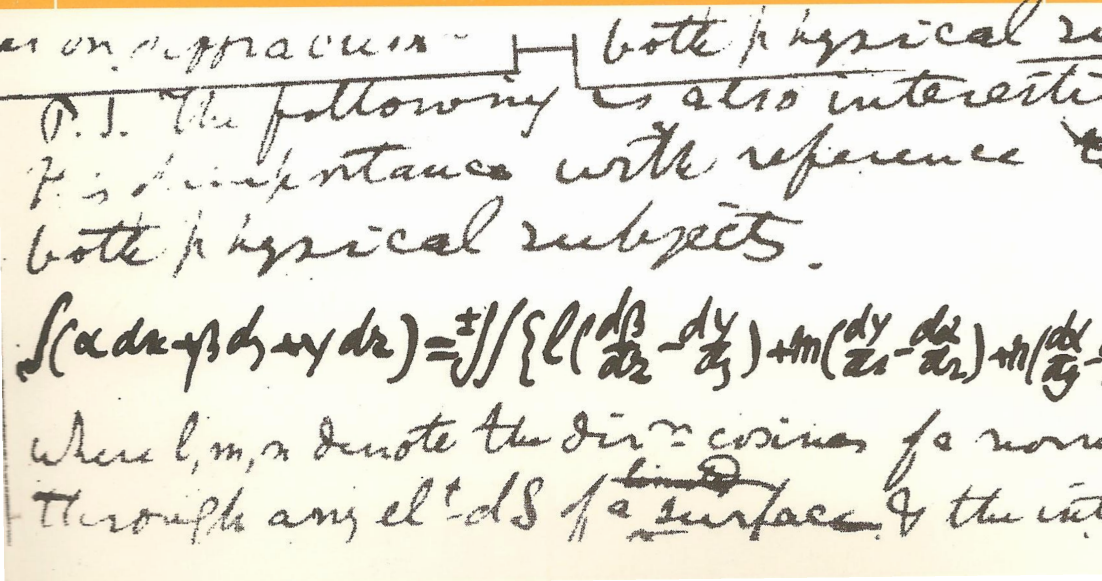
مایکل اسپیواک
ترجمه: دکتر عمید رسولیان

حساب دیفرانسیل و انتگرال روی خمینه‌ها



حساب دیفرانسیل و انتگرال

روی خمینه‌ها

مایکل اسپیواک

ترجمه: دکتر عمید رسولیان

انتشارات روزبهان

اسپیواک، مایکل Spivak, Michael

حساب دیفرانسیل و انتگرال روی خمینه‌ها / مایکل اسپیواک؛ ترجمه عمید رسولیان. — تهران: روزبهان، ۱۳۸۵.

دوازده، ۱۷۲ ص.: مصور، نمودار.

ISBN 964-8175-41-1

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

عنوان اصلی: Calculus on manifolds; a modern approach to classical theorems of advanced calculus.

این کتاب قبلا تحت عنوان "حسابان روی خمینه‌ها" ترجمه و منتشر شده است.

۱. توپولوژی دیفرانسیل. ۲. حسابان. الف. رسولیان، عمید، مترجم. ب. عنوان. ج. عنوان: حسابان روی خمینه‌ها.

۵ح ۵الف / QA۶۱۲ ۵۱۴/۷۲

۱۳۸۵

کتابخانهٔ ملی ایران ۸۵ـ۱۰۴۹۸م

شابک: ۱-۴۱-۸۱۷۵-۹۶۴ ISBN: 964-8175-41-1

حساب دیفرانسیل و انتگرال روی خمینه‌ها

مایکل اسپیواک

ترجمه: دکتر عمید رسولیان

چاپ اول: تابستان ۱۳۸۵

شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه

طراحی و تنظیم جلد: آزاده عبیدرحمانی

حروفچینی: مؤسسه ساهر

آماده سازی چاپ: شرکت قلم

چاپ: چاپخانهٔ خاشع

www.roozbahan.com
info@roozbahan.com

بها: ۲۴۰۰۰ ریال

تهران، خیابان انقلاب، روبروی دانشگاه تهران، شماره ۱۳۴۲، کد پستی ۱۳۱۴۷۵۴۷۱۱

تلفن ۶۶۴۰۸۶۶۷ ـ نمابر: ۶۶۴۹۲۲۵۳

پیشگفتار مترجم

برنامه درسی آنالیز ریاضی ۳ که هم اکنون در دانشگاههای کشورمان، در سال سوم و چهارم رشتهٔ ریاضی تدریس می‌شود، عملاً تعمیم مفاهیم مشتق و انتگرال توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$، به توابع از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ می‌باشد. این مفاهیم جدا از تعمیم مورد نظر، از غنای قابل توجهی برخوردارند. به این معنی که حتی دانشجویان کارشناسی ارشد در دروس آنالیز تابعی و هندسه دیفرانسیل، باز به همین مطالب برخورد می‌کنند و لذا وجود یک کتاب درسی خوب که صرفاً اختصاص به این درس داشته و نیازی به کتابهای جانبی دیگر نداشته باشد کاملاً احساس می‌شود.

نام دکتر اسپیواک در جامعه ریاضی بر کسی پوشیده نیست. روش خاص ایشان در بیان و انتقال مفاهیم پیچیده، بدون کاستن از اهمیت مطلب، هنری است که تنها افراد خاصی آراسته بدان هستند. همانطورکه در مقدمه نویسنده خواهیم دید، دکتر اسپیواک تمام مساعی خود را به کار برده تا بتواند سه قضیه اصلی، قضیه استوکس، قضیه دیورژانس و قضیه گرین را حالتهای خاصی از فرم کلی قضیه استوکس نشان دهد و در این راستا از همان فصل اول سعی کرده بدون اطاله کلام تمام پیشنیازهای لازم را برای این فرم کلی بیان کند که از آن جمله می‌توان به بحث مشتق n-متغیره و قضایای اصلی آن اشاره کرد. با شگرد خاصی فرمها، خمینه‌ها و قضیه افراز واحد را بیان کرده و سپس قضیه اصلی را به صورتی ساده نتیجه گرفته است. نویسنده خود در مقدمه در این باره مفصلاً توضیح داده و لذا به نظر می‌رسد که ادامه صحبت در این مورد لزومی نداشته باشد.

این کتاب نه تنها برای دانشجویان کارشناسی، بلکه حتی برای دانشجویان مهندسی، دانشجویان کارشناسی ارشد و کلیه افرادی که این مباحث را در یک سطح پیشرفته فرانگرفته‌اند، مفید می‌باشد.

امید است که ترجمه این کتاب خوب، گامی هرچند ناکافی در جهت رفع نیازهای دانش‌پژوهان

باشد. مسلماً در این ترجمه، اشتباهاتی از دید اهل فن رخ داده است که اینجانب مرهون تمامی دوستانی که این اشتباهات را به بنده اطلاع دهند خواهم بود.

جا دارد که از انتشارات روزبهان و مسئولین محترم آن جناب آقای هاشمی و جناب آقای کنی که امکانات چاپ این کتاب را به بهترین وجه فراهم نمودند، قدردانی نمایم. همچنین از سرکار خانم کاویانی که تایپ مطالب و فرمولهای دشوار ریاضی را عهده‌دار بوده‌اند سپاسگذاری می‌کنم.

عمید رسولیان

گروه ریاضی، دانشگاه تهران

rasulian @ khayam.ut.ac.ir

سخن ویراستار*

در طول نیم‌قرن گذشته، ریاضیات با سرعت فزاینده‌ای در همه جهات در حال گسترش بوده است. شاخه‌های جدیدی به وجود آمده، درزمینه‌های دیگر به سرعت نفوذ یافته، و در نتیجه آگاهی ما از بخشهای کلاسیک (سنتی) عمیق‌تر شده است. در عین حال، یکی از گرایشهای جدید در ریاضیات مدرن عبارت است از رابطه‌های در حال رشد میان شاخه‌های مختلف آن. لذا دانش‌پژوهان امروزی با حجم گسترده‌ای از مطالب روبرو می‌باشند. علاوه بر قسمتهای کلاسیک ریاضیات که به صورت کلاسیک نیز ارائه می‌شوند (که تعداد آنها کم نیست)، روشهای جدید و روشنگرانه‌ای برای بررسی این مطالب کلاسیک وجود دارد و همچنین برای قسمتهای جدید گسترده‌تری که پتانسیل فوق‌العاده‌ای برای رشد دارد. بسیاری از این مطالب جدید عملاً در مجلات علمی و تحقیقی گوناگون پخش شده است و معمولاً تنها در ذهن و یا نوشته‌های چاپ نشده ریاضیدانان به صورت منسجم نمود پیدا می‌کند، و بدیهی است که دانشجویان احتیاج مبرمی به یادگیری بسیاری از این مطالب دارند.

این سری ازکتابهای موضوعی، تلاشی در جهت رفع بعضی از این مشکلات آموزشی می‌باشد. ریاضیدانان محقق و فعال نگارش این کتابها را بر عهده دارند. این دانشمندان می‌توانند افقهای جدید را دیده و از آنها برای تبیین مطالب مورد نیاز استفاده کنند. آنها می‌دانند که چه مفاهیمی باید مورد تأکید قرارگرفته و چه روشهایی بایستی بیش از بقیه مورد استفاده قرارگیرد. امیدواریم که این کتابها در عین حال که مقدمه‌ای برای جواب سوالات و تحقیقات امروزی دانشجویان دوره کارشناسی در ریاضیات فراهم می‌کند، به شکلی غیر رسمی، سلایق شخصی پیش‌کسوتان ریاضیات مدرن را نیز برآورده سازد.

هندسه دیفرانسیل، شاخه‌ای است که پیشرفتهای اخیر سبب تغییرات عمده‌ای در آن شده

*ـ منظور از ویراستار (ترجمهٔ editor)، فرد (یا افرادی) است که بر چاپ این سری از کتابها نظارت کلی دارند و معمولاً نگارش آنها را به دیگر افراد برجسته توصیه می‌نمایند.

است. آن قسمت از هندسه دیفرانسیل که حول قضیه استوکس دور می‌زند (گاهی اوقات به آن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل چند متغیره گفته می‌شود)، به طور معمول در درس حساب دیفرانسیل پیشرفته تدریس می‌گردد (سال دوم یا سوم) که البته در مهندسی و فیزیک، همانند برخی از شاخه‌های مهم ریاضی، ضروری و اساسی می‌باشد. در تدریس فعلی این مطالب، تأثیر کمی از این تعمیمهای جدید مشاهده می‌گردد. لذا توصیه می‌شود که ریاضیدانان مجدداً این مطالب را در یک سطح عالی فراگیرند. کتاب دکتر اسپیواک کمکی است به آنان که می‌خواهند قضیه استوکس را آنطور که ریاضیدانان امروزی آن را می‌بینند، درک کنند. دانشجویی که درس حساب دیفرانسیل و جبر خطی را نسبتاً با موفقیت گذرانده است کتاب حاضر را کاملاً قابل استفاده خواهد یافت.

پرینستون، نیوجرسی
والتهام، ماساچوست

Robert Gunning
Hugo Rossi

مقدمه

این کتاب آن قسمتهایی از «حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته» را مورد بحث قرار می‌دهد که ظرافت مفاهیم و روشهای آن، ارائه مطالب در سطحی ابتدایی را دشوار می‌سازد. روش به کار رفته در اینجا، صورتهای ابتدایی ابزار مدرن ریاضیات پیچیده می‌باشد. پیشنیاز رسمی برای این مطالب شامل یک نیمسال جبر خطی، آشنایی سطحی با نظریه مجموعه‌ها، و درسی یکساله در حساب دیفرانسیل و انتگرال (که حداقل کوچکترین کران بالا (sup) و بزرگترین کران پایین (inf) یک زیر مجموعه از اعداد حقیقی در آن گفته شده باشد) در سطحی قابل قبول می‌باشد. علاوه بر این، ارتباط با ریاضیات انتزاعی (احتمالاً به صورتی ناپیدا) ضروری می‌نمایاند.

نیمه اول کتاب، بخشی از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته را پوشش می‌دهد که تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در ابعاد بالاتر به حساب می‌آید. در فصل اول مقدمات، و در فصل دوم و سوم، به ترتیب، مشتق‌گیری و انتگرالگیری مورد بحث قرار می‌گیرد.

بقیه کتاب به مطالعه منحنی‌ها، رویه‌ها، و تعمیمهای آنها در ابعاد بالاتر می‌پردازد. در اینجا روشهای مدرن و کلاسیک، مسیرهای نسبتاً متفاوتی را دنبال می‌کنند؛ البته مسلماً نقاط اشتراک زیادی وجود دارد بخصوص در قسمت آخر تقابل چشمگیری میان آنها رخ می‌دهد. معادله بسیار کلاسیکی که روی جلد کتاب آمده، به صورت آخرین قضیه کتاب نیز ارائه شده است. این قضیه (قضیه استوکس) تاریخ جالبی دارد و دگردیسی قابل توجهی را شاهد بوده است.

اولین صورت این قضیه در پانوشت نامه‌ای که از طرف سر ویلیام تامسون (لرد کلوین) به استوکس در تاریخ دوم جولای ۱۸۵۰ نوشته شده بود، ظاهر گردید. سپس به عنوان سوال هشتم امتحان جایزه اسمیت در سال ۱۸۵۴ جنبه عمومی یافت. این امتحان رقابتی (مسابقه) که هر ساله بهترین دانشجویان ریاضی دانشگاه کمبریج در آن شرکت داشتند، از سال ۱۸۴۹ تا سال ۱۸۸۲

توسط پرفسور استوکس برگزار می‌شد. تا قبل از مرگش، به عنوان قضیه استوکس در سراسر جهان شناخته شده بود. حداقل سه اثبات توسط همعصرانش ارائه گردید: یکی توسط تامسون چاپ شد، دیگری در کتاب تامسون و تیت تحت عنوان «رسالهٔ فلسفه طبیعی» ظاهر گردید، و ماکسول نیز در کتاب «مغناطیس و الکتریسیته» اثبات دیگری را ارائه نمود. از آن زمان نام استوکس در مورد نتایج بسیار کلیتری به کار برده شده است که چنان جایگاهی در تعمیم قسمتهایی از ریاضیات دارند که قضیه استوکس فقط می‌تواند به عنوان مطلبی حاشیه‌ای از این تعمیمهای ارزشمند در نظر گرفته شود.

در این کتاب سه شکل از قضیه استوکس وجود دارد. حالتی که برای استوکس شناخته شده بود در کنار همراهان جدانشدنی‌اش، قضایای گرین و دیورژانس، در بخش آخر آمده است. این سه قضیه، به راحتی از فرم کلی قضیه استوکس که از قبل در فصل ۵ ظاهر می‌گردد، نتیجه می‌شوند. آنچه که قضایای کلاسیک برای منحنی‌ها و رویه‌ها بیان می‌دارند، این قضیه برای مشابهات آنها در ابعاد بالاتر (خمینه‌ها) که در بخش اول فصل ۵ به صورت کامل ارائه شده است، بیان می‌دارد. بررسی خمینه‌ها، که می‌تواند صرفاً به خاطر اهمیت آنها در ریاضیات مدرن گفته شود، در اصل تلاشی بیش از مطالعهٔ دقیق منحنی‌ها و رویه‌ها نیست.

احتمالاً خواننده نگران آن است که فرم کلی قضیه استوکس حداقل به اندازه قضایای کلاسیکی که خود از آنها نتیجه شده است، مشکل می‌باشد. برعکس، این نتیجه‌ای خیلی ساده از حالت دیگر قضیه استوکس می‌باشد؛ حالتی بسیار انتزاعی که آخرین و اصلی‌ترین نتیجه فصل ۴ است. باز کاملاً معقول است که تصور کنیم مشکلاتی که تا کنون از آنها احتراز می‌کردیم باید در اینجا نهفته باشد. اما اثبات این قضیه، از نظر یک ریاضیدان، تنها یک بدیهه مطلق ـ محاسبه مستقیم است. از طرف دیگر، گزاره این بدیهه، بدون استفاده از تعداد بیشماری از تعاریف مشکل فصل ۴ قابل فهم نیست. اینکه چرا قضایا باید صورتی ساده داشته باشند و تعاریف صورتی پیچیده، دلایل جالبی دارد. همانطور که تکامل قضیه استوکس آشکار ساخت، یک اصل مجرد ساده می‌تواند خود را در نقاب نتایج پیچیده‌ای پنهان سازد؛ اثبات بسیاری از قضایا در واقع برداشتن این پوششها است. تعاریف، مقصودی دو سویه را با خود به همراه دارند: جایگزینی دقیق برای نمادهای مبهم، و ابزاری لازم برای اثباتهای هوشمندانه. دو بخش اول فصل ۴ «عباراتی به شکل» $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ یا $P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx$ که به طور کلاسیک تشریح شده‌اند را به طور دقیق تعریف کرده و قواعدی برای ساماندهی آنها ثابت می‌کند. زنجیرها، که در بخش سوم تعریف شده، و افرازهای واحد (که قبلاً در فصل ۳ معرفی شده‌اند)، اثباتها را از تقسیم‌بندی خمینه‌ها به قطعات کوچکتر بی‌نیاز می‌کنند؛ آنها پرسشهای مربوط به خمینه‌ها را، جایی که هر چیز مشکل و پیچیده به

نظرمی‌رسد، به پرسشهایی درباره فضاهای اقلیدسی، که همه چیز آسان می‌نماید، تبدیل می‌کنند.

تمرکز یک موضوع حول تعاریف بی‌شک به صرفه است، اما مسلماً مشکلاتی را برای دانشجو به همراه خواهد داشت. بنابراین امیدوارم که خواننده مشتاق با این اطمینان که نتایج تلاش صورت گرفته بعداً مدلل خواهد شد، تمام فصل ۴ را فرا گیرد: قضایای کلاسیک آخرین بخش تنها چند کاربرد اندک فصل ۴، و نه بهیچوجه مهمترین آنها، می‌باشد؛ بسیاری دیگر در مسایل ظاهر شده‌اند، و تعمیمهای بیشتر از بررسی کتابنامه حاصل خواهد گردید.

مسئله‌ها و کتابنامه هر دو شایسته ذکر چند نکته می‌باشند. مسئله‌ها در پایان هر بخش آمده‌اند و (همانند قضایا) با شماره فصل شماره‌گذاری شده‌اند. آن مسئله‌هایی که نتایج آنها در متن مورد استفاده قرارگرفته با * مشخص شده‌اند، شاید این کار ضروری نباشد ـ مسئله‌ها مهمترین قسمت این کتاب می‌باشند، و خواننده می‌بایستی حداقل تلاش را روی تمام آنها به عمل آورد. لازم بود که کتابنامه را یا خیلی ناقص و یا خیلی جامع بنویسم زیرا نصف شاخه‌های اصلی ریاضیات را می‌توان ادامهٔ منطقی مطالب این کتاب در نظر گرفت. من سعی کردم آن را ناقص ولی اغواکننده بیاورم.

در طول نگارش این کتاب انتقادها و پیشنهادهای زیادی ارائه شده است. بخصوص از ریچارد پاله، هوگو راسی، رابرت سیلی، و چارلز استنارد بخاطر توصیه‌های مفید و متعددشان سپاسگذارم.

از این چاپ به عنوان فرصتی برای تصحیح بسیاری از اشتباهات کوچک و تایپی که توسط خواننده‌های مشتاق به من یادآوری شده است، استفاده کرده‌ام. به علاوه، مطالبی که به دنبال قضیه ۳-۱۱ آمده‌اند کاملاً بازبینی و اصلاح شده است. تغییرات مهم دیگر که امکان آوردن آنها بدون دستکاری زیاد در متن میسر نمی‌شد، در پیوست آخر کتاب آمده است.

Michael Spivak

والتهام، ماساچوست

فهرست مطالب

۱

توابع روی فضای اقلیدسی

نرم و ضرب داخلی

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ مجموعهٔ تمام n ـ گانه‌های مرتب $(x^1, \ldots, x^n)$ از اعداد حقیقی x^i است[1]. یک عضو $\mathbb{R}^n$ را معمولاً یک نقطهٔ $\mathbb{R}^n$، و $\mathbb{R}^1$، $\mathbb{R}^2$، و $\mathbb{R}^3$ را به ترتیب خط، صفحه، و فضا می‌نامیم[2].

یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ را غالباً یک بردار در $\mathbb{R}^n$ نیز می‌گوییم زیرا $\mathbb{R}^n$، با اعمال $x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$ و $ax = (ax^1, \ldots, ax^n)$ یک فضای برداری (روی اعداد حقیقی، و با بعد n) است. در این فضای برداری، طول یک بردار x را داریم که غالباً **نرم** بردار x گفته می‌شود و با $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$ تعریف می‌شود. اگر $n = 1$، آنگاه $|x|$ همان قدرمطلق معمولی x است. رابطهٔ بین نرم و ساختار برداری $\mathbb{R}^n$ بسیار مهم است.

۱-۱ قضیه. اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $a \in \mathbb{R}$، آنگاه

(۱) $|x| \geq 0$، و $|x| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۱ـ یک ۱ـگانه مرتب، دقیقاً یک عدد حقیقی است و $R^1 = R$، مجموعه اعداد حقیقی

۲ـ اگر x عضوی از $\mathbb{R}^n$ را نشان دهد، آنگاه x یک nـگانهٔ مرتب از اعداد حقیقی است که iـاُمی با x^i نشان داده می‌شود؛ پس می‌توانیم بنویسیم

$$x = (x^1, \ldots, x^n)$$

(۲) $\left|\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right| \leq |x|\,|y|$؛ تساوی برقرار است اگر و فقط اگر x و y بستگی خطی داشته باشند.

(۳) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(۴) $|ax| = |a|\,|x|$.

برهان.

(۱) به خواننده واگذار می‌گردد.

(۲) اگر x و y بستگی خطی داشته باشند، به وضوح تساوی برقرار می‌شود. اگر بستگی خطی نداشته باشند، آنگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda y - x \neq 0$؛ بنابراین

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda y - x|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda y^i - x^i)^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x^i y^i + \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2. \end{aligned}$$

اما سمت راست، یک معادله درجه دوم بر حسب λ است که جواب حقیقی ندارد و بنابراین مبین آن بایستی منفی باشد. پس

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 . \sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 < 0$$

(۳)

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x^i + y^i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x^i y^i \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x|.|y| \qquad \text{بنابر (۲)} \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

(۴)

$$|ax| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(ax^i)^2} = \sqrt{a^2 \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2} = |a|.|x|.$$

■

مقدار $\sum\limits_{i=۱}^{n} x^i y^i$ که در (۲) ظاهر گردید، **ضرب داخلی** x و y گفته شده، و با $< x, y >$ نشان داده می‌شود. ویژگیهای مهم ضرب داخلی در زیر آمده‌اند.

۱-۲ قضیه. اگر x، $x_۱$، $x_۲$ و y، $y_۱$، $y_۲$ بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $a \in \mathbb{R}$، آنگاه

(تقارن) $$(۱)\quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

(دو خطی) $$(۲)\quad \langle ax, y\rangle = \langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle$$

$$\langle x_۱ + x_۲, y\rangle = \langle x_۱, y\rangle + \langle x_۲, y\rangle$$

$$\langle x, y_۱ + y_۲\rangle = \langle x, y_۱\rangle + \langle x, y_۲\rangle$$

(۳) $\langle x, x\rangle \geq ۰$ ، $\langle x, x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

$$(۴)\quad |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

(تساوی قطبی‌سازی) $$(۵)\quad \langle x, y\rangle = \frac{|x+y|^۲ - |x-y|^۲}{۴}$$

برهان.

(۱) $$\langle x, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n} x^i y^i = \sum_{i=۱}^{n} y^i x^i = \langle y, x\rangle$$

(۲) بنابر (۱) کافی است ثابت شود

$$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_۱ + x_۲, y\rangle = \langle x_۱, y\rangle + \langle x_۲, y\rangle$$

که از تساویهای زیر نتیجه می‌شوند

$$\langle ax, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n}(ax^i)y^i = a\sum_{i=۱}^{n} x^i y^i = a\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_۱ + x_۲, y\rangle = \sum_{i=۱}^{n}(x_۱^i + x_۲^i)y^i = \sum_{i=۱}^{n} x_۱^i y^i + \sum_{i=۱}^{n} x_۲^i y^i$$

$$= \langle x_۱, y\rangle + \langle x_۲, y\rangle.$$

(۳) و (۴) به خواننده واگذار می‌گردند.

$$\frac{|x+y|^{۲}-|x-y|^{۲}}{۴} \quad (۵)$$

$$= \frac{۱}{۴}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle]$$
$$= \frac{۱}{۴}[\langle x,x\rangle + ۲\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - ۲\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)]$$
$$= \langle x,y\rangle$$

■

این بخش را با چند تذکر مهم درباره نمادها به پایان می‌بریم. بردار $(۰,\dots,۰)$ معمولاً با ۰ نشان داده می‌شود. **پایهٔ معمولی** $\mathbb{R}^n$، $e_۱,\dots,e_n$ است که $e_i=(۰,\dots,۱,\dots,۰)$، و ۱ در مکان iـام می‌باشد. اگر $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد ماتریس T نسبت به پایه‌های معمولی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$، ماتریس $m\times n$، $A=(a_{ij})$ است که در آن $T(e_i)=\sum\limits_{i=۱}^{m} a_{ji}e_j$ـ ضرایب $T(e_i)$ در **ستون** i-ام ماتریس ظاهر می‌شوند. اگر $S:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$، دارای ماتریس $p\times m$، B باشد، آنگاه $S\circ T$ ماتریس $p\times n$، BA را دارد [در اینجا $S\circ T(x)=S(T(x))$؛ اکثر کتابهای جبر خطی، $S\circ T$ را با ST نشان می‌دهند]. برای اینکه $T(x)$ را پیدا کنیم، ماتریس $m\times ۱$ زیر را محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{pmatrix} y^{۱} \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{۱۱}, & \dots, & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{۱} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix};$$

پس $T(x)=(y^{۱},\dots,y^m)$. نماد دیگری که می‌تواند بسیاری از فرمولها را ساده کند این است: اگر $x\in\mathbb{R}^n$ و $y\in\mathbb{R}^m$، آنگاه (x,y) یک نقطه $\mathbb{R}^{n+m}$ را نشان می‌دهد

$$(x^{۱},\dots,x^n,y^{۱},\dots,y^m)\in\mathbb{R}^{n+m}$$

مسئله‌ها

۱-۱* ثابت کنید $|x|\le\sum\limits_{i=۱}^{n}|x^i|$.

۱-۲ در قضیه ۱ـ۱(۳) چه وقت تساوی برقرار است؟ راهنمایی. برهان را بار دیگر مرور کنید؛ جواب «وقتی x و y بستگی خطی داشته باشند» نیست.

۱-۳ ثابت کنید $|x-y| \leq |x|+|y|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

۱-۴ ثابت کنید $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

۱-۵ مقدار $|y-x|$، **فاصله** بین x و y گفته می‌شود. «نامساوی مثلث» را ثابت کرده و آن را از نظر هندسی تعبیر کنید.

$$|z-x| \leq |z-y| + |y-x|$$

۱-۶ فرض کنید f و g روی $[a,b]$ انتگرالپذیر باشند.

(الف) ثابت کنید $|\int_a^b f \cdot g| \leq (\int_a^b f^۲)^{\frac{۱}{۲}} \cdot (\int_a^b g^۲)^{\frac{۱}{۲}}$. راهنمایی. حالتهای $\int_a^b (f-\lambda g)^۲ = ۰$ برای بعضی $\lambda \in \mathbb{R}$، و $\int_a^b (f-\lambda g)^۲ > ۰$ برای بقیهٔ $\lambda \in R$ را جداگانه درنظر بگیرید.

(ب) اگر تساوی برقرار باشد، آیا می‌بایستی برای برخی $\lambda \in \mathbb{R}$، $f = \lambda g$؟ اگر f و g پیوسته باشند چطور؟

(پ) نشان دهید که قضیه ۱-۱ (۲) حالت خاصی از (الف) است.

۱-۷ یک تبدیل خطی $T : R^n \to R^n$ **نرم پایا** گفته می‌شود هرگاه $|T(x)| = |x|$، و **ضرب داخلی پایا** گفته می‌شود هرگاه $\langle T_x, T_y \rangle = \langle x, y \rangle$.

(الف) ثابت کنید T نرم پایا است اگر و فقط اگر T ضرب داخلی پایا باشد.

(ب) ثابت کنید در این حالت تبدیل خطی T یک به یک است و $T^{-۱}$ نیز همین ویژگیها را داراست.

۱-۸ اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ ناصفر باشند، **زاویه** بین x و y، که با $\angle(x,y)$ نشان داده می‌شود، با $(\langle x,y \rangle / |x| \cdot |y|)$ تعریف می‌شودکه با توجه به قضیه ۱-۱(۲) معنی دارد. تبدیل خطی T **زاویه پایا** گفته می‌شود، هرگاهِ T یک به یک بوده و برای $x, y \neq ۰$، $\angle(T_x, T_y) = \angle(x, y)$.

(الف) ثابت کنید اگر T نرم پایا باشد، آنگاه زاویه پایا است.

(ب) اگر یک پایه $x_۱, \ldots, x_n$ از $\mathbb{R}^n$، و اعداد $\lambda_۱, \ldots, \lambda_n$ وجود داشته باشند طوری که $Tx_i = \lambda_i x_i$، آنگاه ثابت کنید T زاویه پایا است اگر و فقط اگر $|\lambda_i|$ها مساوی باشند.

(پ) تمام زاویه پایاهای $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را بیابید.

۱-۹ فرض کنید $۰ \leq \theta < \pi$، و $T : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ دارای ماتریس $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ باشد. نشان دهید T زاویه پایا است و برای $x \neq ۰$، $\angle(x, Tx) = \theta$.

۱-۱۰* اگر $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد، نشان دهید عدد M وجود دارد طوری که برای $h \in \mathbb{R}^m$، $|T(h)| \leq M|h|$. راهنمایی. $|T(h)|$ را بر حسب $|h|$ و درایه‌های ماتریس T تخمین بزنید.

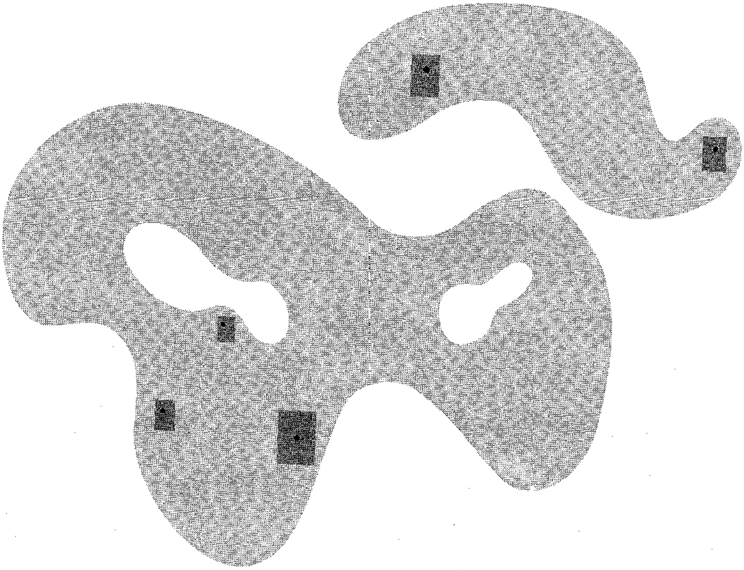
۱-۱۱ اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $z, w \in \mathbb{R}^m$، نشان دهید $\langle (x,z),(y,w) \rangle = \langle x,y \rangle + \langle z,w \rangle$ و $|(x,z)| = \sqrt{|x|^۲ + |z|^۲}$. دقت کنید که (x,z), (y,w) نقاطی از $\mathbb{R}^{n+m}$ را نشان می‌دهند.

۱-۱۲* فرض کنیم $(\mathbb{R}^n)^*$ فضای دوآل فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر $x \in \mathbb{R}^n$، $\varphi_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ را چنین تعریف کنید: $\varphi_x(y) = \langle x, y \rangle$. $T : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ را با $T(x) = \varphi_x$ تعریف کنید. نشان دهید T یک تبدیل خطی یک‌به یک است و نتیجه بگیرید که هر $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ برای یک $x \in \mathbb{R}^n$ یکتا، مساوی φ_x است.

۱-۱۳* اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$، آنگاه x و y **متعامد** گفته می‌شوند هرگاه $\langle x, y \rangle = ۰$. اگر x و y متعامد باشند، ثابت کنید $|x+y|^۲ = |x|^۲ + |y|^۲$.

زیرمجموعه‌های فضای اقلیدسی

فاصله بسته $[a,b]$ یک مشابه طبیعی در $\mathbb{R}^۲$ دارد که مستطیل بسته $[a,b] \times [c,d]$، مجموعه تمام جفتهای مرتب (x,y)، $x \in [a,b]$ و $y \in [c,d]$ می‌باشد. به طور کلی، اگر $A \subset \mathbb{R}^m$ و $B \subset \mathbb{R}^n$، آنگاه بنابر تعریف، $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ مجموعه تمام $(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ است که $x \in A$ و $y \in B$. بخصوص، $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. اگر $A \subset \mathbb{R}^m$، $B \subset \mathbb{R}^n$، و



شکل۱-۱

$C \subset \mathbb{R}^p$، آنگاه $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$، که هر دو با $A \times B \times C$ نشان داده می‌شوند؛ این تعریف به حاصلضرب هر تعداد دلخواهی از مجموعه‌ها تعمیم می‌یابد. مجموعهٔ $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ یک **مستطیل بسته** در $\mathbb{R}^n$ گفته می‌شود، در حالی که $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ یک **مستطیل باز** می‌باشد. در حالت کلی یک مجموعه $U \subset \mathbb{R}^n$ **باز** گفته می‌شود (شکل ۱-۱) هرگاه برای هر $x \in U$ یک مستطیل باز A وجود داشته باشد که $x \in A \subset U$.

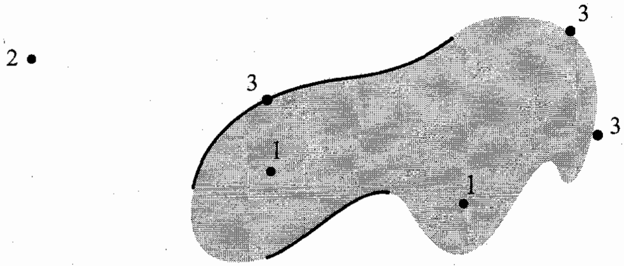
یک زیر مجموعه C از $\mathbb{R}^n$ **بسته** گفته می‌شود هرگاه $\mathbb{R}^n - C$ باز باشد. مثلاً اگر C شامل فقط تعدادی متناهی نقطه باشد، آنگاه C بسته است. خواننده بایستی برهانی برای بسته بودن یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^n$ بیاورد.

اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ و $x \in \mathbb{R}^n$، آنگاه یکی از سه حالت زیر می‌بایستی برقرار باشد (شکل ۱-۲):

۱. یک مستطیل باز B هست که $x \in B \subset A$.

۲. یک مستطیل باز B هست که $x \in B \subset \mathbb{R}^n - A$.

۳. اگر B یک مستطیل باز با $x \in B$ باشد، آنگاه B شامل نقاطی هم از A و هم از $\mathbb{R}^n - A$ هست.



شکل ۱-۲

نقاطی که در (۱) صدق می‌کنند **درون** A، نقاطی که در (۲) صدق می‌کنند **برون** A، و نقاطی که در (۳) صدق می‌کند **مرز** A را تشکیل می‌دهند. مسایل ۱-۱۶ الی ۱-۱۸ نشان می‌دهند که گاهی اوقات این تعاریف معنیهای غیرمنتظره‌ای دارند.

بررسی باز بودن درون یک مجموعه دلخواه A سخت نیست، و همین‌طور برای برون A، که در واقع درون $\mathbb{R}^n - A$ است. بنابراین اجتماع آنها باز است (مسئله ۱-۱۴) و چیزی که باقی می‌ماند، یعنی مرز، باید بسته باشد.

یک خانواده $\mathcal{O}$ از مجموعه‌های باز، یک **پوشش باز** A گفته میشود (یا به اختصار A را می‌پوشاند) هرگاه هر نقطه $x \in A$ در یک مجموعه باز از این خانواده باشد. مثلاً، اگر $\mathcal{O}$ مجموعه تمام فاصله‌های باز $(a, a+۱)$، $a \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\mathcal{O}$ یک پوشش $\mathbb{R}$ است. بدیهی است که هیچ تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز $\mathcal{O}$، $\mathbb{R}$ را نمی‌پوشاند، یا در واقع هیچ زیر مجموعه بی‌کران $\mathbb{R}$ را. موقعیت مشابهی برای مجموعه‌های کراندار می‌تواند برقرار باشد. اگر $\mathcal{O}$ خانواده تمام فاصله‌های باز $(\frac{۱}{n}, ۱-\frac{۱}{n})$ برای تمام اعداد صحیح $n > ۱$ باشد، آنگاه $\mathcal{O}$ یک پوشش باز $(۰, ۱)$ است، اما، اینبار نیز هیچ خانواده متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{O}$، $(۰, ۱)$ را نمی‌پوشاند. اگر چه این پدیده نمی‌تواند چیز اعجاب‌برانگیزی باشد، اما مجموعه‌هایی که چنین حالتی برای آنها رخ نمی‌دهد آنقدر مهم هستند که توجه ویژه‌ای را می‌طلبند: مجموعه A **فشرده** گفته می‌شود هرگاه هر پوشش باز $\mathcal{O}$، شامل یک زیر خانواده متناهی از مجموعه‌های باز باشد که A را می‌پوشاند.

یک مجموعه که فقط از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده، به وضوح فشرده است و همچنین مجموعه بینهایت عضوی A که شامل ۰ و اعداد به شکل $\frac{۱}{n}$، برای n صحیح، است (دلیل: اگر $\mathcal{O}$ یک پوشش باشد، پس $۰ \in U$ برای یک مجموعه باز U در $\mathcal{O}$؛ پس فقط تعدادی متناهی

نقطه در A است که در U نیستند، که هر کدام حداکثر در یک مجموعه باز دیگری می‌باشند).

شناسایی مجموعه‌های فشرده با استفاده از نتایج زیر خیلی ساده می‌شود، که فقط اولی قضیه‌ای عمیق می‌باشد (منظور آن است که ویژگیهای اعداد حقیقی را به کار می‌گیرد).

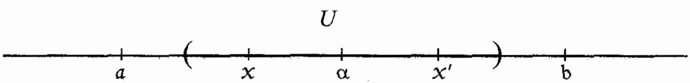
۱-۳ قضیه (هاین - بورل). فاصله بسته $[a,b]$ فشرده است.

برهان. اگر $\mathcal{O}$ یک پوشش باز $[a,b]$ باشد، قرار دهید

$$A = \{x : a \le x \le b \text{ و } [a,x] \text{ توسط تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز } \mathcal{O} \text{ پوشیده می‌شود}\}$$

دقت کنید که $a \in A$ و A از بالا کراندار است (توسط b). می‌خواهیم نشان دهیم $b \in A$. این مطلب را با اثبات دو نکته درباره، کوچکترین کران بالای A = α، به پایان می‌بریم؛ یعنی، (۱) $\alpha \in A$ و (۲) $b = \alpha$.

چون $\mathcal{O}$ یک پوشش است، برای بعضی از Uهای در $\mathcal{O}$، $\alpha \in U$. پس تمام نقاط واقع در بعضی از فاصله‌های سمت چپ α نیز در U هستند (شکل ۱-۳ را ببینید). چون α کوچکترین کران بالای A است، یک x در این فاصله است که $x \in A$. پس $[a,x]$ بوسیله تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز $\mathcal{O}$ پوشیده می‌شود، درحالی‌که $[x,\alpha]$ توسط تک مجموعه U پوشیده می‌شود. بنابراین $[a,\alpha]$ توسط تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز $\mathcal{O}$ پوشیده می‌شود، و در نتیجه $\alpha \in A$. این (۱) را ثابت می‌کند.



شکل ۱-۳

برای اینکه ثابت کنیم (۲) درست است، فرض می‌کنیم $\alpha < b$. آنگاه یک نقطه x' بین α و b هست که $[\alpha, x'] \subset U$. چون $\alpha \in A$، فاصله $[a,\alpha]$ توسط تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز $\mathcal{O}$ پوشیده می‌شود، درحالی که $[\alpha, x']$ توسط U پوشیده می‌شود. از این رو $x' \in A$، که کران بالا بودن α را نقض می‌کند. ■

اگر $B \subset \mathbb{R}^m$ فشرده باشد و $x \in \mathbb{R}^n$، به سادگی می‌توان دید که $\{x\} \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$

فشرده است. اما می‌توان یک گزاره قویتر ثابت کرد.

۱-۴ قضیه. اگر B فشرده، و $\mathcal{O}$ یک پوشش باز $\{x\} \times B$ باشد، آنگاه یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ شامل x هست که $U \times B$ توسط تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{O}$ پوشیده شود.

برهان. چون $\{x\} \times B$ فشرده است، می‌توانیم فرض کنیم $\mathcal{O}$ متناهی است، و بنابراین فقط باید مجموعه باز U را چنان پیدا کنیم که $U \times B$ توسط $\mathcal{O}$ پوشش داده شود.

برای هر $y \in B$ نقطه (x, y) در یک مجموعه باز W در $\mathcal{O}$ است. چون W باز است، برای یک مستطیل باز $U_y \times V_y$ خواهیم داشت $(x, y) \in U_y \times V_y \subset W$. مجموعه‌های V_y، مجموعه فشرده B را می‌پوشانند، پس تعدادی متناهی $V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}$ نیز B را می‌پوشانند. قرار دهید $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_k}$. اگر $(x', y') \in U \times B$، برای بعضی از iها، داریم $y' \in V_{y_i}$، و بنابراین $x' \in U_{y_i}$. از اینرو $(x', y') \in U_{y_i} \times V_{y_i}$، که مشمول برخی از Wهای در $\mathcal{O}$ است. ■

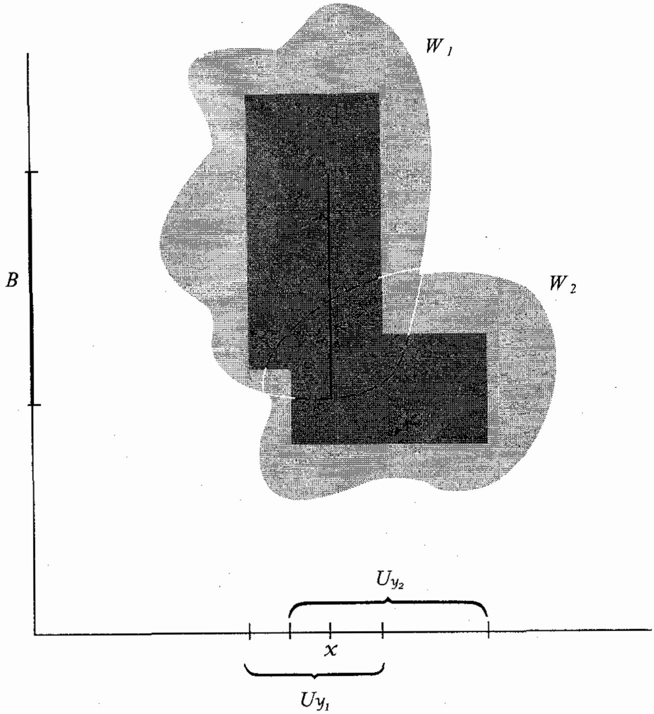
۱-۵ نتیجه. اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ و $B \subset \mathbb{R}^m$ فشرده باشند، آنگاه $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ فشرده است.

برهان. اگر $\mathcal{O}$ یک پوشش باز $A \times B$ باشد، آنگاه $\mathcal{O}$، $\{x\} \times B$ را برای هر $x \in A$ می‌پوشاند. بنابر قضیه ۱-۴ یک مجموعه باز U_x شامل x هست که $U_x \times B$ توسط تعدادی متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{O}$ پوشیده می‌شود. چون A فشرده است، تعدادی متناهی $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ از U_xها، A را می‌پوشانند. چون تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{O}$، هر کدام از $U_{x_i} \times B$ها را می‌پوشانند، پس تعدادی متناهی از آنها $A \times B$ را می‌پوشاند. ■

۱-۶ نتیجه. هرگاه هر یک از A_iها فشرده باشد آنگاه $A_1 \times \ldots \times A_k$ فشرده است. بخصوص، یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^k$ فشرده است.

۱-۷ نتیجه. یک زیرمجموعه بسته کراندار $\mathbb{R}^n$ فشرده است (عکس این مطلب نیز درست است (مسئله ۱-۲۰)).

برهان. اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ بسته و کراندار باشد، آنگاه برای یک مستطیل بسته B، $A \subset B$. اگر $\mathcal{O}$



شکل ۱-۴

پوشش باز A باشد، آنگاه $\mathcal{O}$ همراه با $\mathbb{R}^n - A$ یک پوشش باز B است. پس تعدادی متناهی $U_1, \ldots, U_n$ از مجموعه‌های $\mathcal{O}$، همراه با $\mathbb{R}^n - A$، B را می‌پوشانند. پس $U_1, \ldots, U_n$، A را می‌پوشانند. ■

مسئله‌ها

۱-۱۴* ثابت کنید اجتماع هر تعدادی (حتی نامتناهی) از مجموعه‌های باز، باز است. ثابت کنید اشتراک دو (و در نتیجه هر تعداد متناهی) از مجموعه‌های باز، باز است. یک مثال نقض برای تعدادی نامتناهی از مجموعه‌های باز بیابید.

۱-۱۵ ثابت کنید $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ باز است (مسئله ۱-۲۷ را نیز ببینید).

۱-۱۶ درون، برون، و مرز مجموعه‌های

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq ۱\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = ۱\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \text{هر } x^i \text{ گویا است}\}$$

را بیابید.

۱-۱۷ یک مجموعه $A \subset [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ بیابید که شامل حداکثر یک نقطه در هر خط عمودی یا افقی باشد اما $A\text{مرز} = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ ، باشد. راهنمایی. فقط کافی است که A شامل نقاطی در هر ربع از $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ باشد، سپس هر یک شانزدهم و الی‌آخر.

۱-۱۸ فرض کنید $A \subset [۰, ۱]$ اجتماع فاصله‌های باز (a_i, b_i) باشد طوری که هر عدد گویا در $(۰, ۱)$ داخل بعضی از (a_i, b_i)ها باشد، نشان دهید $A\text{مرز} = [۰, ۱] - A$.

۱-۱۹* اگر A مجموعهٔ بسته‌ای باشد که هر عدد گویای $r \in [۰, ۱]$ را دربر دارد، آنگاه $[۰, ۱] \subset A$.

