquad (\cosh^{-1})'(x)=1/\sqrt{x^2-1}$$

۲۱. مسألهٔ یافتن رویهای دوار واصل بین دو دایرهٔ به شعاع یک که به جهت راستی با مراکز در a و $-a$ نشان داده شده‌اند در نظر بگیرید. ما به دنبال تابعی $f(x)=c\cosh(x/c)$ هستیم که c در شرایط $c>0$ و $c\cosh(\frac{a}{c})=1$ صدق می‌کند.



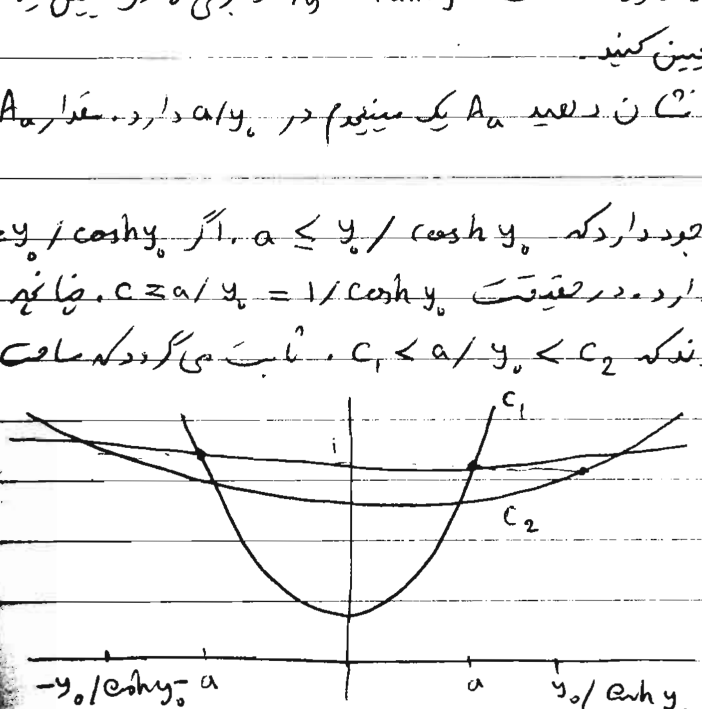


(الف) $y_0>0$ ای منحصربفرد با $\tanh y_0=1/y_0$ وجود دارد. علامت $\tanh y-1/y$ را برای $y>0$ تعیین کنید.

(ب) علامت $y\sinh y-\cosh y$ را برای $y>0$ تعیین کنید.

(ج) گیریم $A_a(c)=c\cosh(a/c)$ با $c>0$. نشان دهید A_a یک مینیمم در a/y_0 دارد، مقدار A_a را در آن نقطه پیدا کرده و نمودار ترسیم کنید.

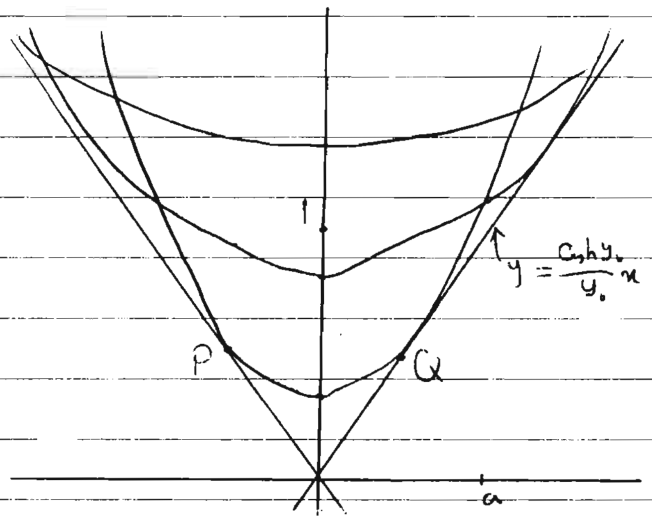
(د) وقتی و تنها وقتی یک c با $c\cosh(a/c)=1$ وجود دارد که $a\le y_0/\cosh y_0$. اگر $a=y_0/\cosh y_0$، در این صورت چنین c منحصربفردی وجود دارد، در حقیقت $c=a/y_0=1/\cosh y_0$. چنانچه $a<y_0/\cosh y_0$، دوتا از این cها وجود دارند که $c_1<a/y_0<c_2$. ثابت میگردد که مساحت رویهٔ برای c_2 کمتر از دیگری است.