۱-۲۰ عکس نتیجه ۱-۷ را ثابت کنید: یک زیرمجموعه فشرده $\mathbb{R}^n$، بسته و کراندار است (مسئله ۱-۲۸ را نیز ببینید).

۱-۲۱* (الف) اگر A بسته و $x \notin A$، ثابت کنید یک عدد $d > ۰$ هست که برای هر $y \in A$، $|y - x| \geq d$.

(ب) اگر A بسته، B فشرده، و $A \cap B = \varnothing$ باشد، ثابت کنید $d > ۰$ هست که برای هر $y \in A$ و هر $x \in B$، $|y - x| \geq d$. راهنمایی. برای هر $b \in B$، یک مجموعه باز U شامل b بیابید که این رابطه برای $x \in U \cap B$ برقرار باشد.

(پ) یک مثال نقض برای (ب) در $\mathbb{R}^۲$ بیاورید که A و B بسته باشند اما هیچکدام فشرده نباشند.

۱-۲۲* اگر U باز، و $C \subset U$ فشرده باشد، نشان دهید مجموعه فشرده D هست طوری که $C \subset (D \text{ درون})$ و $D \subset U$.

تابع و پیوستگی

یک **تابع** از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ (گاهی یک تابع برداری nـ متغیره گفته می‌شود) قاعده‌ای است که به هر نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ یک نقطهٔ $\mathbb{R}^m$ را نظیر می‌کند؛ نقطه‌ای که تابع f به نقطهٔ x نظیر می‌کند با $f(x)$ نشان داده می‌شود. از نماد $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (بخوانید «f، $\mathbb{R}^n$ را به $\mathbb{R}^m$ می‌برد» یا «f، $\mathbb{R}^n$ را بتوی $\mathbb{R}^m$ می‌نگارد») برای مشخص کردن $f(x) \in \mathbb{R}^m$ ($x \in \mathbb{R}^n$) استفاده می‌شود. نماد $f : A \to \mathbb{R}^m$ نشان می‌دهد که $f(x)$ فقط برای x در مجموعهٔ A تعریف شده است، که **دامنهٔ** f گفته می‌شود. اگر $B \subset A$، $f(B)$ را مجموعه $f(x)$ها برای $x \in B$ تعریف می‌کنیم، و اگر $C \subset \mathbb{R}^m$، تعریف می‌کنیم $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$. نماد $f : A \to B$ بیانگر آن است که $f(A) \subset B$.

یک نمایش مناسب تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را می‌توان با رسم نمودار آن به دست آورد یعنی مجموعه تمام سه‌گانه‌های به شکل $(x, y, f(x,y))$، که در واقع بخشی از فضای سه‌بعدی است (به عنوان مثال، شکل ۲-۱ و شکل ۲-۲ فصل ۲ را ببینید).

اگر $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، تابعهای $f + g$، $f - g$، $f \cdot g$، و f/g دقیقاً مثل حالت یک متغیره تعریف می‌شوند. اگر $f : A \to \mathbb{R}^m$ و $g : B \to \mathbb{R}^p$، که $B \subset \mathbb{R}^m$، آنگاه **ترکیب** $g \circ f$ با $g \circ f(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود؛ دامنهٔ $g \circ f$، $A \cap f^{-1}(B)$ است. اگر $f : A \to \mathbb{R}^m$، ۱-۱ باشد، یعنی وقتی $x \neq y$، $f(x) \neq f(y)$ باشد، $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ $f^{-1}(z)$ برای $x \in A$ی منحصر بفردی که $f(x) = z$ است، تعریف می‌کنیم.

تابع $f : A \to \mathbb{R}^m$، $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$، m **تابع مؤلفه‌ای** $f^1, \dots, f^m : A \to \mathbb{R}$ را مشخص می‌نماید. بر عکس، اگر m تابع $g_1, \dots, g_m : A \to \mathbb{R}$ داده شده باشند، تابع یکتای $f : A \to \mathbb{R}^m$ هست که $f^i = g_i$؛ به عبارت دیگر $f(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$. این تابع f با $(g_1, \dots, g_m)$ نشان داده می‌شود، بنابراین همیشه داریم $f = (f^1, \dots, f^m)$. اگر $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع همانی باشد، $\pi(x) = x$، آنگاه $\pi^i(x) = x^i$؛ تابع π^i **تابع تصویر** iـام گفته می‌شود.

نماد $\lim_{x \to a} f(x) = b$ در حالت یک متغیره به معنای آن است که برای مقادیر x نزدیک به a، و مخالف a، $f(x)$ را هر قدر که می‌خواهیم به b نزدیک می‌کنیم. با نمادهای ریاضی، این به معنای آن است که برای هر عدد $\varepsilon > 0$، یک عدد $\delta > 0$ هست که برای تمام xهای

دامنه f که $0 < |x-a| < \delta$ داریم $|f(x)-b| < \varepsilon$. تابع $f : A \to \mathbb{R}^m$ در $a \in A$ **پیوسته** گفته می‌شود هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، f (روی A) پیوسته گفته می‌شود هرگاه در هر $a \in A$ پیوسته باشد. یکی از مزایای مفهوم پیوستگی آن است که می‌تواند بدون استفاده از حد تعریف شود. این از قضیه بعدی نتیجه می‌شود که $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ پیوسته است اگر و فقط اگر $f^{-1}(U)$، برای هر باز $U \subset \mathbb{R}^m$، باز باشد؛ اگر دامنهٔ f تمام $\mathbb{R}^n$ نباشد، نماد مربوطه کمی تغییر می‌یابد.

۱-۸ قضیه. اگر $A \subset \mathbb{R}^n$، تابع $f : A \to \mathbb{R}^m$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^m$ یک مجموعه باز $V \subset \mathbb{R}^n$ باشد که $f^{-1}(U) = V \cap A$.

برهان. فرض کنید f پیوسته است. اگر $a \in f^{-1}(U)$، آنگاه $f(a) \in U$. چون U باز است، یک مستطیل باز B هست که $f(a) \in B \subset U$. چون f در a پیوسته است، می‌توانیم مطمئن شویم که $f(x) \in B$، البته به شرطی که x در مستطیل به قدرکافی کوچک C (شامل a) باشد. اینکار را برای هر $a \in f^{-1}(U)$ انجام می‌دهیم و V را اجتماع چنین Cهایی می‌گیریم. آشکارا $f^{-1}(U) = V \cap A$. عکس مطلب به روش مشابه است و به خواننده واگذار می‌گردد.

■

نتیجه زیر بسیار مهم است.

۱-۹ قضیه. اگر $f : A \to \mathbb{R}^m$ پیوسته باشد، که در آن $A \subset \mathbb{R}^n$، و A فشرده، آنگاه $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ فشرده است.

برهان. گیریم $\mathcal{O}$ یک پوشش باز $f(A)$ باشد. برای هر مجموعه باز U در $\mathcal{O}$ یک مجموعه باز V_U هست که $f^{-1}(U) = V_U \cap A$. خانواده تمام V_Uها یک پوشش باز A است. چون A فشرده است، تعدادی متناهی $V_{U_1}, \ldots, v_{U_n}$، A را می‌پوشاند. پس $U_1, \ldots, U_n$، $f(A)$ را می‌پوشاند. ■

اگر $f : A \to \mathbb{R}$ کراندار باشد، تغییرات f در $a \in A$ که پیوسته نیست، می‌تواند دقیقاً

اندازه‌گیری شود. برای $\delta > \circ$ قرار دهید

$$M(a,f,\delta) = \sup\{f(x) : x \in A\ ,\ |x-a| < \delta\}$$

$$m(a,f,\delta) = \inf\{f(x) : x \in A\ ,\ |x-a| < \delta\}$$

نوسان $o(f,a)$ تابع f در نقطه a بنابر تعریف $\lim_{\delta\to\circ}[M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)]$ است. این حد همیشه وجود دارد، چون $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)$ با کاهش یافتن δ، کاهش می‌یابد. دو مطلب مهم درباره $o(f,a)$ وجود دارد.

۱-۱۰ قضیه. تابع کراندار f در a پیوسته است اگر و فقط اگر $o(f,a) = \circ$.

برهان. گیریم f در a پیوسته باشد. برای هر $\varepsilon > \circ$، می‌توانیم $\delta > \circ$ را چنان انتخاب کنیم که برای تمام $x \in A$ با شرط $|x-a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$؛ پس $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta) \leq ۲\varepsilon$. چون این مطلب برای هر ε درست است، داریم $\delta(f,a) = \circ$. عکس قضیه به روش مشابه ثابت می‌شود و به خواننده واگذار می‌گردد. ■

۱-۱۱ قضیه. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ بسته باشد. اگر $f : A \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد، و $\varepsilon > \circ$، آنگاه $\{x \in A : o(f,x) \geq \varepsilon\}$ بسته است.

برهان. گیریم $B = \{x \in A : o(f,x) \geq \varepsilon\}$. می‌خواهیم نشان دهیم $\mathbb{R}^n - B$ باز است. اگر $x \in \mathbb{R}^n - B$، آنگاه یا $x \notin A$، یا $x \in A$ و $o(f,x) < \varepsilon$. در حالت اول، چون A بسته است، یک مستطیل باز C شامل x هست که $C \subset \mathbb{R}^n - A \subset \mathbb{R}^n - B$. در حالت دوم یک $\delta > \circ$ هست که $M(x,f,\delta) - m(x,f,\delta) < \varepsilon$. C را مستطیل بازی شامل x بگیرید که برای تمام $y \in C$، $|x-y| < d$. آنگاه اگر $g \in C$، یک $\delta_۱$ هست که برای تمام zهایی که $|z-y| < \delta_۱$، آنگاه $|x-z| < \delta$. پس $M(y,f,\delta_۱) - m(y,f,\delta_۱) < \varepsilon$، و در نتیجه $o(y,f) < \varepsilon$. بنابراین $C \subset \mathbb{R}^n - B$. ■

مسئله‌ها

۱-۲۳ اگر $f : A \to \mathbb{R}^m$ و $a \in A$، نشان دهید $\lim_{x\to a} f(x) = b$ اگر و فقط اگر برای هر $i = ۱, \ldots, m$، $\lim_{x\to a} f^i(x) = b^i$.

۱-۲۴ ثابت کنید $f : A \to \mathbb{R}^m$ در a پیوسته است اگر و فقط اگر هر f^i پیوسته باشد.

۱-۲۵ ثابت کنید هر تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ پیوسته است. راهنمایی. از مسئله ۱-۱۰ استفاده کنید.

۱-۲۶ گیریم $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x > ۰, ۰ < y < x^۲\}$.

(الف) نشان دهید هر خط مستقیم گذرنده از $(۰, ۰)$ شامل یک فاصله حول $(۰, ۰)$ است که داخل $\mathbb{R}^۲ - A$ می‌باشد.

(ب) $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را با $f(x) = ۰$ برای $x \notin A$، و $f(x) = ۱$ برای $x \in A$ تعریف کنید. برای $h \in \mathbb{R}^۲$، $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با $g_h(t) = f(th)$ تعریف کنید. نشان دهید هر g_h در ۰ پیوسته است، اما f در $(۰, ۰)$ پیوسته نیست.

۱-۲۷ با در نظر گرفتن تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = |x - a|$، ثابت کنید $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$ باز است.

۱-۲۸ اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ بسته نباشد، نشان دهید تابع پیوسته $f : A \to \mathbb{R}$ کراندار نیست. راهنمایی. اگر $x \in \mathbb{R}^n - A$ اما x در درون $\mathbb{R}^n - A$ نباشد، قرار دهید $f(y) = \dfrac{۱}{|y - x|}$.

۱-۲۹ اگر A فشرده باشد، ثابت کنید هر تابع پیوسته $f : A \to \mathbb{R}$ می‌نیمم و ماکزیمم خود را روی A اختیار می‌کند.

۱-۳۰ گیریم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ یک تابع افزایشی باشد. اگر $x_۱, \ldots, x_n \in [a, b]$ متمایز باشند، نشان دهید $\sum_{i=۱}^{n} o(f, x_i) < f(b) - f(a)$.

۲

مشتق

تعریفهای اولیه

یادآور می‌شویم که یک تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه عدد $f'(a)$ وجود داشته باشد که

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \qquad (۱)$$

این رابطه مطمئناً در حالت کلی برای یک تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ بی‌معنا است، اما می‌توان آن را طوری بازنویسی کرد که مقصود را برآورده سازد. اگر $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تبدیل خطی با ضابطهٔ $\lambda(h) = f'(a) \cdot h$ تعریف شود، آنگاه رابطهٔ (۱) هم‌ارز با

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0 \qquad (۲)$$

است. رابطهٔ (۲) غالباً به عنوان اینکه $\lambda + f(a)$ تقریب خوبی برای f در a است، درنظرگرفته می‌شود. بنابراین می‌توانیم توجه خود را روی تبدیل خطی λ متمرکز نموده و تعریف مشتق‌پذیری را چنین بازنویسی کنیم.

یک تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه یک تبدیل خطی $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یافت شود که

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0 \qquad (۲-۱)$$

در این حالت، تعریف به آسانی به بعدهای بالاتر تعمیم می‌یابد:

یک تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $a \in \mathbb{R}^n$ **مشتق‌پذیر** است هرگاه تبدیل خطی $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یافت شود که

$$\lim_{h \to \circ} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = \circ$$

دقت کنید که h یک نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ است و $f(a+h) - f(a) - \lambda(h)$ یک نقطهٔ $\mathbb{R}^m$، پس نماد نرم در اینجا اساسی است. تبدیل خطی λ با $Df(a)$ نشان داده شده و **مشتق** f در a گفته می‌شود. قضیه زیر خوشتعریفی λ را نشان می‌دهد.

۱-۲ قضیه. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $a \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه فقط یک تبدیل خطی $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ هست که

$$\lim_{h \to \circ} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = \circ$$

برهان. فرض کنید $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در

$$\lim_{h \to \circ} \frac{|f(a+h) - f(a) - \mu(h)|}{|h|} = \circ$$

صدق کند. اگر $d(h) = f(a+h) - f(a)$، آنگاه

$$\begin{aligned} \lim_{h \to \circ} \frac{|\lambda(h) - \mu(h)|}{|h|} &= \lim_{h \to \circ} \frac{|\lambda(h) - d(h) + d(h) - \mu(h)|}{|h|} \\ &\leq \lim_{h \to \circ} \frac{|\lambda(h) - d(h)|}{|h|} + \lim_{h \to \circ} \frac{|d(h) - \mu(h)|}{|h|} \end{aligned}$$

اگر $x \in \mathbb{R}^n$، آنگاه $tx \to \circ$ برای $t \to \circ$. بنابراین برای $x \neq \circ$ داریم

$$\circ = \lim_{t \to \circ} \frac{|\lambda(tx) - \mu(tx)|}{|tx|} = \frac{|\lambda(x) - \mu(x)|}{|x|}$$

در نتیجه $\lambda(x) = \mu(x)$. ■

بعداً روش ساده‌ای برای محاسبه $Df(a)$ خواهیم یافت. در حال حاضر فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = \sin x$ تعریف شده است. آنگاه $Df(a,b) = \lambda$ در

$\lambda(x,y) = (\cos a)\cdot x$ صدق می‌کند. برای اثبات آن داریم

$$\lim_{(h,k)\to \circ} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - \lambda(h,k)|}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k)\to \circ} \frac{|\sin(a+h) - \sin a - (\cos a)\cdot h|}{|(h,k)|}$$

چون $\sin'(a) = \cos a$، داریم

$$\lim_{h\to \circ} \frac{|\sin(a+h) - \sin a - (\cos a)\cdot h|}{|h|} = \circ$$

چون $|(h,k)| \geq |h|$، پس

$$\lim_{(h,k)\to \circ} \frac{|\sin(a+h) - \sin a - (\cos a)\cdot h|}{|(h,k)|} = \circ$$

نیز درست است.

معمولاً بهتر است که ماتریس $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را نسبت به پایه‌های معمولی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ در نظر گرفت. این ماتریس $m \times n$، **ماتریس ژاکوبین** f در a نامیده شده، و با $f'(a)$ نشان داده می‌شود. اگر $f(x,y) = \sin x$، آنگاه $f'(a,b) = (\cos a, \circ)$. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، آنگاه $f'(a)$ یک ماتریس ۱×۱ است که تنها عنصر آن عددی است که با $f'(a)$ در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نشان داده می‌شود.

تعریف $Df(a)$ زمانی درست بود که f در یک مجموعه باز شامل a تعریف شده باشد. پس توابع تعریف شده روی کل $\mathbb{R}^n$ در قضیه‌های گفته شده صدق می‌کند و مشکل ایجاد نمی‌نماید. معمولاً بهتر است بگوییم که تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ روی A مشتق‌پذیر است هرگاه f در هر نقطه $a \in A$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $f : A \to \mathbb{R}^m$، آنگاه f مشتق‌پذیر گفته می‌شود هرگاه f به یک تابع مشتق‌پذیر روی یک مجموعه باز شامل A، توسیع‌پذیر باشد.

مسئله‌ها

۲-۱* ثابت کنید اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $a \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در a پیوسته است.

راهنمایی. از مسئله ۱-۱۰ استفاده کنید.

۲-۲ یک تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ **مستقل از متغیر دوم** است هرگاه برای هر $y_۱, y_۲\in\mathbb{R}$، و هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x,y_۱)=f(x,y_۲)$. نشان دهید تابع f مستقل از متغیر دوم است اگر و فقط اگر تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باشد طوری که $f(x,y)=g(x)$. $f'(a,b)$ بر حسب g' چگونه نوشته می‌شود؟

۲-۳ یک تابع مستقل از متغیر اول $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ یافته و $f'(a,b)$ را برای آن بیابید. چه توابعی هم مستقل از متغیر اول هستند و هم مستقل از متغیر دوم؟

۲-۴ گیریم g تابعی پیوسته و حقیقی مقدار روی دایرهٔ واحد $\{x\in\mathbb{R}^۲ : |x|=۱\}$ باشد طوری که $g(۰,۱)=g(۱,۰)=۰$ و $g(-x)=-g(x)$. تعریف کنید

$$f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}|x|g(\dfrac{x}{|x|}) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

(الف) اگر $x\in\mathbb{R}^۲$ و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $h(t)=f(tx)$ تعریف شود، نشان دهید که h مشتق‌پذیر است.

(ب) نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست مگر آنکه $g=۰$.

راهنمایی. نخست نشان دهید $Df(۰,۰)$، با درنظر گرفتن $k=۰$ در (h,k) و سپس $h=۰$ در (h,k) می‌بایستی ۰ باشد.

۲-۵ گیریم $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ به صورت

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq ۰\\ ۰ & (x,y)=۰\end{cases}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید f تابعی از نوع تابع مسئله ۲-۴ می‌باشد و بنابراین f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

۲-۶ گیریم $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ به صورت $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ تعریف شده است. نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

۲-۷ گیریم $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که $|f(x)| \leq |x|^۲$. نشان دهید f در ۰ مشتق‌پذیر است.

۲-۸ گیریم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۲$. ثابت کنید f در $a \in R$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر $f^۱$ و $f^۲$ مشتق‌پذیر باشند، و در این صورت

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^۱)'(a) \\ (f^۲)'(a) \end{pmatrix}$$

۲-۹ دو تابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **تا مرتبهٔ** n در a **مساوی** هستند هرگاه

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n} = ۰$$

(الف) نشان دهید f در a مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر تابع g به شکل $g(x) = a_۰ + a_۱(x-a)$ وجود داشته باشد طوری که f و g تا مرتبهٔ اول در a مساوی باشند.

(ب) اگر $f^۱(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ وجود داشته باشند، نشان دهید f و تابع g با ضابطه

$$g(x) = \sum_{i=۰}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

تا مرتبهٔ n در a مساویند. راهنمایی. حد

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{i=۰}^{n-۱} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n}$$

را به کمک دستور هوپیتال محاسبه کنید.

قضیه‌های اساسی

۲-۲ قضیه (قاعدهٔ زنجیره‌ای). اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در a مشتق‌پذیر، و $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ در $f(a)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع ترکیب $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ در a مشتق‌پذیر است، و

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

تذکر. این تساوی می‌تواند به صورت

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

نوشته شود. اگر $m = n = p = ۱$، همان قاعدهٔ زنجیره‌ای معمولی را به دست می‌آوریم.

برهان. گیریم $b = f(a)$، $\lambda = Df(a)$، و $\mu = Dg(f(a))$. اگر قرار دهیم

(۱)
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$$

(۱)
$$\psi(y) = g(y) - g(b) - \mu(y-b)$$

(۳)
$$\rho(x) = g \circ f(x) - g \circ f(a) - \mu \circ \lambda(x-a)$$

آنگاه

(۴)
$$\lim_{x \to a} \frac{|\varphi(x)|}{|x-a|} = 0$$

(۵)
$$\lim_{y \to 0} \frac{|\psi(y)|}{|y-b|} = 0$$

و می‌بایست نشان دهیم

$$\lim_{x \to a} \frac{|\rho(x)|}{|x-a|} = 0$$

اما

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= g(f(x)) - g(b) - \mu(\lambda(x-a)) \\
&= g(f(x)) - g(b) - \mu(f(x) - f(a) - \varphi(x)) && \text{بنابر (۱)} \\
&= [g(f(x)) - g(b) - \mu(f(x) - f(a))] + \mu(\varphi(x)) \\
&= \psi(f(x)) + \mu(\varphi(x)) && \text{بنابر (۲)}
\end{aligned}$$

پس باید ثابت کنیم

(۶)
$$\lim_{x \to a} \frac{|\psi(f(x))|}{|x-a|} = 0$$

(۷)
$$\lim_{x \to a} \frac{|\mu(\varphi(x))|}{|x-a|} = 0$$

رابطهٔ (۷) به راحتی از (۴) و مسئله ۱-۱۰ نتیجه می‌شود. اگر $\varepsilon > 0$، از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود که برای یک $\delta > 0$، داریم

$$|\psi(f(x))| < \varepsilon|f(x) - b| \qquad \text{برای } |f(x) - b| < \delta$$

که برای یک δ_1 مناسب، و برای $|x - a| < \delta_1$ درست است. بنابراین با توجه به مسئله ۱-۱۰، برای یک M، داریم

$$\begin{aligned}|\psi(f(x))| &< \varepsilon|f(x) - b|\\ &= \varepsilon|\varphi(x) + \lambda(x - a)|\\ &\leq \varepsilon|\varphi(x)| + \varepsilon M|x - a|\end{aligned}$$

رابطهٔ (۶) اکنون به راحتی نتیجه می‌شود. ■

۳-۲ قضیه.

(۱) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تابع ثابت باشد (یعنی، برای یک $y \in \mathbb{R}^n$، و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $f(x) = y$)، آنگاه

$$Df(a) = 0$$

(۲) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه

$$Df(a) = f$$

(۳) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$؛ آنگاه f در $a \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر هر f^i باشد، و در این حالت

$$Df(a) = (Df^1(a), \ldots, Df^m(a))$$

پس $f'(a)$ یک ماتریس $m \times n$ است که سطر i-ام آن $(f^i)'(a)$ است.

(۴) اگر $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به‌صورت $s(x, y) = x + y$ تعریف شود، آنگاه

$$Ds(a, b) = s$$

(۵) اگر $p : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ به صورت $p(x, y) = x \cdot y$ تعریف شود آنگاه

$$Dp(a, b)(x, y) = bx + ay$$

بنابراین $p'(a, b) = (b, a)$.

برهان.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{|f(a+h) - f(a) - ۰|}{|h|} = \lim_{h\to ۰} \frac{|y - y - ۰|}{|h|} = ۰ \quad (۱)$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{|f(a+h) - f(a) - f(h)|}{|h|} \quad (۲)$$
$$= \lim_{h\to ۰} \frac{|f(a) + f(h) - f(a) - f(h)|}{|h|} = ۰$$

(۳) اگر هر f^i در a مشتق‌پذیر باشد و

$$\lambda = (Df^۱(a), \ldots, Df^m(a))$$

آنگاه

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \lambda(h) &= (f^۱(a+h) - f^۱(a) - Df^۱(a)(h), \ldots, \\ &\qquad f^m(a+h) - f^m(a) - Df^m(a)(h)) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{h\to ۰} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} \\ \leq \lim_{h\to ۰} \sum_{i=۱}^{m} \frac{|f^i(a+h) - f^i(a) - Df^i(a)(h)|}{|h|} = ۰ \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f^i = \pi^i \circ f$ بنابر قضیه ۲-۲ و رابطهٔ (۲) در a مشتق‌پذیر است

(۴) از (۲) نتیجه می‌شود.

(۵) قرار دهید $\lambda(x,y) = bx + ay$. آنگاه

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|p(a+h,b+k) - p(a,b) - \lambda(h,k)|}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|}{|(h,k)|}$$

اکنون

$$|hk| \leq \begin{cases} |h|^2 & \text{اگر } |k| \leq |h| \\ |k|^2 & \text{اگر } |h| \leq |k| \end{cases}$$

بنابراین $|hk| \leq |h|^2 + |k|^2$. در نتیجه

$$\frac{|hk|}{|(h,k)|} \leq \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2}$$

از اینرو

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|hk|}{|h,k)|} = 0$$

■

۲-۴ نتیجه. اگر $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ در a مشتق‌پذیر باشند آنگاه

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$$

$$D(f \cdot g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

همچنین اگر $g(a) \neq 0$، آنگاه

$$D(f/g)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{|g(a)|^2}$$

برهان. رابطهٔ اول را ثابت کرده و بقیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. چون $f + g = s \circ (f, g)$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D(f+g)(a) &= Ds(f(a), g(a)) \circ D(f,g)(a) \\ &= s \circ (Df(a), Dg(a)) \\ &= Df(a) + Dg(a) \end{aligned}$$

■

اکنون مطمئن هستیم که تابعهای $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ که مؤلفه‌های آن تابعهایی هستند که از جمع، ضرب، تقسیم، و ترکیب توابع π^i (که تبدیل خطی هستند) و تابعهای معمولی که مشتق‌پذیر هستندتشکیل شده است، مشتق‌پذیر می‌باشند. یافتن $Df(x)$ یا $f'(x)$ ممکن است کمی مشکل باشد. مثلاً فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y) = \sin(xy^۲)$ تعریف شود. چون $f = \sin \circ (\pi^۱ \cdot [\pi^۲]^۲)$، پس

$$\begin{aligned} f'(a, b) &= \sin'(ab^۲) \cdot [b^۲(\pi^۱)'(a, b) + a([\pi^۲]^۲)'(a, b)] \\ &= \sin'(ab^۲) \cdot [b^۲(\pi^۱)'(a, b) + ۲ab(\pi^۲)'(a, b)] \\ &= (\cos(ab^۲)) \cdot [b^۲(۱, ۰) + ۲ab(۰, ۱)] \\ &= (b^۲ \cos(ab^۲), ۲ab \cos(ab^۲)). \end{aligned}$$

خوشبختانه، بعداً راهی ساده‌تر برای محاسبهٔ f' پیدا خواهیم کرد.

مسئله‌ها

۲-۱۰ با استفاده از قضیه‌های این بخش، f' را در حالتهای زیر بیابید.

(الف) $f(x, y, z) = x^y$

(ب) $f(x, y, z) = (x^y, z)$

(پ) $f(x, y) = \sin(x \sin y)$

(ت) $f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

(ث) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

(ج) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

(چ) $f(x, y, z) = (x + y)^z$

(ح) $f(x, y) = \sin(xy)$

(خ) $f(x, y) = [\sin(xy)]^{\cos ۳}$

(د) $f(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^y)$

۲-۱۱ f' را در حالتهای زیر بیابید ($g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است):

(الف) $f(x,y)=\int_a^{x+y} g$

(ب) $f(x,y)=\int_a^{xy} g$

(پ) $f(x,y,z)=\int_{xy}^{\sin(x\sin(y\sin z))} g$

۲-۱۲ تابع $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ **دوخطی** گفته می‌شود هرگاه برای $x,x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$، $y,y_1,y_2\in\mathbb{R}^m$، و $a\in\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(ax,y)=af(x,y)=f(x,ay)$$

$$f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)$$

$$f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2)$$

(الف) ثابت کنید اگر f دو خطی باشد آنگاه

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f(h,k)|}{|h,k)|}=0$$

(ب) ثابت کنید $Df(a,b)(x,y)=f(a,y)+f(x,b)$.

(پ) نشان دهید فرمول $Dp(a,b)$ در قضیه ۲-۳ حالت خاصی از (b) است.

۲-۱۳ $IP:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $IP(x,y)=\langle x,y\rangle$ تعریف کنید.

(الف) $(IP)'(a,b), D(IP)(a,b)$ را بیابید.

(ب) اگر $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشند و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت $h(t)=\langle f(t),g(t)\rangle$ تعریف شود، نشان دهید

$$h'(a)=\langle f'(a)^T,g(a)\rangle+\langle f(a),g'(a)^T\rangle$$

(دقت کنید که $f'(a)$ یک ماتریس $n\times 1$ است؛ ترانهادهٔ آن، $f'(a)^T$، یک ماتریس $1\times n$ است، که آن را عضوی از $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم).

(پ) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد و برای هر t، $|f(t)|=1$، آنگاه $\langle f'(t)^T,f(t)\rangle=0$.

(ت) یک تابع مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بیابید به‌گونه‌ای که $|f|$، که به صورت $|f|(t) = |f(t)|$ تعریف می‌شود، مشتق‌پذیر نباشد.

۲-۱۴ گیریم k، $i = ۱, \ldots k$، E_i، فضاهای اقلیدسی با بعدهای مختلف باشند. تابع $f : E_۱ \times \ldots \times E_k \to \mathbb{R}^p$ چندخطی گفته می‌شود هرگاه برای هر $x_j \in E_j$، $j \neq i$ تابع $g : E_i \to \mathbb{R}^p$ که به صورت $g(x) = f(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x, x_{i+۱}, \ldots, x_k)$ تعریف می‌شود یک تبدیل خطی باشد.

(الف) اگر f چندخطی باشد و $i \neq j$، آنگاه نشان دهید که برای $h = (h_۱, \ldots, h_k)$، $h_l \in E_l$، داریم

$$\lim_{h \to ۰} \frac{|f(a_۱, \ldots, h_i, \ldots, h_j, \ldots, a_k)|}{|h|} = ۰$$

راهنمایی. اگر $g(x, y) = f(a_۱, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_k)$، آنگاه g دوخطی است.

(ب) ثابت کنید

$$Df(a_۱, \ldots, a_k)(x_۱, \ldots, x_k) = \sum_{i=۱}^{k} f(a_۱, \ldots, a_{i-۱}, x_i, a_{i+۱}, \ldots, a_k)$$

۲-۱۵ یک ماتریس $n \times n$ را به عنوان نقطه‌ای از n-گونای حاصلضرب $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$، که هر سطر آن عضوی از $\mathbb{R}^n$ است، در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$D(\det)(a_۱, \ldots, a_n)(x_۱, \ldots, x_n) = \sum_{i=۱}^{n} \det \begin{bmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(ب) اگر $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $f(t) = \det(a_{ij}(t))$، نشان دهید که

$$f'(t) = \sum_{i=۱}^{n} \det \begin{bmatrix} a_{۱۱}(t), & \dots, & a_{۱n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{j۱}(t), & \dots, & a'_{jn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n۱}(t), & \dots, & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

(پ) اگر برای هر t، $\det(a_{ij}(t)) \neq ۰$، و $b_۱, \dots, b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشند، تابعهای $s_۱, \dots, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری در نظر بگیرید که $s_۱(t), \dots, s_n(t)$ جوابهای معادله‌های زیر باشند

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ji}(t) s_j(t) = b_i(t) \qquad i = ۱, \dots, n$$

نشان دهید s_i مشتق‌پذیر است و $s'_i(t)$ را پیدا کنید.

۲-۱۶ فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر بوده، و وارون آن $f^{-۱} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نیز مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید $(f^{-۱})'(a) = [f'(f^{-۱}(a))]^{-۱}$.

راهنمایی. $f \circ f^{-۱}(x) = x$.

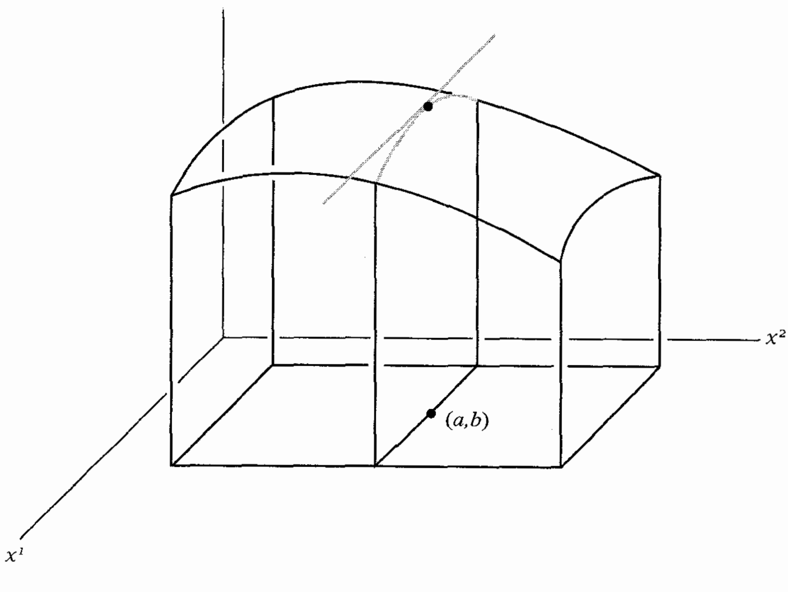
مشتقهای جزیی

در این مرحله با مسئله یافتن مشتقهای «یک متغیره» شروع می‌کنیم. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^n$، حد

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a^۱, \dots, a^i + h, \dots, a^n) - f(a^۱, \dots, a^n)}{h}$$

را در صورت وجود با $D_i f(a)$ نشان داده و **مشتق جزئی** f در نقطه a می‌نامیم. باید دقت کرد که $D_i f(a)$ مشتق معمولی یک تابع معین است؛ در واقع اگر $g(x) = f(a^۱, \dots, x, \dots, a^n)$، آنگاه $D_i f(a) = g'(a^i)$. این به معنای آن است که $D_i f(a)$ شیب خط مماس در $(a, f(a))$

بر منحنی است که از تقاطع نمودار f با صفحه $x^j = a^j, j \neq i$ به دست می‌آید. همچنین به معنای آن است که محاسبه $D_i f(a)$ مسئله‌ای است که از قبل می‌توانیم آن را حل کنیم. اگر ضابطهٔ تعریف $f(x^۱, \ldots, x^n)$ شامل $x^۱, \ldots, x^n$ باشد، آنگاه $D_i f(x^۱, \ldots, x^n)$ را با مشتق‌گیری از تابعی انجام می‌دهیم که مقدارش در x^i همان ضابطهٔ f است که در آن تمام x^jها، $j \neq i$، ثابت فرض می‌شوند. مثلاً اگر $f(x,y) = \sin(xy^۲)$، آنگاه $D_۱ f(x,y) = y^۲ \cos(xy^۲)$ و $D_۲ f(x,y) = ۲xy\cos(xy^۲)$. همچنین اگر $f(x,y) = x^y$، آنگاه $D_۱ f(x,y) = yx^{y-۱}$ و $D_۲ f(x,y) = x^y \log x$.



شکل ۲-۱

با کمی تمرین (مسایل آخر این بخش) می‌توانید بخوبی محاسبهٔ $D_i f$ را، درست مثل حالت یک متغیره، انجام دهید.

اگر $D_i f(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، تابع $D_i f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را به دست می‌آوریم. مشتق جزیی j-ام این تابع در x، یعنی $D_j(D_i f)(x)$، با $D_{i,j} f(x)$ نشان داده می‌شود. دقت کنید که در این نماد جای i و j عوض می‌شود. در واقع، ترتیب معمولاً مهم نیست چون اکثر توابع (بجز حالتهای خاصی که در تمرینها آمده است) در $D_{i,j} f = D_{j,i}$ صدق

می‌کنند. قضیه‌های گوناگونی هست که این تساوی را برقرار می‌سازند؛ قضیه زیر یکی از آنها است. قضیه را در اینجا بیان می‌کنیم ولی اثبات آن بعداً می‌آید (مسئله ۳-۲۸).

۲-۵ قضیه. اگر $D_{i,j}f$ و $D_{j,i}f$ در یک مجموعه باز شامل a پیوسته باشند، آنگاه

$$D_{i,j}f(a) = D_{j,i}f(a)$$

تابع $D_{i,j}f$ **مشتق جزیی مرتبه دوم** f گفته می‌شود. مشتقات مرتبه بالاتر به طریق مشابه تعریف می‌شوند. بدیهی است که قضیه ۲-۵ می‌تواند برای اثبات مشتقات جزیی مرتبه بالاتر تحت فرضهای مناسب به کار رود. بنابراین اگر f مشتقات جزیی پیوسته از هر مرتبه‌ای داشته باشد، ترتیب $i_1, \ldots, i_k$ در $D_{i_1,\ldots,i_k}f$ اصلاً مهم نیست. تابعی با این ویژگی را یک تابع C^∞ می‌گویند. در فصلهای آتی توجه خود را بیشتر روی توابع C^∞ متمرکز خواهیم کرد.

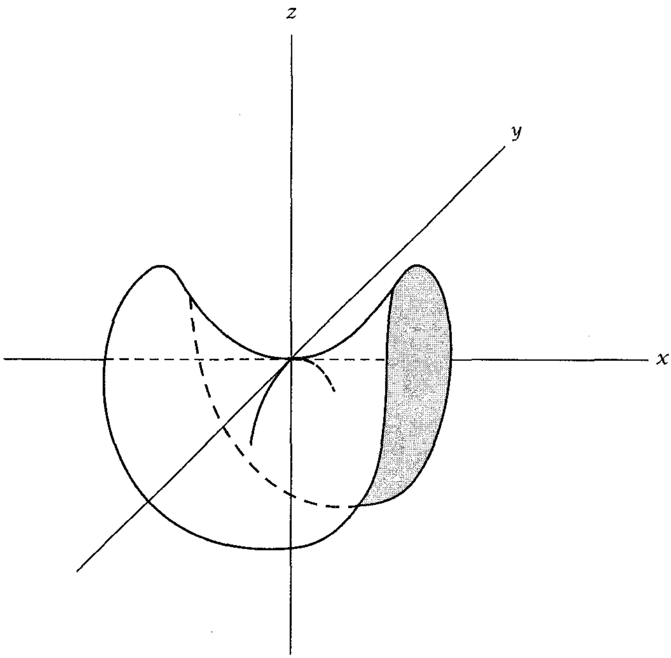
مشتقهای جزیی در بخش بعدی برای یافتن مشتقها به کار خواهند آمد. کاربرد مهم دیگری نیز دارند ـ یافتن ماکزیمم‌ها و می‌نیمم‌های توابع.

۲-۶ قضیه. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$. اگر $f : A \to \mathbb{R}$ ماکزیمم (یا می‌نیمم) خود را در نقطه a، متعلق به درون A، اختیار کند و $D_if(a)$ وجود داشته باشد آنگاه $D_jf(a) = 0$.

برهان. گیریم $g_i(x) = (a^1, \ldots, x, \ldots, a^n)$. واضح است که g_i یک ماکزیمم (یا می‌نیمم) در a^i دارد، و g_i روی یک فاصله باز شامل a^i تعریف شده است. پس $0 = g_i'(a^i) = D_if(a)$. ■

یادآوری می‌شود که عکس قضیه ۲-۶، حتی اگر $n = 1$ باشد، درست نیست (اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3$ تعریف شود، آنگاه $f'(0) = 0$، اما 0 نه ماکزیمم نسبی است نه می‌نیمم نسبی). اگر $n > 1$، باز عکس قضیه ۲-۶ درست نیست. مثلاً فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y) = x^2 - y^2$ (شکل ۲-۲) تعریف شود. آنگاه $D_1f(0, 0) = 0$ زیرا g_1 در 0 مینیمم دارد در حالی که $D_2f(0, 0) = 0$ زیرا g_2 در 0 ماکزیمم دارد. بدیهی است که $(0, 0)$ نه ماکزیمم نسبی است و نه می‌نیمم نسبی.

اگر قضیه ۲-۶ برای یافتن ماکزیمم یا می‌نیمم f روی A به کار رود، مقادیر f روی مرز بایستی جداگانه بررسی شود ـ هدفی دشوار، چرا که ممکن است مرز A خود A باشد. مسئله



شکل ۲-۲

۲-۲۷ روشی برای این عمل ارائه می‌دهد و مسئله ۵-۱۶ شیوه‌ای عالی ارائه می‌دهد که غالباً مورد استفاده واقع می‌گردد.

مسئله‌ها

۲-۱۷ مشتقهای جزیی تابعهای زیر را بیابید.

(الف) $f(x,y,z) = x^y$

(ب) $f(x,y,z) = z$

(پ) $f(x,y) = \sin(x \sin y)$

(ت) $f(x,y,z) = \sin(x\sin(y \sin z))$

(ث) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

(ج) $f(x,y,z) = x^{y+z}$

(چ) $f(x,y,z) = (x+y)^z$

(ح) $f(x,y) = \sin(xy)$

(خ) $f(x,y) = [\sin(xy)]^{\cos ۳}$

۲-۱۸ مشتقهای جزیی تابعهای زیر را بیابید ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته است):

(الف) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g$

(ب) $f(x,y) = \int_y^x g$

(پ) $f(x,y) = \int_a^{xy} g$

(ت) $f(x,y) = \int_a^{(\int_a^y g)} g$

۲-۱۹ اگر

$$f(x,y) = x^{x^{x^{x^y}}} + (\log x)(\arctan(\arctan(\arctan(\sin(\cos xy) - \log(x+y)))))$$

باشد $D_۲ f(۱, y)$ را بیابید. راهنمایی. راهی ساده برای اینکار وجود دارد.

۲-۲۰ مشتقهای جزیی f را بر حسب مشتقهای g و h بیابید

(الف) $f(x,y) = g(x)h(y)$

(ب) $f(x,y) = g(x)^{h(y)}$

(پ) $f(x,y) = g(x)$

(ت) $f(x,y) = g(y)$

(ث) $f(x,y) = g(x+y)$

*۲-۲۱ گیریم $g_۱, g_۲ : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ پیوسته باشند. $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید:

$$f(x,y) = \int_۰^x g_۱(t, ۰)dt + \int_۰^y g_۲(x,t)dt$$

(الف) نشان دهید $D_۲ f(x,y) = g_۲(x,y)$.

(ب) f چگونه تعریف شود تا $D_۱ f(x,y) = g_۱(x,y)$.

(پ) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را چنان بیابید که $D_۱ f(x,y) = x$ و $D_۲ f(x,y) = y$. یکی دیگر را چنان بیابید که $D_۱ f(x,y) = y$ و $D_۲ f(x,y) = x$.

۲-۲۲* اگر $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ و $D_۲ f = ۰$، نشان دهید که f مستقل از متغیر دوم است. اگر $D_۱ f = D_۲ f = ۰$، نشان دهید f ثابت است.

۲-۲۳* گیریم

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : \ x < ۰, \ \ \text{یا} \ \ x \geq ۰, y \neq ۰\}$$

(الف) اگر $f : A \to \mathbb{R}$ و $D_۱ f = D_۲ f = ۰$، نشان دهید f ثابت است. راهنمایی. دقت کنید که هر دو نقطه A می‌توانند با دنباله‌ای از خطهای موازی با یکی از محورها به هم وصل شوند.

(ب) تابع $f : A \to \mathbb{R}$ را چنان بیابید که $D_۲ f = ۰$ اما f مستقل از متغیر دوم نباشد.

۲-۲۴ تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq ۰ \\ ۰ & (x, y) = ۰ \end{cases}$$

(الف) نشان دهید برای هر x، $D_۲ f(x, ۰) = x$ و برای هر y، $D_۱ f(۰, y) = -y$.

(ب) نشان دهید $D_{۱,۲} f(۰, ۰) \neq D_{۲,۱} f(۰, ۰)$

۲-۲۵* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

نشان دهید f، C^∞ است و برای هر i، $f^{(i)}(۰) = ۰$. راهنمایی. حد $f'(۰) = \lim_{h \to ۰} \dfrac{e^{-h^{-۲}}}{h} = \lim_{h \to ۰} \dfrac{\frac{۱}{h}}{e^{h^{-۲}}}$ می‌تواند به کمک دستور هوپیتال محاسبه شود. یافتن $f'(x)$ برای هر $x \neq ۰$ ساده است، و $f''(۰) = \lim_{h \to ۰} \dfrac{f'(h)}{h}$ باز به کمک دستور هوپیتال محاسبه می‌شود.

۲-۲۶* گیریم

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}}e^{-(x+1)^{-2}} & x\in(-1,1)\\ 0 & x\notin(-1,1)\end{cases}$$

(الف) نشان دهید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع C^∞ است که روی $(-1,1)$ مثبت است و بقیه جاها 0.

(ب) نشان دهید یک تابع C^∞، $g:\mathbb{R}\to[0,1]$ هست طوری که برای $x\leq 0$، $g(x)=0$ و برای $x\geq\varepsilon$، $g(x)=1$. راهنمایی. اگر f یک تابع C^∞ باشد که روی $(0,\varepsilon)$ مثبت است و بقیه جاها 0، آنگاه $g(x)=\dfrac{\int_0^x f}{\int_0^\varepsilon f}$

(پ) اگر $a\in\mathbb{R}^n$، تابع $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را با

$$g(x)=f([x^1-a^1]/\varepsilon)\cdot\ldots\cdot f([x^n-a^n]/\varepsilon)$$

تعریف کنید. نشان دهید g یک C^∞ است که روی

$$(a^1-\varepsilon,a^1+\varepsilon)\times\ldots\times(a^n-\varepsilon,a^n+\varepsilon)$$

مثبت است، و بقیه‌جاها صفر.

(ت) اگر $A\subset\mathbb{R}^n$ باز و $C\subset A$ فشرده باشد، نشان دهید تابع C^∞ و مثبت $f:A\to\mathbb{R}$ هست که برای $x\in C$، $f(x)>0$، و خارج یک مجموعه بسته مشمول A، $f=0$.

(ث) نشان دهید که می‌توان f را چنان انتخاب کرد که $f:A\to[0,1]$ و برای $x\in C$، $f(x)=1$. راهنمایی. اگر تابع f قسمت (ت) برای $x\in C$، در رابطه $f(x)\geq\varepsilon$ صدق کند، $g\circ f$ را در نظر بگیرید که g تابع مربوط به قسمت (ب) است.

۲-۲۷ تابعهای $g,h:\{x\in\mathbb{R}^2:|x|\leq 1\}\to\mathbb{R}^3$ را به صورت

$$g(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$$
$$h(x,y)=(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$$

تعریف کنید. نشان دهید ماکزیمم f روی $\{x\in\mathbb{R}^3:|x|=1\}$، یا ماکزیمم $f\circ g$ روی $\{x\in\mathbb{R}^2:|x|\leq 1\}$ است یا ماکزیمم $f\circ h$ روی آن.

مشتقها

خواننده‌ای که مسئله‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۷ را مقایسه کرده باشد احتمالاً مطلب زیر را حدس زده است.

۲-۷ قضیه. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $D_j f^i(a)$ برای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ وجود دارد و $f'(a)$ ماتریس $m \times n$، $(D_j f^i(a))$ است.

برهان. فرض کنید $m = 1$، بنابراین $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ را با $h(x) = (a^1, \ldots, x, \ldots, a^n)$ تعریف کنید، که x در مکان jـام است. آنگاه $D_j f(a) = (f \circ h)'(a^j)$.
از اینرو، بنابر قضیه ۲-۲

$$(f \circ h)'(a^j) = f'(a) \cdot h'(a^j)$$

$$= f'(a). \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مکان } j\text{ـام}$$

چون $(f \circ h)'(a^j)$ فقط عنصر $D_j f(a)$ را دربردارد، پس $D_j f(a)$ وجود دارد و jـامین عنصر ماتریس $1 \times n$، $f'(a)$ است.

اکنون قضیه برای m دلخواه نتیجه می‌شود چون، بنابر قضیه ۲-۳، هر f^i مشتق‌پذیر است و سطر i-ام $f'(a)$، $(f^i)'(a)$ است. ■

مثالهای زیادی در مسایل آتی نشان می‌دهند که عکس قضیه ۲-۷ درست نیست. اما اگر یک فرض اضافه شود، درست است.

۲-۸ قضیه. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$، آنگاه $Df(a)$ وجود دارد هرگاه تمام $D_j f^i(x)$ها در یک مجموعه باز شامل a وجود داشته و هر تابع $D_j f^i$ در a پیوسته باشد.
(چنین تابعی را **مشتق‌پذیر پیوسته** در a می‌گویند)

برهان. همانند برهان قضیه ۲-۷، کافی است حالت $m = 1$ را در نظر بگیریم. پس

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) =& f(a^1 + h^1, a^2, \dots, a^n) - f(a^1, \dots, a^n) \\ & + f(a^1 + h^1, a^2 + h^2, a^3, \dots, a^n) - \\ & f(a^1 + h^1, a^2, \dots, a^n) \\ & + \dots \\ & + f(a^1 + h^1, \dots, a^n + h^n) \\ & - f(a^1 + h^1, \dots, a^{n-1} + h^{n-1}, a^n) \end{aligned}$$

یادآوری می‌گردد که $D_1 f$ مشتق تابع g تعریف شده با $g(x) = f(x, a^2, \dots, a^n)$ است. با به کار بردن قضیه مقدار میانگین برای g، خواهیم داشت

$$f(a^1 + h^1, a^2, \dots, a^n) - f(a^1, \dots, a^n) = h^1 \cdot D_1 f(b_1, a^2, \dots, a^n)$$

که در آن b_1 بین a^1 و $a^1 + h^1$ است. به طریق مشابه، جملهٔ iـام جمع برای یک c_i، مساوی

$$h^i \cdot D_i f(a^1 + h^1, \dots, a^{i-1} + h^{i-1}, b_i, \dots, a^n) = h^i D_i f(c_i)$$

است. پس، چون f در a پیوسته است، داریم

$$\begin{aligned} & \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) \cdot h^i|}{|h|} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{|\sum_{i=1}^{n} [D_i f(c_i) - D_i f(a)] \cdot h^i|}{|h|} \\ & \leq \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} |D_i f(c_i) - D_i f(a)| \cdot \frac{|h^i|}{|h|} \\ & \leq \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} |D_i f(c_i) - D_i f(a)| \\ & = 0 \end{aligned}$$

■

اگرچه قاعدهٔ زنجیره‌ای در برهان قضیه ۲-۷ به کاررفت، اما می‌توان به راحتی آن را حذف کرد. با توجه به قضیه ۲-۸ برای یافتن توابع مشتق‌پذیر، و قضیه ۲-۷ برای یافتن مشتقهای آنها، قاعده زنجیره‌ای به‌نظر اضافی می‌آید. البته، کاربرد بسیار مهمی درباره مشتقهای جزیی دارد.

۲-۹ قضیه. گیریم $g_1,\ldots,g_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در a مشتق‌پذیر پیوسته باشند، و $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در $(g_1(a),\ldots,g_m(a))$ مشتق‌پذیر باشد. تابع $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را با $F(x)=f(g_1(x),\ldots,g_n(x))$ تعریف کنید. آنگاه

$$D_iF(a)=\sum_{j=1}^{m}D_jf(g_1(a),\ldots,g_m(a))\cdot D_ig_i(a)$$

برهان. تابع F در واقع ترکیب $f\circ g$ است که در آن $g=(g_1,\ldots,g_m)$. چون g_i در a مشتق‌پذیر پیوسته است، از قضیه ۲-۸ نتیجه می‌شود که g در a مشتق‌پذیر است. از اینرو بنابر قضیه ۲-۲،

$$F'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)=$$

$$(D_1f(g(a)),\ldots,D_mf(g(a)))\cdot\begin{pmatrix}D_1g_1(a), & \ldots, & D_ng_1(a)\\ & \vdots & \\ D_1g_m(a), & \ldots, & D_ng_m(a)\end{pmatrix}.$$

اما $D_iF(a)$، عنصر i-ام سمت چپ این رابطه است در حالی که

$$\sum_{j=1}^{m}D_if(g_1(a),\ldots,g_m(a))\cdot D_ig_j(a)$$

عنصر i-ام سمت راست است. ■

قضیه ۲-۹ غالباً **قاعده زنجیره‌ای** گفته می‌شود، اما از قضیه ۲-۲ ضعیفتر است زیرا g می‌تواند بدون آنکه g_iها مشتق‌پذیر پیوسته باشند، مشتقپذیر باشد (مسئله ۲-۳۲ را ببینید). اکثر محاسباتی که قضیه ۲-۹ را لازم دارند می‌توانند مستقیماً انجام شوند.

برای تابع $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ که به صورت

$$F(x,y)=f(g(x,y),h(x),k(y))\qquad h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

تعریف می‌شود، یک تغییر جزیی لازم است. برای استفاده از قضیه ۲-۹، $\bar{h}, \bar{k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را به صورت

$$\bar{h}(x,y) = h(x) \qquad\qquad \bar{k}(x,y) = k(y)$$

تعریف کنید، آنگاه

$$D_1\bar{h}(x,y) = h'(x) \qquad\qquad D_2\bar{h}(x,y) = 0$$
$$D_1\bar{k}(x,y) = 0 \qquad\qquad D_2\bar{k}(x,y) = k'(y)$$

اکنون می‌توانیم چنین بنویسیم

$$F(x,y) = f(g(x,y), \bar{h}(x,y), \bar{k}(x,y))$$

با قرار دادن $a = (g(x,y), h(x), k(y))$، خواهیم داشت

$$D_1F(x,y) = D_1f(a) \cdot D_1g(x,y) + D_2f(a) \cdot h'(x)$$
$$D_2F(x,y) = D_1f(a) \cdot D_2g(x,y) + D_3f(a) \cdot k'(y)$$

البته واقعاً احتیاجی نیست که تابعهای $\bar{h}$ و $\bar{k}$ را بنویسید.

مسئله‌ها

۲-۲۸ عباراتی برای مشتقهای جزیی تابعهای زیر بیابید.

(الف) $F(x,y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$

(ب) $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(y+z))$

(پ) $F(x,y,z) = f(x^y, y^z, z^x)$

(ت) $F(x,y) = f(x, g(x), h(x,y))$

۲-۲۹ گیریم $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. برای $x \in \mathbb{R}^n$، حد

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tx) - f(a)}{t}$$

در صورت وجود، با $D_x f(a)$ نشان داده شده و **مشتق جهتی** f در a، در جهت x گفته می‌شود.

(الف) نشان دهید $D_{e_i} f(a) = D_i f(a)$

(ب) $D_{tx} f(a) = t D_x f(a)$

(پ) اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $D_x f(a) = Df(a)(x)$ و بنابراین $D_{x+y} f(a) = D_x f(a) + D_y f(a)$

۲-۳۰ f تعریف شده در مسئله ۲-۴ را در نظر بگیرید. نشان دهید $D_x f(\circ,\circ)$ برای هر x وجود دارد، اما اگر $g \neq \circ$، آنگاه $D_{x+y} f(\circ,\circ) = D_x f(\circ,\circ) + D_y f(\circ,\circ)$ برای هر x و y درست نیست.

۲-۳۱ گیریم $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ مانند مسئله ۱-۲۶ تعریف شده باشد. نشان دهید $D_x f(\circ,\circ)$ برای هر x وجود دارد، اما f در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست.

۲-۳۲ (الف) گیریم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \dfrac{۱}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید f در $\circ$ مشتق‌پذیر است اما f' در $\circ$ پیوسته نیست.

(ب) گیریم $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ به صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^۲ + y^۲) \sin \dfrac{۱}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} & (x,y) \neq \circ \\ \circ & (x,y) = \circ \end{cases}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر است اما $D_i f$ در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست.

۲-۳۳ نشان دهید پیوستگی $D_۱ f^j$ در a را در فرض قضیه ۲-۸ می‌توان حذف کرد.

۲-۳۴ تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **همگن** از درجه m گفته می‌شود هرگاه برای هر x، $f(tx) = t^m f(x)$. اگر f مشتق‌پذیر نیز باشد، نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(x) = m f(x)$$

راهنمایی. اگر $g(t) = f(tx)$، $g'(1)$ را محاسبه کنید.

۲-۳۵ اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و $f(0) = 0$، ثابت کنید $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ هست که

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x)$$

راهنمایی. اگر $h_x(t) = f(tx)$، آنگاه $f(x) = \int_0^1 h_x'(t)dt$.

تابع معکوس

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در یک مجموعه باز شامل a، مشتق‌پذیر پیوسته بوده و $f'(a) \neq 0$. اگر $f'(a) > 0$، یک فاصلهٔ باز V شامل a هست که برای $x \in V$، $f'(x) > 0$. گزارهٔ مشابهی برای $f'(a) < 0$ برقرار است. پس f روی V افزایشی (یا کاهشی) است، و بنابراین یک به یک است و وارون آن f^{-1} روی یک فاصله باز W شامل $f(a)$ تعریف شده است. به علاوه می‌توان نشان داد که f^{-1} مشتق‌پذیر است، و برای $y \in W$،

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

عبارت مشابهی برای بعدهای بالاتر برقرار است، امانتیجه (قضیه ۲-۱۱) بسیار مهم است. با یک لم ساده شروع می‌کنیم.

۲-۱۰ لم. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مستطیل، و $f : A \to \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر پیوسته باشد. اگر عدد M چنان باشد که برای هر x درون A، $|D_j f^i(x)| \leq M$، آنگاه برای هر $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq n^2 M |x - y|$$

برهان. داریم

$$f^i(y) - f^i(x) = \sum_{j=1}^{n} [f^i(y^1, \dots, y^j, x^{j+1}, \dots, x^n) - f^i(y^1, \dots, y^{j-1}, x^j, \dots, x^n)]$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای برخی z_{ij}ها خواهیم داشت

$$f^i(y^1, \dots y^j, x^{j+1}, \dots, x^n) - f^i(y^1, \dots, y^{j-1}, x^j, \dots, x^n) = (y^j - x^j) \cdot D_j f^i(z_{ij})$$

قدر مطلق عبارت سمت راست کوچکتر یا مساوی $M|y^j - x^j|$ است. پس چون همواره، $|y^j - x^j| \leq |y - x|$، خواهیم داشت

$$|f^i(y) - f^i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |y^j - x^j| \cdot M \leq nM|y - x|$$

بالاخره

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f^i(y) - f^i(x)| \leq n^2 M \cdot |y - x|$$

■

۲-۱۱ قضیه (قضیه تابع معکوس). فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ روی یک مجموعه باز شامل a مشتق‌پذیر پیوسته بوده، و $\det f'(a) \neq 0$. آنگاه یک مجموعه باز شامل a، و یک مجموعه باز شامل $f(a)$ هست طوری که $f : V \to W$ یک معکوس پیوسته $f^{-1} : W \to V$ دارد که مشتق‌پذیر است و برای هر $y \in W$ در

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

صدق می‌کند.

برهان. گیریم λ تبدیل خطی $Df(a)$ باشد. λ ناویژه است، چون $\det f'(a) \neq 0$. اکنون $D(\lambda^{-1} \circ f)(a) = D(\lambda^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = \lambda^{-1} \circ Df(a)$ تبدیل خطی همانی

است. اگر قضیه برای $\lambda^{-1} \circ f$ درست باشد، آشکارا برای f نیز درست است. پس فعلاً میتوانیم فرض کنیم λ همانی است. پس هر وقت $f(a+h) = f(a)$، خواهیم داشت

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = \frac{|h|}{|h|} = 1$$

اما

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

این به معنای آن است که نمی‌توانیم برای x به دلخواه نزدیک، اما نه مساوی a، داشته باشیم $f(x) = f(a)$. پس یک مستطیل بسته هست که a را در درون خود دارد و

۱. اگر $x \neq a$ و $x \in U$ آنگاه $f(x) \neq f(a)$.

چون f در یک مجموعه باز شامل a، مشتق‌پذیر پیوسته است، می‌توانیم همچنین فرض کنیم

۲. برای $x \in U$، $\det f'(x) \neq 0$

۳. برای هر i, j و $x \in U$، $|D_j f^i(x) - D_j f^i(a)| < \dfrac{1}{2n^2}$

دقت کنید که با به کار بردن (۳) و لم ۲-۱۰ درباره $g(x) = f(x) - x$، برای $x_1, x_2 \in U$ داریم

$$|f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

چون

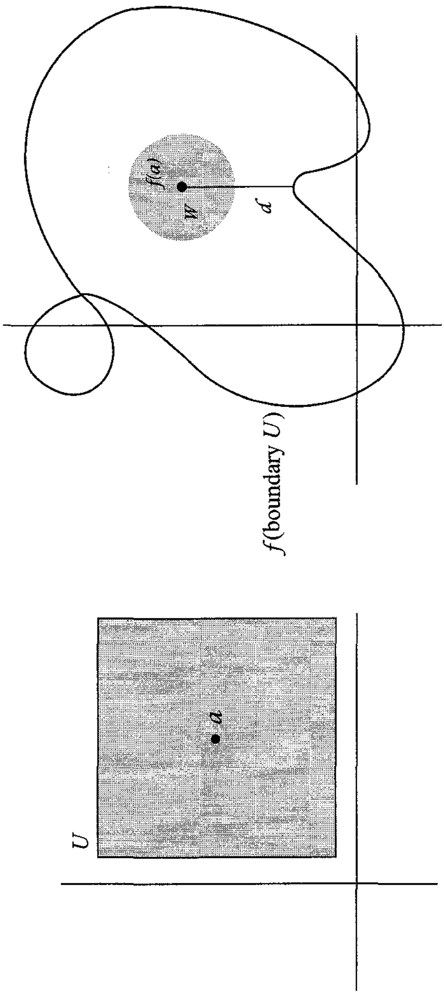
$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|\end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم

۴. برای $x_1, x_2 \in U$، $|x_1 - x_2| \leq 2|f(x_1) - f(x_2)|$.

اکنون $f(\text{مرز } U)$ یک مجموعه فشرده است که شامل $f(a)$ نیست (شکل ۲-۳). پس عدد $d > 0$ هست طوری که برای $x \in (\text{مرز } U)$، $|f(a) - f(x)| \geq d$. فرض کنیم $W = \{y : |y - f(a)| < \frac{d}{2}\}$. اگر $y \in W$ و $x \in U$، آنگاه

۵. $|y - f(a)| < |y - f(x)|$.



شکل ۲-۳

نشان خواهیم داد که برای هر $y \in W$، یک x یکتا در درون U هست که $f(x) = y$. برای اثبات این مطلب، تابع $g : U \to \mathbb{R}$ را که به صورت

$$g(x) = |y - f(x)|^{۲} = \sum_{i=۱}^{n}(y^i - f^i x))^{۲}$$

تعریف می‌شود در نظر بگیرید. این تابع پیوسته است و بنابراین یک می‌نیمم روی U دارد. اگر $x \in$ (مرز U)، آنگاه بنابر (۵) داریم $g(a) < g(x)$. پس می‌نیمم g روی مرز U نیست. بنابر قضیه ۲-۶ یک نقطهٔ x درون U است طوری که برای هر j، $D_j g(x) = ۰$، یعنی

$$\sum_{i=۱}^{n} ۲(y^i - f^i(x)).D_j f^i(x) = ۰ \qquad \text{برای هر } j$$

بنابر (۲)، ماتریس $(D_j f^i(x))$ دارای دترمینان ناصفر است. پس باید برای هر i داشته باشیم $y^i - f^i(x) = ۰$، یعنی $y = f(x)$. این وجود x را ثابت می‌کند. یکتایی فوراً از (۴) نتیجه می‌شود.

اگر $V = ($درون $U) \cap f^{-۱}(W)$ ، نشان داده‌ایم که تابع $f : V \to W$ دارای وارون $f^{-۱} : W \to V$ است. می‌توانیم (۴) را به صورت

۶. برای هر $y_۱, y_۲ \in W$ $\qquad |f^{-۱}(y_۱) - f^{-۱}(y_۲)| \le ۲|y_۱ - y_۲|$

بازنویسی کنیم. این نشان می‌دهد که $f^{-۱}$ پیوسته است.

فقط مشتق‌پذیری $f^{-۱}$ باقی می‌ماند. گیریم $\mu = Df(x)$. نشان خواهیم داد که $f^{-۱}$ در $y = f(x)$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $\mu^{-۱}$ است. همانند برهان قضیه ۲-۲، برای $x_۱ \in V$، داریم

$$f(x_۱) = f(x) + \mu(x_۱ - x) + \varphi(x_۱ - x)$$

که در آن

$$\lim_{x_۱ \to x} \frac{|\varphi(x_۱ - x)|}{|x_۱ - x|} = ۰$$

بنابراین

$$\mu^{-۱}(f(x_۱) - f(x)) = x_۱ - x + \mu^{-۱}(\varphi(x_۱ - x))$$

چون هر $y_1 \in W$ به صورت $f(x_1)$ برای بعضی $x_1 \in V$ است، این می‌تواند به صورت

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + \mu^{-1}(y_1 - y) - \mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))$$

نوشته شود و بنابراین کافی است نشان داده شود که

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)))|}{|y_1 - y|} = 0$$

پس (مسئله ۱-۱۰) کافی است نشان داده شود که

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|y_1 - y|} = 0$$

اکنون

$$\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|} = \frac{|\varphi(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}$$

چون f^{-1} پیوسته است، پس برای $y_1 \to y$، داریم $f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y)$. پس اولین جمله به سمت ۰ میرود. بنابر (۶)، چون جمله دوم کمتر از ۲ است، پس حاصلضرب به صفر نزدیک می‌شود. ■

باید خاطر نشان ساخت که تابع معکوس f^{-1} ممکن است وجود داشته باشد حتی اگر $\det f'(a) = 0$. مثلاً، اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = x^3$ تعریف شود، آنگاه $f'(0) = 0$ اما f دارای معکوس $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ است.

یک مطلب مطمئناً برقرار است: اگر $\det f'(a) = 0$ آنگاه f^{-1} در $f(a)$ نمی‌تواند مشتق‌پذیر باشد. برای اثبات آن دقت کنید که $f \circ f^{-1}(x) = x$. اگر f^{-1} در $f(a)$ مشتق‌پذیر باشد بنابر قاعده زنجیره‌ای $f'(a) \cdot (f^{-1})'(f(a)) = I$، و درنتیجه $\det f'(a) \cdot \det(f^{-1})'(f(a)) = 1$، که تساوی $\det f'(a) = 0$ را نقض می‌کند.

مسئله‌ها

۲-۳۶* گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و $f : A \to \mathbb{R}^n$ یک تابع یک به یک مشتق‌پذیر پیوسته باشد طوری که برای هر x، $\det f'(x) \neq 0$. نشان دهید $f(A)$ یک مجموعه باز است و $f^{-1} : f(A) \to A$ مشتق‌پذیر است. نشان دهید برای هر مجموعه باز $B \subset A$، $f(B)$ باز است.

۲-۳۷ (الف) گیریم $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته باشد. نشان دهید f یک‌به‌یک نیست. راهنمایی. اگر، مثلاً برای تمام (x,y)های داخل یک مجموعه باز A، $D_1f(x,y)\neq 0$ باشد تابع $g:A\to\mathbb{R}^2$ را به‌صورت $g(x,y)=(f(x,y),y)$ در نظر بگیرید.

(ب) این نتیجه را به یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ که در آن $n>m$ است تعمیم دهید.

۲-۳۸ (الف) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $a\in\mathbb{R}$ در $f'(a)\neq 0$ صدق کند، نشان دهید f یک به یک است (روی تمام $\mathbb{R}$).

(ب) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ را به صورت $f(x,y)=(e^x\cos y,e^x\sin y)$ تعریف کنید. نشان دهید برای هر (x,y)، $\det f'(x,y)\neq 0$ اما f یک به یک نیست.

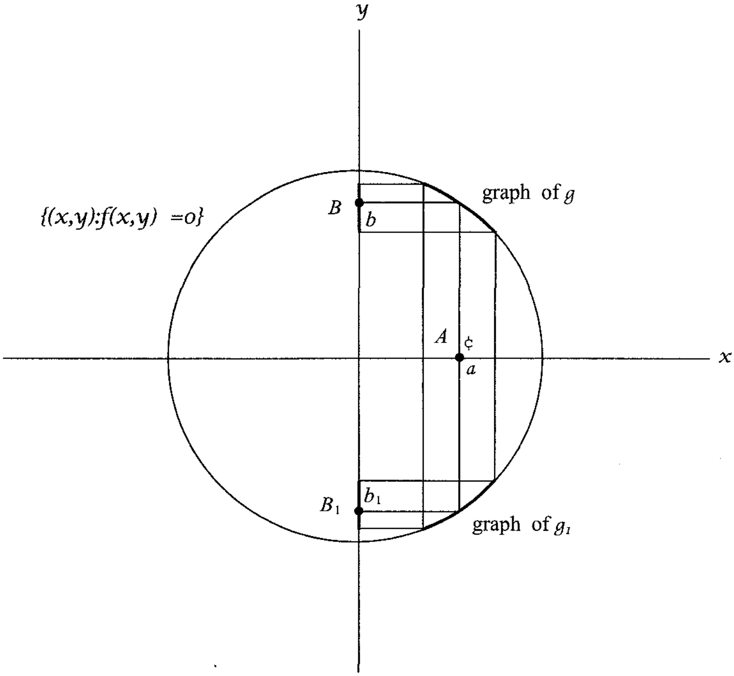
۲-۳۹ از تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که به صورت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تعریف شده، استفاده کنید و نشان دهید که پیوستگی نمی‌تواند از فرض قضیه ۲-۱۱ حذف شود.

تابع ضمنی

تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y)=x^2+y^2-1$ تعریف کنید. اگر (a,b) را چنان اختیار کنیم که $f(a,b)=0$ و $a\neq 1,-1$، آنگاه فاصله‌های باز A شامل a و B شامل b با این ویژگی وجود دارند (شکل ۲-۴): اگر $x\in A$ ، آنگاه یک $y\in B$ منحصر بفرد وجود دارد که $f(x,y)=0$. پس می‌توانیم تابع $g:A\to\mathbb{R}$ را با شرط $g(x)\in B$، و $f(x,g(x))=0$ تعریف کنیم (اگر $b>0$، همانگونه که در شکل ۲-۴ نشان داده شده، $g(x)=\sqrt{1-x^2}$). برای تابع f تعریف شده عدد b_1 وجود دارد که $f(a,b_1)=0$. همچنین یک فاصله B_1 شامل b_1 هست که، وقتی $x\in A$، برای یک $g_1(x)\in B_1$ یکتا، $f(x,g_1(x))=0$ (در اینجا $g_1(x)=-\sqrt{1-x^2}$). هر دو g و g_1، مشتق‌پذیر هستند. این تابعها به کمک رابطهٔ $f(x,y)=0$، به طور **ضمنی** تعریف شده‌اند.



شکل۲-۴

اگر، $a = 1$ یا -1، غیر ممکن است که بتوان تابع g را چنان یافت که در یک فاصله باز شامل a تعریف شده باشد. نیاز به یک شرط ساده داریم تا بتوانیم، در حالت کلی، تصمیم بگیریم که چنین تابعی می‌تواند یافت شود. در حالت کلیتر می‌توانیم این سوال را مطرح کنیم: اگر $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $f(a^1, \ldots, a^n, b) = 0$، چه وقت می‌توانیم برای هر $(x^1, \ldots, x^n)$ نزدیک $(a^1, \ldots, a^n)$ یک y منحصر بفرد نزدیک b بیابیم که $f(x^1, \ldots, x^n, y) = 0$؟ حتی خیلی کلیتر، می‌توانیم امکان حل m معادله n مجهولی، بر حسب متغیرهای $x^1, \ldots, x^n$، را بررسی کنیم: اگر

$$f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad i = 1, \ldots, m$$

و

$$f_i(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^m) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

چه وقت می‌توانیم برای هر $(x^1, \ldots, x^n)$ نزدیک $(a^1, \ldots, a^n)$ یک $(y^1, \ldots, y^m)$ یکتا نزدیک $(b^1, \ldots, b^m)$ بیابیم که در $f(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = 0$ صدق کند؟ قضیه زیر جواب این سؤال است:

۲-۱۲ قضیه (قضیه تابع ضمنی). فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ در یک مجموعه باز شامل (a,b) مشتق‌پذیر پیوسته بوده، و $f(a,b) = ۰$. گیریم M ماتریس $m \times m$،

$$(D_{n+j} f^i(a,b)) \qquad ۱ \leq i,j \leq m$$

باشد. اگر $\det M \neq ۰$، آنگاه یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ شامل a و یک مجموعه باز $B \subset \mathbb{R}^m$ شامل b با ویژگی زیر هست: برای هر $x \in A$ یک $g(x) \in B$ یکتا هست به طوری که $f(x, g(x)) = ۰$. تابع g مشتق‌پذیر است.

برهان. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ را به صورت $F(x,y) = (x, f(x,y))$ تعریف کنید. آنگاه $F'(a,b) = \det M \neq ۰$. بنابر قضیه ۲-۱۱ یک مجموعه باز $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ وجود دارد که شامل $F'(a,b) = (a, ۰)$ است و نیز یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ شامل (a,b) هست، که می‌توانیم آن را به صورت $A \times B$ در نظر بگیریم، طوری که $F : A \times B \to W$ یک معکوس مشتق‌پذیر $h : W \to A \times B$ داشته باشد. بدیهی است که h به صورت $h(x,y) = (x, k(x,y))$ می‌باشد که k یک تابع مشتق‌پذیر است (چون F چنین است). گیریم $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ به صورت $\pi(x,y) = y$ تعریف شده باشد؛ آنگاه $\pi \circ F = f$. بنابراین

$$f(x, k(x,y)) = f \circ h(x,y) = (\pi \circ F) \circ h(x,y)$$
$$= \pi \circ (F \circ h)(x,y) = \pi(x,y) = y$$

پس $f(x, k(x, ۰)) = ۰$؛ به عبارت دیگر می‌توانیم $g(x) = k(x, ۰)$ تعریف کنیم. ■

چون می‌دانیم تابع g مشتق‌پذیر است، می‌توانیم به راحتی مشتق آن را پیدا کنیم. در واقع، چون $f^i(x, g(x)) = ۰$، با گرفتن D_j از هر طرف داریم

$$۰ = D_j f^i(x, g(x)) + \sum_{\alpha=۱}^{m} D_{n+\alpha} f^i(x, g(x)) \cdot D_j g^\alpha(x) \qquad i,j = ۱, \ldots, m$$

چون $\det M \neq ۰$، می‌توان این معادلات را حل کرد تا $D_j g^\alpha(x)$ به دست آید. جواب به $D_j f^i(x, g(x))$، و بنابراین به $g(x)$ بستگی دارد. این اجتناب‌ناپذیر است، چون g یکتا نیست. دوباره تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را که به صورت $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۱$ تعریف شده بود در نظر بگیرید، دیدیم که دو تابع که در $f(x, g(x)) = ۰$ صدق می‌کنند، یعنی $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}, g(x) = -\sqrt{۱ - x^۲}$، وجود دارند. با مشتقگیری از $f(x, g(x)) = ۰$ داریم

$$D_۱ f(x, g(x)) + D_۲ f(x, g(x)) \cdot g'(x) = ۰$$

و یا

$$۲x + ۲g(x) \cdot g'(x) = ۰ \quad , \quad g'(x) = -\frac{x}{g(x)}$$

که در واقع درست است چه برای حالتی که $g(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و چه برای حالتی که $g(x) = -\sqrt{۱ - x^۲}$. تعمیمی از قضیه ۲-۱۲ می‌تواند آورده شود، که بعداً برای فصل ۵ بسیار مهم خواهد بود.

۲-۱۳ قضیه. گیریم $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ در یک مجموعه باز شامل a، مشتق‌پذیر پیوسته باشد که در آن $p \le n$. اگر $f(a) = ۰$ و ماتریس $p \times n$، $(D_j f^i(a))$ رتبه p داشته باشد، آنگاه یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ شامل a و یک تابع مشتق‌پذیر $h : A \to \mathbb{R}^n$ هست که معکوس مشتق‌پذیر دارد و

$$f \circ h(x^۱, \ldots, x^n) = (x^{n-p+۱}, \ldots, x^n)$$

برهان. می‌توانیم f را به صورت یک تابع $f : \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ در نظر بگیریم. اگر $\det M \neq ۰$، آنگاه M ماتریس $p \times p$، $(D_{n-p+j} f^i(a))$، $۱ \le i, j \le p$ است و دقیقاً در موقعیتی هستیم که در اثبات قضیه ۲-۱۲ آمد، و همانگونه که در آن برهان نشان دادیم تابع h وجود دارد که $f \circ h(x^۱, \ldots, x^n) = (x^{n-p+۱}, \ldots, x^n)$.

در حالت کلی، چون $(D_j f^i(a))$ دارای رتبه p است، $j_۱ < \cdots < j_p$ وجود دارند به طوری که ماتریس $(D_j f^i(a))$، $۱ \le i \le p$ و $j = j_۱, \ldots, j_p$ دترمینان ناصفر دارد. اگر $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ جای x^j را عوض کند طوری که $g(x^۱, \ldots, x^n) = (\ldots, x^{j_۱}, \ldots, x^{j_p})$ آنگاه تابع $f \circ g$ به شکلی است که قبلاً دیدیم، بنابراین برای بعضی kها، $((f \circ g) \circ k)(x^۱, \ldots, x^n) = (x^{n-p+۱}, \ldots, x^n)$. اکنون قرار دهید $h = g \circ k$. ■

مسئله‌ها

۲-۴۰ با استفاده از قضیه تابع معکوس، مسئله ۲-۱۵ (پ) را دوباره حل کنید.

۲-۴۱ گیریم $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}$، $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت $g_x(y) = f(x, y)$ تعریف کنید. فرض کنید برای هر x یک y یکتا هست که $g'_x(y) = ۰$؛ این y را با $c(x)$ نشان دهید.

(الف) اگر برای هر (x,y)، $D_{2,2}f(x,y) \neq 0$، نشان دهید c مشتق‌پذیر است و

$$c'(x) = -\frac{D_{2,1}f(x,c(x))}{D_{2,2}f(x,c(x))}$$

راهنمایی. $g'_x(y) = 0$ می‌تواند به صورت $D_2f(x,y) = 0$ نوشته شود.

(ب) نشان دهید اگر $c'(x) = 0$، آنگاه برای برخی yها، داریم

$$D_{2,1}f(x,y) = 0$$

$$D_2f(x,y) = 0$$

(پ) گیریم $f(x,y) = x(y\log y - y) - y\log x$. مقدار

$$\max_{\frac{1}{2}\le x\le 2}\left(\min_{\frac{1}{2}\le y\le 1} f(x,y)\right)$$

را بیابید.

نمادگذاری

این بخش شرحی خلاصه، و نه کامل، از نمادگذاری کلاسیک درباره مشتق جزیی است.

مشتق‌جزیی $D_1f(x,y,z)$، به غیر از دیگر نمادهای کلاسیک، به صورت

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

یا هر نماد مناسب دیگری نشان داده می‌شود. این نمایش ما را وادار می‌کند تا

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v,w)$$

را برای $D_1f(u,v,w)$ به کار بریم، اگر چه نماد

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}(u,v,w) \quad \text{یا} \quad \left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(u,v,w)}$$

یا نماد مشابه دیگری نیز می‌تواند مورد استفاده واقع شود (و در واقع می‌بایستی برای عبارتی مثل $D_1f(7,3,2)$ به کار رود). نمادهای مشابهی برای D_2f و D_3f به کار می‌رود. مشتقات مرتبه بالاتر با نمادهایی شبیه

$$D_2D_1f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x}$$

نشان داده می‌شوند. وقتی $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، نماد ∂ به طور خودکار به d تغییر می‌یابد، پس

$$\frac{d\sin x}{dx} \quad \text{نه} \quad \frac{\partial \sin x}{\partial x}$$

گزارهٔ قضیه ۲-۲ بر حسب نمادهای کلاسیک، معرفی حرفهای مناسب را ناگزیر می‌سازد. محاسبه $D_1(f \circ (g,h))$ به صورت زیر است:

اگر $f(u,v)$ یک تابع باشد و $u = g(x,y)$ و $v = h(x,y)$، آنگاه

$$\frac{\partial f(g(x,y),h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

[نماد $\frac{\partial u}{\partial x}$ به معنای $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$ است و $\frac{\partial}{\partial u}f(u,v)$ به معنای $D_1 f(u,v) = D_1 f(g(x,y),h(x,y))$]. این تساوی غالباً به صورت ساده زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

دقت کنید که f به معنای متفاوتی در هر دو طرف تساوی به کار رفته است.

نماد $\frac{df}{dx}$ تعریفهای زیادی (معمولاً بی‌معنی) از dx و df ارائه می‌دهد، اما هدف اصلی آن بیان تساوی

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

است. اگر $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$، آنگاه df، به زبان کلاسیک، به صورت

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

تعریف می‌شود (با هر معنی که dx و dy دارند).

فصل ۴ تعریفهای دقیقی دارد که ما را قادر می‌سازد تساویهای فوق را به صورت قضیه ثابت کنیم. این یک سئوال است که آیا تعریفهای جدید، نمادگذاری کلاسیک را بهبود می‌بخشد یا نه؟ خواننده خود باید در این مورد تصمیم گیرد.

۳

انتگرال

تعریفهای اساسی

تعریف انتگرال یک تابع $f : A \to \mathbb{R}$، که در آن $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مستطیل بسته است، آنقدر شبیه انتگرال معمولی است که فقط یک دورهٔ سریع از آن ارائه خواهد شد.

یادآوری می‌شود که یک افراز P از بازهٔ بسته $[a, b]$ یک دنبالهٔ متناهی $t_۰, \ldots, t_k$ است که در آن $a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_k = b$. افراز P بازهٔ $[a, b]$ را به k زیر بازهٔ $[t_{i-۱}, t_i]$ تقسیم می‌کند. یک **افراز** مستطیل $[a_۱, b_۱] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ یک خانواده $P = (P_۱, \ldots, P_n)$ است که در آن هر P_i یک افراز بازهٔ $[a_i, b_i]$ است. مثلاً فرض کنید که $P_۱ = t_۰, \ldots, t_k$ یک افراز $[a_۱, b_۱]$، و $P_۲ = s_۰, \ldots, s_l$ یک افراز $[a_۲, b_۲]$ باشد. آنگاه افراز $P = (P_۱, P_۲)$ مستطیل بستهٔ $[a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲]$ را به kl زیرمستطیل تقسیم می‌کند که یک نمونهٔ آن $[t_{i-۱}, t_i] \times [s_{j-۱}, s_j]$ است. در حالت کلی، اگر P_i بازهٔ $[a_i, b_i]$ را به N_i زیربازه تقسیم کند، آنگاه $P = (P_۱, \ldots, P_n)$، $[a_۱, b_۱] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ را به $N = N_۱ \cdot \ldots \cdot N_n$ زیرمستطیل تقسیم می‌کند. این زیرمستطیل‌ها، **زیرمستطیلهای افراز** P گفته می‌شود.

اکنون فرض کنید A یک مستطیل، $f : A \to \mathbb{R}$ یک تابع کراندار، و P یک افراز A باشد. برای هر زیرمستطیل S از این افراز قرار دهید

$$m_s(f) = \inf\{f(x) : x \in S\}$$

$$M_s(f) = \sup\{f(x) : x \in S\}$$

و $v(S)$ را حجم S بگیرید [حجم یک مستطیل $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$، و یا $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$، به صورت $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ تعریف می‌شود]. **مجموعهای بالایی و پایینی** f روی P چنین تعریف می‌شوند

$$U(f, P) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S) \quad \text{و} \quad L(f, P) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S)$$

بدیهی است که $L(f, P) \leq U(f, P)$؛ در واقع یک نامساوی قویتر، گزارهٔ (۳-۲)، برقرار است.

۳-۱ لم. فرض کنید افراز P'، P را تظریف می‌کند (یعنی، هر زیر مستطیل P'، یک زیر مستطیل P نیز هست). آنگاه

$$L(f, P) \leq L(f, P') \quad \text{و} \quad U(f, P') \leq U(f, P)$$

برهان. هر زیر مستطیل S از P به چند زیر مستطیل $S_1, \ldots, S_\alpha$ از P' تقسیم شده است، پس $v(S) = v(S_1) + \cdots + v(S_\alpha)$. اکنون $m_S(f) \leq m_{S_i}(f)$، زیرا مقادیر $f(x)$ برای $x \in S$ شامل مقادیر $f(x)$ برای $x \in S_i$ است (و احتمالاً با مقادیر کوچکتر). پس

$$\begin{aligned} m_S(f) \cdot v(S) &= m_S(f) \cdot v(S_1) + \cdots + m_S(f) \cdot v(S_\alpha) \\ &\leq m_{S_1}(f) \cdot v(S_1) + \cdots + m_{S_\alpha}(f) \cdot v(S_\alpha) \end{aligned}$$

مجموع تمام جملات سمت چپ، روی S، $L(f, P)$ است، در حالی که مجموع جملات سمت راست $L(f, P')$ است. پس $L(f, P) \leq L(f, P')$. برهان برای مجموعهای بالایی به طریق مشابه است. ■

۳-۲ نتیجه. اگر P و P' دو افراز باشند، آنگاه $L(f, P') \leq U(f, P)$.

برهان. گیریم P'' یک افراز باشد که تظریف هر دو افراز P و P' است. (مثلاً، فرض کنید $P'' = (P''_1, \ldots, P''_n)$، که در آن P''_i یک افراز $[a_i, b_i]$ است که هر دو افراز P_i و P'_i را تظریف می‌کند). اکنون

$$L(f, P') \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P)$$

■

از نتیجه ۳-۲ معلوم می‌شود که کوچکترین کران بالایی تمام مجموعهای پایینی f کوچکتر یا مساوی بزرگترین کران پایین تمام مجموعهای بالایی f است. یک تابع $f : A \to \mathbb{R}$ روی مستطیل A **انتگرالپذیر** گفته می‌شود هرگاه f کراندار بوده و $\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}$. این عدد را با $\int_A f$ نشان داده، و **انتگرال** f روی A می‌خوانند. معمولاً نماد $\int_A f(x^۱, \ldots, x^n)dx^۱ \ldots dx^n$ به کار می‌رود. اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$، که در آن $a \leq b$، آنگاه $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$. یک شرط مفید و ساده برای انتگرالپذیری در زیر آمده است.

۳-۳ قضیه. یک تابع کراندار $f : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ یک افراز P از A باشد که $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

برهان. اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه واضح است که $\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}$، و f انتگرالپذیر خواهد بود. از طرف دیگر، اگر f انتگرالپذیر باشد، که درآنصورت $\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\}$، انگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، افرازهای P و P' با شرط $U(f,P) - L(f,P') < \varepsilon$ یافت می‌شوند. اگر P'' را یک تظریف P و P' بگیریم، از لم ۳-۱ نتیجه می‌شود که

$$U(f,P'') - L(f,P'') \leq U(f,P) - L(f,P') < \varepsilon$$

■

در بخشهای بعدی، تابعهای انتگرالپذیر را مشخص خواهیم کرد و روشی را برای محاسبهٔ انتگرالها می‌یابیم. در حال حاضر دو تابع در نظر می‌گیریم، یکی انتگرالپذیر است و دیگری نه.

۱. گیریم $f : A \to \mathbb{R}$ یک تابع ثابت باشد، $f(x) = c$. آنگاه برای هر افراز P و هر زیر مستطیل S داریم $m_S(f) = M_S(f) = c$، که نتیجه می‌دهد $L(f,P) = U(f,P) = \sum_S c \cdot v(S) = c \cdot v(A)$. پس $\int_A f = c \cdot v(A)$.

۲. فرض کنید $f : [۰,۱] \times [۰,۱] \to \mathbb{R}$ چنین تعریف شده باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} ۰ & x \text{ گویا} \\ ۱ & x \text{ ناگویا} \end{cases}$$

اگر P یک افراز باشد، آنگاه هر زیر مستطیل S شامل نقاطی مانند (x,y) است که x گویا می‌باشد، و همچنین شامل نقاطی مانند (x,y) است که x ناگویا است. بنابراین $m_S(f) = ۰$

و $M_S(f) = ۱$. در نتیجه

$$L(f,P) = \sum_S ۰ \cdot v(S) = ۰$$

و

$$U(f,P) = \sum_S ۱ \cdot v(S) = v(۰,۱] \times [۰,۱]) = ۱$$

پس f انتگرالپذیر نیست.

مسئله‌ها

۱-۳ فرض کنید $f : [۰,۱] \times [۰,۱] \to \mathbb{R}$ به صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < \frac{۱}{۲} \\ ۱ & \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید f انتگرالپذیر است و $\int_{[۰,۱]\times[۰,۱]} f = \frac{۱}{۲}$.

۲-۳ فرض کنید $f : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر بوده و بجز در تعدادی متناهی نقطه، $f = g$ باشد. نشان دهید g انتگرالپذیر است و $\int_A f = \int_A g$.

۳-۳ فرض کنید $f, g : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشند.

(الف) برای هر افراز P از A و هر زیر مستطیل S، نشان دهید

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g) \ , \ \ M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g)$$

(ب) نشان دهید $f+g$ انتگرالپذیر است و $\int_A f + g = \int_A f + \int_A g$.

(پ) نشان دهید برای هر ثابت c، $\int_A cf = c\int_A f$.

۴-۳ گیریم $f : A \to \mathbb{R}$، و P یک افراز A باشد. نشان دهید f انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیر مستطیل S، تابع f/S که تحدید f به S است، انتگرالپذیر باشد؛ و در این حالت $\int_A f = \sum_S \int_S f|S$.

۳-۵ گیریم $f, g : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر بوده و $f \leq g$. نشان دهید $\int_A f \leq \int_A g$.

۳-۶ اگر $f : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشد، نشان دهید $|f|$ انتگرالپذیر بوده و $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

۳-۷ گیریم $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ به صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ناگویا } x \\ 0 & \text{ناگویا } y \text{ گویا، } x \\ \dfrac{1}{q} & (p,q) = 1 \text{ با } y = \dfrac{p}{q} \text{ گویا، } x \end{cases}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید f انتگرالپذیر است و $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

اندازه صفر و محتوای صفر

یک زیر مجموعه A از $\mathbb{R}^n$ **اندازهٔ** (nـ بعدی) صفر دارد هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک پوشش A از مستطیلهای بسته، $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$، باشد که $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. بدیهی است که اگر A اندازه صفر داشته و $B \subset A$، آنگاه اندازه B نیز صفر است. خواننده می‌تواند بررسی کند که می‌توان در تعریف اندازه صفر، از مستطیلهای باز به جای مستطیلهای بسته استفاده کرد.

یک مجموعه با تعدادی متناهی نقطه آشکارا اندازه صفر دارد. اگر A تعداد بی‌نهایت نقطه داشته باشد که بتوانند به صورت دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ مرتب شوند آنگاه A نیز اندازه صفر دارد، چرا که اگر $\varepsilon > 0$، می‌توانیم مستطیل بسته U_i را چنان انتخاب کنیم که شامل a_i باشد و $v(U_i) < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$. آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

مجموعه تمام عددهای گویای بین 0 و 1 یک مثال مهم و جالب از یک مجموعه بی‌نهایت عضوی است که عنصرهایش می‌توانند به صورت یک دنباله مرتب شوند. برای اینکار، کسرها را

به ترتیب زیر، در جهت پیکانها، مرتب کنید (تکراری‌ها و اعداد بزرگتر از یک را حذف کنید):

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} \\[2ex]
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \\[2ex]
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} \\[2ex]
\frac{0}{4} & & & &
\end{array}$$

یک تعمیم مهم این ایده در زیر آمده است.

۳-۴ قضیه. اگر $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ و هر A_i اندازه 0 داشته باشد، آنگاه A اندازه 0 دارد.

برهان. گیریم $\varepsilon > 0$. چون A_i اندازه 0 دارد، یک پوشش A_i از مستطیلهای بسته، $\{U_{i,1}, U_{i,2}, U_{i,3}, \ldots\}$، هست طوری که $\sum_{j=1}^{\infty} v(U_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. اکنون خانواده تمام $U_{i,j}$ها یک پوشش A است. با در نظر گرفتن آرایهٔ

$$\begin{array}{cccc}
U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \ldots \\[2ex]
U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & \ldots \\[2ex]
U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} & \ldots
\end{array}$$

می‌بینیم که این مجموعه می تواند به صورت یک دنباله $V_1, V_2, V_3, \ldots$ مرتب شود. بدیهی است که $\sum_{i=1}^{\infty} v(V_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. ■

یک زیر مجموعهٔ A از $\mathbb{R}^n$ دارای **محتوای** 0 (n-بعدی) است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک پوشش متناهی A، $\{U_1, \ldots, U_n\}$، از مستطیلهای بسته باشد طوری که $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$.

اگر A محتوای ۰ داشته باشد، آنگاه A به وضوح دارای اندازه ۰ است. یادآوری می‌شود که، مستطیلهای باز می توانند به جای مستطیلهای بسته در تعریف به کار روند.

۳-۵ قضیه. اگر $a < b$، آنگاه $[a, b] \subset \mathbb{R}$ محتوای صفر ندارد. درواقع، اگر $\{U_1, \ldots, U_n\}$ یک پوشش A از بازه‌های بسته باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) \geq b - a$.