(ه) به کمک قسمت (د) از مسألهٔ ۲۰ نشان دهید

$$\frac{y_0}{\cosh y_0}=\sqrt{y_0^2-1}$$

[توجه شود که $y_0 \approx 1{,}2$ و لذا $\sqrt{y_0^2-1} \approx 0{,}67$. چنانچه از مفهوم پوش یک خانواده از منحنیها استفاده شود (صفحهٔ ۲۵۵ به بعد از جلد سوم)، این روند را ساده‌تر می‌توان تشریح کرد. پوش خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای $f_c(x) = c\cosh(x/c)$ با حل معادلات $\frac{\partial f_c(x)}{\partial c} = \cosh\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\sinh(\frac{x}{c}) = 0$ بدست می‌آید. در نتیجه $x/c = \pm y_0$ و $y = c\cosh(x/c) = c\cosh y_0$. یعنی، پوش مورد نظر عبارت است از خطوط راست $y = \pm(\cosh y_0 / y_0)x$.



عنصر منحصر بفردی از خانواده که از نقطهٔ به مختصات $(y_0/\cosh y_0 , 1)$ می‌گذرد، در این نقطه به پوش مماس است. برای $a < y_0/\cosh y_0$، نمودار f_{c_1} در نقطهٔ $P, Q \in (-a;a)$ به پوش مماس است، اما نمودار f_{c_2} در نقاطی خارج از $[-a;a]$ به پوش مماس است. نقطهٔ Q را مزدوج P نسبت به اکسترمال f_{c_1} می‌نامند، و در حساب تغییرات نشان داده می‌شود که وجود این نقطهٔ مزدوج، ایجاب می‌کند که قسمتی از f_{c_2} که از P تا $(a,1)$ است، مینیمم موضعی $\int f\sqrt{1+(f')^2}$ را در برندارد. (با بحث در خصوص نقاط مزدوج یک گئودزی که در فصل ۸ از جلد IV آمده است مقایسه کنید و به یادداشت پائین صفحهٔ   از جلد V توجه کنید.)]

۲۲. در تمام بحث ما در خصوص حساب تغییرات، با F هایی کار می‌کردیم که t در بر نداشتند. به همین دلیل معادلات اویلر آنها عملاً به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(f(t), f'(t))\right) = 0$$

(الف) نشان دهید که به ازاء هر f و هر $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ای داریم

$$\frac{d}{dt}\left(F - f'\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f'\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

در نتیجه بگیرید که اکسترمال‌های مسألهٔ ما در $F = f'\frac{\partial F}{\partial y}$ صدق می‌کنند.

(ب) با بکارگیری الف در مورد $F(x,y) = x\sqrt{1+y^2}$، مستقیماً معادلهٔ $dy/dx = \sqrt{cy^2-1}$ را بدست بیاورید که قبلاً در حل مسأله بدست آورده بودیم.

۲۳. (الف) گیریم x و x' دو دستگاه مختصات هستند و g_{ij} و g'_{ij} بیان یک متر ریمان نسبت به هر یک از آنها است. نشان دهید

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}} + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\gamma}}\right)$$

ب) درمورد تناظر $[ij,k]$ و $[\alpha\beta,\gamma]'$ ثابت کنید

$$[\alpha\beta,\gamma]' = \sum_{i,j,k=1}^{n} [ij,k] \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial x'^\gamma} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}$$

پس، $[ij,k]$ها مؤلفه‌های تانسور نیستند.

ج) نشان دهید

$$\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^l}$$

۲۴. نشان دهید که هر ساختار هموار بر $\mathbb{R}$، با ساختار هموار معمولی بر $\mathbb{R}$ دیفئومورف است. (تابع طول قوس بر یک ژئودزی برای یک متر ریمان بر $\mathbb{R}$ را درنظر بگیرید.)

۲۵. گیریم $\langle , \rangle = \sum dx^i \otimes dx^i$ متر ریمان معمولی بر $\mathbb{R}^n$ است و $\sum_{i,j} g_{ij}\, du^i \otimes du^j$ یک متر دیگر است که $(u^1, \dots, u^n)$ باز هم نمایشگر دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید بدانیم دیفئومورفیسمی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که $\sum_{i,j} g_{ij}\, du^i \otimes du^j = f^*\langle , \rangle$. درمورد چگونگی یافتن f چه میتوان گفت؟

(الف) گیریم $\partial f / \partial u^i = e_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. چنانچه e_i را میدانی برداری بر $\mathbb{R}^n$ درنظر بگیریم، نشان دهید $f_*(\partial / \partial u^i) = e_i$.

ب) نشان دهید $g_{ij} = \langle e_i , e_j \rangle$.

ج) حداقل از نظر تئوری، برای یافتن f، کافی است e_iها را بیابیم و برای این منظور کافی است معادلات دیفرانسیل $\partial e_i / \partial u_j = \sum_{r=1}^{n} A^r_{ij} e_r$ که باید e_iها در آن صدق کنند، بیابیم. نشان دهید که بایستی داشته باشیم

$$B_{ij,k} = \sum_{r=1}^{n} g_{kr} A^r_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f^l}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial f^l}{\partial u^k}$$

د) نشان دهید

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f^l}{\partial u^i \partial u^k}\frac{\partial f^l}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 f^l}{\partial u^j \partial u^k}\frac{\partial f^l}{\partial u^i} = \sum_{r=1}^{n} g_{jr} A^r_{ik} + g_{ir} A^r_{kj} = B_{ik,j} + B_{kj,i}$$

هـ) با تعویض دوری i، j و k نتیجه بگیرید

$$B_{ij,k} = [ij,k]$$

پس $A^r_{ij} = \Gamma^r_{ij}$. الی کارتان در کتاب "درسهایی در هندسهٔ فضاهای ریمان" از این روش برای طرح با انگیزه‌تر Γ^k_{ij}ها استفاده کرده است.