برهان. بدیهی است که می‌توانیم فرض کنیم $U_i \subset [a, b]$. گیریم $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ تمام نقاط انتهایی U_iها باشند. آنگاه هر $v(U_i)$ مجموع تعدادی معین از $t_j - t_{j-1}$ها است. به علاوه، هر $[t_{j-1}, t_j]$ لااقل در یکی از U_iها است (مثلاً، هرکدام که شامل یک نقطه درونی $[t_{j-1}, t_j]$ باشد)، پس $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) \geq \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) = b - a$. ■

اگر $a < b$ آنگاه واضح است که $[a, b]$ اندازه صفر ندارد. این از قضیه زیر نتیجه می‌شود.

۳-۶ قضیه. اگر A فشرده و دارای اندازه ۰ باشد، آنگاه A محتوای ۰ دارد.

برهان. گیریم $\varepsilon > 0$. چون A اندازه ۰ دارد، یک پوشش A از مستطیلهای باز، $\{U_1, U_2, \ldots\}$، هست که $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. چون A فشرده است، تعدادی متناهی $U_1, \ldots, U_n$ از U_iها هست که A را می‌پوشانند و مطمئناً $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. ■

اگر A فشرده نباشد، نتیجهٔ قضیهٔ ۳-۶، درست نیست. مثلاً، A را مجموعهٔ اعداد گویای بین ۰ و ۱ در نظر بگیرید؛ آنگاه A اندازه ۰ دارد. اکنون فرض کنید $\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\}$، A را بپوشاند. پس A مشمول مجموعهٔ بسته $[a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$ است، و بنابراین $[0, 1] \subset [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_n, b_n]$. از قضیه ۳-۵ نتیجه می‌شود که برای چنین پوششی $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \geq 1$، و در نتیجه A محتوای ۰ ندارد.

مسئله‌ها

۳-۸ ثابت کنید که اگر برای هر i، $a_i < b_i$، $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ محتوای ۰ ندارد

۳-۹ (الف) نشان دهید یک مجموعه بیکران محتوای ۰ ندارد.

(ب) مثالی از یک مجموعه بسته بیاورید که اندازه ۰ داشته باشد ولی محتوای ۰ نداشته باشد.

۳-۱۰ (الف) اگر C مجموعه‌ای با محتوای ۰ باشد، نشان دهید مرز C محتوای ۰ دارد.

(ب) مثالی از یک مجموعه کراندار C بیاورید که اندازه ۰ داشته باشد ولی مرز C اندازه ۰ نداشته باشد.

۳-۱۱ گیریم A مجموعهٔ مسئله ۱-۱۸ باشد. اگر $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < 1$، نشان دهید مرز A اندازه ۰ ندارد.

۳-۱۲ گیریم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع افزایشی باشد. نشان دهید $\{x :$ f در x ناپیوسته است$\}$ اندازه ۰ دارد. راهنمایی. مسئله ۱-۳۰ را به کار برده و نشان دهید $\{x : o(f,x) > \frac{1}{n}\}$ برای هر n متناهی است.

۳-۱۳* (الف) نشان دهید خانواده تمام مستطیلهای $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$، با a_i و b_i گویا، می‌تواند به صورت یک دنباله مرتب شود.

(ب) اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه دلخواه، و $\mathcal{O}$ یک پوشش باز A باشد، نشان دهید یک دنباله $U_1, U_2, U_3, \ldots$ از عضوهای $\mathcal{O}$ است که A را می‌پوشانند. راهنمایی. برای هر $x \in A$ یک مستطیل $B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ هست که تمام a_iها و b_iها گویا باشند و برای برخی $U \in \mathcal{O}$، $x \in B \subset U$.

تابعهای انتگرالپذیر

یادآوری می‌شود که $o(f,x)$ تغییرات f در x را نشان می‌دهد.

۳-۷ لم. گیریم A یک مستطیل بسته و $f : A \to \mathbb{R}$ یک تابع کراندار باشد، طوری که برای هر $x \in A$، $o(f,x) < \varepsilon$. آنگاه یک افراز P از A است که $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \cdot v(A)$.

برهان. برای هر $x \in A$ یک مستطیل بسته U_x، که x در درون آن است، هست که $M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \varepsilon$. چون A فشرده است، تعدادی متناهی از U_xها، $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$، هست که A را می‌پوشاند. فرض کنیم P افرازی از A باشد که هر زیر مستطیل S از P مشمول

برخی از U_{x_i}ها باشد. آنگاه برای هر زیر مستطیل S از P، $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$، و در نتیجه

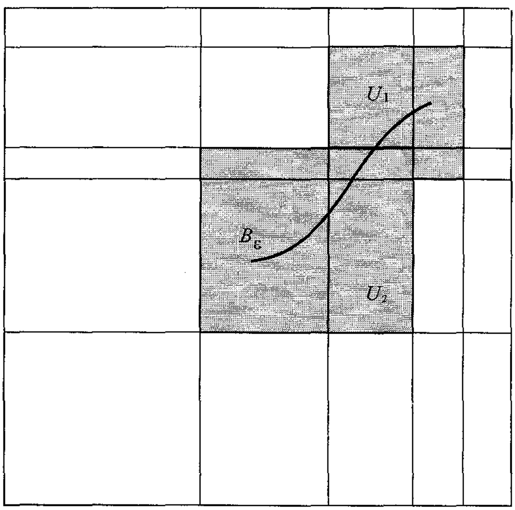
$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < \varepsilon \cdot v(A)$$

■

۸-۳ قضیه. گیریم A یک مستطیل بسته و $f : A \to \mathbb{R}$ یک تابع کراندار باشد. $B = \{x : f$ در x پیوسته نیست$\}$ بگیرید. آنگاه f انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر B از اندازه ۰ باشد.

برهان. نخست فرض کنید B از اندازه ۰ باشد. گیریم $\varepsilon > 0$ و $B_\varepsilon = \{x : o(f,x) \geq \varepsilon\}$. آنگاه $B_\varepsilon \subset B$، که نتیجتاً B_ε از اندازه ۰ است. چون B_ε فشرده است (قضیه ۱-۱۱)، B_ε محتوای ۰ دارد. پس یک خانواده متناهی $U_1, \ldots, U_n$ از مستطیلهای بسته هست که درونشان B_ε را می‌پوشانند طوری که $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. گیریم P افرازی از A باشد که هر زیر مستطیل S از P در یکی از دو گروه زیر است (شکل ۳-۱ را ببینید):

(۱) S_1، که شامل زیرمستطیلهای S است طوری که برای برخی از iها، $S \subset U_i$.



شکل۳-۱ مستطیلهای خاکستری در S_1 هستند.

(۲) $\mathcal{S}_۲$، که شامل زیر مستطیلهای S است با شرط $S \cap B_\varepsilon = \varnothing$.

گیریم برای $x \in A$، $|f(x)| < M$. آنگاه برای هر S، $M_S(f) - m_S(f) < ۲M$. بنابراین

$$\sum_{S\in\mathcal{S}_۱} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < ۲M \sum_{i=۱}^{n} v(U_i) < ۲M\varepsilon$$

اکنون، اگر $S \in \mathcal{S}_۲$، آنگاه برای $x \in S$، $o(f, x) < \varepsilon$. بنابر لم ۳-۷ یک تظریف P' از P هست که برای $S \in \mathcal{S}_۲$،

$$\sum_{S'\subset S} [M_{S'}(f) - m_{s'}(f)] \cdot v(S') < \varepsilon \cdot v(S)$$

پس

$$\begin{aligned} U(f, P') - L(f, P') &= \sum_{S'\subset S\in\mathcal{S}_۱} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') \\ &\quad + \sum_{S'\subset S\in\mathcal{S}_۲} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') \\ &< ۲M\varepsilon + \sum_{S\in\mathcal{S}_۲} \varepsilon \cdot v(S) \\ &\le ۲M\varepsilon + \varepsilon \cdot v(A) \end{aligned}$$

چون M و $v(A)$ ثابت هستند، این نشان می‌دهد که می‌توانیم افراز P' را چنان بیابیم که $U(f, P') - L(f, P')$ به مقدار دلخواه کوچک باشد. پس f انتگرالپذیر است.

بر عکس، فرض کنید f انتگرالپذیر است. چون $B = B_۱ \cup B_{\frac{۱}{۲}} \cup B_{\frac{۱}{۳}} \cup \ldots$، کافی است ثابت شود که هر $B_{\frac{۱}{n}}$ اندازه صفر دارد (قضیه ۳-۴). در واقع نشان خواهیم داد که هر $B_{\frac{۱}{n}}$ محتوای ۰ دارد (چون $B_{\frac{۱}{n}}$ فشرده است، هر دو مطلب هم ارز هستند).

گیریم $\varepsilon > ۰$، P را افرازی از A بگیرید که $U(f, P) = L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}$. گیریم S خانواده زیرمستطیلهای S از P باشد که $B_{\frac{۱}{n}}$ را قطع می‌کند. اکنون S یک پوشش $B_{\frac{۱}{n}}$ است.

اگر $S \in \mathcal{S}$، آنگاه $M_S(f) - m_S(f) \geq \frac{1}{n}$. پس

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n} \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} v(S) &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) \\
&\leq \sum_{S} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) \\
&< \frac{\varepsilon}{n}
\end{aligned}
$$

و در نتیجه $\sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) < \varepsilon$. ■

تا کنون فقط درباره انتگرال تابعها روی مستطیلها بحث کرده‌ایم. انتگرال روی مجموعه‌های دیگر به راحتی به این نوع انتگرالگیری باز می‌گردد. اگر $C \subset \mathbb{R}^n$، **تابع مشخصه** χ_C چنین تعریف می‌شود

$$
\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & x \notin C \\ 1 & x \in C \end{cases}
$$

اگر برای یک مستطیل بسته A، $C \subset A$، و $f : A \to \mathbb{R}$ کراندار باشد، آنگاه $\int_C f$ به صورت $\int_A f \cdot \chi_C$ تعریف می‌شود، به شرطی که $f \cdot \chi_C$ انتگرالپذیر باشد. مطمئناً (مسئله ۳-۱۴) اگر f و χ_C انتگرالپذیر باشند، انتگرال خوشتعریف خواهد بود.

۳-۹ قضیه. تابع $\chi_C : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر مرز C اندازه ۰ داشته باشد (و در نتیجه محتوای ۰).

برهان. اگر x در درون C باشد، آنگاه یک مستطیل باز U هست که $x \in U \subset C$. پس روی U، $\chi_C = 1$ و χ_C در x پیوسته می‌شود. به همین ترتیب، اگر x خارج C باشد، یک مستطیل باز U هست که $x \in U \subset \mathbb{R}^n - C$. پس روی U، $\chi_C = 0$ و χ_C در x پیوسته می‌شود. اکنون اگر x یک نقطه مرزی C باشد، آنگاه برای هر مستطیل باز U شامل x، یک $y_1 \in U \cap C$ هست که $\chi_C(y_1) = 1$ و $y_2 \in U \cap (\mathbb{R}^n - C)$ هست که $\chi_C(y_2) = 0$. پس χ_C در x پیوسته نیست. بنابراین، مرز $C = \{x : \text{در } x \text{ پوسته نیست } \chi_C\}$، و نتیجه از قضیه ۳-۸ به دست می‌آید. ■

یک مجموعه کراندار C که مرزش اندازه ۰ دارد، **ژوردن - اندازه‌پذیر** گفته می‌شود. انتگرال $\int_C 1$ **محتوای** (n-بعدی) C، یا **حجم** (nـبعدی) C گفته می‌شود. طبیعتاً حجم یک‌ـبعدی، **طول**، و حجم دو بعدی، **مساحت**، گفته می‌شود.

مسئله ۳-۱۱ نشان می‌دهد که ممکن است یک مجموعه باز C ژوردن‌ـاندازه‌پذیر نباشد؛ بنابراین $\int_C f$ لزوماً تعریف نشده است حتی اگر C باز و f پیوسته باشد. این حالت ناخوشایند بزودی برطرف می‌شود.

مسئله‌ها

۳-۱۴ نشان دهید که اگر $f, g : A \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشند، fg نیز هست.

۳-۱۵ نشان دهید اگر C محتوای ۰ داشته باشد، آنگاه برای برخی از مستطیلهای بسته A، $C \subset A$، و C ژوردن - اندازه‌پذیر است و $\int_A \chi_C = 0$.

۳-۱۶ مثالی از یک مجموعه کراندار C با اندازه ۰ بیاورید که $\int_A \chi_C$ وجود نداشته باشد.

۳-۱۷ اگر C مجموعه کرانداری از اندازه ۰ باشد و $\int_A \chi_C$ وجود داشته باشد، نشان دهید $\int_A \chi_C = 0$. راهنمایی. نشان دهید برای هر افراز P، $L(f, P) = 0$. از مسئله ۳-۸ استفاده کنید.

۳-۱۸ اگر $f : A \to \mathbb{R}$ نامنفی باشد و $\int_A f = 0$، نشان دهید $\{x : f(x) \neq 0\}$ اندازه ۰ دارد. راهنمایی. ثابت کنید $\{x : f(x) > \frac{1}{n}\}$ محتوای ۰ دارد.

۳-۱۹ گیریم U مجموعه باز مسئله ۳-۱۱ باشد. نشان دهید اگر $f = \chi_U$ بجز روی مجموعه‌ای با اندازه ۰، آنگاه f روی $[0, 1]$ انتگرالپذیر نیست.

۳-۲۰ نشان دهید هر تابع افزایشی $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ انتگرالپذیر است.

۳-۲۱ اگر A یک مستطیل بسته باشد، نشان دهید $C \subset A$ ژوردن-اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$، افراز P از A باشد که $\sum_{S \in \mathcal{S}_1} v(S) - \sum_{S \in \mathcal{S}_2} v(S) < \varepsilon$، که $\mathcal{S}_1$ شامل تمام زیر مستطیلهایی است که C را قطع می‌کنند و $\mathcal{S}_2$ شامل تمام زیرمستطیلهایی است که مشمول C هستند.

۳-۲۲* اگر A یک مجموعه ژوردن-اندازه‌پذیر باشد و $\varepsilon > 0$، نشان دهید مجموعه فشرده ژوردن-اندازه‌پذیر $C \subset A$ هست که $\int_{A-C} 1 < \varepsilon$.

قضیه فوبینی

مسئله محاسبه انتگرالها، به یک معنی، با توجه به قضیه ۳-۱۰ که محاسبه روی یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^n$ را به محاسبه انتگرالها روی فاصله‌های بسته در $\mathbb{R}$ تبدیل می‌کند، حل شده است. این قضیه معمولاً به خاطر اهمیتش به قضیه فوبینی مشهور است، اگر چه کم و بیش حالت خاصی از قضیه‌ای است که توسط فوبینی خیلی بعد از شناخته شدن قضیه ۳-۱۰ ثابت شده بود.

ایده اصلی قضیه به بهترین‌وجه (شکل ۳-۲) برای یک تابع پیوسته مثبت $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ به تصویر کشیده شده است. گیریم $t_0, \ldots, t_n$ یک افراز $[a,b]$ باشد که $[a,b] \times [c,d]$ را به n نوار توسط پاره‌خطهای $\{t_i\} \times [c,d]$ تقسیم می‌کند. اگر g_x به صورت $g_x(y) = f(x,y)$ تعریف شود، آنگاه مساحت ناحیه زیر نمودار f و بالای $\{x\} \times [c,d]$ برابر است با

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$$

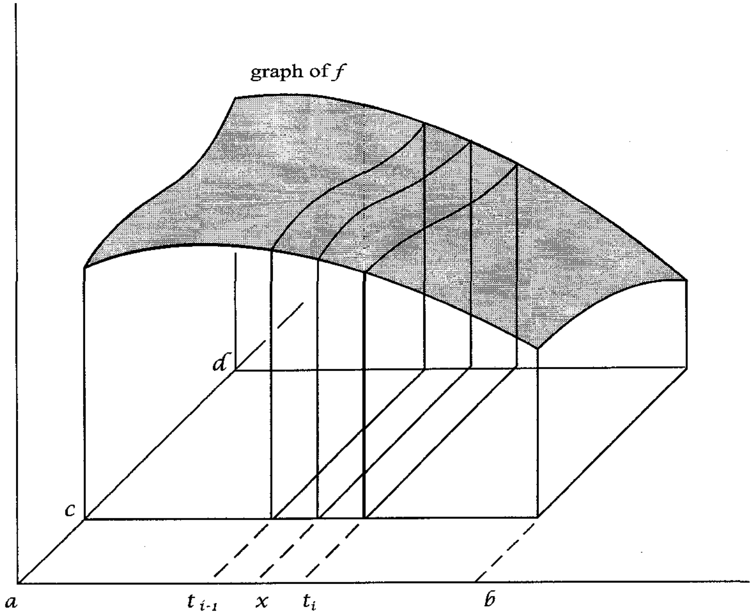
بنابراین حجم ناحیه زیر نمودار f و بالای $[t_{i-1}, t_i] \times [c,d]$، برای هر $x \in [t_{i-1}, t_i]$، تقریباً مساوی $(t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x,y)dy$ است. پس

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f$$

برای $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$، تقریباً مساوی $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i,y)dy$ است.

از طرف دیگر، مجموعهایی شبیه این در تعریف $\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$ ظاهر می‌شود. پس، اگر h به صورت $h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)dy$ تعریف شود، می‌توان انتظار داشت که h روی $[a,b]$ انتگرالپذیر باشد و

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$



شکل ۳-۲

در واقع می‌توان نشان داد وقتی که f پیوسته است، این مطلب درست است، اما در حالت کلی وضعیت دشوار می‌شود. مثلاً فرض کنید مجموعه پیوستگیهای f، برای برخی از $x_\circ \in [a,b]$، $\{x_\circ\} \times [c,d]$ باشد. آنگاه f روی $[a,b] \times [c,d]$ انتگرالپذیر است. اما ممکن است که حتی $\int_c^d f(x_\circ, y)dy$ تعریف نشده باشد. بنابراین صورت قضیه فوبینی کمی عجیب به نظر می‌رسد، ولی نکاتی درباره حالتهای متنوع و خاصی بعد از آن می‌آید که صورتهای ساده‌تر را ممکن می‌سازد.

به کمی نمادگذاری نیاز داریم. اگر $f : A \to \mathbb{R}$ یک تابع کراندار روی یک مستطیل بسته باشد، آنگاه، f چه انتگرالپذیر باشد و چه نباشد، کوچکترین کران بالای تمام مجموعهای پایینی و بزرگترین کران پایین تمام مجموعهای بالایی، هردو، وجود دارند. آنها را **انتگرالهای پایینی و بالایی** f روی A می‌نامند، و با

$$\mathbf{L}\int_A f \quad , \quad \mathbf{U}\int_A f$$

نشان می‌دهند.

۳-۱۰ قضیه (قضیه فوبینی). گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ و $B \subset \mathbb{R}^m$ مستطیلهای بسته باشند، و $f : A \times B \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشد. برای $x \in A$، $g_x : B \to \mathbb{R}$ به صورت $g_x(y) = f(x,y)$ تعریف می‌شود و اگر

$$\mathscr{L}(x) = \mathbf{L}\int_B g_x = \mathbf{L}\int_B f(x,y)dy,$$

$$\mathscr{U}(x) = \mathbf{U}\int_B g_x = \mathbf{U}\int_B f(x,y)dy$$

آنگاه $\mathscr{L}$ و $\mathscr{U}$ روی A انتگرالپذیر هستند و

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathscr{L} = \int_A \left(\mathbf{L}\int_B f(x,y)dy\right)dx$$

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathscr{U} = \int_A \left(\mathbf{U}\int_B f(x,y)dy\right)dx$$

(انتگرالهای سمت راست را **انتگرالهای مکرر** f می‌گویند).

برهان. گیریم P_A یک افراز A و P_B یک افراز B باشد. اینها با هم یک افراز P از $A \times B$ را می‌سازند که در آن هر زیر مستطیل به فرم $S_A \times S_B$ است، که S_A یک زیر مستطیل افراز P_A، و S_B یک زیرمستطیل افراز P_B است. پس

$$\begin{aligned} L(f,P) = \sum_S m_S(f)\cdot v(S) &= \sum_{S_A,S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_A\times S_B) \\ &= \sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B)\right)\cdot v(S_A) \end{aligned}$$

حال اگر $x \in S_A$ آنگاه به وضوح $m_{S_A\times S_B}(f) \le m_{S_B}(g_x)$. در نتیجه برای $x \in S_A$ داریم

$$\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B) \le \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x)\cdot v(S_B) \le \mathbf{L}\int_B g_x = \mathscr{L}(x)$$

بنابراین

$$\sum_{S_A}\left(\sum_{S_B} m_{S_A\times S_B}(f)\cdot v(S_B)\right)\cdot v(S_A) \le L(\mathscr{L},P_A)$$

پس خواهیم داشت

$$L(f,P) \leq L(\mathscr{L},P_A) \leq U(\mathscr{L},P_A) \leq U(\mathscr{U},P_A) \leq U(f,P)$$

که اثبات نامساوی آخر کاملاً شبیه اثبات اولی است. چون f انتگرالپذیر است،

$$\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\} = \int_{A\times B} f$$

از اینرو

$$\sup\{L(\mathscr{L},P_A)\} = \inf\{U(\mathscr{L},P_A)\} = \int_{A\times B} f$$

به عبارت دیگر، $\mathscr{L}$ روی A انتگرالپذیر است و $\int_{A\times B} f = \int_A \mathscr{L}$. به طریق مشابه گزاره فوق برای $\mathscr{U}$ از نامساویهای زیر منتج می‌شود

$$L(f,P) \leq L(\mathscr{L},P_A) \leq L(\mathscr{U},P_A) \leq U(\mathscr{U},P_A) \leq U(f,P)$$

■

نکته‌ها. ۱. برهان مشابهی نشان می‌دهد که

$$\int_{A\times B} f = \int_B \left(\mathbf{L}\int_A f(x,y)dx\right)dy = \int_B \left(\mathbf{U}\int_A f(x,y)dx\right)dy$$

این انتگرالها را **انتگرالهای مکرر** برای f در جهت عکس آنچه در صورت قضیه بیان شد، می‌گویند. همانگونه که در مسایل مشاهده خواهید کرد، تعویض ترتیب انتگرالگیری نتایج بسیاری در بر دارد.

۲. در عمل، معمولاً g_xها انتگرالپذیرند لذا $\int_{A\times B} f = \int_A(\int_B f(x,y)dy)dx$. مطمئناً وقتی f پیوسته است، چنین حالتی امکانپذیر است.

۳. بدترین بی‌نظمی که ممکن است پیش بیاید این است که g_x برای تعدادی متناهی از $x \in A$ انتگرالپذیر نباشد. در این حالت $\mathscr{L}(x) = \int_B f(x,y)dy$، برای همه بجز تعدادی متناهی x. چون اگر وقتی $\mathscr{L}$ در تعدادی متناهی از نقاط دوباره تعریف شود $\int_A \mathscr{L}$ تغییر نمی‌کند، پس می‌توانیم بنویسیم $\int_{A\times B} f = \int_A(\int_B f(x,y)dy)dx$، به شرطی که $\int_B f(x,y)dy$ وقتی وجود ندارد به دلخواه تعریف شود مثلاً ۰.

۴. حالتهایی وجود دارند که این عمل امکانپذیر نیست و قضیه ۳-۱۰ باید به همان صورتی که عنوان شده به کار رود. گیریم $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ چنین تعریف شود

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ ناگویا} \\ 1 & x \text{ گویا و } y \text{ ناگویا} \\ 1 - \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1 \text{ و } y \text{ گویا} \end{cases}$$

آنگاه f انتگرالپذیر است و $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1$. اکنون اگر x ناگویا باشد، $\int_0^1 f(x, y)dy = 1$، و اگر x گویا باشد انتگرال وجود ندارد. پس اگر وقتی انتگرال وجود ندارد، $h(x) = \int_0^1 f(x, y)dy$ مساوی 0 قرار داده شود، h انتگرالپذیر نیست.

۵. اگر $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n \times b_n]$ و $f : A \to \mathbb{R}$ به قدر کافی خوب باشد، می‌توانیم قضیه فوبینی را مکرراً به کار بریم

$$\int_A f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \ldots, x^n)dx^1 \right) \ldots \right) dx^n$$

۶. اگر $C \subset A \times B$، می‌توان از قضیه فوبینی برای محاسبهٔ $\int_C f$ استفاده کرد زیرا بنابر تعریف $\int_C f = \int_{A\times B} \chi_C f$. مثلاً فرض کنید

$$C = [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(x, y) : |(x, y)| < 1\}$$

آنگاه

$$\int_C f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \chi_C(x, y)dy \right) dx$$

اکنون

$$\chi_C(x, y) = \begin{cases} 1 & y > \sqrt{1 - x^2} \text{ یا } y < -\sqrt{1 - x^2} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در این صورت

$$\int_{-1}^1 f(x, y) \cdot \chi_C(x, y)dy = \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y)dy$$

در حالت کلی، اگر $C \subset A \times B$، مشکل اصلی یافتن عبارتی برای $\int_C f$، تعیین $C \cap (\{x\} \times B)$ برای $x \in A$ است. اگر برای $y \in B$، $C \cap (A \times \{y\})$ راحتتر تعیین شود، می‌توان از انتگرال مکرر زیر استفاده نمود

$$\int_C f = \int_B \left(\int_A f(x,y) \cdot \chi_C(x,y) dx \right) dy$$

مسئله‌ها

۳-۲۳ گیریم $C \subset A \times B$ مجموعه‌ای با محتوای صفر باشد. گیریم $A' \subset A$ مجموعهٔ تمام $x \in A$ باشد که $\{y \in B : (x,y) \in C\}$ محتوای صفر ندارد. نشان دهید A' مجموعه‌ای با اندازه صفر است. راهنمایی. χ_C انتگرالپذیر است و $\int_{A \times B \times C} = \int_A \mathscr{U} = \int_A \mathscr{L}$، پس $\int_A \mathscr{U} - \mathscr{L} = ۰$.

۳-۲۴ گیریم $C \subset [۰,۱] \times [۰,۱]$ اجتماع تمام $\{\frac{p}{q}\} \times [۰, \frac{۱}{q}]$ باشد که $\frac{p}{q}$ عدد گویایی در $[۰,۱]$ با $(p,q) = ۱$ است. با استفاده از C نشان دهید که لغت «اندازه» نمی‌تواند جایگزین «محتوا» در مسئله ۳-۲۳ شود.

۳-۲۵ با استقرا روی n نشان دهید که $[a_۱, b_۱] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ مجموعه‌ای با اندازه صفر (یا محتوای صفر) نیست هرگاه برای هر i، $a_i < b_i$.

۳-۲۶ گیریم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر و نامنفی باشد و

$$A_f = \{(x,y) : a \leq x \leq b, ۰ \leq y \leq f(x)\}$$

نشان دهید A_f ژوردان - اندازه‌پذیر است و مساحت آن $\int_a^b f$ است.

۳-۲۷ اگر $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان دهید

$$\int_a^b \int_a^y f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x,y) dy dx$$

راهنمایی. $\int_C f$ را به دو طریق متفاوت برای یک مجموعه مناسب $C \subset [a,b] \times [a,b]$ محاسبه کنید.

۳-۲۸* با استفاده از قضیه فوبینی برهان ساده‌ای برای $D_{۱,۲} f = D_{۲,۱} f$ وقتی که پیوسته هستند ارائه دهید. راهنمایی. اگر $D_{۱,۲} f(a) - D_{۲,۱} f(a) > ۰$، یک مستطیل A شامل a هست که روی A، $D_{۱,۲} - D_{۲,۱} f > ۰$.

۳-۲۹ با استفاده از قضیه فوبینی عبارتی برای حجم زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۳$ که از دوران یک مجموعه ژوردان - اندازه‌پذیر در صفحه yz حول محور z حاصل می‌شود، به دست آورید.

۳-۳۰ گیریم C مجموعهٔ آمده در مسئله ۱-۱۷ باشد. نشان دهید

$$\int_{[۰,۱]}\left(\int_{[۰,۱]}\chi_C(x,y)dx\right)dy=\int_{[۰,۱]}\left(\int_{[۰,۱]}\chi_C(y,x)dy\right)dx=۰$$

اما $\int_{[۰,۱]\times[۰,۱]}\chi_C$ وجود ندارد.

۳-۳۱ اگر $A=[a_۱,b_۱]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ و $f:A\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $F:A\to\mathbb{R}$ را به صورت

$$F(x)=\int_{[a_۱,x^۱]\times\ldots\times[a_n,x^n]}f$$

تعریف کنید. $D_iF(x)$، برای x در درون A، چیست؟

۳-۳۲* گیریم $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ پیوسته، و $D_۲f$ پیوسته باشد. قرار دهید

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

قاعده لایپ‌نیتز را ثابت کنید: $F'(y)=\int_a^b D_۲f(x,y)dx$. راهنمایی.

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\left(\int_c^y D_۲f(x,y)dy+f(x,c)\right)dx$$

(اثبات نشان می‌دهد که پیوستگی f می‌تواند با شرط ضعیفتری جایگزین گردد).

۳-۳۳ اگر $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ و $D_۲f$ پیوسته باشند، تعریف کنید

$$F(x,y)=\int_a^x f(t,y)dt$$

(الف) $D_۱F$ و $D_۲F$ را بیابید.

(ب) اگر $G(x)=\int_a^{g(x)}f(t,x)dt$، $G'(x)$ را بیابید.

۳-۳۴* گیریم $g_۱,g_۲:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ پیوسته مشتقپذیر بوده و $D_۲g_۱=D_۱g_۲$. مانند مسئله ۲-۲۱ قرار دهید

$$f(x,y)=\int_۰^x g_۱(t,۰)dt+\int_۰^y g_۲(x,t)dt$$

نشان دهید $D_۱f(x,y)=g_۱(x,y)$.

۳-۳۵* (الف) گیریم $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یکی از تبدیلهای خطی زیر باشد:

$$\begin{cases} g(e_i) = e_i & i \neq j \\ g(e_j) = ae_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(e_i) = e_i & i \neq j \\ g(e_j) = e_j + e_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(e_k) = e_k & k \neq i, j \\ g(e_i) = e_j \\ g(e_j) = e_j \end{cases}$$

اگر U مستطیل باشد، نشان دهید حجم $g(U)$، مساوی $|\det g| \cdot v(U)$ است.

(ب) ثابت کنید $|\det g| \cdot v(U)$ حجم $g(U)$ برای هر تبدیل خطی $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ است.

راهنمایی. اگر $\det g \neq ۰$، آنگاه g ترکیب تبدیلهای خطی قسمت (الف) است.

۳-۳۶ (اصل کاوالیری). گیریم A و B زیرمجموعه‌های ژوردان-اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^۳$ باشند. گیریم $A_c = \{(x,y) : (x,y,c) \in A\}$، و B_c را به طریق مشابه تعریف کنید. فرض کنید A_c و B_c ژوردان ـ اندازه‌پذیر هستند و مساحت مساوی دارند. نشان دهید A و B یک حجم دارند.

افراز واحد

در این بخش ابزار بسیار مهمی را در نظریه انتگرال معرفی می‌کنیم.

۳-۱۱ قضیه. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{O}$ یک پوشش باز A باشد. آنگاه یک خانواده Φ از تابعهای C^∞، مانندφ ، هست که روی یک زیرمجموعه باز مشمول A تعریف شده، و دارای ویژگیهای زیر است:

(۱) برای هر $x \in A$، $۰ \leq \varphi(x) \leq ۱$

(۲) برای هر $x \in A$ یک مجموعه باز V شامل x هست طوری که هر $\varphi \in \Phi$، بجز تعدادی متناهی، روی V صفر است.

(۳) برای هر $x \in A$ داریم $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ (بنابر (۲) این مجموع، برای هر x، روی یک زیرمجموعه باز شامل x، متناهی است).

(۴) برای هر $\varphi \in \Phi$ یک مجموعه باز U در $\mathcal{O}$ است که روی برخی مجموعه‌های بسته مشمول U، $\varphi = 0$.

(یک خانواده Φ که در ویژگیهای (۱) الی (۳) صدق کند، یک C^∞ **افراز واحد** برای A گفته می‌شود. اگر Φ در شرط (۴) نیز صدق کند، **زیر مختص** پوشش $\mathcal{O}$ گفته می‌شود. در این فصل فقط از پیوستگی تابعهای φ استفاده می‌کنیم).

برهان. حالت ۱. A فشرده است.

در این صورت تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز $U_1, \ldots, U_n$ در $\mathcal{O}$ هست که A را می‌پوشاند. به وضوح کافی است که یک زیرمختص افراز واحد برای پوشش $\{U_1, \ldots, U_n\}$ ساخت. نخست مجموعه‌های فشرده $D_i \subset U_i$ را خواهیم یافت که درون آنها A را بپوشاند. مجموعه‌های D_i به استقرا به صورت زیر ساخته می‌شوند.

فرض‌کنید $D_1, \ldots, D_k$ چنان انتخاب شده‌اندکه $\{\text{درون}\, D_1, \ldots, \text{درون}\, D_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ ، A را بپوشاند. قرار دهید

$$C_{k+1} = A - (\text{int } D_1 \cup \ldots \cup \text{int } D_k \cup U_{k+2} \cup \ldots \cup U_n\}$$

آنگاه $C_{k+1} \subset U_{k+1}$ فشرده است. پس می‌توانیم مجموعه فشرده D_{k+1} (مسئله ۱-۳۲) را چنان بیابیم که

$$D_{k+1} \subset U_{k+1} \qquad \text{و} \qquad C_{k+1} \subset (\text{درون}\, D_{k+1})$$

بعد از ساختن مجموعه‌های $D_1, \ldots, D_n$، تابع نامنفی و C^∞، ψ_i را چنان می‌گیریم که روی D_i مثبت باشد و خارج یک مجموعه بسته مشمول U_i صفر شود (مسئله ۲-۲۶). چون $\{D_1, \ldots, D_n\}$، A را می‌پوشاند، برای هر x در یک مجموعه باز شامل A داریم $\psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) > 0$.

روی U تعریف می‌کنیم

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_۱(x) + \cdots + \psi_n(x)}$$

اگر $f : U \to [۰, ۱]$ یک تابع C^∞ باشد که روی A، ۱ هست و خارج یک مجموعه بسته مشمول U، صفر، آنگاه $\Phi = \{f \cdot \varphi_۱, \ldots, f \cdot \varphi_n\}$ افراز مطلوب واحد است.

حالت ۲. $A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup \ldots$، که هر A_i فشرده است و $A_i \subset (\text{درون } A_{i+۱})$.

برای هر i، $\mathcal{O}_i$ را تمام $U \cap ((\text{درون } A_{i+۱}) - A_{i-۲})$ ها، برای U در $\mathcal{O}$، بگیرید. آنگاه $\mathcal{O}_i$ یک پوشش باز مجموعه فشرده $B_i = A_i - (\text{درون } A_{i-۱})$ است. بنابر حالت (۱) یک افراز واحد Φ_i برای B_i هست که زیر مختص $\mathcal{O}_i$ می‌باشد. برای هر $x \in A$، مجموع

$$\sigma(x) = \sum_{\varphi \in \Phi_i, \text{ هر } i} \varphi(x)$$

یک مجموع متناهی در یک مجموعه باز شامل x است، چرا که اگر $x \in A_i$، خواهیم داشت $\varphi(x) = ۰$ برای $\varphi \in \Phi_j$، $j \geq i+۲$. برای هر φ در Φ_i، تعریف کنید $\varphi'(x) = \varphi(x)/\sigma(x)$. خانواده تمام φ'ها افراز واحد مطلوب است.

حالت ۳. A باز است.

قرار دهید

$$A_i = \{x \in A : |x| \leq i \text{ و } \text{فاصله } x \text{ تا مرز } A \geq \frac{۱}{i}\}$$

و حالت ۲ را به کار برید.

حالت ۴. A دلخواه است.

گیریم B اجتماع تمام Uها در $\mathcal{O}$ باشد. بنابر (۳) یک افراز واحد برای B وجود دارد؛ این افراز واحد یک افراز واحد A نیز هست. ■

به یک نتیجه مهم ویژگی (۲) باید دقت شود. گیریم $C \subset A$ فشرده باشد. برای هر $x \in C$ یک مجموعه باز V_x شامل x هست که فقط تعدادی متناهی $\varphi \in \Phi$ روی V_x صفر نیستند. چون C فشرده است، تعدادی متناهی از این V_xها، C را می‌پوشانند. پس فقط تعدادی متناهی از $\varphi \in \Phi$ها روی C صفر نیستند.

نقش اساسی افرازهای واحد در یک کاربرد آن آشکار خواهد شد ـ مربوط ساختن نتایجی که موضعاً حاصل می‌شوند. یک پوشش باز $\mathcal{O}$ از یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ **پذیرفتنی** هست هرگاه هر $U \in \mathcal{O}$ مشمول A باشد. اگر Φ نسبت به $\mathcal{O}$ زیر مختص باشد، $f : A \to \mathbb{R}$ در یک مجموعه باز شامل هر نقطه A کراندار باشد، و $\{x : f$ در x ناپیوسته است$\}$ اندازه صفر داشته باشد، آنگاه هر $\int_A \varphi \cdot |f|$ وجود دارد. گوییم f **انتگرالپذیر** است (به مفهوم تعمیم یافته) هرگاه $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi \cdot |f|$ همگرا باشد (برهان قضیه ۳-۱۱ نشان می‌دهد که φها می‌توانند به صورت دنباله مرتب شوند). این همگرایی $\sum_{\varphi\in\Phi} |\int_A \varphi \cdot f|$ را نشان می‌دهد، و بنابراین همگرایی مطلق $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi \cdot f$ را، که آن را به عنوان تعریف $\int_A f$ برمی‌گزینیم. این تعریفها به $\mathcal{O}$ یا Φ بستگی ندارند (مسئله ۳-۳۸ را ببینید).

۳-۱۲ قضیه.

(۱) اگر ψ یک افراز واحد دیگر باشد که زیر مختص پوشش $\mathcal{O}'$ از A است، آنگاه $\sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi \cdot |f|$ نیز همگرا است و

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi \cdot f = \sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi \cdot f$$

(۲) اگر A و f کراندار باشند، آنگاه f به مفهوم تعمیم یافته انتگرالپذیر است.

(۳) اگر A ژوردان ـ اندازه‌پذیر باشد و f کراندار، آنگاه این تعریف $\int_A f$ با تعریف قدیمی یکی است.

برهان. (۱) چون، بجز روی یک مجموعه فشرده، $\varphi \cdot f = 0$، و فقط تعدادی متناهی ψ هست که روی C ناصفر هستند، می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi \cdot f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \sum_{\psi\in\Psi} \psi \cdot \varphi \cdot f = \sum_{\varphi\in\Phi} \sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f$$

با به کار بردن این نتیجه درباره $|f|$، همگرایی $\sum_{\varphi\in\Psi} \sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot |f|$ و در نتیجه همگرایی $\sum_{\varphi\in\Psi} \sum_{\psi\in\Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot |f|$ حاصل می‌شود. این همگرایی مطلق تغییر ترتیب جمعپذیری در موارد

بالا را توجیه می‌کند؛ مجموع دوگانه حاصل همان $\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot f$ است. در نهایت، با استفاده از این نتیجه برای $|f|$، همگرایی $\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot|f|$ حاصل می‌شود.

(۲) اگر A مشمول مستطیل بسته B باشد و برای $x\in A$، $|f(x)|\le M$، و $F\subset\Phi$ متناهی باشد، آنگاه

$$\sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot|f| \le \sum_{\varphi\in F} M\int_A \varphi = M\int_A \sum_{\varphi\in F}\varphi \le Mv(B)$$

چرا که روی A، $\sum_{\varphi\in F}\varphi\le ۱$.

(۳) اگر $\varepsilon>۰$، یک مجموعه فشرده ژوردان ـ اندازه‌پذیر $C\subset A$ (مسئله ۳-۲۲) هست که $\int_{A-C} ۱ < \varepsilon$. فقط تعدادی متناهی $\varphi\in\Phi$ هست که روی C ناصفر هستند. اگر $F\subset\Phi$ یک خانواده متناهی شامل اینها باشد، و $\int_A f$ همان معنای قدیمی را داشته باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\left|\int_A f - \sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot f\right| &\le \int_A \left|f - \sum_{\varphi\in F}\varphi\cdot f\right| \\ &\le M\int_A\left(۱-\sum_{\varphi\in F}\varphi\right) \\ &= M\int_A \sum_{\varphi\in\Phi-F}\varphi \le M\int_{A-C} ۱ \le M\varepsilon\end{aligned}$$

■

مسئله‌ها

۳-۳۷ (الف) فرض کنید $f:(۰,۱)\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته نامنفی باشد. نشان دهید $\int_{(۰,۱)} f$ وجود دارد اگر و تنها اگر $\lim_{\varepsilon\to ۰}\int_\varepsilon^{۱-\varepsilon} f$ وجود داشته باشد.

(ب) گیریم $A_n=[۱-\frac{۱}{۲^n}, ۱-\frac{۱}{۲^{n+۱}}]$. فرض کنید $f:(۰,۱)\to\mathbb{R}$ در $\int_{A_n} f=(-۱)^n/n$ صدق کند و برای $x\notin\bigcup_n A_n$، $f(x)=۰$. نشان دهید $\int_{(۰,۱)} f$ وجود ندارد، اما $\int_{(\varepsilon,۱-\varepsilon)} f=\log ۲$.

۳-۳۸ گیریم A_n یک مجموعهٔ بسته مشمول $(n,n+۱)$ باشد. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در

$\int_{A_n} f = (-1)^n/n$ صدق کند و برای $x \notin \bigcup_n A_n$، $f(x) = 0$. دو افراز واحد Φ و Ψ بیابید که $\sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot f$ و $\sum_{\psi\in\Psi} \int_{\mathbb{R}} \psi \cdot f$ به مقادیر متفاوتی همگرای مطلق باشند.

تغییر متغیر

اگر $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته مشتق‌پذیر، و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه می‌دانیم که

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'$$

برهان بسیار ساده است: اگر $F' = f$، آنگاه $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$؛ پس طرف چپ مساوی $F(g(b)) - F(g(a))$ است، در حالی که طرف راست مساوی

$$F \circ g(b) - F \circ g(a) = F(g(b)) - F(g(a))$$

است.

بر عهده خواننده است که نشان دهد اگر g، یک به یک باشد آنگاه فرمول بالا می‌تواند به صورت

$$\int_{g((a,b))} f = \int_{(a,b)} f \circ g \cdot |g'|$$

نوشته شود، (حالتهایی که g افزایشی و یا کاهشی باشد را جداگانه در نظر بگیرید).

تعمیم این فرمول به بعدهای بالاتر اصلاً بدیهی نیست.

۳-۱۳ قضیه. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و $g : A \to \mathbb{R}^n$ یک به یک و پیوسته مشتق‌پذیر باشد طوری که برای هر $x \in A$، $\det g'(x) \neq 0$. اگر $f : g(A) \to \mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det g'|$$

برهان. با حالتهای ساده‌تر شروع می‌کنیم.

۱. فرض کنید یک پوشش پذیرفتنی $\mathcal{O}$ برای A هست طوری که برای هر $U \in \mathcal{O}$ و هر f انتگرالپذیر داشته باشیم

$$\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g)|\det g'|$$

آنگاه قضیه برای تمام A درست است. (چون g خود بخود روی یک مجموعه باز شامل هر نقطه، یک به یک است پس غیرمنتظره نیست اگر فقط بخشی از برهان را که فقط از یک به یک بودن g استفاده می‌کند، به کار بریم).

برهان (۱). خانواده تمام $g(U)$ها یک پوشش باز $g(A)$ است. گیریم Φ یک افراز واحد زیر مختص این پوشش باشد. اگر خارج $g(U)$، $\varphi = 0$، آنگاه چون g یک به یک است خارج U خواهیم داشت $(\varphi \cdot f) \circ g = 0$. پس تساوی

$$\int_{g(U)} \varphi \cdot f = \int_U [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'|$$

می‌تواند به صورت

$$\int_{g(A)} \varphi \cdot f = \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'|$$

نوشته شود. بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'| \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A (\varphi \circ g)(f \circ g) |\det g'| \\ &= \int_A (f \circ g) |\det g'|\end{aligned}$$

تذکر. قضیه از فرض

$$\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|$$

برای V در یک پوشش پذیرفتنی $g(A)$ نیز نتیجه می‌شود. این از به‌کار بردن (۱) درباره g^{-1} حاصل می‌شود.

۲. کافی است قضیه برای تابع $f = 1$ ثابت شود.

برهان (۲). اگر قضیه برای $f = 1$ برقرار باشد، برای هر تابع ثابتی نیز برقرار است. گیریم V مستطیلی در $g(A)$، و P یک افراز V باشد. برای هر زیر مستطیل S از P، f_S را تابع ثابت

$m_S(f)$ بگیرید. آنگاه

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_S m_S(f)\cdot v(S) = \sum_S \int_{\text{int } S} f_S \\ &= \sum_S \int_{g^{-1}(\text{int } S)} (f_S\circ g)|\det g| \leq \sum_S \int_{g^{-1}(\text{int } S)} (f\circ g)|\det g'| \\ &\leq \int_{g^{-1}(V)} (f\circ g)|\det g'| \end{aligned}$$

چون $\int_V f$ کوچکترین کران بالای $L(f,P)$ها است، پس $\int_V f \leq \int_{g^{-1}(V)} (f\circ g)|\det g'|$. استدلال مشابهی، برای وقتی که $f_S = M_S(f)$، نشان می‌دهد که

$$\int_V f \geq \int_{g^{-1}(V)} (f\circ g)|\det g'|$$

اکنون نتیجه از تذکر بالا حاصل می‌شود.

۳. اگر قضیه برای $g : A \to \mathbb{R}^n$ و $h : B \to \mathbb{R}^n$، که $g(A) \subset B$، درست باشد آنگاه برای $h\circ g : A \to \mathbb{R}^n$ نیز درست است.

برهان (۳).

$$\begin{aligned} \int_{h\circ g(A)} f = \int_{h(g(A))} f &= \int_{g(A)} (f\circ h)|\det h'| \\ &= \int_A [(f\circ h)\circ g]\cdot[|\det h'|\circ g]\cdot|\det g'| \\ &= \int_A f\circ(h\circ g)|\det(h\circ g)'| \end{aligned}$$

۴. قضیه برای وقتی که g یک تبدیل خطی است، درست است.

برهان (۴). بنابر (۱) و (۲) کافی است نشان داده شود که برای هر مستطیل باز U،

$$\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det g'|$$

این مسئله ۳-۳۵ است.

قسمتهای (۳) و (۴)، همراه با هم، نشان می‌دهند که می‌توانیم فرض کنیم برای هر $a \in A$ بخصوصی، $g'(a)$ ماتریس همانی است: در حقیقت، اگر T تبدیل خطی $D_g(a)$ باشد، آنگاه $(T^{-1}\circ g)'(a) = I$؛ چون قضیه برای T درست است، اگر برای $T^{-1}\circ g$ درست باشد برای g نیز درست خواهد بود.