و) مستقیماً از معادلات ژئودزیک نتیجه بگیرید که $A^r_{ij} = \Gamma^r_{ij}$. (توجه کنید که منحنیهای حاصل از ثابت گرفتن همهٔ f^iها بجز یکی، ژئودزی هستند، زیرا به خطوط راست موازی با x^i-محور متناظرند.)

۲۶. اگر $(V', \langle\,,\rangle')$ و $(V'', \langle\,,\rangle'')$ دو فضای برداری با ضرب داخلی باشند و $\langle\,,\rangle$ را بر $V = V'\oplus V''$ به صورت $\langle v'\oplus v'', w'\oplus w''\rangle = \langle v', w'\rangle' + \langle v'', w''\rangle''$ تعریف کنیم، ثابت کنید:

(الف) $\langle\,,\rangle$ ضرب داخلی است.

(ب) چنانچه بر M و N متر ریمان موجود باشد، طریقی طبیعی برای الحاق یک متر ریمان بر $M\times N$ وجود دارد. ژئودزیهای بر $M\times N$ نسبت به این متر را توصیف کنید.

۲۷. گیریم $\gamma:[a;b]\to M$ ژئودزی است و $\rho:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ دیفئومورفیسم است. نشان دهید $c=\gamma\circ\rho$ در معادلات زیر صدق می‌کند

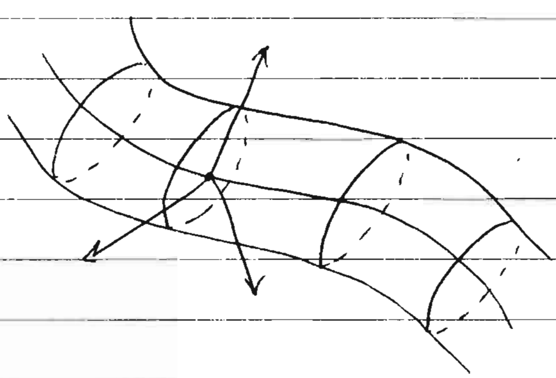
$$\frac{d^2c^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(c(t))\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} = \frac{dc^k}{dt}\frac{\rho''(t)}{\rho'(t)}$$

(ب) بالعکس، اگر c در این معادلات صدق کند، آنگاه γ ژئودزی است.

(ج) اگر به ازای یک $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ای c در روابط

$$\frac{d^2c^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(c(t))\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} = \frac{dc^k}{dt}\mu(t)$$

صدق کند، آنگاه c تجدید پارامتر یک ژئودزی است. (معادلهٔ $\rho''(t)=\rho'(t)\mu(t)$ را به شکل صریح می‌توان حل نمود: $\rho(t)=\int^t e^{M(s)}ds$ که $M'(s)=\mu(s)$.)



۲۸. گیریم c منحنی‌ای در M است که در همه‌جا $dc/dt\neq 0$ و ابررویه‌های به شرح زیر را در نظر بگیرید:

$$\{\exp_{c(t)} v : \|v\| = \text{ثابت},\ v\in T_{c(t)}M,\ \langle v, dc/dt\rangle = 0\}$$

نشان دهید که به ازای $v\in T_{c(t)}M$ با $\langle v, dc/dt\rangle$ صفر ژئودزی $u\mapsto \exp_{c(t)} u.v$ بر این ابررویه‌ها عمود است. (لم گاوس، حالت خاص است که c ثابت است.)

۲۹. گیریم $\gamma:[a;b]\to M$ یک ژئودزی با $\gamma(a)=p$ است و فرض کنیم $\exp_p$ دیفئومورفیسمی بر یک همسایگی $\mathcal{O}\subset T_pM$ از $\{t\gamma'(a): 0\le t\le 1\}$ است. نشان دهید که γ یک منحنی به طول حداقل بین p و $q=\gamma(b)$ است، در بین همهٔ منحنیهای $\exp(\mathcal{O})$. (هنوز هم لم گاوس در مورد $\exp(\mathcal{O})$ قابل اجرا است.)

۳۰. اگر $\langle\,,\rangle$ یک متر ریمان بر M است و $d: M\times M\to\mathbb{R}$ متر متناظرش است، نشان دهید منحنی $\gamma:[a;b]\to M$ با $d(\gamma(a),\gamma(b)) = L(\gamma)$ ژئودزی است.

۳۱. نامساوی شوارتز برای توابع پیوسته اذعان میدارد که $\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که f و g (روی $\mathbb{R}$) وابستهٔ خطی باشند.

(الف) نامساوی شوارتز را به کمک اثبات قسمت (۲) از قضیهٔ ۱ ثابت کنید.

(ب) ثابت کنید که به ازاء هر منحنی γ ای $\left(\mathcal{L}_a^b(\gamma)\right)^2 \le (b-a)E_a^b(\gamma)$ و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که γ با پارامتری متناسب با طول قوس پارامتره شده باشد.

(ج) گیریم $\gamma:[a,b]\to M$ یک ژئودزی با $\mathcal{L}_a^b(\gamma) = d(\gamma(a),\gamma(b))$ است. اگر $c(a)=\gamma(a)$ و $c(b)=\gamma(b)$، نشان دهید

$$E(\gamma) = \frac{\mathcal{L}(\gamma)^2}{b-a} \le \frac{\mathcal{L}(c)^2}{b-a} \le E(c)$$

نتیجه بگیرید که $E(\gamma)\le E(c)$، مگر آنکه c نیز یک ژئودزی با $\mathcal{L}_a^b(c) = d(c(a),c(b))$ باشد. بخصوص قطعات باندازهٔ کافی کوچک از هر ژئودزی، انرژی را حداقل می‌کنند.

۳۲. گیریم p نقطه‌ای بر منیفلد M با متریک $\langle\,,\rangle$ است. پایه‌ای $\{v_1,\dots,v_n\}$ برای T_pM انتخاب کنید. پس دستگاه مختصاتی χ بر T_pM با ضابطهٔ $(a^1,\dots,a^n)\mapsto \sum_i a^i v_i$ وجود دارد (مختصات مستطیلی)؛ گیریم x دستگاه مختصات $\exp^{-1}\circ\chi$ تعریف شده بر یک همسایگی U از p است.

(الف) نشان دهید که در این مختصات $\Gamma_{ij}^k(p)=0$. راهنمایی: معادلات ژئودزی را درنظر گرفته و توجه کنید که هر ژئودزی γ گذرنده از p درست عبارتست از ترکیب $\exp$ با یک خط راست گذرنده از 0 در T_pM و لذا هر یک از γ^k ها خطی هستند.

(ب) گیریم $r:U\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $r(q)=d(p,q)$ است. پس $r\circ\gamma = \sum_k(\gamma^k)^2$. نشان دهید

$$\frac{d^2\left((r\circ\gamma)^2\right)}{dt^2} = 2\left\{\sum_k\left(\frac{d\gamma^k}{dt}\right)^2 - \sum_{i,j,k}\gamma^2\,\Gamma_{ij}^k\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\right\}$$

(ج) توجه کنید

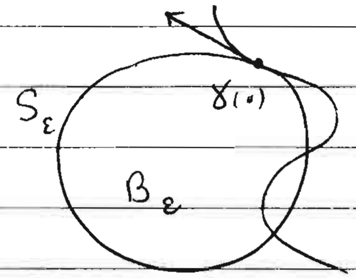
$$\sum_{i,j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} \le n^2\sum_k\left(\frac{d\gamma^k}{dt}\right)^2$$

به کمک قسمت (الف) نتیجه بگیرید که اگر $\|\gamma'(0)\|$ باندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه $d^2(r\circ\gamma)^2/dt^2>0$. پس $d(r\circ\gamma)^2/dt$ در همسایگی ای از 0 صعودی است.

(د) گیریم $B_\varepsilon=\{v\in T_pM : \|v\|<\varepsilon\}$ و $S_\varepsilon=\{v\in T_pM : \|v\|=\varepsilon\}$. نشان دهید که حکم ذیل بازاء همهٔ $\varepsilon>0$ های باندازهٔ کافی کوچک درست است: اگر γ یک ژئودزی باشد به گونه‌ای که $\gamma(0)\in\exp(S_\varepsilon)$ و نیز $\gamma'(0)$ به $\exp(S_\varepsilon)$ مماس باشد، آنگاه $\delta>0$ ای (وابسته به γ) چنان وجود دارد که برای هر $t\in(-\delta,\delta)-\{0\}$ ای $\gamma(t)\notin\exp(B_\varepsilon)$. راهنمایی: اگر $\gamma'(0)$ به $\exp(S_\varepsilon)$ مماس باشد، آنگاه $d(r\circ\gamma)/dt$ صفر است.

(هـ) گیریم q و q' دو نقطه با $r(q), r(q')<\varepsilon$ هستند و γ ژئودزی منحصر بفردی بطول $<2\varepsilon$ واصل بین آنها است

نشان دهید که به ازای $\epsilon > 0$ های به اندازهٔ کافی کوچک، ماکزیمم $r \circ \gamma$ در q یا q' رخ می‌دهد.