اکنون آماده‌ایم که برهان را ارائه دهیم که با استقرا روی n انجام می‌شود. تذکر قبل از صورت قضیه، همراه با (۱) و (۲)، حالت $n = ۱$ را ثابت می‌کند. فرض کنید قضیه برای بُعد $n - ۱$ درست است، آن را برای بعد n ثابت می‌کنیم. برای هر $a \in A$ فقط نیاز داریم یک مجموعه باز U بیابیم که $a \in U \subset A$ و قضیه برای آن درست باشد. به علاوه می‌توانیم فرض کنیم $g'(a) = I$.

$h : A \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $h(x) = (g^۱(x), \ldots, g^{n-۱}(x), x^n)$ تعریف کنید. آنگاه $h'(a) = I$. بنابراین در برخی از مجموعه‌های باز U' که $a \in U' \subset A$، تابع h یک‌به‌یک است و $\det h'(x) \neq ۰$. پس می‌توانیم $k : h(U') \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $k(x) = (x^۱, \ldots, x^{n-۱}, g^n(h^{-۱}(x)))$ تعریف کنیم و $g = k \circ h$. پس g را به صورت ترکیب دو نگاشت نشان داده‌ایم که هر کدام کمتر از n مختص را تغییر می‌دهند (شکل ۳-۳).

چند مطلب جزیی را باید بررسی کنیم تا مطمئن شویم k تابع مورد نظر است. چون

$$(g^n \circ h^{-۱})'(h(a)) = (g^n)'(a) \cdot [h'(a)]^{-۱} = (g^n)'(a)$$

خواهیم داشت $D_n(g^n \circ h^{-۱})(h(a)) = D_n g^n(a) = ۱$، بنابراین $k'(h(a)) = I$. پس در برخی از مجموعه‌های باز V که $h(a) \in V \subset h(U')$، تابع k یک به یک است و $\det k'(x) \neq ۰$. با قرار دادن $U = k^{-۱}(V)$ خواهیم داشت $g = k \circ h$، که $h : U \to \mathbb{R}^n$ و $k : V \to \mathbb{R}^n$ و $h(U) \subset V$. بنابر (۳) کافی است ثابت کنیم که قضیه برای h و k درست است. اثبات را برای h ارائه می‌کنیم. اثبات برای k مشابه و در واقع ساده‌تر است.

گیریم $W \subset U$ یک مستطیل به فرم $D \times [a_n, b_n]$ باشد که D مستطیلی در $\mathbb{R}^{n-۱}$ است. بنابر قضیه فوبینی

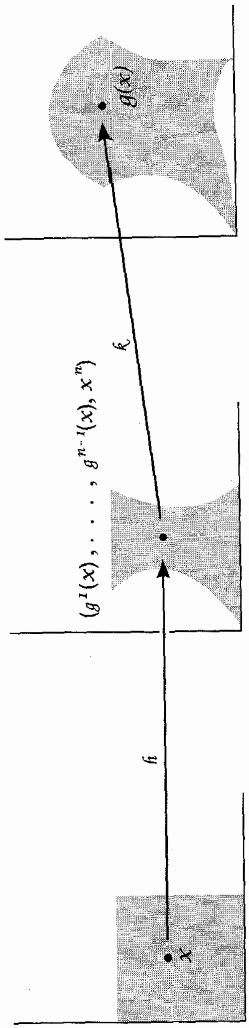
$$\int_{h(W)} ۱ = \int_{[a_n, b_n]} \left(\int_{h(D \times \{x^n\})} ۱ dx^۱ \ldots dx^{n-۱} \right) dx^n$$

فرض کنید $h_{x^n} : D \to \mathbb{R}^{n-۱}$ به صورت

$$h_{x^n}(x^۱, \ldots, x^{n-۱}) = (g^۱(x^۱, \ldots, x^n), \ldots, g^{n-۱}(x^۱, \ldots, x^n))$$

تعریف شود. آنگاه آشکارا هر h_{x^n} یک به یک است و

$$\det(h_{x^n})'(x^۱, \ldots, x^{n-۱}) = \det h'(x^۱, \ldots, x^n) \neq ۰$$



شکل ۳-۳

به علاوه

$$\int_{h(D\times\{x^n\})} 1\, dx^1 \dots dx^{n-1} = \int_{h_{x^n}(D)} dx^1 \dots dx^{n-1}$$

پس با به کار بردن قضیه در حالت $n-1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_{h(W)} 1 &= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_{h_{x^n}(D)} 1 dx^1 \dots dx^{n-1}\right) dx^n \\ &= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D |\det(h_{x^n})'(x^1,\dots,x^{n-1})| dx^1 \dots dx^{n-1}\right) dx^n \\ &= \int_{[a_n,b_n]} \left(\int_D |\det h'(x^1,\dots,x^n)| dx^1 \dots dx^{n-1}\right) dx^n \\ &= \int_W |\det h'|\end{aligned}$$

■

با استفاده از قضیه زیر، فرض $\det g'(x) \neq 0$ که غالباً نقشی ناخواسته ایفا می‌کند، می‌تواند حذف شود.

۳-۱۴ قضیه (قضیه سارد). گیریم $g : A \to \mathbb{R}^n$ پیوسته مشتق‌پذیر باشد، که در آن $A \subset \mathbb{R}^n$ باز است، و نیز گیریم $B = \{x \in A : \det g'(x) = 0\}$. آنگاه $g(B)$ اندازه صفر دارد.

برهان. گیریم $U \subset A$ یک مستطیل بسته باشد که تمام اضلاعش، مثلاً طول l دارند. گیریم $\varepsilon > 0$. اگر N به قدر کافی بزرگ باشد و U به N^n مستطیل، با اضلاع به طول $\frac{l}{N}$، تقسیم شود آنگاه برای هر یک از این مستطیلهای S، و برای $x \in S$ خواهیم داشت

برای هر $y \in s$ ‏ $|D_g(x)(y-x) - g(y) - g(x)| < \varepsilon|x-y| \le \varepsilon\sqrt{n}(l/N),$

اگر S، B را قطع کند می‌توانیم $x \in S \cap B$ را انتخاب کنیم؛ چون $\det g'(x) = 0$، مجموعه $\{D_g(x)(y-x) : y \in S\}$ در یک زیر فضای $(n-1)$-بعدی V از $\mathbb{R}^n$ می‌افتد. بنابراین مجموعه $\{g(y) - g(x) : y \in S\}$ در فاصله $\varepsilon\sqrt{n}(l/n)$ از V می‌افتد، بنابراین $\{g(y) : y \in S\}$ در فاصلهٔ $\varepsilon\sqrt{n}(l/N)$ از صفحه $(n-1)$-بعدی، $V + g(x)$ می‌افتد. از طرف دیگر، بنابر لم ۲-۱۰ یک عدد M هست که

$$|g(x) - g(y)| < M|x-y| \le M\sqrt{n}(l/n)$$

پس اگر S، B را قطع کند مجموعهٔ $\{g(y) : y \in S\}$ مشمول یک استوانه است که ارتفاعش کوچکتر از $۲\varepsilon\sqrt{n}(l/n)$ است و قاعده‌اش کرهٔ $(n-۱)$-بعدی با شعاعی کمتر از $M\sqrt{n}(l/N)$ است. حجم این کره، برای یک ثابت C، کمتر از $C(l/N)^n\varepsilon$ است. حداکثر N^n چنین مستطیلهایی وجود دارند، پس $g(U \cap B)$ در یک مجموعه با حجم کمتر از $C(l/N)^n \cdot \varepsilon \cdot N^n = Cl^n \cdot \varepsilon$ قرار می‌گیرد. چون این برای هر $\varepsilon > ۰$ درست است پس مجموعهٔ $g(U \cap B)$ اندازه صفر دارد. چون می‌توانیم تمام مجموعه A را با دنباله‌ای از چنین مستطیلهای U بپوشانیم، نتیجه مطلوب از قضیه ۳-۴ حاصل خواهد شد (مسئله ۳-۱۳). ■

قضیه ۳-۱۴ در واقع بخش سادهٔ قضیه سارد است. صورت قضیه و اثبات عمیقتری می‌تواند در [۱۷]، صفحه ۴۷، یافت شود.

مسئله‌ها

۳-۳۹ از قضیه ۳-۱۴ برای اثبات قضیه ۳-۱۳ بدون فرض $\det g'(x) \neq ۰$ استفاده کنید.

۳-۴۰ اگر $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ و $\det g'(x) \neq ۰$، ثابت کنید که در برخی از مجموعه‌های باز شامل x می‌توانیم بنویسیم $g = T \circ g_n \circ \ldots \circ g_۱$، که g_i به صورت

$$g_i(x) = (x^۱, \ldots, f_i(x), \ldots, x^n)$$

است، و T' یک تبدیل خطی است. نشان دهید که می‌توان نوشت $g = g_n \circ \ldots \circ g_۱$ اگر و فقط اگر $g'(x)$ یک ماتریس قطری باشد.

۳-۴۱ $f : \{r : r > ۰\} \times (۰, ۲\pi) \to \mathbb{R}^۲$ را به صورت $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ تعریف کنید.

(الف) نشان دهید f یک به یک است، $f'(r, \theta)$ را محاسبه کنید، و نشان دهید برای هر (r, θ)، $\det f'(r, \theta) \neq ۰$. نشان دهید $f(\{r : r > ۰\} \times (۰, ۲\pi))$، مجموعه A مسئله ۲-۲۳ است.

(ب) اگر $P = f^{-۱}$، نشان دهید $P(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$، که

$$r(x, y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\theta(x,y)=\begin{cases}\arctan y/x & x>۰, y>۰\\ \pi+\arctan y/x & x<۰\\ ۲\pi+\arctan y/x & x>۰, y<۰\\ \frac{\pi}{۲} & x=۰, y>۰\\ \frac{۳\pi}{۲} & x=۰, y<۰\end{cases}$$

(در اینجا arctan معکوس تابع $\tan:(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})\to\mathbb{R}$ را نشان می‌دهد). $P'(x,y)$ را بیابید. تابع P **سیستم مختصات قطبی** روی A گفته می‌شود.

(پ) گیریم $C\subset A$ ناحیهٔ بین دایره‌های به شعاع $r_۱$ و $r_۲$، و نیم‌خطهایی که از مبدأ می‌گذرند و زوایای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ با محور xها می‌سازند، باشد و اگر $h:C\to\mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشد ، $h(x,y)=g(r(x,y),\theta(x,y))$، نشان دهید

$$\int_c h=\int_{r_۱}^{r_۲}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} rg(r,\theta)d\theta\, dr$$

اگر $B_r=\{(x,y):x^۲+y^۲\le r^۲\}$، نشان دهید

$$\int_{B_r} h=\int_۰^r\int_۰^{۲\pi} rg(r,\theta)d\theta\, dr$$

(ت) اگر $C_r=[-r,r]\times[-r,r]$، نشان دهید

$$\int_{B_r} e^{-(x^۲+y^۲)}dx\, dy=\pi(۱-e^{-r^۲})$$

و

$$\int_{C_r} e^{-(x^۲+y^۲)}dx\, dy=\left(\int_{-r}^{r} e^{-x^۲}dx\right)^۲$$

(ث) ثابت کنید

$$\lim_{r\to\infty}\int_{B_r} e^{-(x^۲+y^۲)}dx\, dy=\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} e^{-(x^۲+y^۲)}dx\, dy$$

و نتیجه بگیرید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}dx=\sqrt{\pi}$$

۴

انتگرال روی زنجیرها

مقدمات جبری

اگر V یک فضای برداری (روی $\mathbb{R}$) باشد، حاصلضرب kـتایی $V \times \ldots \times V$ را با V^k نشان می‌دهیم. تابع $T : V^k \to \mathbb{R}$ **چندخطی** گفته می‌شود هرگاه برای هر i، $1 \leq i \leq k$، داشته باشیم

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) =& T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \\ &+ T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k) \\ T(v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_k) =& \alpha T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

تابع چندخطی $T : V^k \to \mathbb{R}$ را یک **kـتانسور** روی V می‌گوییم. مجموعهٔ تمام kـتانسورها، که با $\mathcal{J}^k(V)$ نشان داده می‌شود، یک فضای برداری (روی $\mathbb{R}$) است هرگاه برای $S, T \in \mathcal{J}^k(V)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، تعریف کنیم

$$\begin{aligned} (S+T)(v_1, \ldots, v_k) &= S(v_1, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_k) \\ (\alpha S)(v_1, \ldots, v_k) &= \alpha S(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

رابطه‌ای نیز وجود دارد که فضاهای گوناگون $\mathcal{J}^k(V)$ را به هم پیوند می‌دهد. اگر $S \in \mathcal{J}^k(V)$ و $T \in \mathcal{J}^l(V)$، **ضرب تانسوری** $S \otimes T \in \mathcal{J}^{k+l}(V)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} S \otimes T(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \\ = S(v_1, \ldots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

دقت کنید که ترتیب عاملهای S و T مهم هستند زیرا $S \otimes T$ و $T \otimes S$ به هیچ‌وجه مساوی نیستند. بررسی ویژگیهای $\otimes$، که در زیر آمده‌اند، به خواننده واگذار می‌گردد

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$$

$$(\alpha S) \otimes T = S \otimes (\alpha T) = \alpha(S \otimes T)$$

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$$

$(S \otimes T) \otimes U$ یا $S \otimes (T \otimes U)$ را معمولاً با $S \otimes T \otimes U$ نشان می‌دهیم؛ حاصلضربهای مرتبه بالاتر $T_1 \otimes \cdots \otimes T_r$ به روش مشابه تعریف می‌شوند.

خواننده احتمالاً دریافته است که $\mathcal{J}^1(V)$ همان فضای دوآل V^* است. عمل $\otimes$ این اجازه را به ما می‌دهد که هر فضای برداری $\mathcal{J}^k(V)$ را بر حسب $\mathcal{J}^1(V)$ نشان دهیم.

۴-۱ قضیه. گیریم $v_1, \ldots, v_n$ یک پایهٔ V، و $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ پایهٔ دوآل آن باشد: $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. آنگاه مجموعه تمام حاصلضربهای kـتانسوری

$$\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k} \qquad 1 \leq i_1, \cdot \ldots \cdot, i_k \leq n$$

یک پایه $\mathcal{J}^k(V)$ است، و بنابراین $\mathcal{J}^k(V)$ بعد n^k دارد.

برهان. توجه کنید که

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}(v_{j_1}, \ldots v_{j_k}) &= \delta_{i_1,j_1}, \ldots, \delta_{i_k,j_k} \\ &= \begin{cases} 1 & j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_k \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \end{aligned}$$

اگر $w_1, \ldots, w_k$، k بردار باشند و $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ و T در $\mathcal{J}^k(V)$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned} T(w_1, \ldots, w_k) &= \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot a_{k,j_k} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \cdot \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}(w_1, \ldots, w_k) \end{aligned}$$

پس $T = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \cdot \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}$. در نتیجه $\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}$ها فضای $\mathcal{J}^k(V)$ را پدید می‌آورند.

اکنون فرض کنید اعداد $a_{i_1, \ldots, i_k}$ وجود دارند که

$$\sum_{i_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_k} \cdot \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k} = 0$$

با به کار بردن هر دو طرف تساوی فوق برای $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ نتیجه می‌گیریم $a_{j_1}, \ldots, j_k = 0$.
پس $\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k}$ها مستقل خطی هستند. ■

ساختار مهم دیگری که مشابه فضای دوآل است می‌تواند برای ساختن تانسورها به کار گرفته شود. اگر $f : V \to W$ یک تبدیل خطی باشد، تبدیل خطی $f^* : \mathcal{J}^k(W) \to \mathcal{J}^k(V)$ چنین تعریف می‌شود

$$f^* T(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

که در آن $T \in \mathcal{J}^k(W)$ و $v_1, \ldots, v_n \in V$. به سادگی می‌توان تساوی $f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T$ را ثابت کرد.

خواننده، از قبل، خارج از ساختار عضوهای V^*، با چند تانسور مشخص آشنا است. نخستین مثال خوب ضرب داخلی $\langle , \rangle \in \mathcal{J}^2(\mathbb{R}^n)$ است. با توجه به اینکه هر کالای خوب ریاضی ارزش تعمیم را دارد، **ضرب داخلی** روی V را یک ۲ـتانسور T تعریف می‌کنیم که **متقارن** هم باشد، یعنی برای $v, w \in V$، $T(v, w) = T(w, v)$ و **مثبت معین** هم باشد یعنی برای $v \neq 0$، $T(v, v) > 0$. ما نماد $\langle , \rangle$ را برای **ضرب داخلی معمولی** روی $\mathbb{R}^n$ به کار می‌بریم.
قضیه زیر نشان می‌دهد که این تعمیم چندان عمومیت ندارد.

۲-۴ قضیه. اگر T یک ضرب داخلی روی V باشد، یک پایهٔ $v_1, \ldots, v_n$ از V یافت می‌شود که $T(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. (چنین پایه‌ای را **یکه‌ای متعامد** نسبت به T می‌گویند.) در نتیجه یک ایزومرفیسم $f : \mathbb{R}^n \to V$ هست که برای $x, y \in \mathbb{R}^n$، $T(f(x), f(y)) = \langle x, y \rangle$. به عبارت دیگر $f^*T = \langle , \rangle$.

برهان. گیریم $w_1, \ldots, w_n$ یک پایه V باشد. تعریف کنید

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_1, \\ w'_2 &= w_2 - \frac{T(w'_1, w_2)}{T(w'_1, w'_1)} \cdot w'_1, \\ w'_3 &= w_3 - \frac{T(w'_1, w_3)}{T(w'_1, w'_1)} \cdot w'_1 - \frac{T(w'_2, w_3)}{T(w'_2, w'_2)} \cdot w'_2 \end{aligned}$$

و الی آخر. به راحتی دیده می‌شود که برای $w'_i \neq 0$، $i \neq j$، $T(w'_i, w'_j) = 0$. پس $T(w'_i, w'_i) > 0$. اکنون تعریف کنید $v_i = w'_i / \sqrt{T(w'_i, w'_i)}$. ایزومرفیسم f را می‌توانید به صورت $f(e_i) = v_i$ تعریف کنید. ■

علیرغم اهمیتش، ضرب داخلی نقشی کمتر از تابع دور از منظر تانسور دترمینان (متعلق به $\mathcal{J}^n(\mathbb{R})$) بازی می‌کند. برای تعمیم این تابع باید خاطرنشان کنیم که تعویض دو سطر ماتریس، علامت دترمینانش را عوض می‌کند. این ویژگی تعریف زیر را پیشنهاد می‌کند. یک kـتانسور $\omega \in \mathcal{J}^k(V)$ **متناوب** گفته می‌شود هرگاه

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \quad \forall v_1, \ldots, v_k \in V$$

(در این تساوی فقط v_i و v_j عوض می‌شوند و بقیهٔ vها ثابت می‌مانند). مجموعهٔ تمام kـتانسورهای متناوب به وضوح یک زیرفضای $\Lambda^k(V)$ از $\mathcal{J}^k(V)$ را تشکیل می‌دهند. چون برای تشکیل دترمینان کار بیشتری نیاز است، پس چندان غیر منتظره نیست که نوشتن kـتانسورهای متناوب مشکل باشد. البته یک روش یکنواخت برای نمایش همهٔ آنها هست. یادآوری می‌شود که علامت تبدیل σ، که با $\operatorname{sgn} \sigma$ نشان داده می‌شود، $+1$ است هرگاه σ زوج، و -1 است هرگاه σ فرد باشد. اگر $T \in \mathcal{F}^k(V)$، $\operatorname{Alt}(T)$ را با

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

نشان می‌دهیم که S_k مجموعهٔ تمام تبدیلات اعداد از ۱ تا k است.

۴-۳ قضیه.

(۱) اگر $T \in \mathcal{J}^k(V)$، آنگاه $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$.

(۲) اگر $\omega \in \Lambda^k(V)$، آنگاه $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$.

(۳) اگر $T \in \mathcal{J}^k(V)$، آنگاه $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$.

برهان.

(۱) گیریم (i,j) تبدیلی باشد که i و j را عوض می‌کند و بقیه اعداد را ثابت نگه می‌دارد. اگر $\sigma' \in S_k$، قرار می‌دهیم $\sigma = \sigma \cdot (i,j)$. آنگاه

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)\\
&\qquad= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot T\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\big)\\
&\qquad= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot T\big(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}\big)\\
&\qquad= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma'\in S_k} -\operatorname{sgn}\sigma' \cdot T\big(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}\big)\\
&\qquad= -\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

(۲) اگر $\omega \in \Lambda^k(V)$، و $\sigma = (i,j)$، آنگاه

$$\omega\big(v_{\sigma(1)}, \ldots v_{\sigma(k)}\big) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k)$$

چون هر σ حاصلضرب تبدیلاتی به فرم (i,j) است، این رابطه برای هر σ برقرار است. بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \omega\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\big)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k)\\
&= \omega(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

(۳) فوراً از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. ■

برای تعیین بعد $\Lambda^k(V)$، از قضیه‌ای شبیه قضیه ۴-۱ استفاده می‌کنیم. البته، اگر $\omega \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V)$، آنگاه $\omega \otimes \eta$ معمولاً در $\Lambda^{k+l}(V)$ نیست. بنابراین یک ضرب جدید، ضرب **گوه‌ای** $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$، را به صورت

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

تعریف می‌کنیم. (دلیل ضریب نامتعارف بالا بعداً معلوم خواهد شد). بررسی ویژگیهای $\wedge$ به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد:

$$(\omega_۱ + \omega_۲) \wedge \eta = \omega_۱ \wedge \eta + \omega_۲ \wedge \eta$$

$$\omega \wedge (\eta_۱ + \eta_۲) = \omega \wedge \eta_۱ + \omega \wedge \eta_۲$$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$$

$$\omega \wedge \eta = (-۱)^{kl} \eta \wedge \omega$$

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$$

تساوی $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ نیز درست است اما به کار بیشتری نیاز دارد.

۴-۴ قضیه.

(۱) اگر $S \in \mathcal{F}^k(V)$ و $T \in \mathcal{J}^l(V)$ و $\operatorname{Alt}(S) = ۰$، آنگاه

$$\operatorname{Alt}(S \otimes T) = \operatorname{Alt}(T \otimes S) = ۰$$

(۲)

$$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta))$$

(۳) اگر $\omega \in \Lambda^k(V)$، $\eta \in \Lambda^l(V)$، و $\theta \in \Lambda^m(V)$، آنگاه

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

برهان. (۱)

$$(k+l)!\,\mathrm{Alt}(S\otimes T)(v_1,\ldots,v_{k+l})$$
$$=\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot S(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\cdot T(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})$$

اگر $G\subset S_{k+l}$ شامل تمام σهایی باشد که $k+1,\ldots,k+l$ را ثابت نگه می‌دارند، آنگاه

$$\sum_{\sigma\in G}\operatorname{sgn}\sigma\cdot S(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\cdot T(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})$$
$$=\left[\sum_{\sigma'\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma'\cdot S(v_{\sigma'(1)},\ldots,v_{\sigma'(k)})\right]\cdot T(v_{k+1},\ldots,v_{k+l})=0$$

اکنون فرض کنید $\sigma_0\notin G$. گیریم $G\cdot\sigma_0=\{\sigma\cdot\sigma_0:\sigma\in G]$ و

$$v_{\sigma_0(1)},\ldots,v_{\sigma_0(k+l)}=w_1,\ldots,w_{k+l}$$

آنگاه

$$\sum_{\sigma\in G\cdot\sigma_0}\operatorname{sgn}\sigma\cdot S(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\cdot T(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})$$
$$=\left[\operatorname{sgn}\sigma_0\cdot\sum_{\sigma'\in G}\operatorname{sgn}\sigma'\cdot S(w_{\sigma'(1)},\ldots,w_{\sigma'(k)})\right]$$
$$\cdot\,T(w_{k+1},\ldots,w_{k+l})=0$$

دقت کنید $G\cap G\cdot\sigma_0=\varnothing$. در واقع، اگر $\sigma\in G\cap G\cdot\sigma_0$، آنگاه برای برخی $\sigma'\in G$، $\sigma=\sigma'\cdot\sigma_0$ و $\sigma_0=\sigma\cdot(\sigma')^{-1}\in G$ که تناقض است. می‌توانیم در این مسیر ادامه دهیم، S_{k+l} را به زیر مجموعه‌های جدا از هم تبدیل کنیم، که مجموع روی هرکدام از آنها 0 است، پس جمع روی S_{k+l}، صفر است. رابطهٔ $\mathrm{Alt}(T\otimes S)=0$ به طریق مشابه ثابت می‌شود.

(۲) داریم

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)=0$$

پس بنابر (۱)،

$$0=\mathrm{Alt}(\omega\otimes[\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta])$$
$$=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))-\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

تساوی دیگر به روش مشابه ثابت می‌شود.

(۳)

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \operatorname{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(k+l+m)}{(k+l)!m!} \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)\end{aligned}$$

تساوی دیگر به روش مشابه ثابت می‌شود. ■

طبیعتاً هر دو $\omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ و $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta$ را با $\omega \wedge \eta \wedge \theta$ نشان می‌دهیم، و حاصلضربهای مرتبه بالاتر $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ به طریق مشابه تعریف می‌شوند. اگر $v_1, \ldots, v_n$ یک پایهٔ V و $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ پایهٔ دوآل آن باشد، یک پایهٔ $\Lambda^k(V)$ اینک به راحتی ساخته می‌شود.

۵-۴ قضیه. مجموعه تمام

$$\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$$

یک پایهٔ $\Lambda^k(V)$ است، و بنابراین بعد آن برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

برهان. اگر $\omega \in \Lambda^k(V) \subset \mathcal{J}^k(V)$، آنگاه میتوانیم بنویسیم

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \varphi_{i_1} \otimes \cdot \otimes \varphi_{i_k}$$

پس

$$\omega = \operatorname{Alt}(\omega) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \operatorname{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k})$$

چون هر $\operatorname{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_k})$ ضرب یک ثابت در یکی از $\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}$ها است پس این عنصرها، $\Lambda^k(V)$ را پدید می‌آورند. استقلال خطی مانند قضیه ۴-۱ ثابت می‌شود (به مسئله ۴-۱ رجوع کنید). ■

اگر بعد V، n باشد از قضیه ۴-۵ نتیجه می‌شود که بعد $\Lambda^n(V)$، یک است. پس تمام n- تانسورهای متناوب روی V، ضرایب یک تانسور غیر صفر هستند. چون دترمینان مثالی از چنین عضوی از $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ است، پس چندان غیر منتظره نیست که آن را در قضیه زیر بیابیم.

۴-۶ قضیه. گیریم $v_1, \ldots, v_n$ پایه‌ای برای V باشد، و $\omega \in \Lambda^n(V)$. اگر $\omega_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$، n بردار در V باشند، آنگاه

$$\omega(\omega_1, \ldots \omega_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n)$$

برهان. $\eta \in \mathcal{J}^n(\mathbb{R}^n)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\eta((a_{11}, \ldots a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = \omega(\sum a_{1j} v_j, \ldots, \sum a_{n_j} v_j)$$

آشکارا $\eta \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$، پس برای برخی $\lambda \in \mathbb{R}$، $\eta = \lambda \cdot \det$، و $\lambda = \eta(e_1, \ldots, e_n) = \omega(v_1, \ldots . v_n)$. ■

قضیه ۴-۶ نشان می‌دهد که عنصر غیر صفر $\omega \in \Lambda^n(V)$ روی پایه‌های V به دو گروه متفاوت تجزیه می‌شود، آنهایی که $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ و آنهایی که $\omega(v_1, \ldots, v_n) < 0$؛ اگر $v_1, \ldots, v_n$ و $w_1, \ldots, w_n$ دو پایه باشند و $A = (a_{ij})$ به صورت $w_i = \sum a_{ij} v_j$ تعریف شود، آنگاه $v_1, \ldots, v_n$ و $w_1, \ldots, w_n$ در یک گروه هستند اگر و تنها اگر $\det A > 0$. این گزاره مستقل از w است و همیشه می‌تواند برای جدا کردن پایه‌های V به دو گروه جداگانه به کار گرفته شود. هر یک از این دو گروه یک **جهت** V گفته می‌شود. جهتی که پایه $v_1, \ldots, v_n$ به آن نعلق دارد با $[v_1, \ldots, v_n]$ نشان داده می‌شود و جهت دیگر با $-[v_1, \ldots, v_n]$. در $\mathbb{R}^n$ **جهت معمولی** را با $[e_1, \ldots, e_n]$ تعریف می‌کنیم.

این واقعیت که $\Lambda^n(\mathbb{R}^n) = 1$، احتمالاً برای شما جدید نیست، زیرا $\det$ به عنوان تنها عنصر $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ تعریف می‌شود که $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$. برای یک فضای برداری کلی V، هیچ گزارهٔ اضافه‌ای از این نوع نیست که برای $\omega \in \Lambda^n(V)$ بخصوصی تفاوت قائل شود. اما فرض کنید یک ضرب داخلی T روی V داده شده باشد. اگر $v_1, \ldots, v_n$ و $\omega_1, \ldots, w_n$ دو پایه باشند که نسبت به T، یکه‌ای متعامد باشند، و ماتریس $A = (a_{ij})$ به صورت $w_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$

تعریف شود، آنگاه

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = T(w_i, w_j) &= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik}a_{jl}T(v_k, v_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}\end{aligned}$$

به عبارت دیگر، اگر A^T ترانهاده ماتریس A باشد، آنگاه $A \cdot A^T = I$، پس $\det A = \pm 1$. از قضیه ۴-۶ نتیجه می‌شود که اگر $\omega \in \Lambda^n(V)$ در $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \pm 1$ صدق کند، آنگاه $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \pm 1$. اگر یک جهت μ برای V نیز داده شده باشد، نتیجه می‌شود که یک $\omega \in \Lambda^n(V)$ منحصر بفرد هست که $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 1$ که $v_1, \ldots, v_n$ یک پایه یکه‌ای متعامد است که $[v_1, \ldots, v_n] = \mu$. این ωی یکتا، **عنصر حجم** V گفته می‌شود، که با ضرب داخلی T و جهت μ معین می‌گردد. دقت کنید که $\det$ عنصر حجم $\mathbb{R}^n$ است که توسط ضرب داخلی معمولی و جهت معمولی مشخص می‌گردد، و $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ حجم متوازی‌الاضلاعی است که از پاره‌خطهای از ۰ تا هر یک از $v_1, \ldots, v_n$ تشکیل شده است.

این بخش را با ساختاری که محدود به $\mathbb{R}^n$است به پایان می‌بریم. اگر $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ و φ به صورت

$$\varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}$$

تعریف شود آنگاه $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$؛ بنابراین $z \in \mathbb{R}^n$ یکتا هست که

$$\langle w, z \rangle = \varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}$$

این z با $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ نشان داده شده و **ضرب برداری** $v_1, \ldots, v_{n-1}$ گفته می‌شود.

ویژگیهای زیر بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند:

$$v_{\sigma(1)} \times \cdots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot v_1 \times \cdots \times v_{n-1},$$

$$v_1 \times \cdots \times av_i \times \ldots \times v_{n-1} = a \cdot (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}),$$

$$v_1 \times \cdots \times (v_i + v_i') \times \cdots \times v_{n-1} = v_1 \times \cdots \times v_i \times \cdots \times v_{n-1} + v_1 \times \cdots \times v_i' \times \cdots \times v_{n-1}$$

در ریاضیات «ضربی» که به بیش از دو عمل بستگی داشته باشد، چندان معمول نیست. در حالت دو بردار $v, w \in \mathbb{R}^3$، ضرب معمولی $v \times w \in \mathbb{R}^3$ را به دست می‌آوریم. به همین دلیل می‌گویند که ضرب برداری فقط روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌شود.

مسئله‌ها

۴-۱* گیریم $e_1, \ldots, e_n$ پایه معمولی $\mathbb{R}^n$ باشد و $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ پایهٔ دوآل آن.

(الف) نشان دهید $\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$. اگر $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ در تعریف $\wedge$ ظاهر نشود، طرف راست چه می‌شود؟

(ب) نشان دهید $\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(v_1, \ldots, v_k)$ دترمینان ماتریس جزیی $k \times k$، $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ است که از انتخاب ستونهای $i_1, \ldots, i_k$ حاصل می‌شود.

۴-۲ اگر $f : V \to V$ یک تبدیل خطی و $\dim V = n$، آنگاه $f^* : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ می‌بایستی ضرب توسط ثابتی مانند c باشد. نشان دهید $c = \det f$.

۴-۳ اگر $\omega \in \Lambda^n(V)$ عنصر حجم مشخص شده توسط T و μ، و $w_1, \ldots, w_n \in V$ باشد، نشان دهید

$$|\omega(w_1, \ldots, w_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

که $g_{ij} = T(w_i, w_j)$. راهنمایی. اگر $v_1, \ldots, v_n$ یک پایه یکه‌ای متعامد بوده و $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$، نشان دهید $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} a_{k_j}$.

۴-۴ اگر ω عنصر حجم V مشخص شده توسط T و μ باشد، و $f:\mathbb{R}^n \to V$ ایزومرفیسمی باشد که $f^*T = \langle , \rangle$ و $[f(e_1), \dots, f(e_n)] = \mu$، آنگاه $f^*w = \det$.

۴-۵ اگر $c:[0,1] \to (\mathbb{R}^n)^n$ پیوسته بوده و هر $(c^1(t), \dots, c^n(t))$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید $[c^1(0), \dots, c^n(0)] = [c'(1), \dots, c^n(1)]$. راهنمایی. $\det \circ c$ را در نظر گیرید.

۴-۶ (الف) اگر $v \in \mathbb{R}^2$، $v \times v$ چیست؟

(ب) اگر $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ مستقل خطی باشند، نشان دهید

$$[v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \times \cdots \times v_{n-1}]$$

جهت معمولی $\mathbb{R}^n$ است.

۴-۷ نشان دهید هر $\omega \in \Lambda^n(V)$ غیر صفر، عنصر حجمی است که توسط یک ضرب داخلی T و یک جهت μ برای V مشخص می‌شود.

۴-۸ اگر $\omega \in \Lambda^n(V)$ یک عنصر حجم باشد، «ضرب برداری» $v_1, \dots, v_{n-1}$ را بر حسب ω تعریف کنید.

۴-۹* نتایج زیر را از ضرب برداری روی $\mathbb{R}^3$ بدست آورید:

(الف)

$$\begin{array}{lll} e_1 \times e_1 = 0 & e_2 \times e_1 = -e_3 & e_3 \times e_1 = e_2 \\ e_1 \times e_2 = e_3 & e_2 \times e_2 = 0 & e_3 \times e_1 = -e_1 \\ e_1 \times e_3 = -e_2 & e_2 \times e_3 = e_1 & e_3 \times e_3 = 0 \end{array}$$

(ب)

$$v \times w = (v^2w^3 - v^3w^2)e_1 + (v^3w^1 - v^1w^3)e_2 + (v^1w^2 - v^2w^1)e_3$$

(پ)

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot |\sin\theta|, \quad \theta = \angle(v, w)$$

$$\langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0$$

(ت)

$$\langle v, w \times z\rangle = \langle w, z \times v\rangle = \langle z, v \times w\rangle$$

$$v \times (w \times z) = \langle v, z\rangle w - \langle v, w\rangle z$$

$$(v \times w) \times z = \langle v, z\rangle w - \langle w, z\rangle v$$

(ث)

$$|v \times w| = \sqrt{\langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^{۲}}$$

۴-۱۰ اگر $w_۱, \ldots, w_{n-۱} \in \mathbb{R}^n$، نشان دهید

$$|w_۱ \times \ldots \times w_{n-۱}| = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

که $g_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle$. راهنمایی. مسئله ۴-۳ را دربارهٔ یک زیرفضای خاص $(n-۱)$ـ بعدی $\mathbb{R}^n$ به کار برید.

۴-۱۱ اگر T یک ضرب داخلی روی V باشد، یک تبدیل خطی $f : V \to V$ **خود ـ آدژوئن** (نسبت به T) گفته می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in V$، $T(x, f(y)) = T\langle f(x), y\rangle$. اگر $v_۱, \ldots, v_n$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد، و $A = (a_{ij})$ ماتریس f نسبت به این پایه باشد نشان دهید $a_{ij} = a_{ji}$.

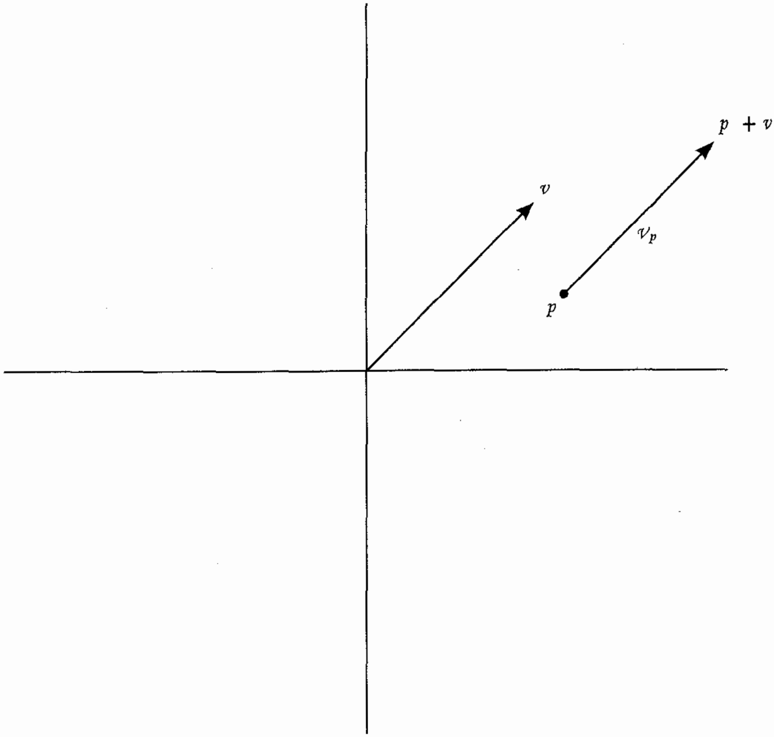
۴-۱۲ اگر $f_۱, \ldots, f_{n-۱} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$، $f_۱ \times \ldots \times f_{n-۱} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$، را به صورت $f_۱ \times \ldots \times f_{n-۱}(p) = f_۱(p) \times \ldots \times f_{n-۱}(p)$ تعریف کنید. از مسئله ۲-۱۴ استفاده کرده و فرمولی برای $D(f_۱ \times \ldots \times f_{n-۱})$ که در آن $f_۱, \ldots, f_{n-۱}$ مشتق‌پذیر هستند، پیدا کنید.

میدان و فرم

اگر $p \in \mathbb{R}^n$ باشد مجموعهٔ تمام جفتهای (p, v) را، که در آن $v \in \mathbb{R}^n$، **فضای مماسی** $\mathbb{R}^n$ در p می‌نامیم و با $\mathbb{R}^n_p$ نشان می‌دهیم. این مجموعه با اعمال

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$$

$$a \cdot (p, v) = (p, av)$$

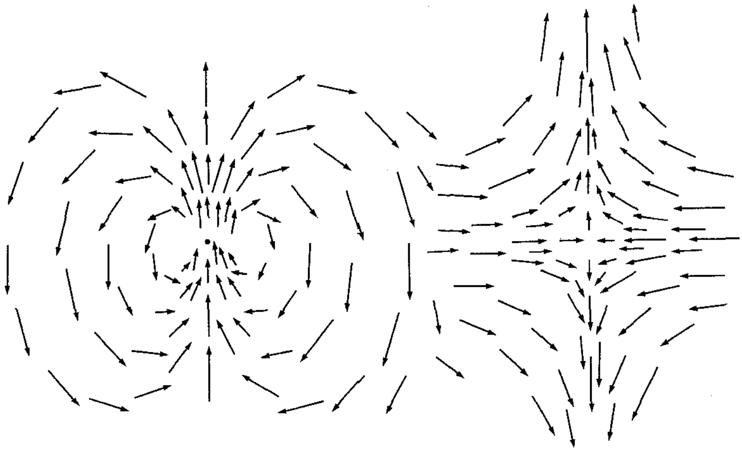


شکل ۴-۱

به وضوح، یک فضای برداری است. یک بردار $v \in \mathbb{R}^n$ غالباً به صورت یک پیکان از ۰ تا v نشان داده می‌شود؛ بردار $(p, v) \in \mathbb{R}^n_p$ می‌تواند به صورت پیکانی با همان راستا و طول، ولی با نقطه آغازین p، درنظر گرفته شود (شکل ۴-۱). این پیکان از p تا $p + v$ است، و بنابراین $p + v$ **نقطه انتهایی** (p, v) تعریف می‌شود. معمولاً (v, p) را با v_p نشان می‌دهیم (بخوانید: بردار v در p).

فضای برداری $\mathbb{R}^n_p$ به قدری مانند $\mathbb{R}^n$ است که بسیاری از ساختارهای $\mathbb{R}^n$، مشابه خود را در $\mathbb{R}^n_p$ دارند. به ویژه، **ضرب داخلی معمولی** $\langle , \rangle_p$ برای $\mathbb{R}^n_p$ با $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle$ تعریف می‌شود، و **جهت معمولی** برای $\mathbb{R}^n_p$، $[(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p]$ می‌باشد.

هر عملی که در یک فضای برداری امکانپذیر باشد می‌تواند در $\mathbb{R}^n_p$ انجام شود، و این بخش بیشتر بازگویش این مطلب است. ساده‌ترین عمل در یک فضای برداری انتخاب یک بردار است.



شکل ۴-۲

اگر چنین عملی در هر $\mathbb{R}^n_p$ انجام شود، یک **میدان برداری** به دست می‌آوریم (شکل ۴-۲). به عبارت دقیقتر، یک میدان برداری تابعی مانند F است که به هر $p \in \mathbb{R}^n$، $F(p) \in \mathbb{R}^n_p$ را نظیر می‌کند. برای هر p، اعداد $F^1(p), \ldots, F^n(p)$ وجود دارند به‌طوری که

$$F(p) = F^1(p) \cdot (e_1)_p + \cdots + F^n(p) \cdot (e_n)_p$$

پس n **تابع مؤلفه‌ای** $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ داریم. میدان برداری F پیوسته، دیفرانسیل‌پذیر، ... گفته می‌شود هرگاه F^iها چنین باشند. تعریفهای مشابهی می‌تواند برای یک فضای برداری که فقط روی یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است، گفته شود. اعمال روی بردارها می‌تواند به اعمال روی میدانهای برداری تبدیل شوند. مثلاً، اگر F و G میدانهای برداری و f یک تابع باشد، تعریف می‌کنیم

$$(F + G)(p) = F(p) + G(p)$$

$$\langle F, G\rangle(p) = \langle F(p), G(p)\rangle$$

$$(f \cdot F)(p) = f(p)F(p)$$

اگر $F_1, \ldots, F_{n-1}$ میدانهای برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه به طریق مشابه می‌توانیم تعریف کنیم:

$$(F_1 \times \ldots \times F_{n-1})(p) = F_1(p) \times \ldots \times F_{n-1}(p)$$

تعریفهای مشخص دیگر، مفید می‌باشند. **دیورژانس**، $\operatorname{div} F$، به صورت $\sum_{i=1}^{n} D_i F^i$ تعریف می‌شود. اگر نماد صوری

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} D_i \cdot e_i$$

را در نظر بگیریم، می‌توانیم به طور نمادی بنویسیم $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$. اگر $n = 3$، بخاطر سازگاری نمادها، می‌نویسیم

$$(\nabla \times F)(p) = (D_2 F^3 - D_3 F^2)(e_1)_p + (D_3 F^1 - D_1 F^3)(e_2)_p + (D_1 F^2 - D_2 F^1)(e_3)_p$$

میدان برداری $\nabla \times F$، کرل F گفته می‌شود. نامهای «دیورژانس» و «کرل» از فیزیک به عاریه گرفته شده‌اند و در قسمت آخر کتاب شرح داده خواهند شد.

ملاحظات مشابهی می‌تواند برای یک تابع ω که $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$، درنظر گرفته شود؛ چنین تابعی یک kـ**فرم** روی $\mathbb{R}^n$ گفته می‌شود، یا به عبارت ساده‌تر **فرم دیفرانسیل**. اگر $\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)$ پایه دوآل $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$ باشد، آنگاه برای تابعهای معین $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$،

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(p) \cdot [\varphi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i-k}(p)]$$

فرم ω **پیوسته**، **دیفرانسیل‌پذیر**، ... است هرگاه تابعهای $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$ چنین باشند. معمولاً فرض می‌کنیم که فرمها و میدانهای برداری دیفرانسیل‌پذیر باشند و «دیفرانسیل‌پذیری» البته به معنای «C^∞» است؛ این برای ساده‌تر کردن این مطلب است که نخواهیم فرض مشتق‌پذیری متوالی یک تابع را در اثبات یک قضیه (برای تعدادی مشخص) انجام دهیم. مجموع $\omega + \eta$، حاصلضرب $f \cdot \omega$، و حاصلضرب گوه‌ای $\omega \wedge \eta$ آشکارا تعریف می‌شوند. یک تابع f یک 0ـ فرم است و $f \cdot \omega$ نیز به صورت $f \wedge \omega$ نوشته می‌شود.

اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. با کمی تغییر می‌توانیم 1ـفرم df را به صورت زیر تعریف کنیم

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v)$$

به ویژه 1ـ فرم $d\pi^i$ را در نظر می‌گیریم. معمول است که به جای تابع π^i، x^i به کار برند. (روی $\mathbb{R}^3$ معمولاً x^1، x^2، و x^3 را با x، y و z نشان می‌دهیم). آشکارا این نمادگذاری معمول

کارآیی ندارد اما این امکان را به ما می‌دهد که بسیاری از نتایج کلاسیک را با فرمولهایی که از قبل آمده‌اند، نشان دهیم. چون $dx^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = v^i$، می‌بینیم که $dx^1(p), \ldots, dx^n(p)$ دقیقاً پایهٔ دوآل $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$ است. پس هر kـفرم می‌تواند به صورت

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

نوشته شود. نمایش متناظر برای df مورد توجه ویژه ماست.

۷-۴ قضیه. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه

$$df = D_1 f \cdot dx^1 + \cdots + D_n f \cdot dx^n$$

با نمادگذاری کلاسیک

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

برهان.