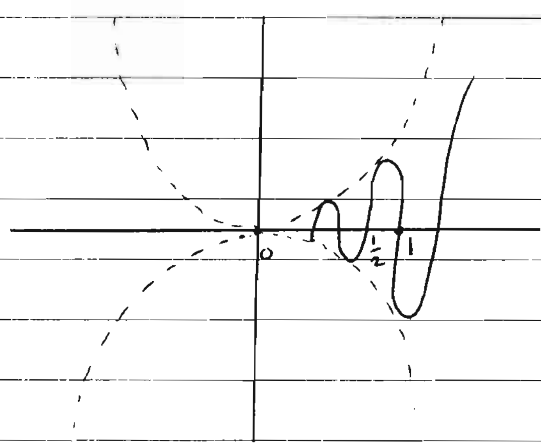
(د) مجموعهٔ $U \subset M$ را در صورتی محدب ژئودزیک گویند که به ازای هر $q, q' \in U$ یک ژئودزی منحصربفرد با طول حداقل بین آنها وجود داشته باشد، و این ژئودزی کاملاً در U قرار بگیرد. نشان دهید $\exp(\{v \in T_pM : \|v\| < \epsilon\})$ به ازای $\epsilon > 0$ های به اندازهٔ کافی کوچک، محدب ژئودزی است.

(ز) گیریم $f : U \to \mathbb{R}^n$ دیفئومورفیسمی از یک همسایگی U از $0 \in \mathbb{R}^n$ بتوی $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که به ازای $\epsilon > 0$ به اندازهٔ کافی کوچک، تصویر هر ϵ-گوی باز، محدب ژئودزی است.

۳۳. (الف) منحنی همواره دیفرانسیل‌پذیر $c(t) = (t, f(t))$ در $\mathbb{R}^2$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$\lim_{h \to 0} (\text{طول } c|[0,h]) / |c(h) - c(0)| \neq 1$$

راهنمایی: c چیزی شبیه به شکل ذیل است.



طول از $(\frac{1}{2}, 0)$ تا $(1, 0)$ برابر یک است و طول از $(\frac{1}{4}, 0)$ تا $(\frac{1}{2}, 0)$ برابر یک است و ...

(ب) وضعیت در نتیجهٔ ۱۵ را در نظر بگیرید بجز اینکه: وقتی و تنها وقتی $c(t) = q$ که $t = 0$ و به ازای t های نزدیک ۰، داشته باشیم $u'(t) > 0$. اگر c از کلاس C^1 باشد، آنگاه وقتی $t \to 0$، $v(t)$ به مقداری می‌گراید (حتی اگر $v(0)$ تعریف نشده باشد). نشان دهید که اگر c از کلاس C^1 باشد، آنگاه $K > 0$ ای چنان وجود دارد که به ازای هر t در نزدیکی صفر، به ازای $0 \le u \le 1$ داریم

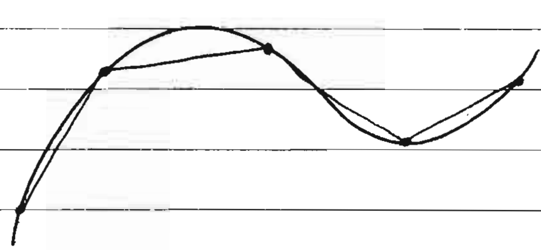
$$\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(u,t)\right\| \le K u \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(1,t)\right\|$$

راهنمایی: به وضوح در T_qM داریم

$$\left\|\frac{d(u \cdot v(t))}{dt}\right\| = |u| \cdot \left\|\frac{dv(t)}{dt}\right\|$$

چون $\exp_q$ موضعاً دیفئومورفیسم است، K_1 و K_2 ای با $0 < K_1 < K_2$ چنان وجود دارند که به ازای همهٔ بردارهای مماس v در نقاط نزدیک به q داریم $K_1\|v\| \le \|\exp_{q*} v\| \le K_2 \|v\|$.

(ج) اگر c از کلاس C^1 باشد، نشان دهید $\mathcal{L}(c)$ کوچکترین کران بالایی طول منحنی‌های ژئودزی تکه‌ای استوار بر c است.



۳۴. (الف) با استفاده از روش در مسألهٔ ۳۳ نشان دهید که اگر c خط راست واصل بین $v, w \in T_pM$ باشد، آنگاه

$$\lim_{v,w \to 0} \mathcal{L}(\exp \circ c) / \mathcal{L}(c) = 1$$

(ب) به صورت مشابه، اگر $\gamma_{v,w}$ ژئودزی منحصربفرد واصل بین $\exp(v)$ و $\exp(w)$ باشد، و نیز اگر فرض شود

$\gamma_{v,w} = \exp \circ c_{v,w}$، آنگاه $\lim_{v,w\to 0} \mathcal{L}(\gamma_{v,w})/\mathcal{L}(c_{v,w}) = 1$.