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \cdot D_i f(p) = \sum_{i=1}^{n} dx^i(p)(v_p) \cdot D_i f(p)$$

■

اکنون اگر یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را در نظر گیریم، تبدیل خطی $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را داریم. با یک تغییر جزیی دیگر تبدیل خطی $f_* : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ را داریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}$$

این تبدیل خطی، تبدیل خطی $f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$ را می‌دهد. پس اگر ω یک kـفرم روی $\mathbb{R}^m$ باشد می‌توانیم kـفرم $f^*(\omega)$ را روی $\mathbb{R}^n$ به صوت $(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(f(p)))$ تعریف کنیم.

یادآوری می‌شود که این به معنای آن است که اگر $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n_p$، آنگاه داریم $f^*\omega(p)(v_1,\dots,v_p) = \omega(f(p))(f_*(v_1),\dots,f_*(v_k))$. به عنوان یک راه گریز از انتزاعی بودن این تعریفها، یک قضیه می‌آوریم که ویژگیهای مهم f^* را خلاصه کرده و به ما اجازه محاسبه صریح $f^*\omega$ را می‌دهد.

۴-۸ قضیه. اگر $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه

$$f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^n D_j f^i \cdot dx^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j \quad (1)$$

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2) \quad (2)$$

$$f^*(g\cdot\omega) = (g\circ f)\cdot f^*\omega \quad (3)$$

$$f^*(\omega\wedge\eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta \quad (4)$$

برهان. (۱)

$$\begin{aligned} f^*(dx^i)(p)(v_p) &= dx^i(f(p))(f_*v_p) \\ &= dx^i(f(p))\Big(\sum_{j=1}^n v^j\cdot D_j f^1(p),\dots,\sum_{j=1}^n v^j\cdot D_j f^m(p)\Big)_{f(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n v^j\cdot D_j f^i(p) \\ &= \sum_{j=1}^n D_j f^i(p)\cdot dx^j(p)(v_p) \end{aligned}$$

اثبات (۲)، (۳) و (۴) به خواننده واگذار می‌گردد. ■

با استفاده از قضیه ۴-۸، به طور متوالی، داریم

$$\begin{aligned} f^*(P dx^1\wedge dx^2 + Q dx^2\wedge dx^3) =& (P\circ f)[f^*(dx^1)\wedge f^*(dx^2)] \\ &+ (Q\circ f)[f^*(dx^2)\wedge f^*(dx^3)] \end{aligned}$$

عبارت به دست آمده برای بسط هر یک از $f^*(dx^i)$ها به قدر کافی پیچیده است. (اگر چه بهتر است به خاطر داشت که $dx^i\wedge dx^i = (-1)dx^i\wedge dx^i = 0$.) در یک حالت خاص می‌توان محاسبه صریح زیر را داشت.

۴-۹ قضیه. اگر $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه

$$f^*(h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h\circ f)(\det f')dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

برهان. چون

$$f^*(h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h\circ f) f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

کافی است نشان داده شود که

$$f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (\det f')dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

گیریم $p \in \mathbb{R}^n$، و $A=(a_{ij})$ ماتریس $f'(p)$ باشد. در اینجا، و البته هر جا که امکان اشتباه نباشد، "p" را در $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(p)$ و عبارات مشابه حذف خواهیم کرد. پس بنابر قضیه ۴-۶

$$\begin{aligned}
&f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(e_1,\ldots,e_n)\\
&\qquad = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(f_*e_1,\ldots,f_*e_n)\\
&\qquad = dx^1 \wedge \cdots \wedge (\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,\ldots,\sum_{i=1}^n a_{in}e_i)\\
&\qquad = \det(a_{ij})\cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n(e_1,\ldots,e_n)
\end{aligned}$$

■

یک ساختار مهم مربوط به فرمها آن است که می‌توان با تعمیم اپراتور d، ۰- فرم‌ها را به ۱ـفرم‌ها تبدیل کرد. اگر

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,j_k} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

دیفرانسیل ω، یعنی $(k+1)$ـفرم $d\omega$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} d\omega_{i_1,\ldots,i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^n D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k})\cdot dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}
\end{aligned}$$

۴-۱۰ قضیه.

(۱) $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta$.

(۲) اگر ω یک kـفرم و η یک lـ فرم باشد، آنگاه

$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$$

(۳) $d(d\omega)=0$. به اختصار $d^2=0$.

(۴) اگر ω یک k ـ فرم روی $\mathbb{R}^m$ و $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه $f^*(d\omega)=d(f^*\omega)$.

برهان.

(۱) به خواننده واگذار می‌گردد.

(۲) فرمول برای $\omega=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$, $\eta=dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l}$ درست است زیرا تمام جملات صفر می‌شوند. وقتی ω یک ۰ـفرم است می‌توان به راحتی درستی فرمول را بررسی کرد. حالت کلی از (۱) و این دو مطلب نتیجه می‌شود.

(۳) چون

$$d\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^{n}D_\alpha(\omega_{i_1,\ldots,i_k})dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

داریم

$$d(d\omega)=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1,\ldots,i_k})dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

در این جمع، جمله‌های

$$D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1,\ldots,i_k})dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

و

$$D_{\beta,\alpha}(\omega_{i_1,\ldots i_k})dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

دو به دو حذف می‌شوند.

(۴) اگر ω یک ۰ـفرم باشد، رابطه واضح است. به استقرا فرض کنید (۴) برای وقتی که ω یک kـفرم است درست باشد. کافی است که (۴) برای یک $(k+۱)$ـفرم به صورت $\omega \wedge dx^i$ ثابت شود. داریم

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^i)) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-۱)^k \omega \wedge d(dx^i)) \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i) \\ &= d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) \qquad \text{بنابر (۲) و (۳)} \\ &= d(f^*(\omega \wedge dx^i)) \end{aligned}$$

■

فرم ω **بسته** گفته می‌شود هرگاه $d\omega = ۰$ و **کامل** نامیده می‌شود هرگاه برای ηـای، $\omega = d\eta$. قضیه ۴-۱۰ نشان می‌دهد که هر فرم کامل، بسته است، و طبیعی است که بپرسیم آیا، برعکس، هر فرم بسته، کامل است. اگر ω، ۱ـفرم $P\,dx + Q\,dy$ روی $\mathbb{R}^۲$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} d\omega &= (D_۱P\,dx + D_۲P\,dy) \wedge dx + (D_۱Q\,dx + D_۲Q\,dy) \wedge dy \\ &= (D_۱Q - D_۲P) dx \wedge dy \end{aligned}$$

پس اگر $d\omega = ۰$ آنگاه $D_۱Q = D_۲P$. مسئله‌های ۲-۲۱ و ۳-۳۴ نشان می‌دهند که یک ۰ـفرم f هست طوری که $\omega = df = D_۱f\,dx + D_۲f\,dy$. اما اگر ω فقط روی یک زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده باشد ممکن است چنین تابعی وجود نداشته باشد.

مثال کلاسیک در این مورد، فرم

$$\omega = \frac{-y}{x^۲ + y^۲} dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲} dy$$

است که روی $\mathbb{R}^۲ - ۰$ تعریف شده است. این فرم معمولاً با $d\theta$ نشان داده می‌شود (که θ در مسئله ۳-۴۱ تعریف شده است)، چرا که با $d\theta$ روی مجموعه $\{(x, y) : x < ۰$ یا، $x \geq ۰$ و $y \neq ۰\}$، هر جا که θ تعریف شده باشد، برابر است (مسئله ۴-۲۱). البته دقت کنید که θ نمی‌تواند به صورت پیوسته روی تمام $\mathbb{R}^۲ - ۰$ تعریف شود. اگر برای یک تابع $f : \mathbb{R}^۲ - ۰ \to \mathbb{R}$، $\omega = df$،

آنگاه $D_1 f = D_1\theta$ و $D_2 f = D_2\theta$، پس ثابت $f = \theta +$، که نشان می‌دهد چنین fای نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنید $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\, dx^i$ یک ۱ـفرم روی $\mathbb{R}^m$ باشد و ω مساوی $df = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f \cdot dx^i$. به وضوح می‌توانیم فرض کنیم $f(0) = 0$. مانند مسئله ۲-۳۵، داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} D_i f(tx) \cdot x^i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i\, dt \end{aligned}$$

این به ما امکان می‌دهد که برای یافتن f، با ω مفروض، تابع $I\omega$ را به صورت

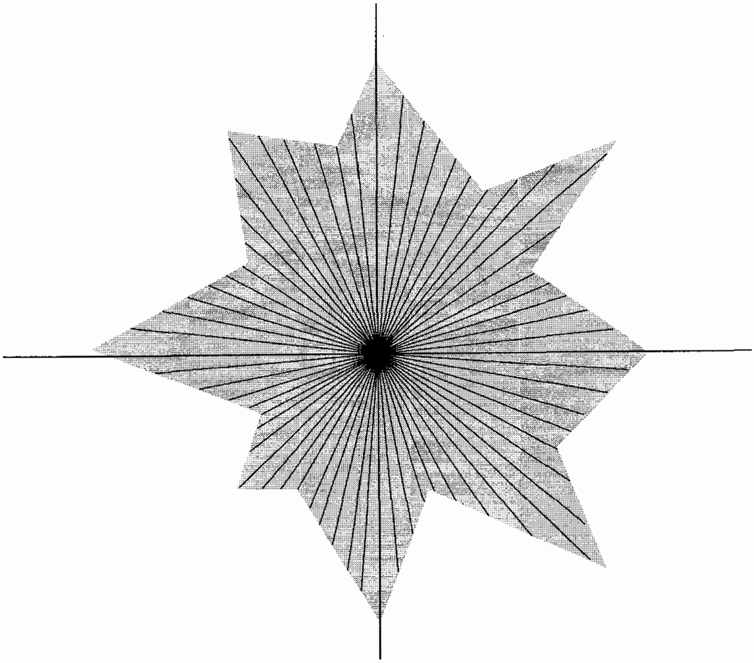
$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i\, dt$$

تعریف کنیم. دقت کنید که تعریف $I\omega$، فقط روی یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ با این ویژگی که برای هر $x \in A$، A شامل پاره‌خط از 0 تا x است، معنی دارد؛ چنین مجموعه بازی را **ستاره‌ای** نسبت به 0 می‌گوییم (شکل ۴-۳). کمی محاسبه نشان می‌دهد که (روی یک مجموعه باز ستاره‌ای) داریم $\omega = d(I\omega)$ به شرطی که ω در شرط لازم $d\omega = 0$ صدق کند. محاسبات، همانند تعریف $I\omega$، می‌توانند به طور قابل ملاحظه‌ای تعمیم داده شوند.

۴-۱۱ قضیه (لم پوانکاره). اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز ستاره‌ای نسبت به 0 باشد، آنگاه هر فرم بسته روی A کامل است.

برهان. یک تابع I از lـفرم‌ها به $(l-1)$ـفرم‌ها (برای هر l) تعریف خواهیم کرد طوری که $I(0) = 0$ و برای هر ω، $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$. نتیجه می‌شود که اگر $d\omega = 0$، آنگاه $\omega = d(I\omega)$. گیریم

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$



شکل۴-۳

چون A ستاره‌ای است می‌توانیم

$$I\omega(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)dt \right) x^{i_\alpha}$$
$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$

را تعریف کنیم (نماد $\wedge$ روی dx^{i_α} نشان می‌دهد که جمله حذف شده است). اثبات $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$ محاسبه‌ای کامل و فراگیر است. با استفاده از مسئله ۳-۳۲ داریم

$$d(I\omega) = l \cdot \sum_{i_1<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)dt \right)$$
$$dx^{i_l} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l}$$
$$+ \sum_{i_1<\cdots<i_l} \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_l})(tx)dt \right) x^{i_\alpha}$$
$$dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$

(توضیح دهید که چرا به جای جمله t^{l-1}، جمله t^l را داریم). همچنین داریم

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l}) \cdot dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$$

با اثر دادن I روی $(l+1)$-فرم $d\omega$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I(d\omega) = &\sum_{i_1<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)dt\right) x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \\ &- \sum_{i_1<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{l} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^l D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)dt\right) x^{i_\alpha} \\ &\qquad dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \end{aligned}$$

با جمع کردن، و با حذف جمع سه‌گانه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d(I\omega) + I(d\omega) &= \sum_{i_1<\cdots<i_l} l \cdot \left(\int_0^1 t^{l-1} \omega_{i_1,\dots,i_l}(tx)dt\right) \\ &\qquad dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l} \\ &+ \sum_{i_1<\cdots<i_l} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^l x^j D_j(\omega_{i_1,\dots,i_l})(tx)dt\right) \\ &\qquad dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_l} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}[t^l \omega_{i_1,\dots,i_l}(tx)]dt\right) \\ &\qquad dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_l} \omega_{i_1,\dots,i_l} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l} \\ &= \omega \end{aligned}$$

■

مسئله‌ها

۱۳-۴ (الف) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ و $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$، نشان دهید $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ و $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(ب) اگر $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، نشان دهید $d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df$

۴-۱۴ گیریم c یک منحنی دیفرانسیل‌پذیر در $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی، یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. بردار مماس v در t را به صورت $c_*((e_1)_t) = ((c^1)'(t), \dots, (c^n)'(t))_{c(t)}$ تعریف کنید. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$، نشان دهید بردار مماس بر $f \circ c$ در t، $f_*(v)$ است.

۴-۱۵ گیریم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ را به صورت $c(t) = (t, f(t))$ تعریف کنید. نشان دهید نقطه انتهایی بردار مماس c در t روی خط مماس بر نمودار f در $(t, f(t))$ قرار دارد.

۴-۱۶ گیریم $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ یک منحنی باشد طوری که برای هر t، $|c(t)| = 1$. نشان دهید $c(t)_{c(t)}$ و بردار مماس بر c در t بر هم عمودند.

۴-۱۷ اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، میدان برداری $\mathbf{f}$ را به صورت $\mathbf{f}(p) = f(p)_p \in \mathbb{R}^n_p$ تعریف کنید.

(الف) نشان دهید هر میدان برداری F روی $\mathbb{R}^n$ به صورت $\mathbf{f}$ برای برخی fها است.

(ب) نشان دهید (اثر f') $= \operatorname{div} \mathbf{f}$.

۴-۱۸ اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، میدان برداری $\operatorname{grad} f$ را به صورت

$$(\operatorname{grad} f)(p) = D_1 f(p) \cdot (e_1)_p + \cdots + D_n f(p) \cdot (e_n)_p$$

تعریف کنید. به دلایل آشکار $\operatorname{grad} f = \nabla f$ نیز می‌نویسیم. اگر $\nabla f(p) = w_p$، ثابت کنید $D_v f(p) = \langle v, w \rangle$ و نتیجه بگیرید $\nabla f(p)$ جهتی است که f بیشترین تغییرات را در p دارد.

۴-۱۹ اگر F یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ باشد، فرم‌های

$$\omega^1_F = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz,$$

$$\omega^2_F = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$$

را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید

$$df = \omega^{1}_{\text{grad } f}$$
$$d(\omega^{1}_{F}) = \omega^{2}_{\text{curl } F}$$
$$d(\omega^{2}_{F}) = (\text{div } F)dx \wedge dy \wedge dz$$

(ب) با استفاده از (الف) ثابت کنید

$$\text{curl grad } f = 0$$
$$\text{div curl } F = 0$$

(پ) اگر F یک میدان برداری روی مجموعهٔ باز ستاره‌ای A باشد و $\text{curl } F = 0$، نشان دهید برای برخی $f : A \to \mathbb{R}$، $F = \text{grad } f$. به طریق مشابه، اگر $\text{div } F = 0$، نشان دهید برای برخی میدان‌های برداری G روی A، $F = \text{curl } G$.

۴-۲۰ گیریم $f : U \to \mathbb{R}^n$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر با وارون دیفرانسیل‌پذیر $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ باشد. اگر هر فرم بسته روی U کامل باشد، نشان دهید که $f(U)$ نیز دارای این ویژگی است. راهنمایی. اگر $d\omega = 0$ و $f^*\omega = d\eta$، $(f^{-1})^*\eta$ را در نظر بگیرید.

۴-۲۱* ثابت کنید روی مجموعه‌ای که θ تعریف شده داریم

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

پیشنیازهای هندسی

یک **nـمکعب تکین** در $A \subset \mathbb{R}^n$، یک تابع پیوسته $c : [0, 1]^n \to A$ است (در اینجا منظور از $[0, 1]^n$، nـوجهی $[0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$ است). فرض کنید $\mathbb{R}^0$ و $[0, 1]^0$ هر دو $\{0\}$ را نشان دهند. پس یک ۰ـ مکعب تکین در A یک تابع $f : \{0\} \to A$ است، یا دقیقاً یک نقطه در A. یک ۱ـ مکعب تکین معمولاً یک **منحنی** گفته می‌شود. یک مثال خاص، اما فوق‌العاده مهم از یک nـ مکعب تکین در $\mathbb{R}^n$، **nـمکعب استاندارد** $I^n : [0, 1]^n \to \mathbb{R}^n$ است که به صورت $I^n(x) = x$، برای $x \in [0, 1]^n$ تعریف می‌شود.

می‌خواهیم جمع صوری nـمکعبهای تکین در A را با مضربهای صحیح، مثل

$$2c_1 + 3c_2 - 4c_3$$

که c_1، c_2، c_3، nـمکعبهای تکین در A هستند، تعریف کنیم. یک مجموعه متناهی از nـمکعبهای تکین با ضرایب صحیح را یک **nـزنجیر** در A می‌گوییم. بخصوص یک nـمکعب تکین c را می‌توان یک nـزنجیر $1 \cdot c$ نیز در نظر گرفت. واضح است که چگونه می‌توان nـزنجیرها را با هم جمع کرد. و یا در اعداد صحیح ضرب کرد، مثلاً

$$2(c_1 + 3c_4) + (-2)(c_1 + c_3 + c_2) = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4$$

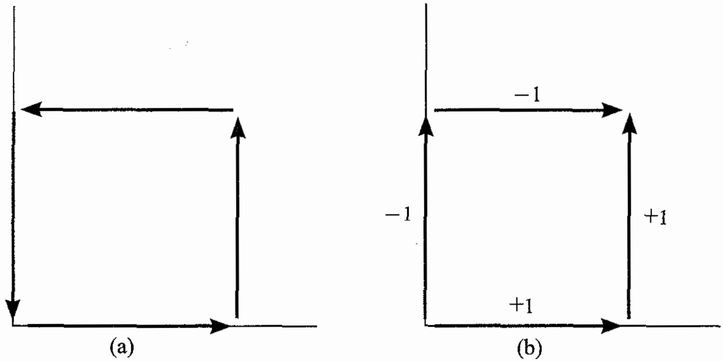
(یک تعریف دقیق‌تر این نمادگذاری در مسئله ۴-۲۲ آمده است)

برای هر nـزنجیر تکین c در A می‌توانیم یک $(n-1)$ـزنجیر در A که **مرز** c گفته شده و با σc نشان داده می‌شود، تعریف کنیم. مثلاً مرز I^2، می‌تواند به صورت مجموع چهار ۱ـزنجیر تکین که در جهت پادساعتگرد در اطراف $[0,1]^2$ در نظر گرفته می‌شوند، تعریف شود (شکل ۴-۴ (الف)). در واقع بهتر است σI^2 را به صورت مجموع چهار ۱ـمکعب تکین با ضرایب مناسب همانگونه که در شکل ۴-۴ (ب) نشان داده شده، تعریف کرد. تعریف دقیق σI^n نیازمند چند پیش‌تعریف است. برای هر i، $1 \leq i \leq n$، دو $(n-1)$ـمکعب تکین $I^n_{(i,0)}$ و $I^n_{(i,1)}$ به صورت زیرتعریف می‌شوند. اگر $x \in [0,1]^{n-1}$، آنگاه

$$\begin{aligned}
I^n_{(i,0)}(x) &= I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1}) \\
&= (x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^i, \ldots, x^{n-1}) \\
I^n_{(i,1)}(x) &= I^n(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1}) \\
&= (x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^{n-1})
\end{aligned}$$

$I^n_{(i,0)}$ را $(i,0)$ـوجه I^n، و $I^n_{(i,1)}$ را $(i,1)$ـ وجه I^n می‌نامیم (شکل ۴ـ۵). اکنون تعریف می‌کنیم

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}$$



شکل۴-۴

برای یک nـمکعب تکین معمولی $c : [\circ, \backslash]^n \to A$، (i, α)ـوجه را چنین تعریف می‌کنیم

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ (I^n_{(i,\alpha)})$$

و سپس تعریف می‌کنیم

$$\partial c = \sum_{i=\backslash}^{n} \sum_{\alpha=\circ,\backslash} (-\backslash)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

بالاخره مرز nـزنجیر $\sum a_i c_i$ را چنین تعریف می‌کنیم

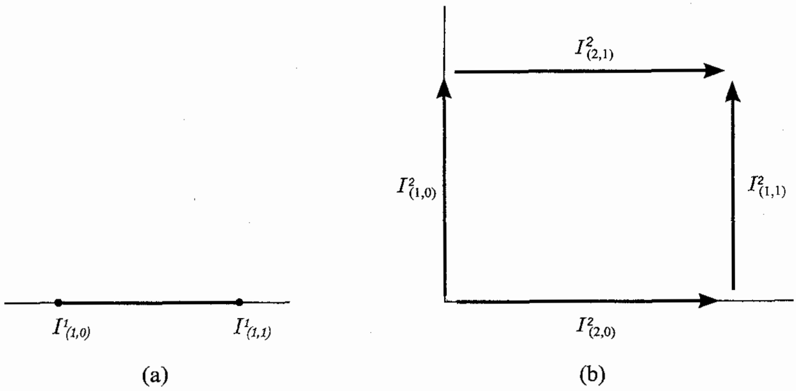
$$\partial(\sum a_i c_i) = \sum a_i \partial(c_i)$$

اگر چه این چند تعریف برای تمام مطالب این کتاب کفایت می‌کند، اما یک ویژگی استاندارد ∂ را در اینجا بیان می‌کنیم

۱۲-۴ قضیه. اگر c یک nـزنجیر در A باشد، آنگاه $\partial(\partial c) = \circ$. به اختصار $\partial^{\text{۲}} = \circ$.

برهان. گیریم $i \le j$. $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ را در نظر گیرید. اگر $x \in [\circ, \backslash]^{n-\text{۲}}$، آنگاه با بخاطر آوردن تعریف (j, β)ـوجه یک n ـ مکعب تکین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-\backslash}_{(j,\beta)}(x)) \\
&= I^n_{(i,a)}(x^{\backslash}, \dots, x^{j-\backslash}, \beta, x^j, \dots, x^{n-\text{۲}}) \\
&= I^n(x^{\backslash}, \dots, x^{i-\backslash}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-\backslash}, \beta, x^j, \dots, x^{n-\text{۲}})
\end{aligned}$$



شکل ۴-۵

به طریق مشابه

$$\begin{aligned}(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} &= I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)) \\ &= I^n_{(j+1,\beta)}(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{n-2}) \\ &= I^n(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{j-1},\beta,x^j,\ldots,x^{n-2})\end{aligned}$$

بنابراین برای $i \leq j$، $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$. (می‌توان از شکل ۴-۵ کمک گرفت). به آسانی نتیجه می‌شود که برای هر nـوجه تکین c که $i \leq j$، برابری

$$(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$$

برقرار است. اکنون

$$\begin{aligned}\partial(\partial c) &= \partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0,1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}\end{aligned}$$

در این مجموع $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ و $(c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ با علامتهای مخالف وجود دارند. بنابراین تمام جملات دوبدو حذف می‌شوند و $\partial(\partial c) = 0$. چون قضیه برای هر nـمکعب تکین درست است پس برای هر nـزنجیر تکین نیز درست است. ■

طبیعتاً می‌توان پرسید که آیا قضیه ۴-۱۲، معکوس دارد: اگر $\partial c = \circ$، آیا زنجیر d در A هست که $c = \partial d$؟ جواب به A بستگی دارد و در حالت کلی جواب «نه» است. مثلاً، $c : [\circ, \text{۱}] \to \mathbb{R}^{\text{۲}} - \circ$ را چنین تعریف کنید $c(t) = (\sin \text{۲}\pi nt, \cos \text{۲}\pi nt)$، که n یک عدد صحیح غیر صفر است. آنگاه $c(\text{۱}) = c(\circ)$، پس $\partial c = \circ$. اما هیچ ۲ـزنجیر c' در $\mathbb{R}^{\text{۲}} - \circ$ نیست که $\partial c' = c$ (مسئله ۴-۲۶).

مسئله‌ها

۴-۲۲ گیریم S مجموعهٔ تمام nـمکعبهای ویژه باشد، و $\mathbf{Z}$ مجموعه اعداد صحیح. یک **nـزنجیر** تابعی مانند $f : S \to \mathbf{Z}$ است طوری که برای هر c، بجز تعدادی متناهی، $f(c) = \circ$. $f + g$ و nf را چنین تعریف کنید $nf(c) = n \cdot f(c), (f+g)(c) = f(c) + g(c)$. نشان دهید که اگر f و g، nـ زنجیر باشند، $f + g$ و nf نیز nـزنجیر هستند.

اگر $c \in S$، c را تابعی مثل f بگیرید که $f(c) = \text{۱}$ و برای $c' \neq c$، $f(c') = \circ$. نشان دهید هر nـزنجیر f می‌تواند به صورت $\alpha_{\text{۱}} c_{\text{۱}} + \cdots + \alpha_k c_k$ نوشته شود که $\alpha_{\text{۱}}, \ldots \alpha_k$ عدد صحیح هستند و $c_{\text{۱}}, \ldots, c_k$، nـمکعب‌های تکین.

۴-۲۳ برای $R > \circ$ و عدد صحیح n، ۱ـمکعب تکین $c_{R,n} = [\circ, \text{۱}] \to \mathbb{R}^{\text{۲}} - \circ$ را به صورت $c_{R,n}(t) = (R \cos \text{۲}\pi nt, R \sin \text{۲}\pi nt)$ تعریف کنید. نشان دهید که یک ۲ـمکعب تکین $c = [\circ, \text{۱}]^{\text{۲}} \to \mathbb{R}^{\text{۲}} - \circ$ هست طوری که $c_{R_{\text{۱}},n} - c_{R_{\text{۲}},n} = \partial c$.

۴-۲۴ اگر c یک ۱ـ مکعب تکین در $\mathbb{R}^{\text{۲}} - \circ$ با $c(\circ) = c(\text{۱})$ باشد، نشان دهید که یک عدد صحیح n هست طوری که برای برخی ۲ـزنجیرهای $c^{\text{۲}}$، $c - c_{\text{۱},n} = \partial c^{\text{۲}}$. راهنمایی. نخست $[\circ, \text{۱}]$ را چنان افراز کنید که هر $c([t_{i-\text{۱}}, t_i])$ مشمول یک طرف خطی باشد که از $\circ$ می‌گذرد.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

شباهت بین $d^2 = 0$ و $\partial^2 = 0$ تنها یک شباهت بین نمادهای d و ∂ نیست بلکه ارتباطی بین فرم‌ها و زنجیرها را بیان می‌کند. این ارتباط از انتگرالگیری فرم‌ها روی زنجیرها حاصل می‌شود. بنابراین فقط nـمکعبهای تکین دیفرانسیل‌پذیر در نظر گرفته خواهند شد.

اگر ω یک kـفرم روی $[0,1]^k$ باشد، آنگاه برای یک f یکتا، $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$. تعریف می‌کنیم

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f$$

می‌توانیم این رابطه را چنین بازنویسی کنیم

$$\int_{[0,1]^k} f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k) dx^1 \ldots dx^k$$

که دلیلی بر تعریف تابع x^i می‌باشد.

اگر ω یک kـفرم روی A و c یک kـ مکعب تکین در A باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega$$

بخصوص دقت کنید که داریم

$$\begin{aligned}\int_{I^k} f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k &= \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k) \\ &= \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k) dx^1 \ldots dx^k\end{aligned}$$

یک تعریف ویژه می‌بایستی برای $k = 0$ داده شود. یک 0ـفرم ω یک تابع است؛ اگر $c : \{0\} \to A$ یک 0ـمکعب تکین در A باشد تعریف می‌کنیم

$$\int_c \omega = \omega(c(0))$$

انتگرال ω روی kـزنجیر $c = \sum a_i c_i$ چنین تعریف می‌شود

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega$$

انتگرال یک ۱ـفرم روی یک ۱ـزنجیر معمولاً **انتگرال روی خط** گفته می‌شود.

اگر $P\,dx + Q\,dy$ یک ۱ـفرم روی $\mathbb{R}^۲$ بوده و $c : [۰, ۱] \to \mathbb{R}^۲$ یک ۱ـ مکعب **تکین** (یک منحنی) باشد، آنگاه می‌توان (که ما چنین نمی‌کنیم) ثابت کرد

$$\int_c P\,dx + Q\,dy = \lim \sum_{i=۱}^{n} [c^۱(t_i) - c^۱(t_{i-۱})] \cdot P(c(t^i)) + [c^۲(t_i) - c^۲(t_{i-۱})] \cdot Q(c(t^i))$$

که $t_۰, \ldots, t_n$ یک افراز $[۰, ۱]$ می‌باشد، t^i نقطه دلخواهی از $[t_{i-۱}, t_i]$ است، و حد روی تمام افرازهایی هست که ماکزیمم $|t_i - t_{i-۱}|$ به صفر برود. سمت راست معمولاً به عنوان تعریف $\int_c P\,dx + Q\,dy$ در نظر گرفته می‌شود. این تعریف، طبیعی است چرا که این مجموعها بسیار شبیه مجموعهایی است که در تعریف انتگرالهای معمولی ظاهر می‌شوند. اگر چه کارکردن با چنین عبارتی تقریباً غیرممکن است و سریعاً مساوی یک انتگرال هم‌ارز با $\int_{[۰,۱]} c^*(P\,dx + Q\,dy)$ می‌شود.

تعریفهای مشابه برای **انتگرالهای رویه‌ای**، یعنی انتگرال ۲ـفرم‌ها روی ۲ـمکعبهای تکین، حتی پیچیده‌تر هستند و استفاده از آنها مشکل است. این دلیلی است که چرا ما از چنین روشی اجتناب کرده‌ایم. دلیل دیگر آن است که تعریف آمده در اینجا حتی در حالتهای کلی‌تر که در فصل ۵ خواهد آمد، معنادار است.

رابطهٔ بین فرمها، زنجیرها، d، و ∂ به بهترین وجه در قضیه استوکس گردهم آمده‌اند، قضیه‌ای که گاهی قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در بعدهای بالاتر نامیده می‌شود (اگر $k = ۱$ و $c = I^۱$، دقیقاً همان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌دست می‌آید).

۱۳-۴ قضیه (قضیه استوکس). اگر ω یک $(k - ۱)$ـفرم روی مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ و c یک kـزنجیر در A باشد، آنگاه

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

برهان. فرض کنید $c = I^k$ و ω یک $(k - ۱)$ ـ فرم روی $[۰, ۱]^k$ باشد. آنگاه ω مجموع

$(k-۱)$ـفرم‌ها به شکل

$$f\,dx^۱\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k$$

است و کافی است قضیه برای هر یک از اینها ثابت شود. این دقیقاً یک محاسبه است: دقت کنید که

$$\int_{[۰,۱]^{k-۱}} I^k_{(j,\alpha)}{}^*(f\,dx^۱\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k)$$
$$=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } j\neq i \\ \int_{[۰,۱]^k} f(x^۱,\ldots,\alpha,\ldots,x^k)dx^۱\ldots dx^k & \text{اگر } j=i \end{cases}$$

بنابراین

$$\int_{\partial I^k} f\,dx^۱\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k$$
$$=\sum_{j=۱}^{k}\sum_{\alpha=۰,۱}(-۱)^{j+\alpha}\int_{[۰,۱]^{k-۱}} I^k_{(j,\alpha)}{}^*(f\,dx^۱\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k)$$
$$=(-۱)^{i+۱}\int_{[۰,۱]^k} f(x^۱,\ldots,۱\ldots,x^k)dx^۱\ldots dx^k$$
$$+(-۱)^i\int_{[۰,۱]^k} f(x^۱,\ldots,۰,\ldots x^k)dx^۱\ldots,dx^k$$

از طرف دیگر

$$\int_{I^k} d(f\,dx^۱\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k)$$
$$=\int_{[۰,۱]^k} D_i f\,dx^i\wedge dx^۱\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k$$
$$=(-۱)^{i-l}\int_{[۰,۱]^k} D_i f$$

بنا بر قضیه فوبینی و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (یک بعدی) داریم

$$\begin{aligned}
\int_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k) \\
&= (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 D_i f(x^1, \ldots, x^k) dx^i \right) dx^1 \ldots \\
&\qquad \widehat{dx^i} \ldots dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 [f(x^1, \ldots, 1, \ldots x^k) \\
&\qquad - f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)] dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) dx^1 \ldots dx^k \\
&\qquad + (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k) dx^1 \ldots dx^k
\end{aligned}$$

پس

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$$

اگر c یک kـمکعب تکین دلخواه باشد، تعریفها نشان خواهند داد که

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega$$

بنابراین

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega$$

بالاخره، اگر c یک kـ زنجیر $\sum a_i c_i$ باشد، خواهیم داشت

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega$$

■

قضیه استوکس در سه صفت مهم با اکثر قضیه‌های اساسی مشترک است:

۱. ساده است.

۲. ساده است زیرا عبارتهای ظاهر شده در آن کاملاً تعریف شده‌اند.

۳. نتایج مهمی دارد.

چون کل این فصل کمی بیش از یک سری از تعریفها بود که صورت و اثبات قضیه استوکس را ممکن ساخت، خواننده می‌بایستی دو صفت اول را در قضیه استوکس بیابید. بقیه این کتاب اختصاص به تشریح صفت سوم دارد.

مسئله‌ها

۴-۲۵ (استقلال پارامتریسازی). گیریم c یک kـ مکعب تکین و $p : [\circ, \backslash]^k \to [\circ, \backslash]^k$ یک تابع یک به یک باشد که $p([\circ, \backslash]^k) = [\circ, \backslash]^k$ و برای هر $x \in [\circ, \backslash]^k$، $\det p'(x) \geq \circ$. اگر ω یک kـ فرم باشد، نشان دهید

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega$$

.

۴-۲۶ نشان دهید $\int_{c_{R,n}} d\theta = \text{۲}\pi n$، و با استفاده از قضیه استوکس نتیجه بگیرید که برای هر ۲ـزنجیر c در $\mathbb{R}^\text{۲} - \circ$، $c_{R,n} \neq \partial c$ (به تعریف $c_{R,n}$ در مسئله ۴-۲۳ رجوع کنید).

۴-۲۷ نشان دهید عدد صحیح n در مسئله ۴-۲۴ یکتا است. این عدد صحیح **عدد چرخشی** c حول صفر نامیده می‌شود.

۴-۲۸ یادآوری می‌شود که مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ همان $\mathbb{R}^\text{۲}$ با $(a, b) = a + bi$ است. اگر $a_\text{۱}, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$، تابع $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ را به صورت $f(z) = z^n + a_\text{۱} z^{n-\text{۱}} + \cdots + a_n$ درنظر بگیرید. ۱ـ مکعب تکین $c_{R,f} : [\circ, \backslash] \to \mathbb{C} - \circ$ را به صورت $c_{R,f} = f \circ c_{R,\text{۱}}$، و ۲ـمکعب تکین c را به صورت $c(s, t) = t \cdot c_{R,n}(s) + (\text{۱} - t) c_{R,f}(s)$ تعریف کنید.

(الف) نشان دهید $\partial c = c_{R,f} - c_{R,n}$، و برای R به قدر کافی بزرگ،

$$c([\circ, \backslash] \times [\circ, \backslash]) \subset \mathbb{C} - \circ$$

(ب) با استفاده از مسئله ۴-۲۶، قضیه اساسی جبر را ثابت کنید: هر چند جمله‌ای $z^n + a_\text{۱} z^{n-\text{۱}} + \cdots + a_n$، که $a_i \in \mathbb{C}$، یک ریشه در $\mathbb{C}$ دارد.

۲۹-۴ اگر ω یک ۱ـفرم $f\,dx$ روی $[\circ,\text{۱}]$ با $f(\circ) = f(\text{۱})$ باشد، نشان دهید عدد یکتای λ وجود دارد طوری که برای برخی تابعهای g، با شرط $g(\circ) = g(\text{۱})$، داریم $\omega - \lambda\,dx = dg$. راهنمایی. از $\omega - \lambda\,dx = dg$ روی $[\circ,\text{۱}]$ انتگرال بگیرید تا λ به دست آید.

۳۰-۴ اگر ω یک ۱ـفرم روی $\mathbb{R}^\text{۲} - \circ$ بوده به قسمی که $d\omega = \circ$، ثابت کنید برای برخی $\lambda \in \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R}^\text{۲} - \circ \to \mathbb{R}$،

$$\omega = \lambda\,d\theta + dg$$

راهنمایی. اگر

$$c_{R,\text{۱}}{}^*(\omega) = \lambda_R\,dx + d(g_R)$$

نشان دهید همهٔ اعداد λ_R مقدار یکسان λ را دارند.

۳۱-۴ اگر $\omega \neq \circ$، نشان دهید یک زنجیر c هست طوری که $\int_c \omega \neq \circ$. با استفاده از این مطلب، قضیه استوکس، و $\partial^\text{۲} = \circ$، ثابت کنید $d^\text{۲} = \circ$.

۳۲-۴ (الف) گیریم $c_\text{۱}$ و $c_\text{۲}$ ۱ـمکعبهای تکین در $\mathbb{R}^\text{۲}$ با $c_\text{۱}(\circ) = c_\text{۲}(\circ)$ و $c_\text{۱}(\text{۱}) = c_\text{۲}(\text{۱})$ باشند. نشان دهید یک ۲ـمکعب تکین c هست که $\partial c = c_\text{۱} - c_\text{۲} + c_\text{۳} - c_\text{۴}$، که در آن $c_\text{۳}$ و $c_\text{۴}$ تباهیده هستند، یعنی $c_\text{۳}([\circ,\text{۱}]), c_\text{۴}([\circ,\text{۱}])$ نقطه می‌باشند. نتیجه بگیرید که اگر ω کامل باشد $\int_{c_\text{۱}} \omega = \int_{c_\text{۲}} \omega$. مثال نقضی در $\mathbb{R}^\text{۲} - \circ$، برای وقتی که ω تقریباً بسته باشد، بیاورید.

(ب) اگر ω یک ۱ـفرم روی یک زیر مجموعه $\mathbb{R}^\text{۲}$ و برای هر $c_\text{۱}$ و $c_\text{۲}$ با $c_\text{۱}(\circ) = c_\text{۲}(\circ)$ و $c_\text{۱}(\text{۱}) = c_\text{۲}(\text{۱})$، $\int_{c_\text{۱}} \omega = \int_{c_\text{۲}} \omega$ باشد آنگاه ω کامل است. راهنمایی. مسئله‌های ۲-۲۱ و ۳-۳۴ را ببینید.

۳۳-۴ (درسی در متغیرهای مختلط). اگر $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$، گوییم f در $z_\circ \in \mathbb{C}$ **دیفرانسیل‌پذیر** است هرگاه حد

$$f'(z_\circ) = \lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$$

وجود داشته باشد. (این، تقسیم دو عدد مختلط است و کاملاً با تعریف ارائه شده در فصل ۲ متفاوت است). اگر f در هر نقطه z از یک مجموعه باز A دیفرانسیل‌پذیر باشد و f' روی A پیوسته، آنگاه f روی A **تحلیلی** گفته می‌شود.

(الف) نشان دهید $f(z) = z$ تحلیلی است اما $f(z) = \bar{z}$ تحلیلی نیست (که در آن $\overline{x+iy} = x - iy$). نشان دهید مجموع، حاصلضرب، و تقسیم دو تابع تحلیلی، تحلیلی است.

(ب) اگر $f = u + iv$ روی A تحلیلی باشد، نشان دهید u و v در معادلات کشی ـ ریمان صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

راهنمایی. از این مطلب استفاده کنید که $[f(z) - f(z_\circ)]/(z - z_\circ)$ باید برای $z = z_\circ + (x + i \cdot \circ)$ و $z = z_\circ + (\circ + i \cdot y)$ وقتی که $x, y \to \circ$، یکی باشد. (عکس آن نیز درست است اگر که u و v توابع پیوسته مشتق‌پذیر باشند؛ اثبات آن کمی مشکل است).

(پ) گیریم $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ یک تبدیل خطی باشد (که در آن $\mathbb{C}$ یک فضای برداری دو بعدی روی $\mathbb{R}$ است). اگر ماتریس T نسبت به پایهٔ $(1, i)$، $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ باشد، نشان دهید T به صورت ضرب یک عدد مختلط است اگر و تنها اگر $a = d$ و $b = -c$. قسمت (پ) نشان می‌دهد که یک تابع تحلیلی $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$، اگر به عنوان تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ در نظر گرفته شود، دارای مشتق $Df(z_\circ)$ است که به صورت ضرب در یک عدد مختلط است. این عدد مختلط چیست؟

(ت) تعریف کنید

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + i\,d\eta$$

$$\int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta$$

$$(\omega + i\eta) \wedge (\theta + i\lambda) = \omega \wedge \theta - \eta \wedge \lambda + i(\eta \wedge \theta + \omega \wedge \lambda)$$

و

$$dz = dx + i\,dy$$

نشان دهید $d(f \cdot dz) = ۰$ اگر و تنها اگر f در معادلات کشی ـ ریمان صدق کند.

(ث) قضیه انتگرال کشی را ثابت کنید: اگر f روی A تحلیلی باشد، آنگاه برای هر منحنی بسته c (۱ـ مکعب تکین با $c(۰) = c(۱)$) که برای برخی ۲ـمکعبهای تکین c' در A، $c = \partial c'$، خواهیم داشت $\int_c dz = ۰$.

(ج) نشان دهید اگر $g(z) = \frac{۱}{z}$، آنگاه $g \cdot dz$ [یا با نمادهای کلاسیک، $(\frac{۱}{z})dz$] برای یک تابع $h : \mathbb{C} - ۰ \to \mathbb{R}$ مساوی $i\,d\theta + dh$ است. نتیجه بگیرید که $\int_{c_{R,n}} \frac{۱}{z}\,dz = ۲\pi i n$.

(چ) اگر f روی $\{z : |z| < ۱\}$ تحلیلی باشد، از این واقعیت که $\frac{f(z)}{z}$ روی $\{z : ۰ < |z| < ۱\}$ تحلیلی است استفاده کرده و نشان دهید

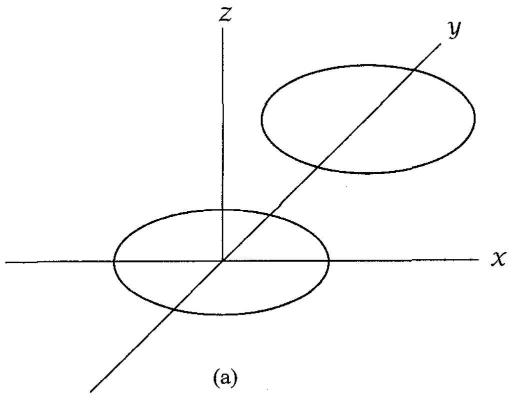
$$\int_{c_{R_۱,n}} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{c_{R_۲,n}} \frac{f(z)}{z} dz$$

که $۰ < R_۱ ، R_۲ < ۱$. با استفاده از (چ)، $\lim\limits_{R\to ۰} \int_{c_{R,n}} \frac{f(z)}{z} dz$ را محاسبه نموده و نتیجه بگیرید:

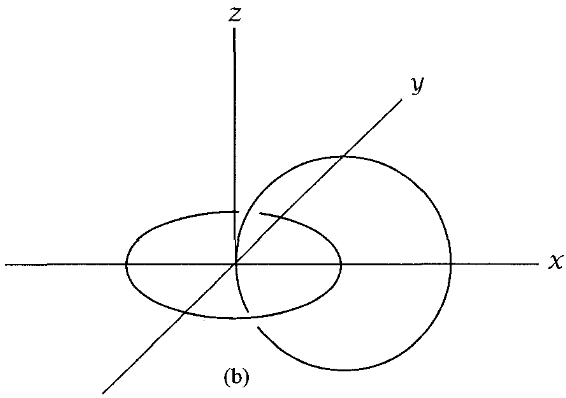
فرمول انتگرال کشی. اگر f روی $\{z : |z| < ۱\}$ تحلیلی بوده و c یک منحنی بسته در $\{z : ۰ < |z| < ۱\}$ با عدد چرخشی n حول صفر باشد، آنگاه

$$n \cdot f(۰) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z} dz$$

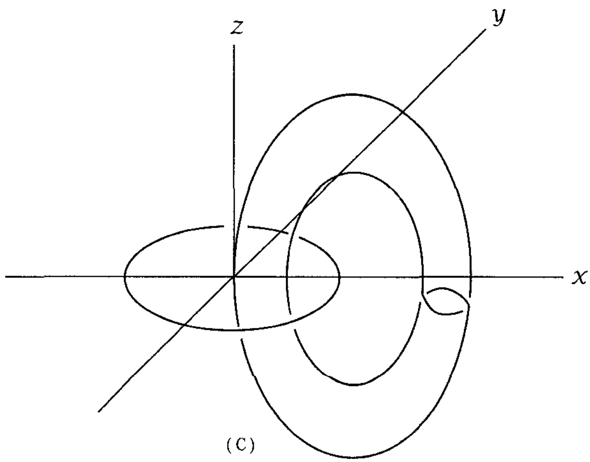
۴-۳۴ اگر $F : [۰,۱]^۲ \to \mathbb{R}^۳$ و $s \in [۰,۱]$ باشد، $F_s : [۰,۱] \to \mathbb{R}^۳$ را به صورت $F_s(t) = F(s,t)$ تعریف کنید. اگر هر F_s یک منحنی بسته باشد، F یک **هموتوپی** بین منحنی بستهٔ $F_۰$ و منحنی بستهٔ $F_۱$ گفته می‌شود. فرض کنید F و G هموتوپیهای منحنی‌های بسته هستند؛ اگر برای هر s، منحنی‌های بسته F_s و G_s یکدیگر را قطع نکنند، جفت (F,G) یک هموتوپی بین منحنیهای بسته نامتقاطع $F_۰$، $G_۰$ و $F_۱$، $G_۱$ گفته می‌شود. بطور شهودی واضح است که چنین هموتوپی بین $F_۰$ و $G_۰$، جفت منحنیهای داده شده در شکل ۴-۶ (الف)، و $F_۱$ و $G_۱$ جفت داده شده در (ب) یا (پ) وجود ندارد.



(a)



(b)



(C)

شکل۴-۶

مسئله حاضر، و مسئله ۵ـ۳۳ این را برای (ب) ثابت می‌کند اما اثبات (پ) به تکنیکهای پیچیده‌تری نیاز دارد.