(ج) نتیجه بگیرید

$$\lim_{v,w\to 0} \frac{d(\exp v, \exp w)}{\|v-w\|} = 1$$

۳۵. گیریم $f: M \to N$ ایزومتری است. نشان دهید که f نسبت به ساختارهای فضای متری القایی بر M و N از مترهای ریمان مربوط، نیز ایزومتری است.

۳۶. گیریم M منیفلدی با متر ریمان $\langle\ ,\ \rangle$ و متر نظیر d است. گیریم $f: M \to M$ نگاشتی از M بروی خودش است که متر d را حفظ می‌کند.

(الف) اگر γ ژئودزی باشد، آنگاه $f\circ\gamma$ نیز ژئودزی است.

(ب) $f': T_pM \to T_{f(p)}M$ را به شکل ذیل تعریف می‌کنیم: به ازاء ژئودزی γ با $p = \gamma(0)$ تعریف می‌کنیم $f'(\gamma'(0)) = d f(\gamma(t))/dt|_{t=0}$. نشان دهید $\|f'(X)\| = \|X\|$ و $f'(cX) = cf'(X)$.

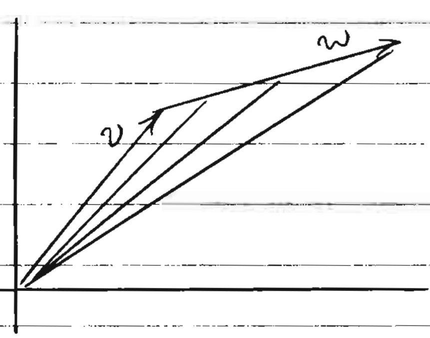
(ج) به ازاء $X, Y \in T_pM$، با استفاده از مسألهٔ ۳۴ نشان دهید که

$$\frac{2\langle X,Y\rangle}{\|X\|\cdot\|Y\|} = \frac{\|X\|^2+\|Y\|^2}{\|X\|\cdot\|Y\|} - \frac{\|tX-tY\|^2}{\|tX\|\cdot\|tY\|} = \frac{\|X\|^2+\|Y\|^2}{\|X\|\cdot\|Y\|} - \lim_{t\to 0}\frac{(d(\exp tX, \exp tY))^2}{\|tX\|\cdot\|tY\|}$$

نتیجه بگیرید که $\langle f'(X), f'(Y)\rangle_{f(p)} = \langle X, Y\rangle_p$ و بنابراین $f'(X+Y) = f'(X)+f'(Y)$.

(د) قسمت (ج) نشان می‌دهد که $f': T_pM \to T_{f(p)}M$ دیفئومورفیسم است. با استفاده از این نشان دهید که خود f دیفئومورفیسم است، و لذا ایزومتری است.

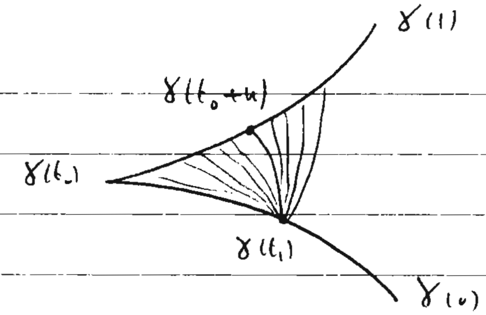
۳۷. (الف) نشان دهید که اگر $v, w \in \mathbb{R}^n$ با $v \neq 0$، آنگاه $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\|v+tw\|-\|v\|) = \langle v,w\rangle/\|v\|$. بنابراین، همین حکم در هر فضای برداری با یک متر اقلیدسی $\langle\ ,\ \rangle$ درست است. راهنمایی: اگر $\nu: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نرم باشد، آنگاه مقدار حد $D\nu(v)(w)$ است. به طریقی دیگر، می‌توان از معادلهٔ $\|u\|\|v\|\cos\theta = \langle u, v\rangle$ استفاده کرد که θ زاویهٔ بین u و v است.



(ب) نتیجه بگیرید که اگر w و v مستقل خطی باشند، آنگاه

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|v+tw\|-\|v\|-\|tw\|}{t} \neq 0$$

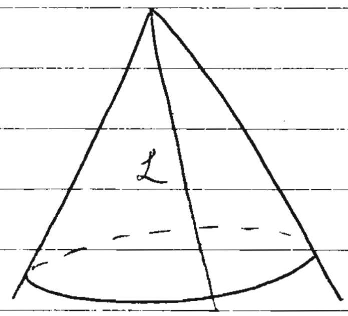
(ج) گیریم $\gamma: [0,1] \to M$ یک نقطهٔ تکین از کلاس C^1 تکه‌ای برای تابع طول است و نیز فرض کنیم به ازاء یک $t_0 \in (0,1)$ ای $\gamma'(t_0^-) \neq \gamma'(t_0^+)$. فرض کنید $t_1 < t_0$ و تغییر α که برای آن $\bar\alpha(u)$ از امتداد γ تا t_1 حاصل شود، در این صورت ژئودزی منحصربفردی از $\gamma(t_1)$ به $\gamma(t_0+u)$ است و نهایتاً به γ توقف می‌کند. از مسألهٔ ۳۷ استفاده کرده و نشان دهید که اگر t_1 به اندازهٔ کافی به t_0 نزدیک باشد، آنگاه



$dL(\bar{\alpha}(u))/du|_{u=0} \neq 0$ که تناقض است. بنابراین، نقاط تکین برای طول نمی‌توانند ممنوع باشند.