(الف) اگر $f, g : [\circ, \mathsf{1}] \to \mathbb{R}^{\mathsf{3}}$ منحنیهای بسته نامتقاطع باشند، تعریف کنید:

$$c_{f,g} : [\circ, \mathsf{1}]^{\mathsf{2}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{3}} - \circ$$

$$c_{f,g}(u, v) = f(u) - g(v)$$

اگر (F, G) یک هموتوپی منحنیهای بسته نامتقاطع باشد، تعریف کنید

$$C_{F,G} : [\circ, \mathsf{1}]^{\mathsf{3}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{3}} - \circ$$

$$C_{F,G}(s, u, v) = c_{F_s, G_s}(u, v) = F(s, v) - G(s, v)$$

نشان دهید

$$\partial C_{F,G} = c_{F_\circ, G_\circ} - c_{F_{\mathsf{1}}, G_{\mathsf{1}}}$$

(ب) اگر ω یک ۲ـفرم بسته روی $\mathbb{R}^{\mathsf{3}} - \circ$ باشد، نشان دهید

$$\int_{c_{F_\circ, G_\circ}} \omega = \int_{c_{F_{\mathsf{1}}, G_{\mathsf{1}}}} \omega$$

۵

انتگرال روی خمینه‌ها

خمینه‌ها

اگر U و V مجموعه‌های بازی در $\mathbb{R}^n$ باشند، یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $h : U \to V$ با وارون دیفرانسیل‌پذیر $h^{-1} : V \to U$ یک **دیفئومرفیسم** گفته می‌شود. (پس «دیفرانسیل‌پذیری» به معنای «C^∞» است)

یک زیر مجموعهٔ M از $\mathbb{R}^n$ یک **خمینه kـبعدی** (در $\mathbb{R}^n$) گفته می‌شود هرگاه برای هر نقطه $x \in M$ شرط زیر برقرار باشد.

(خ) یک زیر مجموعه باز U شامل x، یک زیر مجموعه باز $V \subset \mathbb{R}^n$، و یک دیفئومرفیسم $h : U \to V$ هست که

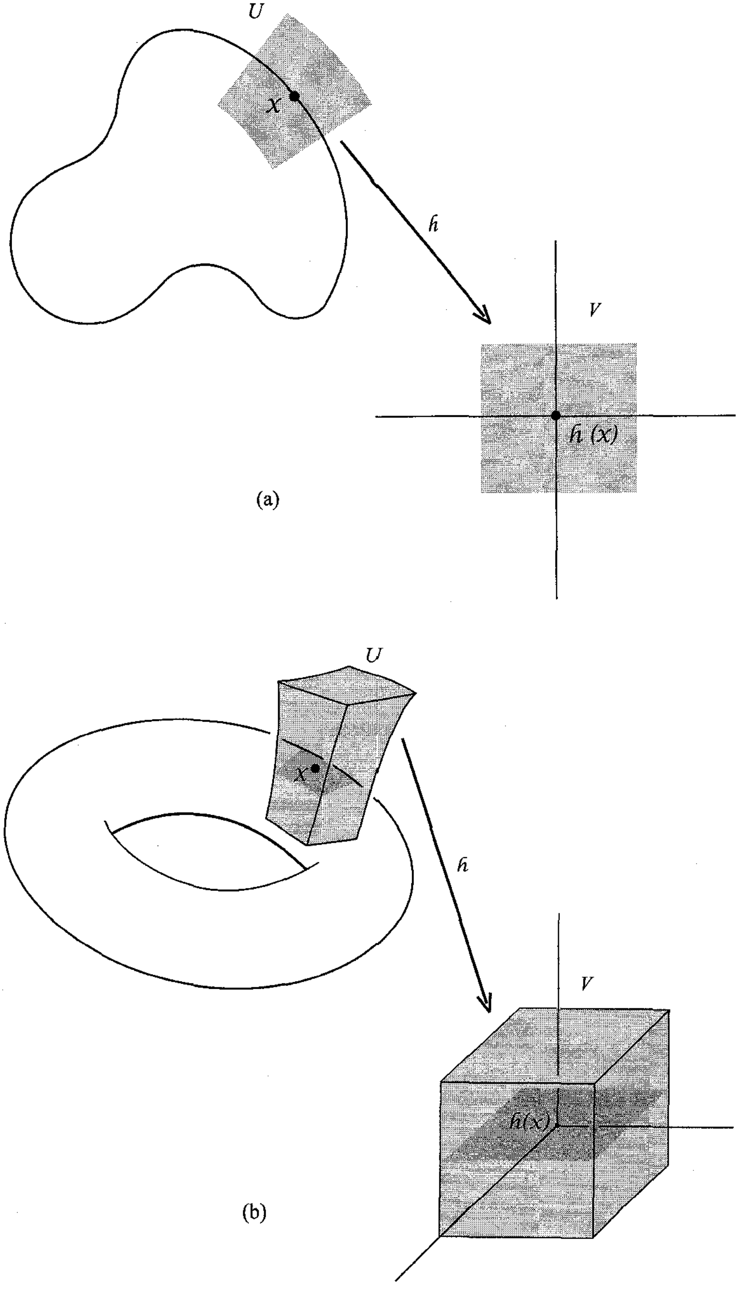
$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{۰\}) = \{y \in V : y^{k+۱} = \cdots = y^n = ۰\}$$

به عبارت دیگر، $U \cap M$، «به تقریب دیفئومرفیسم» همان $\mathbb{R}^k \times \{۰\}$ است (شکل ۵-۱). دو حالت استثنایی این تعریف باید در نظر گرفته شوند: یک نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ یک خمینه ۰ـبعدی است، و یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ یک خمینه nـبعدی.

مثال معمول یک خمینه nـبعدی، **کرهٔ nـبعدی** S^n است که به صورت

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+۱} : |x| = ۱\}$$

تعریف می‌شود. بررسی شرط (خ) به خواننده واگذار می‌گردد. اگر نمی‌خواهید که به زحمت پرداختن به جزئیات بیفتید، می‌توانید از قضیه زیر استفاده کنید که عملاً مثالهای فراوانی از خمینه‌ها



شکل۵-۱

را فراهم می‌سازد (مثلاً $S^n = g^{-1}\{0\}$ که در آن $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ به صورت $g(x) = |x|^2 - 1$ تعریف می‌شود).

۵-۱ قضیه. گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ باز، و $g : A \to \mathbb{R}^p$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر باشد طوری‌که $g'(x)$ برای $g(x) = 0$ رتبهٔ p داشته باشد. آنگاه $g^{-1}(0)$ یک خمینه $(n-p)$ـ بعدی در $\mathbb{R}^n$ است.

برهان. به راحتی از قضیه ۲-۱۳ نتیجه می‌شود. ■

شاخص دیگری برای شناسایی خمینه‌ها هست که بسیار مهم می‌باشد.

۵-۲ قضیه. یک زیرمجموعه M از $\mathbb{R}^n$ یک خمینه kـبعدی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in M$ «شرط مختصات» زیر صادق باشد:

(م) یک زیر مجموعه باز U شامل x، یک زیر مجموعه باز $W \subset \mathbb{R}^k$، و یک تابع یک‌به‌یک دیفرانسیل‌پذیر $f : W \to \mathbb{R}^n$ هست که

(۱) $f(W) = M \cap U$

(۲) برای هر $y \in W$، $f'(y)$ رتبهٔ k دارد.

(۳) $f^{-1} : f(W) \to W$ پیوسته است.

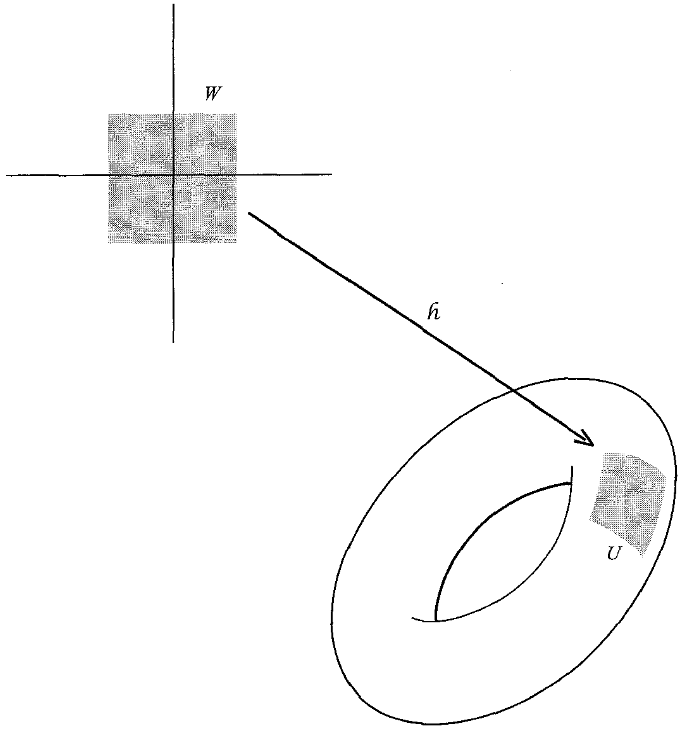
[چنین تابعی، **دستگاه مختصات** حول x نام دارد (شکل ۵-۲).]

برهان. اگر M یک خمینه kـبعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد، $h : U \to V$ را که در (م) صدق کند، در نظر بگیرید. فرض کنید $W = \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in h(M)\}$، و $f : W \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $f(a) = h^{-1}(a, 0)$ تعریف کنید. واضح است که $f(W) = M \cap U$ و f^{-1} پیوسته است. اگر $H : U \to \mathbb{R}^k$، به صورت $H(z) = (h^1(z), \ldots, h^k(z))$ تعریف شود آنگاه برای هر $y \in W$، $H(f(y)) = y$؛ پس $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I$ و $f'(y)$ باید رتبهٔ k داشته باشد.

بر عکس، فرض کنید $f : W \to \mathbb{R}^n$ در شرط (م) صدق کند. گیریم $x = f(y)$.

فرض کنید ماتریس $(D_j f^i(y)), 1 \le i, j \le k$ دترمینان غیر صفر دارد.

$g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $g(a, b) = f(a) + (a, b)$ تعریف کنید. آنگاه $\det g'(a, b) = \det(D_j f^i(a))$، پس $\det g'(y, 0) \neq 0$. بنابر قضیه ۲-۱۱ یک زیر مجموعه باز V_1' شامل $(y, 0)$ و یک زیر مجموعه باز V_2' شامل $g(y, 0) = x$ هست که



شکل ۵-۲

$g : V_{1'} \to V_{2'}$ معکوس دیفرانسیل‌پذیر $h : V_{2'} \to V_{1'}$ دارد. چون f^{-1} پیوسته است، برای مجموعهٔ بازی مانند U، $U \cap f(W) = \{f(a) : (a, 0) \in V_{1'}\}$. گیریم $V_2 = V_{2'} \cap U$ و $V_1 = g^{-1}(V_2)$. آنگاه $V_2 \cap M$ دقیقاً

$$\{f(a) : (a, 0) \in V_1\} = \{g(a, 0) : (a, 0) \in V_1\}$$

است، پس

$$h(V_2 \cap M) = g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}(\{g(a, 0) : (a, 0) \in V_1\})$$
$$= V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

■

باید به یک نتیجهٔ برهان قضیه ۵-۲ دقت شود. اگر $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}^n$ و $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}^n$

دو دستگاه مختصات باشند، آنگاه

$$f_{۲}^{-۱} \circ f_{۱} : f_{۱}^{-۱}(f_{۲}(W_{۲})) \to \mathbb{R}^{k}$$

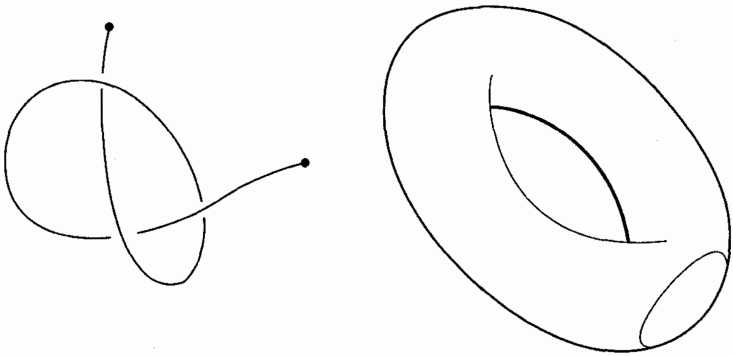
دیفرانسیل‌پذیر با ژاکوبین ناصفر است. در واقع، $f_{۲}^{-۱}(y)$ شامل k مؤلفه نخست $h(y)$ است.

نیم‌فضای $\mathbb{H}^{k} \subset \mathbb{R}^{k}$ به صورت $\{x \in \mathbb{R}^{k} : x^{k} \geq ۰\}$ تعریف می‌شود. زیرمجموعهٔ M از $\mathbb{R}^{n}$ یک **خمینه kـبعدی مرزدار** گفته می‌شود (شکل ۵-۳) هرگاه برای هر نقطه $x \in M$، یا شرط (خ) برقرار باشد یا شرط زیر:

(خ۱) یک مجموعهٔ باز U شامل x، یک مجموعه باز $V \subset \mathbb{R}^{n}$، و یک دیفئومرفیسم $h : U \to V$ هست که

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{H}^{k} \times \{۰\}) = \{y \in V : y^{k} \geq ۰ \ , \ y^{k+۱} = \cdots = y^{n} = ۰\}$$

و مؤلفه kـام $h(x)$ صفر $= ۰$ باشد.



(a) (b)

شکل ۵-۳

دقت شود که هر دو شرط (خ) و (خ۱) نمی‌تواند همزمان برای یک x برقرار باشد. درواقع، اگر $h_{۱} : U_{۱} \to V_{۱}$ و $h_{۲} : U_{۲} \to V_{۲}$، به ترتیب، در (خ) و (خ۱) صدق کنند، آنگاه $h_{۲} \circ h_{۱}^{-۱}$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر است که یک مجموعه باز $\mathbb{R}^{k}$، شامل $h(x)$، را به یک زیرمجموعه $\mathbb{H}^{k}$، که در $\mathbb{R}^{k}$ باز نیست، می‌برد. چون $\det(h_{۲} \circ h_{۱}^{-۱})' \neq ۰$، مسئله ۲-۳۶ نقض می‌شود.
مجموعه تمام نقاط $x \in M$ که شرط (خ۱) برای آنها صادق باشد **مرز** M گفته شده و با ∂M

نشان داده می‌شود. این نباید با مرز یک مجموعه که در فصل ۱ گفته شد اشتباه شود (مسئله‌های ۵-۳ و ۵-۸ را ببینید).

مسئله‌ها

۵-۱ اگر M یک خمینه kـبعدی مرزدار باشد، ثابت کنید ∂M یک خمینه $(k-۱)$ـ بعدی است و $M - \partial M$ یک خمینه kـبعدی.

۵-۲ مثال نقضی برای قضیه ۵-۲، هرگاه شرط (۳) حذف شود، بیابید. راهنمایی. یک فاصله باز را به شکل شش لاتین «6» در بیاورید.

۵-۳ (الف) گیریم $A \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه باز باشد طوری که مرز A یک خمینه $(n-۱)$ـبعدی است. نشان دهید $N = A \cup (A$ مرز$)$ یک خمینه nـبعدی مرزدار است. (می‌توان مثال زیر را بخاطر آورد: اگر $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < ۱$ یا $۱ < |x| < ۲\}$ آنگاه $N = A \cup (A$ مرز$)$ یک خمینه مرزدار است که $(A$ مرز$) \neq \partial A$).

(ب) رابطهٔ مشابهی برای یک زیرمجموعه باز یک خمینه nـبعدی برقرار کنید.

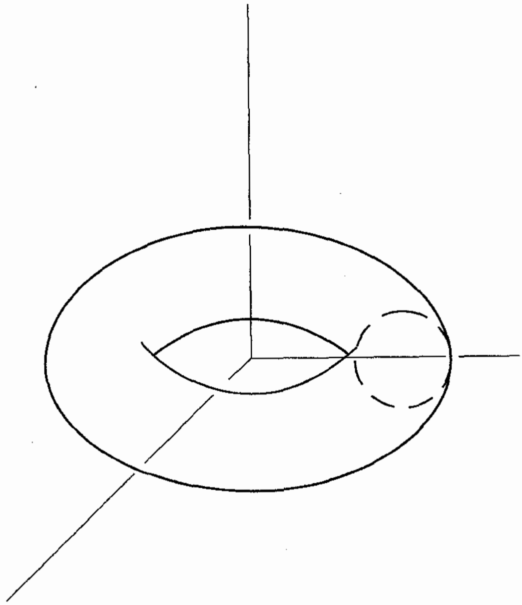
۵-۴ وارون جزیی قضیه ۵-۱ را ثابت کنید: اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ یک خمینه kـبعدی و $x \in M$ باشد، آنگاه یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ شامل x، و یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $g : A \to \mathbb{R}^{n-k}$ هست که $A \cap M = g^{-۱}(۰)$، و $g'(y)$ وقتی که $g(y) = ۰$، رتبهٔ $n-k$ دارد.

۵-۵ ثابت کنید یک زیر فضای (برداری) kـبعدی $\mathbb{R}^n$ یک خمینه kـبعدی است.

۵-۶ اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$، **نمودار** f به صورت، $\{(x, y) : y = f(x)\}$ تعریف می‌شود. نشان دهید نمودار f یک خمینه nـبعدی است اگر و تنها اگر f دیفرانسیل‌پذیر باشد.

۵-۷ گیریم $\mathbb{K}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^۱ = ۰ \quad$ و $\quad x^۲, \ldots, x^{n-۱} > ۰\}$. اگر $M \subset \mathbb{K}^n$ یک خمینه kـبعدی و N از چرخش M حول محورهای $x^۱ = \cdots = x^{n-۱} = ۰$ به دست آید، نشان دهید N یک خمینه $(k+۱)$ـبعدی است. مثال: چنبره (شکل ۵-۴).

۵-۸ (الف) اگر M یک خمینه kـبعدی در $\mathbb{R}^n$ و $k < n$ باشد، نشان دهید M اندازه صفر دارد.



شکل۵-۴

(ب) اگر M یک خمینه مرزدار بستهٔ nـبعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید مرز M، ∂M است. مثال نقضی برای وقتی که M بسته نباشد، بیاورید.

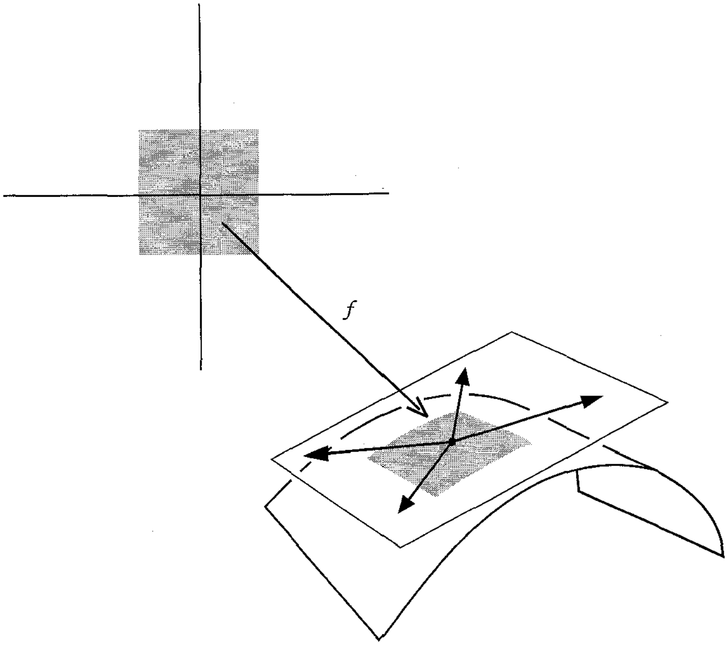
(پ) اگر M یک خمینه مرزدار فشرده nـبعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید M ژوردان ـ اندازه‌پذیر است.

میدانها و فرمها روی خمینه‌ها

گیریم M یک خمینه kـبعدی در $\mathbb{R}^n$، و $f : W \to \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات حول $x = f(a)$ باشد. چون $f'(a)$ مرتبهٔ k دارد، پس تبدیل خطی $f_* : \mathbb{R}^k_a \to \mathbb{R}^n_x$ یک‌به‌یک است، و $f_*(\mathbb{R}^k_a)$ یک زیرفضای kـبعدی $\mathbb{R}^n_x$ است. اگر $g : V \to \mathbb{R}$ دستگاه مختصات دیگری با $x = g(b)$ باشد، آنگاه

$$g_*(\mathbb{R}^k_b) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(\mathbb{R}^k_b) = f_*(\mathbb{R}^k_a)$$

پس زیرفضای kـبعدی $f_*(\mathbb{R}^k_a)$ بستگی به دستگاه مختصات f ندارد. این زیرفضا را با M_x نشان داده، و **فضای مماس** M در x می‌نامیم (شکل ۵-۵). در بخشهای بعدی نشان خواهیم داد که به طور طبیعی یک ضرب داخلی T_x روی M_x است که القا شدهٔ $\mathbb{R}^n_x$ می‌باشد: اگر $v, w \in M_x$، تعریف کنید $T_x(v, w) = \langle v, w\rangle_x$.



شکل۵-۵

فرض کنید A یک مجموعهٔ باز شامل M، و F یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی A باشد که برای هر $x \in M$، $F(x) \in M_x$. اگر $f : W \to \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات باشد، یک میدان برداری (دیفرانسیل‌پذیر) یکتای G روی W هست طوری که برای هر $a \in W$، $f_*(G(a)) = F(f(a))$. می‌توانیم تابع F را که به هر $x \in M$ یک بردار $F(x) \in M_x$ نظیر می‌کند نیز در نظر گیریم؛ چنین تابعی یک **میدان برداری روی** M گفته می‌شود. همچنین یک میدان برداری یکتای G روی W هست که برای $a \in W$، $f_*(G(a)) = F(f(a))$؛ گوییم F دیفرانسیل‌پذیر است هرگاه G دیفرانسیل‌پذیر باشد. دقت کنید که تعریف ما به دستگاه مختصات انتخاب شده بستگی ندارد. اگر $g : V \to \mathbb{R}^n$ و برای هر $b \in V$، $g_*(H(b)) = F(g(b))$، آنگاه تابعهای مؤلفه‌ای $H(b)$ می‌بایستی مساوی تابعهای مؤلفه‌ای $G(f^{-1}(g(b)))$ باشند، لذا

H دیفرانسیل‌پذیر است هرگاه G چنین باشد.

دقیقاً چنین ویژگیهایی برای فرمها برقرار است. تابع ω که به هر $x \in M$، $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$ را نظیر می‌کند یک pـفرم روی M گفته می‌شود. اگر $f : W \to \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات باشد، آنگاه $F^*\omega$ یک pـفرم روی W است؛ گوییم ω دیفرانسیل‌پذیر است هرگاه $f^*\omega$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. یک pـفرم ω روی M می‌تواند به صورت

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

نوشته شود.

در اینجا توابع $\omega_{i_1,\ldots i_p}$ روی M تعریف می‌شوند. تعریف $d\omega$ که قبلاً گفته شد در اینجا بی‌معنی می‌شود زیرا $D_j(\omega_{i_1,\ldots,i_p})$ مفهومی ندارد. اما، یک راه منطقی برای تعریف $d\omega$ هست.

۵-۳ قضیه. یک $(p+1)$ـفرم یکتای $d\omega$ روی M هست طوری که برای هر دستگاه مختصات $f : W \to \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

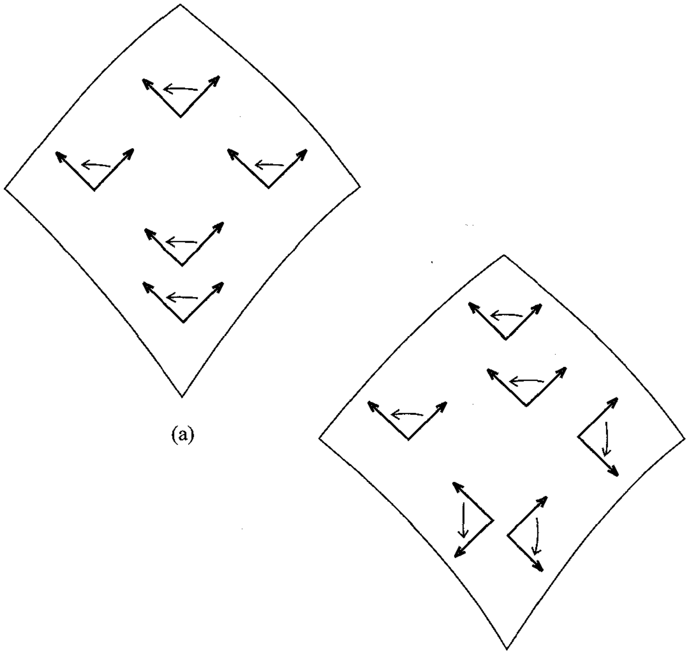
برهان. اگر $f : W \to \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات با $x = f(a)$ باشد و $v_1, \ldots, v_{p+1} \in M_x$، آنگاه $w_1, \ldots w_{p+1}$ یکتا در $\mathbb{R}^k_a$ یافت می‌شود طوری که $f_*(w_i) = v_i$. تعریف کنید $d\omega(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(w_1, \ldots, w_{p+1})$. می‌توان بررسی کرد که این تعریف $d\omega(x)$ به دستگاه مختصات f بستگی ندارد، پس $d\omega$ خوشتعریف است. به علاوه، واضح است که $d\omega$ باید چنین تعریف شود، پس $d\omega$ یکتاست. ■

غالباً لازم می‌شود که یک جهت μ_x برای هر فضای مماس M_x روی خمینه M انتخاب شود. چنین انتخابهایی **سازگار** گفته می‌شوند (شکل ۵-۶) هرگاه برای هر دستگاه مختصات $f : W \to \mathbb{R}^n$ و $a, b \in W$، رابطهٔ

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

برقرار باشد اگر و تنها اگر

$$[f_*((e_1)_b), \ldots, f_*((e_k)_b)] = \mu_{f(b)}$$



(a) (b)

شکل ۵-۶

فرض کنید جهت μ_x سازگار انتخاب شده باشد. اگر $f : W \to \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات باشد طوری که رابطه زیر

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

برای یک، و در نتیجه برای هر $a \in W$ برقرار باشد، آنگاه f **حافظ جهت** گفته می‌شود. اگر f حافظ جهت نباشد و $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ یک تبدیل خطی با $\det T = -1$ باشد، آنگاه $f \circ T$ حافظ جهت است. بنابراین یک دستگاه مختصات حافظ جهت حول هر نقطه وجود دارد. اگر f و g حافظ جهت باشند و $x = f(a) = g(b)$، آنگاه رابطهٔ

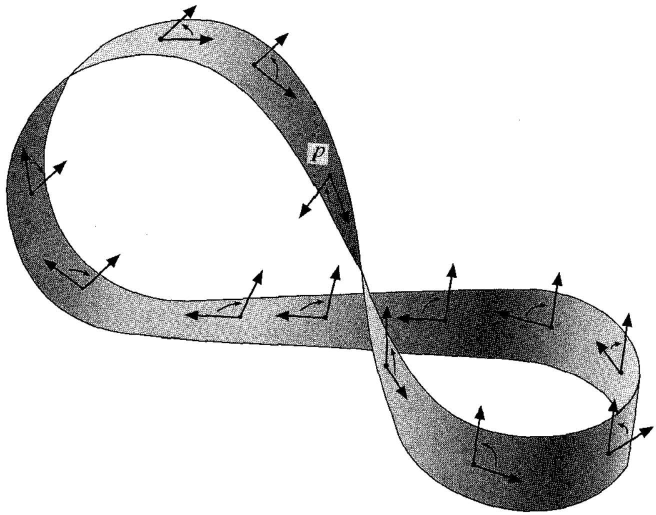
$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_x = [g_*((e_1)_b), \ldots, g_*((e_k)_b)]$$

رابطهٔ

$$[(g^{-1} \circ f)_*((e_1)_a), \ldots, (g^{-1} \circ f)_*((e_k)_a)] = [(e_1)_b, \ldots, (e_k)_b]$$

را برقرار می‌سازد، بنابراین $\det(g^{-1} \circ f)' > 0$، حقیقت مهمی که باید به یادآورده شود.

یک خمینه که جهت‌های μ_x می‌تواند به طور سازگار برایش انتخاب شود، **جهت‌پذیر** گفته می‌شود، و انتخاب خاص μ_x **جهت** μ روی M گفته می‌شود. یک خمینه همراه با یک جهت μ یک خمینه **جهت‌دار** گفته می‌شود. مثال کلاسیک یک خمینه جهت‌ناپذیر نوار موبیوس است. مدلی برای این نوار می‌تواند با چرخاندن نیم‌دورِ یک نوار کاغذی و سپس چسباندن دو انتهای این نوار باشد (شکل ۵-۷).

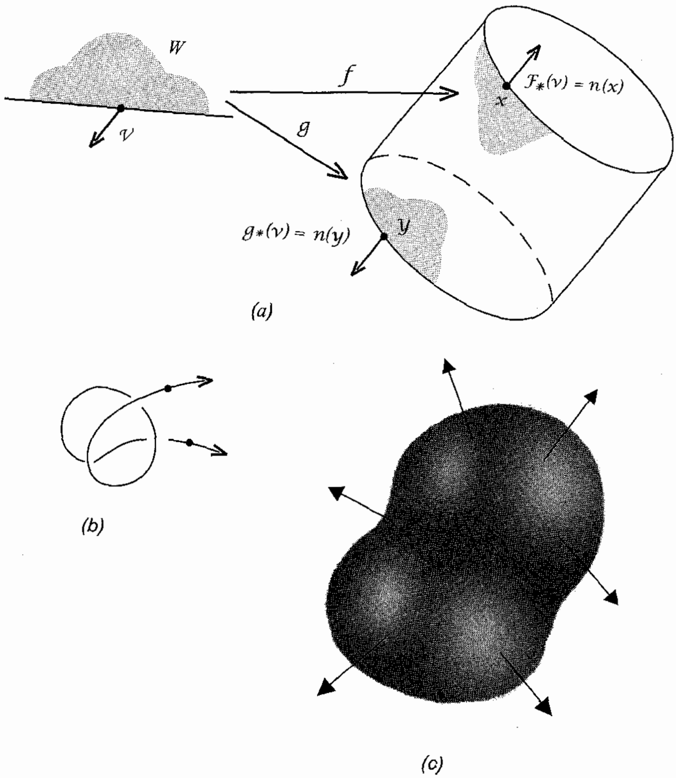


شکل۵-۷

تعریف ما از میدانهای برداری، فرمها، و جهت‌ها میتواند برای خمینه‌های مرزدار فیز گفته شود. اگر M یک خمینه kـبعدی مرزدار باشد و $x \in \partial M$، آنگاه $(\partial M)_x$ یک زیرفضای $(k-1)$ـبعدی فضای برداری kـبعدی M_x است. پس دقیقاً دو بردار یکه در M_x هستند که بر $(\partial M)_x$ عمود می‌باشند؛ آنها می‌توانند مانند شکل ۵-۸ تشخیص داده شوند. اگر $f : W \to \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات با $W \subset H^k$ باشد و $x = f(0)$، آنگاه فقط یکی از این بردارهای یکه، برای یک v_0، $f_*(v_0)$ است که در آن $v^k < 0$. این بردار یکه بردار **نرمال یکه خارج** $n(x)$ نامیده می‌شود؛ به راحتی می‌توان بررسی کرد که این تعریف به انتخاب دستگاه مختصات f بستگی ندارد.

فرض کنید μ یک جهت خمینه kـبعدی با مرز M باشد. اگر $x \in \partial M$،

$v_1, \ldots, v_{k-1} \in (\partial M)_x$ را چنان انتخاب کنید که $[n(x), v_1, \ldots, v_{k-1}] = \mu_x$. اگر $[n(x), w_1, \ldots, w_{k-1}] = \mu_x$ نیز درست باشد، آنگاه $[v_1, \ldots, v_{k-1}]$ و $[w_1, \ldots, w_{k-1}]$ جهت‌های یکسانی برای $(\partial M)_x$ هستند. این جهت با $(\partial\mu)_x$ نشان داده می‌شود. به راحتی دیده می‌شود که جهت‌های $(\partial\mu)_x$، برای $x \in \partial M$، روی ∂M سازگار هستند. پس اگر M جهت‌پذیر باشد، ∂M نیز جهت‌پذیر است، و یک جهت μ برای M، یک جهت $\partial\mu$ برای ∂M است که **جهت القایی** نامیده می‌شود. اگر این تعریفها را برای $\mathbb{H}^k$ با جهت معمولی به کار بریم، درمی‌یابیم که جهت القایی روی $\mathbb{R}^{k-1} = \{x \in \mathbb{H}^k : x^k = 0\}$، $(-1)^k$ ضربدر جهت معمولی است. دلیل این انتخاب در بخش بعدی معلوم خواهد شد.



شکل ۵-۸

اگر M یک خمینه $(n-1)$-بعدی جهت‌دار در $\mathbb{R}^n$ باشد، جایگزینی برای بردارهای یکه نرمال به سمت بیرون می‌تواند تعریف شود، حتی اگر M لزوماً مرز یک خمینه n-بعدی نباشد.

اگر $\mu_x = [v_1, \dots, v_{n-1}]$، $n(x)$ در $\mathbb{R}^n_x$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $n(x)$ یک بردار یکه عمود بر M_x بوده و $[n(x), v_1, \dots v_{n-1}]$ همان جهت معمولی $\mathbb{R}^n_x$ باشد. $n(x)$ را کماکان بردار یکه نرمال به سمت بیرون M (تعیین شده توسط μ) می‌نامیم. بردارهای $n(x)$ به وضوح به طور پیوسته روی M تغییر می‌کنند. برعکس اگر یک خانواده پیوسته از بردارهای یکه نرمال $n(x)$ روی تمام M تعریف شوند، می‌توانیم جهت M را تعریف کنیم. این نشان می‌دهد که چنین انتخاب پیوسته‌ای از بردارهای نرمال روی نوار موبیوس غیر ممکن است. در مدل کاغذی نوار موبیوس، دو طرف کاغذ (که ضخامت دارد) می‌توانند به عنوان نقاط انتهایی بردارهای یکه نرمال در هر دو جهت در نظر گرفته شوند. غیر ممکن بودن انتخاب بردارهای نرمال پیوسته‌وار در ویژگی معروف مدل کاغذی منعکس می‌شود. مدل کاغذی یک سویه است (اگر از یک طرف شروع کنید می‌توانید با رنگ کردن تمام کاغذ از طرف دیگر خارج شوید) به عبارت دیگر، انتخاب $n(x)$ به دلخواه در یک نقطه، و سپس لزوم پیوستگی در همه نقاط، الزاماً جهت متقابل $n(x)$ در نقطه آغازی را در پی خواهد داشت.

مسئله‌ها

۵-۹ نشان دهید M_x از بردارهای مماس در t روی منحنی‌های c در M با $c(t) = x$ تشکیل شده است.

۵-۱۰ فرض کنید $\mathcal{C}$ یک خانواده از دستگاه‌های مختصات برای M باشد که

(۱) برای هر $x \in M$ یک $f \in \mathcal{C}$ یافت می‌شود که یک دستگاه مختصات حول x است؛

(۲) اگر $f, g \in \mathcal{C}$، آنگاه $\det(f^{-1} \circ g)' > 0$. نشان دهید یک جهت یکتای M هست که اگر $f \in \mathcal{C}$، آنگاه f حافظ جهت است.

۵-۱۱ اگر M یک خمینه nـبعدی مرزدار در $\mathbb{R}^n$ باشد، μ_x را جهت معمولی $M_x = \mathbb{R}^n_x$ تعریف کنید (جهت μ که تعریف شد **جهت معمولی** M است). اگر $x \in \partial M$، نشان دهید دو تعریف $n(x)$ در بالا یکی هستند.

۵-۱۲ (الف) اگر F یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی $M \subset \mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید که یک مجموعه باز $A \supset M$ و یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر $\tilde{F}$ روی A هست طوری

که برای $x \in M$، $\tilde{F}(x) = F(x)$. راهنمایی. این را موضعاً انجام داده و از افراز واحد استفاده کنید.

(ب) اگر M بسته باشد، نشان دهید می‌تواند $A = \mathbb{R}^n$ انتخاب شود.

۵-۱۳ گیریم $g : A \to \mathbb{R}^p$ مانند قضیه ۵-۱ باشد.

(الف) اگر $x \in M = g^{-1}(0)$، $h : U \to \mathbb{R}^n$ را دیفئومرفیسم یکتایی بگیرید که $g \circ h(y) = (y^{n-p+1}, \ldots, y^n)$ و $h(0) = x$. $f : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $f(a) = h(0, a)$ تعریف کنید. نشان دهید f_* یک به یک است و بنابراین $n - p$ بردار $f_*((e_1)_0), \ldots, f_*((e_{n-p})_0)$ مستقل خطی هستند.

(ب) نشان دهید جهت‌های μ_x می‌توانند سازگار تعریف شوند، بنابراین M جهت‌پذیر است.

(پ) اگر $p = 1$، نشان دهید مؤلفه‌های بردار نرمال به سمت بیرون در x مضربهای $D_1 g(x), \ldots, D_n g(x)$ هستند.

۵-۱۴ اگر $M \subset \mathbb{R}^n$ یک خمینه $(n-1)$ ـ بعدی جهت‌پذیر باشد، نشان دهید یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ و $g : A \to \mathbb{R}^1$ دیفرانسیل‌پذیر هست که $M = g^{-1}(0)$ و $g'(x)$ برای $x \in M$، رتبه یک دارد. راهنمایی. مسئله ۵-۴ اینکار را موضعی انجام می‌دهد. با استفاده از جهت، جوابهای سازگار موضعی پیدا کرده و افراز واحد را به کار برید.

۵-۱۵ گیریم M یک خمینه $(n-1)$ـبعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد. گیریم $M(\varepsilon)$ مجموعه نقاط انتهایی بردارهای نرمال (در هر دو جهت) به طول ε بوده و ε آنقدر کوچک باشد که $M(\varepsilon)$ نیز یک خمینه $(n-1)$ـ بعدی باشد. نشان دهید $M(\varepsilon)$ جهت‌پذیر است (حتی اگر M نباشد). اگر M را نوار موبیوس بگیریم، $M(\varepsilon)$ چه می‌باشد؟

۵-۱۶ گیریم $g : A \to \mathbb{R}^p$ همان g در قضیه ۵-۱ باشد. اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر بوده و ماکزیمم (یا می‌نیمم) f روی $g^{-1}(0)$ در a اتفاق بیافتد، نشان دهید $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ هستند طوری که

$$D_j f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_j g^i(a) \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

راهنمایی. این معادله می‌تواند به صورت $df(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dg^i(a)$ نوشته شود که اگر $g(x) = (x^{n-p+1}, \dots, x^n)$، بدیهی است.

ماکزیمم f روی $g^{-1}(0)$ را گاهی ماکزیمم f **به شرط** $g^i = 0$ می‌گویند. می‌توان a را با حل دستگاه معادلات (۱) پیدا کرد. بخصوص، اگر $g : A \to \mathbb{R}$، می‌بایستی $n+1$ معادله

$$D_j f(a) = \lambda D_j g(a)$$

$$g(a) = 0$$

را نسبت به $n+1$ مجهول $a^1, \dots, a^n, \lambda$ حل کنیم که هرگاه معادله $g(a) = 0$ را در آخر در نظر بگیریم خیلی ساده است. این **روش لاگرانژ** است، و λـی مفید اما نامربوط، **ضریب لاگرانژ** گفته می‌شود. مسئله زیر یک کاربرد نظری مفید از ضرایب لاگرانژ را ارائه می‌دهد.

۵-۱۷ (الف) گیریم $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ خودالحاق با ماتریس $A = (a_{ij})$ باشد، بنابراین $a_{ij} = a_{ji}$. اگر $f(x) = \langle Tx, x\rangle = \sum a_{ij}x^i x^j$، نشان دهید $D_k f(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x^j$. با در نظر گرفتن ماکزیمم $\langle Tx, x\rangle$ روی S^{n-1} نشان دهید یک $x \in S^{n-1}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ هست که $Tx = \lambda x$.

(ب) اگر $V = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0\}$، نشان دهید $T(V) \subset V$ و $T : V \to V$ خود الحاق است.

(پ) نشان دهید T یک پایه متشکل از بردارهای ویژه دارد.

قضیهٔ استوکس روی خمینه‌ها

اگر ω یک pـفرم روی یک خمینه kـ بعدی مرزدار M، و c یک pـ مکعب تکین در M باشد، دقیقاً مثل قبل تعریف می‌کنیم

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^*\omega$$

انتگرال روی pـزنجیرها نیز مانند قبل تعریف می‌شوند. در حالت $p = k$ ممکن است یک مجموعه باز $W \supset [0,1]^k$ و یک دستگاه مختصات $f : W \to \mathbb{R}^n$ باشد که برای $x \in [0,1]^k$، $c(x) = f(x)$؛ یک kـمکعب در M همیشه به همین صورت در نظر گرفته خواهد شد. اگر M جهت‌دار باشد، kـمکعب تکین c **حافظ جهت** گفته می‌شود هرگاه f چنین باشد.

۴-۵ قضیه. اگر $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ دو kـمکعب تکین حافظ جهت در خمینه kـبعدی جهت‌دار M باشند و ω یک kـ فرم روی M، طوری که خارج $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$، $\omega = 0$، آنگاه

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$$

برهان. داریم

$$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega)$$

(در اینجا $c_2^{-1} \circ c_1$ فقط روی یک زیرمجموعه $[0,1]^k$ تعریف شده و تساوی دوم بستگی به $\omega = 0$ خارج $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$ دارد.) بنابراین کافی است نشان دهیم

$$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int_{c_2} \omega$$

اگر $c_2^*(\omega) = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ و $c_2^{-1} \circ c_1$ با g نشان داده شود، آنگاه بنابر قضیه ۴-۹ داریم

$$\begin{aligned}(c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) &= g^*(f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k)\\ &= (f \circ g) \cdot \det g' \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k\\ &= (f \circ g) \cdot |\det g'| \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k\end{aligned}$$

چراکه $\det g' = \det(c_2^{-1} \circ c_1)' > 0$. نتیجه اینک از قضیه ۳-۱۳ حاصل می‌شود. ■

تساوی آخر در این اثبات نشان می‌دهد که چرا باید اینقدر در باره جهت‌ها هشیار باشیم.

گیریم ω یک kـفرم روی یک خمینه kـبعدی جهت‌دار M باشد. اگر kـ مکعب تکین حافظ جهت c در M چنان باشد که خارج $c([0,1]^k)$، $\omega = 0$، تعریف می‌کنیم

$$\int_M \omega = \int_c \omega$$

قضیه ۵-۴ نشان می‌دهد که $\int_M \omega$ بستگی به انتخاب c ندارد. اکنون فرض کنید ω یک kـفرم دلخواه روی M باشد. یک پوشش باز $\mathcal{O}$ از M هست طوری که برای هر $U \in \mathcal{O}$ یک kـمکعب تکین حافظ جهت c با $U \subset c([\circ, \text{۱}]^k)$ وجود دارد. گیریم Φ یک افراز واحد برای M زیر مختص این پوشش باشد. تعریف می‌کنیم

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

به شرطی که مجموع به مفهوم تشریح شده در قبل از قضیه ۳-۱۲ همگرا باشد (که مطمئناً اگر M فشرده باشد درست است). عبارتی مشابه قضیه ۳-۱۲ نشان می‌دهد که $\int_M \omega$ بستگی به پوشش $\mathcal{O}$ یا Φ ندارد.

تمام تعریفهای ما می‌توانند برای خمینه kـبعدی مرزدار M با جهت μ داده شوند. گیریم ∂M دارای جهت القا شدهٔ $\partial\mu$ باشد. گیریم c یک kـمکعب حافظ جهت در M باشد طوری که $c_{(k,\circ)}$ در ∂M قرار گیرد و تنها وجهی باشد که هرنقطه درونی‌اش در ∂M است. همانگونه که تذکرات بعد از تعریف $\partial\mu$ نشان می‌دهند، $c_{(k,\circ)}$ حافظ جهت است هرگاه k زوج باشد، اما نه برای k فرد. بنابراین، اگر ω یک $(k-\text{۱})$ـفرم روی M باشد که خارج $c([\circ, \text{۱}]^k)$، صفر است، داریم

$$\int_{c_{(k,\circ)}} \omega = (-\text{۱})^k \int_{\partial M} \omega$$

از طرف دیگر، $c_{(k,\circ)}$ با ضریب $(-\text{۱})^k$ در ∂c ظاهر می‌شود. پس

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{(-\text{۱})^k c_{(k,\circ)}} \omega = (-\text{۱})^k \int_{c_{(k,\circ)}} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

انتخاب ما از $\partial\mu$ طوری بود که هر علامت منفی در این تساوی حذف شود. در قضیه زیر نیز چنین کرده‌ایم.

۵-۵ قضیه (قضیه استوکس). اگر M یک خمینه فشرده kـ بعدی مرزدار بوده و ω یک $(k-\text{۱})$ـفرم روی M باشد، آنگاه

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

(در اینجا ∂M دارای جهت القا شده است).

برهان. نخست فرض کنید یک kـمکعب تکین حافظ جهت در $M - \partial M$ هست که خارج $c([0,1]^k)$، $\omega = 0$. بنابر قضیه ۴-۱۳ و تعریف $d\omega$ داریم

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega$$

پس

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0$$

زیرا روی ∂c، $\omega = 0$. از طرف دیگر چون روی ∂M، $\omega = 0$ پس $\int_{\partial M} \omega = 0$.

اکنون فرض کنید یک kـ مکعب تکین حافظ جهت در M هست که $c_{(k,0)}$ تنها وجه در ∂M باشد و خارج $c([0,1]^k)$، $\omega = 0$. پس

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

اکنون حالت کلی را در نظر بگیرید. یک پوشش باز $\mathcal{O}$ از M و یک افراز واحد Φ برای M زیر مختص $\mathcal{O}$ هست که برای هر $\varphi \in \Phi$ فرم $\varphi \cdot \omega$ یکی از دو صورتی است که قبلاً گفته شد. داریم

$$0 = d(1) = d\left(\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi\right) = \sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi$$

طوری که

$$\sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi \wedge \omega = 0$$

چون M فشرده است، این مجموع متناهی است و داریم

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M \varphi \cdot d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega + \varphi \cdot d\omega \\ &= \sum_{\varphi\in\Phi} \int_M d(\varphi \cdot \omega) = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_{\partial M} \varphi \cdot \omega \\ &= \int_{\partial M} \omega\end{aligned}$$

■

مسئله‌ها

۵-۱۸ اگر M یک خمینه (یا خمینه مرزدار) nـبعدی در $\mathbb{R}^n$، با جهت معمولی باشد نشان دهید $\int_M f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$، آنگونه که در این بخش تعریف شده با $\int_M f$ تعریف شده در فصل ۳، یکی است.