۳۸. استوانه‌ای $Z \subset \mathbb{R}^3$ به شعاع ۱ در نظر بگیرید. متر القایی توسط متریک $\mathbb{R}^3$ بر Z را بیابید.

۳۹. مخروطی C (بدون رأس) در نظر گرفته، و فرض کنید L یک خط مولد آن است. با باز کردن $C-L$ بر $\mathbb{R}^2$، نگاشتی $f: C-L \to \mathbb{R}^2$ را مشخص می‌کنید که آن هم ایزومتری موضعی است، ولی معمولاً یکبیک نیست. ژئودزیهای بر مخروط را مشخص کنید (تعداد ژئودزیهای بین دو نقطه به زاویهٔ مخروط بستگی دارد، و ممکن است ژئودزی به مکان اولیه‌اش بازگردد).



۴۰. گیریم $g: S^n \to P^n$ نگاشت $g(p) = [p] = \{p,-p\}$ باشد.

(الف) نشان دهید متریکی منحصر بفردی $\langle\langle,\rangle\rangle$ بر P^n وجود دارد به گونه‌ای که $g^*\langle\langle,\rangle\rangle$ متریک معمولی بر S^n است (متری که توسط نگاشت احتوایی از S^n بتوی $\mathbb{R}^{n+1}$ بر آن القاء می‌شود).

(ب) نشان دهید که هر ژئودزی $\gamma: \mathbb{R} \to P^n$ بسته است (یعنی، عددی a چنان وجود دارد که به ازاء هر t ای $\gamma(t+a) = \gamma(t)$)، و هر دو ژئودزی، دقیقاً یکبار یکدیگر را قطع می‌کنند.

(ج) نشان دهید ایزومتریایی از P^n بروی خودش وجود دارد که هر بردار مماس مفروض در یک نقطهٔ مشخص را به برداری مفروض در نقطه‌ای دیگر می‌نگارد.

این احکام نشان میدهند که P^n مدلی برای «هندسهٔ ناقلیدسی "بیضوی"» تشکیل میدهد. در این هندسه، مجموع زوایای داخلی هر مثلث $> \pi$ است.

۴۱. نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره H عبارتست از منیفلد $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ با متریک $(dx\otimes dx + dy\otimes dy)\frac{1}{y^2} = \langle,\rangle$.

(الف) با محاسبه نشان دهید که $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -1/y$ ، $\Gamma^2_{11} = 1/y$ و سایر Γ^i_{jk} ها صفرند.

(ب) گیریم C نیم‌دایره‌ای در H با مرکز در $(c,0)$ و شعاع R است. با در نظر گرفتن آن به عنوان یک منحنی $t \mapsto (t,\gamma(t))$ نشان دهید

$$\frac{d^2\gamma^2(t)}{dt^2} = \frac{-\gamma(t)}{t-c} - \frac{\gamma'(t)^2}{\gamma(t)}$$

(ج) به کمک مسئلهٔ ۲۷ نشان دهید که همهٔ ژئودزیهای در H (چنانچه بشکل مناسب پارامتره شوند) نیم‌دایره‌هایی با مرکز بر x-محورند، به همراه نیم‌خط‌های راست موازی y-محور.

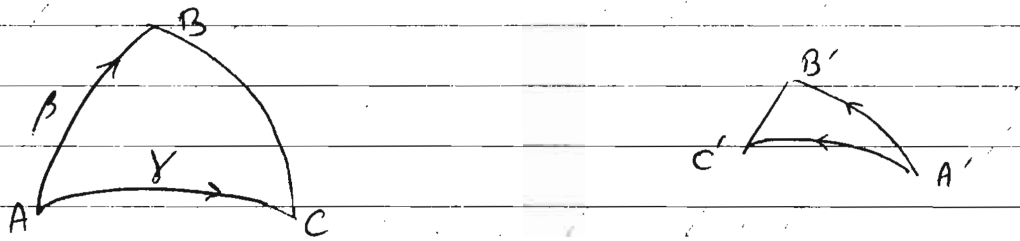
(د) نشان دهید که هر یک از این ژئودزیها در هر سمت بطول بینهایت هستند، و لذا نیم‌صفحهٔ بالایی کامل است.

(هـ) نشان دهید که اگر γ ژئودزی باشد و $p \notin \gamma$ آنگاه بینهایت ژئودزی وجود دارد که از p می‌گذرد و γ را قطع نمی‌کند.

(و) برای کسانی که کمی در مورد نگاشت کنفرمال میدانند (با مسألهٔ ۷-۶ از جلد IV مقایسه شود). نیم‌صفحهٔ بالایی را بعنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. نشان دهید که نگاشتهای

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+a} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad ad-bc>0$$

ایزومتری هستند، و هر بردار مماس در یک نقطهٔ مفروض را بروی برداری مماس در نقطه‌ای دیگر تصویر می‌کنند. نتیجه بگیرید که اگر AB و $A'B'$ هم طول باشند، AC و $A'C'$ هم طول باشند و زاویهٔ بین بردارهای مماس β و γ در A برابر زاویهٔ بین بردارهای مماس β' و γ' در A' باشند. در این صورت طول BC برابر طول $B'C'$ است و زاویهٔ در B و B' و در C و C' نیز برابرند (قضیهٔ ضلع-زاویه-ضلع).



این احکام نشان میدهند که نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره، مدلی برای هندسهٔ غیر اقلیدسی لباچفسکی است. در این هندسه، مجموع زوایای داخلی هر مثلث $< \pi$ است.

۴۴. گیریم p نقطه‌ای در یک منیفلد غیر فشردهٔ کامل M است. ثابت کنید یک ژئودزی $\gamma : [0, \infty) \to M$ چنان وجود دارد که $p = \gamma(0)$، و γ یک ژئودزی بطول حداقل بین هر دو نقطه از نمودارش است.

۴۵. گیریم M و N از نظر ژئودزی کامل هستند و $M \times N$ دارای متریکان توصیف شده در مسألهٔ ۲۶ است. نشان دهید $M \times N$ نیز کامل است.

۴۶. در این مسأله به اطلاعاتی در خصوص فضاهای پوششی نیاز داریم. گیریم $g : N \to M$ فضای پوششی است، که N منیفلد هموار است. در این صورت ساختاری هموار و منحصربفرد بر M وجود دارد که g را ایمرشن می‌سازد. اگر $\langle , \rangle$ یک متریکان بر N باشد، آنگاه $g^*\langle , \rangle$ یک متریکان بر M است، و $(M, g^*\langle , \rangle)$ وقتی و تنها وقتی کامل است که $(M, \langle , \rangle)$ کامل باشد.

۴۷. (الف) اگر $M^n \subset N^{n+k}$ زیرمنیفلدی از N باشد، نشان دهید که کلاف نرمال ν الزاماً یک کلاف k-صفحه‌ای است.
(ب) با استفاده از مفهوم مجموع ویتنی $\oplus$ مطرح شده در مسألهٔ ۳-۵۲ نشان دهید $\nu \oplus TM \simeq (TN)|M$

۴۸. (الف) نشان دهید کلافهای نرمال ν_1 و ν_2 بر $M^n \subset N^{n+k}$ که توسط دو متر ریمانی مختلف القا هم ارز تعریف می‌شوند هم ارزند.
(ب) اگر $\xi = \pi : E \to M$ یک کلاف k-صفحه‌ای هموار روی M^n باشد، نشان دهید کلاف نرمال $M \subset E$ با ξ هم ارز است.

۴۹. (الف) دنباله‌ای دقیق از نگاشتهای کلافی $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3 \longrightarrow 0$ همانند مسألهٔ ۳-۲۸ درنظر بگیرید، که کلافها بر منیفلدی هموار M هستند [یا، کلی‌تر، روی یک فضای پیرافشرده]. نشان دهید $E_2 \simeq E_1 \oplus E_3$.
(ب) اگر $\pi : E \to M$ کلافی هموار باشد، نتیجه بگیرید که $TE \simeq \pi^*(\xi) \oplus \pi^*(TM)$.

۵۰. (الف) گیریم M منیفلدی جهت ناپذیر است. برطبق مسألهٔ ۳-۲۲، $S^1 \subset M$ ای وجود دارد که $(TM)|S^1$ جهت‌پذیر نیست (مسأله در مورد حالتی است که $(TM)|S^1$ بدیهی نیست، اما اگر هر $(TM)|S^1$ ای جهت‌پذیر باشد، باز هم مسأله درست است؛ در واقع، نشان دادن اینکه کلاف روی S^1 وقتی و تنها وقتی بدیهی است که جهت‌پذیر باشد). با استفاده از مسألهٔ ۴۷ نشان دهید که کلاف نرمال ν به $S^1 \subset M$ جهت پذیر نیست.
(ب) با استفاده از مسألهٔ ۳-۲۹ نتیجه بگیرید که همسایگی‌ای از یک $S^1 \subset M$ وجود دارد که جهت پذیر نیست. (پس هر منیفلد جهت‌ناپذیر، یک زیرمنیفلد باز جهت‌ناپذیر بی اندازه کوچک دارد.)

۱۳۸۳.۳.۱۶