۵-۱۹ (الف) نشان دهید اگر M فشرده نباشد قضیه ۵-۵ درست نیست. راهنمایی. اگر M یک خمینه مرزدار باشد که قضیه ۵-۵ برایش درست است، آنگاه $M - \partial M$ نیز می‌بایستی یک خمینه مرزدار (با مرزتهی) باشد.

(ب) نشان دهید که قضیه ۵-۵ برای خمینه‌های غیرفشرده M نیز درست است به شرطی که ω خارج یک زیر مجموعه فشرده M صفر شود.

۵-۲۰ اگر ω یک $(k-1)$ ـ فرم روی خمینه kـبعدی فشردهٔ M باشد، ثابت کنید $\int_M d\omega = 0$. مثال نقضی، برای وقتی که M فشرده نباشد، بیاورید.

۵-۲۱ یک kـ **تانسور مطلق** روی V تابعی مانند $\eta : V^k \to \mathbb{R}$ به فرم $|\omega|$ برای $\omega \in \Lambda^k(V)$ است. یک kـ**فرم مطلق** روی M تابعی مانند η است طوری که $\eta(x)$ یک kـتانسور مطلق روی M_x باشد. نشان‌دهید، حتی اگر M جهت‌پذیر نباشد، می‌توان $\int_M \eta$ را تعریف کرد.

۵-۲۲ اگر $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ یک خمینه مرزدار nـبعدی بوده و $M_2 \subset M_1 - \partial M_1$ یک خمینه مرزدار nـبعدی باشد طوری که M_1 و M_2 فشرده باشند، آنگاه

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega$$

که در آن ω یک $(n-1)$ ـ فرم روی M_1 است، و ∂M_1 و ∂M_2 جهت‌های القا شده توسط جهتهای معمولی M_1 و M_2 را دارند. راهنمایی. یک خمینه مرزدار M بیابید طوری که $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ و جهت القا شده ∂M با جهت القا شده ∂M_1 روی ∂M_1 یکی بوده، و منفی جهت القا شده ∂M_2 روی ∂M_2 باشد.

عنصر حجم

گیریم M یک خمینه (یا خمینه مرزدار) kـبعدی در $\mathbb{R}^n$، با جهت μ باشد. اگر $x \in M$، آنگاه μ_x و ضرب داخلی T_x که قبلاً تعریف کردیم، یک عنصر حجم $\omega(x) \in \Lambda^k(M_x)$ را تعیین می‌کنند. پس یک kـفرم ω روی M خواهیم داشت که هیچ‌کجا صفر نیست و آن را **عنصر حجم** روی M (مشخص شده توسط μ) می‌نامیم و با dV نشان می‌دهیم، اگر چه در حالت کلی دیفرانسیلِ یک $(k-۱)$ ـ فرم نیست. **حجم** M به صورت $\int_M dV$ تعریف می‌شود، به شرطی که این انتگرال وجود داشته باشد، که مطمئناً وقتی M فشرده است وجود دارد. «حجم» را معمولاً **طول** یا **مساحت سطح** برای خمینه‌های یک یا دو بعدی می‌نامند و در این حالت dV را با ds («عنصر طول») یا dA [یا ds] («عنصر مساحت [سطح]») نشان می‌دهند.

حالت جالب توجه برای ما، عنصر حجم رویهٔ جهت‌دار (خمینه دوبعدی) M در $\mathbb{R}^۳$ است. گیریم $n(x)$ بردار یکه نرمال به سمت بیرون در $x \in M$ باشد. اگر $\omega \in \Lambda^۲(M_x)$ به صورت

$$\omega(v,w) = \det\begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix}$$

تعریف شود آنگاه $\omega(v,w) = ۱$ هرگاه v و w یک پایهٔ یکه‌ای متعامد M_x با $\mu_x = [v,w]$ باشند. بنابراین $dA = \omega$. از طرف دیگر، با توجه به تعریف $v \times w$، $\omega(v,w) = \langle v \times w, n(x)\rangle$. پس داریم

$$dA(v,w) = \langle v \times w, n(x)\rangle$$

چون $v \times w$ یک مضرب $n(x)$ برای $v, w \in M_x$ است، نتیجه می‌گیریم که اگر $\mu_x = [v,w]$، آنگاه

$$dA(v,w) = |v \times w|$$

اگر بخواهیم مساحت M را به دست آوریم، می‌بایستی $\int_{[۰,۱]^۲} c^*(dA)$ را برای ۲ـمکعبهای c

که حافظ جهت هستند محاسبه کنیم. تعریف کنید

$$E(a) = [D_1 c^1(a)]^2 + [D_1 c^2(a)]^2 + [D_1 c^3(a)]^2$$

$$F(a) = D_1 c^1(a) \cdot D_2 c^1(a) + D_1 c^2(a) \cdot D_2 c^2(a) + D_1 c^3(a) \cdot D_2 c^3(a)$$

$$G(a) = [D_2 c^1(a)]^2 + [D_2 c^2(a)]^2 + [D_2 c^3(a)]^2$$

پس بنابر مسئله ۴-۹

$$\begin{aligned} c^*(dA)((e_1)_a, (e_2)_a) &= dA(c_*((e_1)_a), c_*((e_2)_a)) \\ &= |(D_1 c^1(a), D_1 c^2(a), D_1 c^3(a)) \times (D_2 c^1(a), D_2 c^2(a), D_2 c^3(a))| \\ &= \sqrt{E(a)G(a) - F(a)^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_{[0,1]^2} c^*(dA) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{EG - F^2}$$

محاسبهٔ مساحت رویه به وضوح امری دشوار است، خوشبختانه به ندرت نیاز به دانستن مساحت یک رویه می‌باشد. به علاوه، یک نمایش ساده برای dA وجود دارد که برای ملاحظات نظری کافی می‌باشد.

۵-۶ قضیه. گیریم M یک خمینه (یا خمینه مرزدار) دو بعدی جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ و n بردار یکه نرمال به سمت بیرون باشد. آنگاه

$$dA = n^1\, dy \wedge dz + n^2\, dz \wedge dx + n^3\, dx \wedge dy \tag{1}$$

به علاوه، روی M داریم

$$n^1\, dA = dy \wedge dz \tag{2}$$

$$n^2\, dA = dz \wedge dx \tag{3}$$

$$n^3\, dA = dx \wedge dy \tag{4}$$

برهان. رابطهٔ (۱) هم‌ارز رابطهٔ

$$dA(v,w) = \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix}$$

می‌باشد. این قبلاً با بسط دترمینان نسبت به سطر پایین ثابت شده است. برای اثبات رابطه‌های دیگر گیریم $z \in \mathbb{R}^3_x$. چون برای بعضی مقادیر $\alpha \in \mathbb{R}$، $v \times w = \alpha n(x)$، خواهیم داشت

$$\langle z, n(x)\rangle \cdot \langle v \times w, n(x)\rangle = \langle z, n(x)\rangle\alpha = \langle z, \alpha n(x)\rangle = \langle z, v \times w\rangle$$

با انتخاب $z = e_1, e_2, e_3$، رابطه‌های (۲) و (۳) و (۴) را به دست می‌آوریم. ■

تذکر. اگر $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_a)$ به صورت

$$\begin{aligned} \omega =& n^1(a) \cdot dy(a) \wedge dz(a) \\ &+ n^2(a) \cdot dz(a) \wedge dx(a) \\ &+ n^3(a) \cdot dx(a) \wedge dy(a) \end{aligned}$$

تعریف شود، آنگاه، مثلاً، درست نیست که بگوییم

$$n^1(a) \cdot \omega = dy(a) \wedge dz(a)$$

دو طرف این رابطه فقط زمانی که $v, w \in M_a$ باشند، یک مقدار را می‌دهند.

چند تذکر در رابطه با تعریف طول و مساحت رویه که اینک ارائه دادیم، باید داده شود. اگر $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل‌پذیر بوده و $c([0,1])$، یک خمینه مرزدار یک بعدی باشد، می‌توان نشان‌داد، با اثبات طولانی، که طول $c([0,1])$ در واقع سوپرمم طولهای خطوط محاط در آن می‌باشد. اگر $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$، طبیعتاً انتظار داریم که مساحت $c([0,1]^2)$ کوچکترین کران بالای مساحتهای مثلثهای با رئوس روی $c([0,1]^2)$ باشد. جالب این است ک معمولاً چنین کوچکترین کران بالایی وجود ندارد ـ می‌توان چندضلعیهای به قدر کافی نزدیک به $c([0,1]^2)$ یافت که مساحتشان به قدر دلخواه بزرگ باشد.

این مطلب برای یک استوانه در شکل ۵-۹ نشان داده شده است. تعریفهای زیادی از مساحت یک رویه داده شده است، که با هم تفاوت دارند، اما همگی با تعریف ما برای رویه‌های دیفرانسیل‌پذیر مطابقت دارند. خواننده می‌تواند برای بحثی دربارهٔ این سئوالات جدی به مرجع [۳] یا [۱۵] مراجعه نماید.

مسئله‌ها

۵-۲۳ اگر M یک خمینه یک بعدی جهت‌دار در $\mathbb{R}^n$ بوده و $c : [\circ, \text{۱}] \to M$ حافظ جهت باشد، نشان دهید

$$\int_{[\circ,\text{۱}]} c^*(ds) = \int_{[\circ,\text{۱}]} \sqrt{[(c^\text{۱})']^\text{۲} + \cdots + [(c^n)']^\text{۲}}$$

۵-۲۴ اگر M یک خمینه nـبعدی در $\mathbb{R}^n$، با جهت معمولی، باشد نشان دهید که $dv = dx^\text{۱} \wedge \ldots \wedge dx^n$، و بنابراین حجم M تعریف شده در این بخش با حجم تعریف شده در فصل ۳ یکی است. (دقت کنید که این بستگی به ضریب عددی در تعریف $\omega \wedge \eta$ دارد.)

۵-۲۵ قضیهٔ ۵-۶ را به حالت یک خمینه $(n - \text{۱})$ـبعدی جهت‌دار در $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهید.

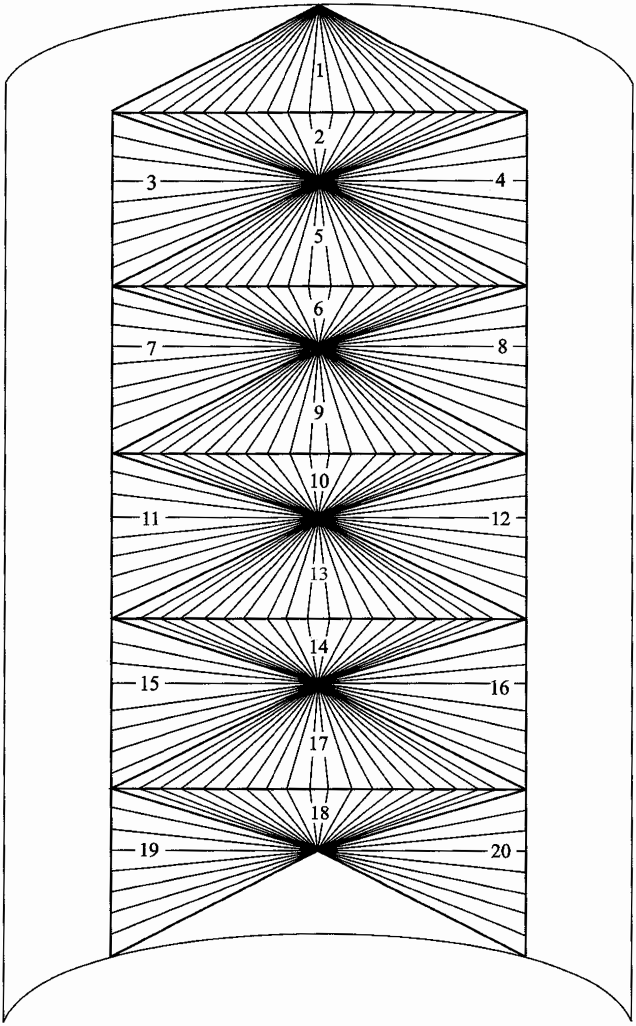
۵-۲۶ (الف) اگر $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ نامنفی باشد و نمودار f در صفحهٔ xy حول محور x در $\mathbb{R}^\text{۳}$ دوران داده شود تا رویهٔ M به دست آید، نشان دهید که مساحت M برابر است با

$$\int_a^b \text{۲}\pi f \sqrt{\text{۱} + (f')^\text{۲}}$$

(ب) مساحت $S^\text{۲}$ را حساب کنید.

۵-۲۷ اگر $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی حافظ نرم باشد و M یک خمینه kـبعدی در $\mathbb{R}^n$، نشان دهید که حجم M با حجم $T(M)$ یکی است.

۵-۲۸ (الف) اگر M یک خمینه ۴ـبعدی باشد، نشان دهید که حتی اگر M جهت‌پذیر نباشد می‌توان یک kـتانسور مطلق $|dV|$ طوری تعریف کرد که حجم M به صورت $\int_M |dV|$ درآید.



شکل۵-۹

(ب) اگر $c : [\circ, \mathsf{2}\pi] \times (-\mathsf{1}, \mathsf{1}) \to \mathbb{R}^{\mathsf{3}}$ به صورت

$$c(u, v) = (\mathsf{2}\cos u + v \sin \frac{u}{\mathsf{2}} \cos u, \mathsf{2}\sin u + v \sin \frac{u}{\mathsf{2}} \sin u, v \cos \frac{u}{\mathsf{2}})$$

تعریف شود، نشان دهید $c([\circ, \mathsf{2}\pi] \times (-\mathsf{1}, \mathsf{1}))$ یک نوار موبیوس است و مساحت آن را بیابید.

۵-۲۹ نشان دهید که اگر یک kـفرم هیچ‌جا صفر روی یک خمینه kـبعدی M وجود داشته باشد، آنگاه M جهت‌پذیر است.

۵-۳۰ (الف) اگر $f : [\circ, \mathsf{1}] \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و $c : [\circ, \mathsf{1}] \to \mathbb{R}^{\mathsf{2}}$ به صورت $c(x) = (x, f(x))$ تعریف شود، نشان دهید $c([\circ, \mathsf{1}])$ دارای طول $\int_\circ^\mathsf{1} \sqrt{\mathsf{1} + (f')^\mathsf{2}}$ است.

(ب) نشان دهید این طول، کوچکترین کران بالای طولهای خطهای محاط می‌باشد. راهنمایی. اگر $\circ = t_\circ \le t_\mathsf{1} \le \ldots \le t_n = \mathsf{1}$، آنگاه برای برخی $s_i \in [t_{i-\mathsf{1}}, t_i]$،

$$\begin{aligned}|c(t_i) - c(t_{i-\mathsf{1}})| &= \sqrt{(t_i - t_{i-\mathsf{1}})^\mathsf{2} + (f(t_i) - f(t_{i-\mathsf{1}}))^\mathsf{2}} \\ &= \sqrt{(t_i - t_{i-\mathsf{1}})^\mathsf{2} + f'(s_i)^\mathsf{2}(t_i - t_{i-\mathsf{1}})^\mathsf{2}}\end{aligned}$$

۵-۳۱ ۲ـفرم ω روی $\mathbb{R}^{\mathsf{3}} - \circ$ را که به صورت

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^\mathsf{2} + y^\mathsf{2} + z^\mathsf{2})^{\frac{\mathsf{3}}{\mathsf{2}}}}$$

تعریف شده، درنظر بگیرید.

(الف) نشان دهید ω بسته است.

(ب) نشان دهید

$$\omega(p)(v_p, w_p) = \frac{\langle v \times w, p\rangle}{|p|^\mathsf{3}}$$

برای $r > \circ$، قرار دهید $S^\mathsf{2}(r) = \{x \in \mathbb{R}^\mathsf{3} : |x| = r\}$. نشان دهید ωـی محدود به فضای مماس $S^\mathsf{2}(r)$، $\frac{\mathsf{1}}{r^\mathsf{2}}$ ضربدر عنصر حجم است، و $\int_{S^\mathsf{2}(r)} \omega = \mathsf{4}\pi$. نتیجه بگیرید که ω کامل نیست. اگر چه می‌توان ω را با $d\Theta$ نشان داد زیرا، همانگونه که خواهیم دید، $d\Theta$ مشابه ۱ـفرم $d\theta$ روی $\mathbb{R}^\mathsf{2} - \circ$ است.

(پ) اگر v_p یک بردار مماس باشد طوری که برای برخی $\lambda \in \mathbb{R}$، $v = \lambda p$، نشان دهید که برای هر w_p، $d\Theta(p)(v_p, w_p) = ۰$. اگر یک خمینه دو بعدی M در $\mathbb{R}^۳$ قسمتی از یک مخروط بزرگ باشد، یعنی، M اجتماع پاره‌خطهای شعاعهای گذرنده از مبدأ باشد، نشان دهید $\int_M d\Theta = ۰$.

(ت) گیریم $M \subset \mathbb{R}^۳ - ۰$ یک خمینه مرزدار دو بعدی فشرده باشد طوری که هر شعاع گذرنده از ۰، M را حداکثر یکبار قطع کند (شکل ۵-۱۰). اجتماع شعاعهای گذرنده از ۰ که M را قطع می‌کنند، یک مخروط توپر $C(M)$ است. **زاویه فضایی بسط یافته** توسط M به عنوان مساحت $C(M) \cap S^۲$ تعریف می‌شود، و یا هم ارز آن، $\frac{۱}{r^۲}$ ضربدر مساحت $C(M) \cap S^۲(r)$ برای $r > ۰$. ثابت کنید زاویهٔ فضایی بسط یافته توسط M، $|\int_M d\Theta|$ است. راهنمایی. r را آنقدر کوچک بگیرید که یک خمینه مرزدار سه‌بعدی N (مانند شکل ۵-۱۰) طوری باشد که ∂N اجتماع M و $C(M) \cap S^۲(r)$، و بخشی از یک مخروط تعمیم یافته باشد. (در واقع، N یک خمینه گوشه‌دار است؛ به تذکرات آخر بخش بعدی رجوع کنید).

۵-۳۲ گیریم $f, g : [۰, ۱] \to \mathbb{R}^۳$ منحنی‌های بسته نامتقاطع باشند. **عدد پیوندی** $l(f, g)$ دو تابع f و g را چنین تعریف کنید (مسئله ۴-۳۴ را ببینید)

$$l(f,g) = \frac{-۱}{۴\pi} \int_{c_{f,g}} d\Theta$$

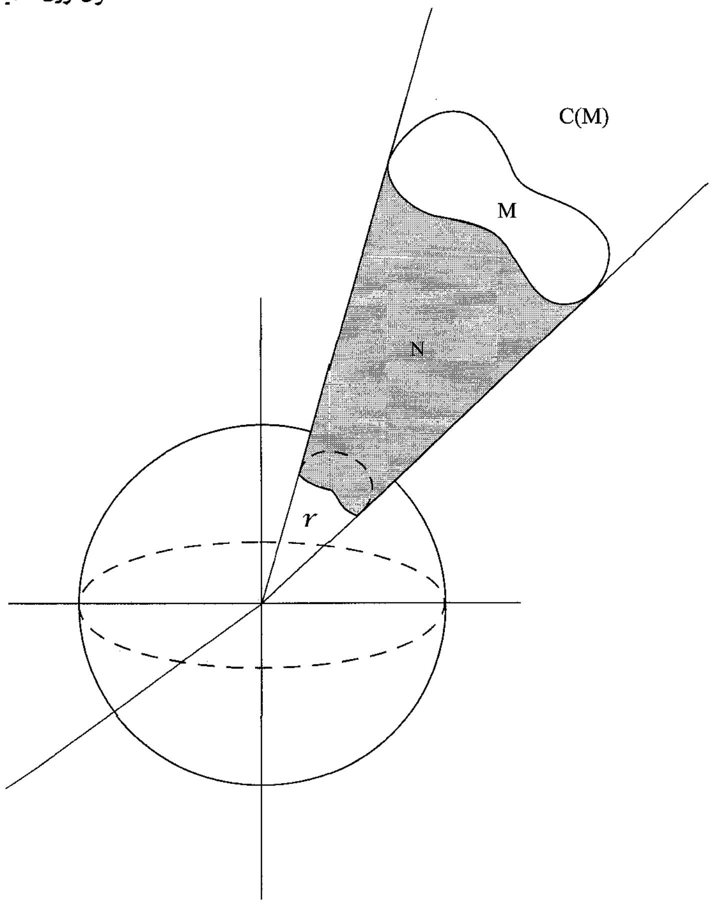
(الف) نشان دهید اگر (F, G) یک هموتوپی منحنیهای بسته نامتقاطع باشد، آنگاه $l(F_۰, G_۰) = l(F_۱, G_۱)$

(ب) اگر $r(u, v) = |f(u) - g(v)|$ نشان دهید

$$l(f,g) = \frac{-۱}{۴\pi} \int_۰^۱ \int_۰^۱ \frac{۱}{|r(u,v)|^۲} \cdot A(u,v)\,du\,dv$$

که در آن

$$A(u,v) = \det \begin{pmatrix} (f^۱)'(u) & (f^۲)'(u) & (f^۳)'(u) \\ (g^۱)'(v) & (g^۲)'(v) & (g^۳)'(v) \\ f^۱(u) - g^۱(v) & f^۲(u) - g^۲(v) & f^۳(u) - g^۳(v) \end{pmatrix}$$



شکل۵-۱۰

(پ) نشان دهید هرگاه f و g هر دو در صفحه xy باشند، آنگاه $l(f,g) = ۰$. منحنیهای شکل ۴-۵ (ب) با $f(u) = (\cos u, \sin u, ۰)$ و $g(v) = (۱ + \cos v, ۰, \sin v)$ داده شده‌اند. به راحتی می‌توانید خود را متقاعد کنید که محاسبهٔ $l(f,g)$ توسط انتگرال فوق در این حالت نومیدکننده است. مسئله زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان $l(f,g)$ را بدون محاسبه به دست آورد.

۵-۳۳ (الف) اگر $(a,b,c) \in \mathbb{R}^۳$، تعریف کنید

$$d\Theta_{(a,b,c)} = \frac{(x-a)dy \wedge dz + (y-b)dz \wedge dx + (z-c)dx \wedge dy}{[(x-a)^۲ + (y-b)^۲ + (z-c)^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$$

اگر M یک خمینه مرز دار دو بعدی فشرده در $\mathbb{R}^3$ باشد و $(a,b,c) \notin M$، تعریف کنید

$$\Omega(a,b,c) = \int_M d\Theta_{(a,b,c)}$$

گیریم (a,b,c) نقطه‌ای در همان طرفی باشد که بردار عمود به سمت بیرون است و (a',b',c') نقطه‌ای روی طرف مقابل ـ با انتخاب (a,b,c) به قدر کافی نزدیک به (a',b',c') نشان دهید که می‌توان $\Omega(a,b,c) - \Omega(a',b',c')$ را به قدر دلخواه به -4π نزدیک کرد. راهنمایی. نخست نشان دهید که $M = \partial N$، سپس برای $(a,b,c) \in N - M$، $\Omega(a,b,c) = -4\pi$ و برای $(a,b,c) \notin N$، $\Omega(a,b,c) = 0$.

(ب) فرض کنید برای یک خمینه مرزدار دو بعدی فشرده M، $\partial M = f([0,1])$. (اگر f خودش را قطع نکند همیشه چنین Mـای وجود دارد حتی اگر f گره‌دار باشد. صفحه ۱۳۸ مرجع [۶] را ببینید). فرض کنید که هر وقت g، M را در x قطع می‌کند بردار مماس v از g در M_x نیست. گیریم n^+ تعداد تقاطع‌ها باشد که در آن v به سمت همان جهتی است که بردار عمود هست و n^- تعداد دیگر تقاطعها باشد. اگر $n = n^+ - n^-$ نشان دهید

$$n = \frac{-1}{4\pi}\int_g d\Omega$$

(پ) ثابت کنید

$$D_1\Omega(a,b,c) = \int_f \frac{(y-b)dz - (z-c)dy}{r^3}$$
$$D_2\Omega(a,b,c) = \int_f \frac{(z-c)dx - (x-a)dz}{r^3}$$
$$D_3\Omega(a,b,c) = \int_f \frac{(x-a)dy - (y-b)dx}{r^3}$$

که در آن $r(x,y,z) = |(x,y,z)|$.

(ت) نشان دهید عدد n قسمت (ب) مساوی انتگرال مسئله ۵-۳۲ (ب) است، و با استفاده از این مطلب نشان دهید که اگر f و g منحنیهای شکل ۴-۶ (ب) باشند آنگاه $l(f,g) = 1$، در حالی که اگر f و g منحنیهای شکل ۴-۶ (ب) باشند، $l(f,g) = 0$. (این نتایج منسوب به گاوس [۷] هستند). اثباتهای آورده شده در اینجا از صفحات ۴۱۱-۴۰۹ مرجع [۴] می‌باشند؛ همچنین به صفحات ۴۳-۴۱ جلد ۲ مرجع [۱۳] رجوع کنید.)

قضیه‌های کلاسیک

اکنون تمام ابزار لازم برای بیان و اثبات قضایای کلاسیک «از نوع استوکس» را فراهم نموده‌ایم.

۵-۷ قضیه (قضیه گرین). گیریم $M \subset \mathbb{R}^2$ یک خمینه دوبعدی مرزدار فشرده باشد. فرض کنید $\alpha, \beta : M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشند. آنگاه

$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy = \int_M (D_1\beta - D_2\alpha) dx \wedge dy = \iint_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(در اینجا M همان جهت معمولی و ∂M جهت القا شده را دارد، که تحت عنوان پادساعتگرد شناخته شده است).

برهان. این یک حالت بسیار خاص قضیه ۵-۵ است زیرا

$$d(\alpha\, dx + \beta\, dy) = (D_1\beta - D_2\alpha) dx \wedge dy$$

■

۵-۸ قضیه (قضیه دیورژانس). گیریم $M \subset \mathbb{R}^3$ یک خمینه مرزدار سه‌بعدی فشرده باشد و n بردار یکه عمود به سمت بیرون روی ∂M. گیریم F یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد. آنگاه

$$\int_M div\, F\, dV = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle dA$$

همچنین این تساوی برحسب سه‌تابع دیفرانسیل‌پذیر $\alpha, \beta, \gamma : M \to \mathbb{R}$ نوشته می‌شود:

$$\iiint_M \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dV = \iint_{\partial M} (n^1\alpha + n^2\beta + n^3\gamma) dS$$

برهان. ω را روی M به صورت $\omega = F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dy \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy$ تعریف کنید. آنگاه $d\omega = \operatorname{div} F\, dV$. بنابر قضیه ۵-۶، روی ∂M داریم

$$n^1 dA = dy \wedge dz$$

$$n^2 dA = dz \wedge dx$$

$$n^3 dA = dx \wedge dy$$

پس روی ∂M خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\langle F,n\rangle dA &= F^1n^1dA+F^2n^2dA+F^3n^3dA\\ &= F^1dy\wedge dz+F^2dz\wedge dx+F^3dx\wedge dy\\ &= \omega\end{aligned}$$

و با توجه به قضیه ۵-۵ داریم

$$\int_M \operatorname{div} F\,dV=\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial M}\langle F,n\rangle dA$$

■

۵-۹ قضیه (قضیه استوکس). گیریم $M\subset\mathbb{R}^3$ یک خمینه دوبعدی مرزدار فشرده جهت‌دار باشد و n بردار یکه عمود به سمت بیرون روی M که توسط جهت M مشخص شده است. ∂M را با جهت القا شده در نظر گرفته، و فرض کنید T یک میدان برداری روی ∂M با $ds(T)=1$ بوده و F یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر در یک مجموعه باز شامل M باشد. آنگاه

$$\int_M\langle(\nabla\times F),n\rangle dA=\int_{\partial M}\langle F,T\rangle ds$$

این معادله گاهی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_{\partial M}\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz=\\ \iint_M\left[n^1\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+n^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+n^3\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]dS$$

برهان. ω را روی M به صورت $\omega=F^1\,dx+F^2\,dy+F^3\,dz$ تعریف کنید. چون $\nabla\times F$ دارای مؤلفه‌های $D_2F^3-D_3F^2$، $D_3F^1-D_1F^3$، $D_1F^2-D_2F^1$ است، همانند اثبات قضیه ۵-۸ نتیجه می‌شود که روی M داریم

$$\begin{aligned}\langle(\nabla\times F),n\rangle dA &= (D_2F^3-D_3F^2)dy\wedge dz\\ &\quad+(D_3F^1-D_1F^3)dz\wedge dx\\ &\quad+(D_1F^2-D_2F^1)dx\wedge dy\\ &= d\omega\end{aligned}$$

از طرف دیگر چون $ds(T) = ۱$، روی ∂M داریم

$$T^{۱} ds = dx$$

$$T^{۲} ds = dy$$

$$T^{۳} ds = dz$$

(این تساویها می‌توانند با بررسی کردن هر دو طرف آنها روی T_x، برای $x \in \partial M$، ثابت شوند چون T_x یک پایه $(\partial M)_x$ است).

بنابراین روی ∂M داریم

$$\begin{aligned} \langle F, T\rangle ds &= F^{۱}T^{۱}\, ds + F^{۲}T^{۲} ds + F^{۳}T^{۳} ds \\ &= F^{۱} dx + F^{۲} dy + F^{۳} dz \\ &= \omega \end{aligned}$$

پس بنابر قضیه ۵-۵ خواهیم داشت

$$\int_M \langle(\nabla \times F), n\rangle dA = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F, T\rangle ds$$

■

قضیه‌های ۵-۸ و ۵-۹ مبنایی برای نامگذاری $\operatorname{div} F$ و $\operatorname{curl} F$ هستند. اگر $F(x)$ بردار سرعت سیالی در x باشد آنگاه $\int_{\partial M} \langle F, n\rangle dA$ مقداری از سیال است که از M «خارج می‌شود». در نتیجه شرط $\operatorname{div} F = ۰$ در واقع نشان می‌دهد که سیال، تراکم‌ناپذیر است. اگر M یک قرص باشد، آنگاه $\int_{\partial M} \langle F, T\rangle$ مقداری از سیال را نشان می‌دهد که دور مرکز قرص می‌چرخد. اگر برای همهٔ قرصها این عدد صفر باشد، آنگاه $\nabla \times F = ۰$، و سیال **چرخش‌ناپذیر** نامیده می‌شود.

این تعبیرهای $\operatorname{div} F$ و $\operatorname{curl} F$ منسوب به **ماکسول** [۱۳] است. ماکسول در حقیقت با منفی $\operatorname{div} F$ کارکرد، که آن را **همگرایی** (convergence) نامید. ماکسول برای $\nabla \times F$ با «یک تفاوت فاحش» لغت «**چرخش**» F را انتخاب کرد؛ متأسفانه این لغت که اختصار $\operatorname{rot} F$ را به همراه دارد هنوز گاهی اوقات به کار می‌رود.

قضیه‌های کلاسیک این بخش معمولاً در حالت کلیتر در جاهای دیگر دیده می‌شوند. مثلاً، قضیه گرین برای یک مربع، و قضیه دیورژانس برای یک مکعب نیز درست است. این حالتهای

خاص می‌توانند با تقریب مربع یا مکعب توسط خمینه‌های مرزدار ثابت شوند. تعمیم واقعی قضیه‌های این بخش نیازمند مفهوم خمینه‌های گوشه‌دار است؛ اینها زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^{۳}$ هستند که با تقریب دیفئومرفیسم، بخشهای موضعی $\mathbb{R}^k$ هستند که با قطعه‌هایی از $(k-۱)$ ـ صفحه‌ها کراندار شده‌اند. خواننده نگران در می‌یابد که تعریف دقیق خمینه‌های گوشه‌دار و اینکه چگونه نتایج این فصل قابل تعمیم هستند، یک مسئله مبارزطلب است.

مسئله‌ها

۵-۳۴ قضیه دیورژانس را به حالت یک nـخمینه مرزدار در $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهید.

۵-۳۵ قضیه دیورژانس تعمیم یافته را به مجموعه $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le a\}$ و $F(x) = x_x$ تعمیم داده و حجم $S^{n-۱} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = ۱\}$ را بر حسب حجم nـبعدی $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le ۱\}$ بیابید. (این حجم برای n زوج، $\frac{\pi^{n-۲}}{(\frac{n}{۲})!}$ است و برای n فرد، $\frac{۲^{\frac{n+۱}{۲}}\pi^{(n-۱)/۲}}{۱\cdot۳\cdot۵\cdot\ldots\cdot n}$)

۵-۳۶ F را روی $\mathbb{R}^۳$ با $F(x) = (۰, ۰, cx^۳)_x$ تعریف کرده و M را یک خمینه مرزدار سه‌بعدی فشرده با $M \subset \{x : x^۳ \le ۰\}$ بگیرید. میدان برداری F را می‌توان فشار به سمت پایین یک سیال با چگالی c در $\{x : x^۳ \le ۰\}$ در نظر گرفت. چون سیال در همهٔ جهات فشار یکسانی دارد، **نیروی شناوری** (ارشمیدسی) را روی M به صورت $-\int_{\partial M}\langle F, n\rangle dA$ تعریف می‌کنیم. قضیه زیر را ثابت کنید.

قضیه (ارشمیدس). نیروی شناوری (ارشمیدسی) روی M مساوی جریال سیال جابجا شده توسط M است.

کتابنامه

1. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1953.

2. Auslander and MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, New York, 1963.

3. Cesari, *Surface Area*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

4. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Volume II, Interscience, New York, 1937.

5. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

6. Fort, *Topology of 3-Manifolds*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

7. Gauss, *Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen*, [4] (Nachlass) Werke V, 605.

8. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

9. Hilton and Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, New York, 1960.

10. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1959.

11. Kelly, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955.

12. Kobayashi and Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, 1963.

13. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, Dover, New York, 1954.

14. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Frederick Ungar, New York, 1955.

15. Radó, *Length and Area*, Volume XXX, American Mathematical Society, Colloquium Publications, New York, 1948.

16. de Rham, *Variétés Differentiables*, Hermann, Paris, 1955.

17. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

واژه‌نامه انگلیسی ـ فارسی

Absolute differential form	فرم دیفرانسیل مطلق
Absolute tensor	تانسور مطلق
Absolute value	قدر مطلق
Alternating tensor	تانسور متناوب
Analytic function	تابع تحلیلی
Angle preserving	حافظ زاویه، زاویه پایا
Approximation	تقریب
Archimedes	ارشمیدس
Area	مساحت
Basis	پایه
Bilinear function	تابع دو خطی
Boundary	مرز
Boundary of a chain	مرز یک زنجیر
Boundary of a manifold - with - boundary	مرز یک خمینه مرزدار
Boundary of a set	مرز یک مجموعه
Buoyant force	نیروی شناوری، نیروی ارشمیدسی
Cauchy Integral Formula	فرمول انتگرال کشی
Cauchy Integral Theorem	قضیه انتگرال کشی
Cauchy-Riemann equations	معادلات کشی ـ ریمان
Cavalieri's principle	اصل کاوالیری

Chain	زنجیر، زنجیره
Chain rule	قاعده زنجیره‌ای
Change of variable	تغییر متغیر
Characteristic function	تابع مشخصه
Closed curve	خم بسته، منحنی بسته
Closed differential form	فرم دیفرانسیل بسته
Closed rectangle	مستطیل بسته
Closed set	مجموعه بسته
Compact	فشرده
Complex numbers	اعداد مختلط
Complex variables	متغیرهای مختلط
Complex function	تابع مختلط
Component function	تابع مؤلفه‌ای
Composition of functions	ترکیب توابع
Cone	مخروط
Consistent choices of orientation	انتخاب‌های سازگار با جهت
Constant function	تابع ثابت
Constraints	قیدها، شرطها
Content	محتوی، محتوا
Content zero	محتوای صفر
Continuous differential form	فرم دیفرانسیل پیوسته
Continuous function	تابع پیوسته
Continuous vector field	میدان برداری پیوسته
Continuously differentiable function	تابع پیوسته ـ مشتقپذیر
Convergence	همگرایی
Coordinate system	دستگاه مختصات
Counterclockwise orientation	جهت پادساعتگرد
Cover	پوشش
Cross product	حاصلضرب خارجی، ضرب خارجی
Cube	مکعب
Curl	تاو
Curve	خم، منحنی

C^∞ function	تابع C^∞
Degenerate singular cube	مکعب تکین تباهیده
Derivative	مشتق
Diffeomorphism	دیفئومرفیسم
Differentiable function	تابع دیفرانسیل‌پذیر
Differentiable curve	منحنی دیفرانسیل‌پذیر، خم دیفرانسیل‌پذیر
Differentiable differential form, on a manifold	فرم دیفرانسیل دیفرانسیل‌پذیر، روی یک خمینه
Differentiable vector field, on a manifold	میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر، روی یک خمینه
Differentiable $= C^\infty$	دیفرانسیل پذیر $= C^\infty$
Differential	دیفرانسیل
Differential form, on a manifold	فرم دیفرانسیل، روی یک خمینه
Dimension	بعد
Dimension of a manifold	بعد یک خمینه
Dimension of a manifold - with - boundary	بعد یک خمینه مرزدار
Directional derivative	مشتق جهتی
Distance	فاصله
Divergence of a field	واگرایی یک میدان
Divergence theorem	قضیه دیورژانس، قضیه واگرایی
Domain	دامنه
Dual space	فضای دوآل
Element of area	عنصر مساحت
Element of length	عنصر طول
Element of volume	عنصر حجم
End point	نقطه پایانی، نقطه انتهایی
Equal up to nth order	مساوی تا مرتبه nـام
Euclidean space	فضای اقلیدسی
Exact differential form	فرم دیفرانسیل کامل
Exterior of set	برون یک مجموعه، خارج (یا بیرون) یک مجموعه
Faces of a singular cube	وجه‌های یک مکعب تکین

Field	میدان
Form	فرم
Fubini's Theorem	قضیه فوبینی
Function	تابع
Function of n variables	تابع n متغیره
Fundamental Theorem of Algebra	قضیه اساسی جبر
Fundamental Theorem of calculus	قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
Gauss	گاوس
Generalized cone	مخروط تعمیم یافته
Grad f	گرادیان f
Graph	نمودار
Green's Theorem	قضیه گرین
Half space	نیم فضا
Heine - Borel Theorem	قضیه هاین ـ بورل
Higher-order derivative	مشتق مرتبه بالاتر
Higher-order partial derivative	مشتق جزیی مرتبه بالاتر
Homogenous function	تابع همگن
Homotopy	هموتوپی
Identity function	تابع همانی
Implicit Function Theorem	قضیه تابع ضمنی
Implicitly defined function	تابع به طور ضمنی تعریف شده
Incompressible fluid	سیال تراکم‌ناپذیر
Independence of parametrization	استقلال پارامتریسازی
Induced orientation	جهت القایی
Inequality	نامساوی
Inner product	ضرب داخلی، حاصلضرب داخلی
Inner product preserving	حافظ ضرب داخلی، ضرب داخلی پایا
Integrable function	تابع انتگرالپذیر
Integral	انتگرال
of a form on a manifold	یک فرم روی یک خمینه
of a form over a chain	یک فرم روی یک زنجیر
over a set	روی یک مجموعه

over an open set	روی یک مجموعه باز
Interior of a set	درون یک مجموعه
Inverse function	تابع معکوس، تابع وارون
Inverse Function Theorem	قضیه تابع معکوس
Irrotational fluid	سیال چرخش‌ناپذیر
Iterated integral	انتگرال مکرر
Jacobian matrix	ماتریس ژاکوبین
Jordan-measurable	ژوردان اندازه‌پذیر
Kelvin	کلوین
Locus	مکان هندسی
Lagrange's method	روش لاگرانژ
Lagrangian multiplier	ضریب لاگرانژ
Leibnitz's Rule	قاعدهٔ لایب‌نیتز
Length = norm	طول
Limit	حد
Line	خط
Line integral	انتگرال خط، انتگرال روی خط
Linking number	عدد پیوندی
Liouville	لیوویل
Lower integral	انتگرال پایینی
Lower sum	مجموع پایینی
Manifold	خمینه
Manifold - with - boundary	خمینه مرزدار
Manifold - with - corners	خمینه گوشه‌دار
Matrix	ماتریس
Maxima	ماکزیمم
Measure zero	اندازه صفر
Minima	می‌نیمم
Mobius strip	نوار موبیوس

Multilinear function	تابع چند خطی
Norm	نرم، طول
Norm preserving	حافظ طول، نرم پایا
One-one function	تابع یک به یک
One-sided surface	رویهٔ یک طرفه
Open cover	پوشش باز
Open rectangle	مستطیل باز
Open set	مجموعه باز
Orientable manifold	خمینه جهت‌پذیر
Orientation	جهت‌پذیری، جهت
Orientation - preserving	حافظ جهت
Oriented manifold	خمینه جهت‌دار
Orthogonal vectors	بردارهای متعامد
Orthonormal basis	پایه یکه‌ای متعامد
Osillation	نوسان
Outward unit normal	بردار یکه‌ای نرمال بیرون (خارج)، بردار یکه‌ای عمود به سمت بیرون
Parametrization	پارامتریسازی
Partial derivative	مشتق جزیی
Partition	افراز
of a closed interval	یک بازهٔ بسته
of a closed rectangle	یک مستطیل بسته
of unity	واحد
Perpendicular	متعامد
Plane	صفحه
Poincare lemma	لم پوانکاره
Point	نقطه
Polar coordinate system	دستگاه مختصات قطبی
Polarization identity	اتحاد قطبی
Positive definite	معین مثبت
Projection function	تابع تصویر
Rectangle (closes or open)	مستطیل (بسته یا باز)

Refine a partition	تظریف یک افراز
Rotation of F	دوران F
Sard's Theorem	قضیه سارد
Second order derivative	مشتق مرتبه دوم
Second order partial derivative	مشتق جزیی مرتبه دوم
Self - adjoint	خودالحاق
Sign of a permutation	علامت یک تبدیل
Singular n-cube	n ـ مکعب تکین
Solid angle	زاویه فضایی
Sphere	کره
Standard n-cube	nـمکعب استاندارد
Star - Shaped	ستاره‌ای
Stokes' Theorem	قضیه استوکس
Subordinate	زیرمختص
Subrectangles of a partition	زیرمستطیلهای یک افراز
Surface	رویه
Surface area	مساحت رویه
Surface integral	انتگرال رویه‌ای
Symmetric	متقارن
Tangent space	فضای مماس
Tangent Vector	بردار مماس
Tensor	تانسور
Tensor product	ضرب تانسوری
Torus	چنبره
Transpose of a matrix	ترانهاده یک ماتریس
Triangle inequality	نامساوی مثلث
Unit outward normal	(بردار) یکه نرمال به سمت بیرون، بردار یکه عمود به سمت بیرون (خارج)
Upper integral	انتگرال بالایی
Upper sum	مجموع بالایی
Usual basis	پایه معمولی
Usual inner product	ضرب داخلی معمولی

Usual orientation	جهت معمولی
Variable	متغیر
Vector	بردار
Vector field	میدان برداری
on a manifold	روی یک خمینه
Vector valued function	تابع برداری، تابع بردار ـ مقدار
Volume	حجم
Volume element	عنصر حجم
Wedge product	حاصلضرب گوه‌ای
Winding number	عدد چرخشی

پیوست

۱. باید بعد از قضیه ۲-۱۱ (قضیه تابع معکوس) خاطرنشان می‌شد که از فرمول f^{-1}، می‌توان پیوسته ـ مشتق‌پذیری f^{-1} را نتیجه گرفت (و C^∞، اگر f نیز چنین باشد). در واقع، کافی است دقت شود که درایه‌های وارون یک ماتریس A، تابعهای C^∞ هستند هرگاه درایه‌های A چنین باشند. این از «قاعده کرامر» نتیجه می‌شود: $(A^{-1})_{ji} = (\det\ A^{ij})/(\det\ A)$، که A^{ij} ماتریسی است که از حذف سطر iـام و ستون jـام ماتریس A به دست می‌آید.

۲. برهان قسمت اول قضیه ۳-۸ می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای ساده شود، که در این صورت لم ۳-۷ نالازم می‌نمایاند. کافی است که B را با درون مستطیلهای بسته U_i پوشانید که $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$، و برای هر $x \in A - B$ یک مستطیل بسته V_x، که x در درونش است، چنان انتخاب کرد که $M_{V_x}(f) - m_{V_x}(f) < \varepsilon$. اگر هر زیر مستطیل یک افراز P مشمول یک خانواده متناهی از U_iها و V_xهایی باشد که A را می‌پوشانند، و برای هر x در A، $|f(x)| \le M$، آنگاه $U(f,p) - L(f,P) < \varepsilon v(A) + 2M\varepsilon$.

در برهان قسمت وارون یک اشتباه وجود دارد، چون $M_s(f) - m_s(f) \ge \frac{1}{n}$ فقط وقتی درست است که درون S، $B_{\frac{1}{n}}$ را قطع کند. برای رفع این اشتباه، کافی است که مرزهای تمام زیرمستطیلهای P را با یک خانواده متناهی از مستطیلهایی پوشاند که حجم کل آنها از ε کمتر است. اینها، همراه با S، $B_{\frac{1}{n}}$ را می‌پوشانند و حجم کل آنها از 2ε کمتر است.

۳. قسمت اول قضیه ۳-۱۴ (قضیه سارد) نیاز به کمی تقویت دارد. اگر $U \subset A$

یک مستطیل بسته با اضلاع به طول l باشد، آنگاه چون U فشرده است، عدد صحیح N با ویژگی زیر وجود دارد: اگر U به N^n مستطیل با اضلاع به طول $\frac{l}{N}$ تقسیم شود، آنگاه $|D_jg^i(\omega) - D_jg^i(z)| < \frac{\varepsilon}{n^2}$ که w و z هر دو در مستطیل S هستند. برای $x \in S$، قرار دهید $f(z) = Dg(x)(z) - g(z)$. آنگاه، اگر $z \in S$،

$$|D_jf^i(z)| = |D_jg^i(x) - D_jg^i(z)| < \varepsilon/n^2$$

پس بنابر لم ۲-۱۰، اگر $x, y \in S$، آنگاه

$$|D_g(x)(y-x) - g(y) + g(x)| = |f(y) - f(x)| < \varepsilon|x-y| \leq \varepsilon\sqrt{n}(l/N)$$

۴. در نهایت، نماد $\Lambda^k(V)$ ظاهر شده در این کتاب صحیح نمی‌باشد، چون با تعریف استاندارد $\Lambda^k(V)$ (به عنوان خارج قسمت مشخصی از جبر تانسورهای V) در تعارض است. برای فضای برداری مورد پرسش (که به طور طبیعی با $\Lambda^k(V^*)$ برای فضاهای برداری با بعد متناهی ایزومورف است) نماد $\Omega^k(V)$ احتمالاً استاندارد خواهد بود. این جایگذاری می‌بایستی در صفحات مربوطه انجام شود.

نمایه