بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شمارهٔ ۳۰۱

آنالیز ریاضی ۳ و کاربردهای آن

(همراه با ۳۵۰ تمرین و مثال)

گردآوری و تدوین

دکتر زهرا افشارنژاد

۱۳۸۰

افشارنژاد، زهرا، ۱۳۲۷ -
آنـالیز ریـاضی ۳ و کـاربردها (همراه بـا ۳۵۰ تـمرین و مـثال) / گـردآوری و تـدوین زهـرا افشارنژاد. ـ مشهد: دانشگاه فردوسی (مشهد)، ۱۳۸۰.
ج، ۲۵۷ ص. : مصور، جدول، نمودار. ـ (انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۳۰۱).
۱۲۰۰۰ ریال (ISBN: 964-5782-26-0)
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
ص.ع. به انگلیسی:
Z. Afsharnejad.
Mathematical analysis with applications
(with 350 exereises and examples).
کتابنامه: ص. [۲۵۳] - ۲۵۴.
۱. آنالیز ریاضی. ۲. آنالیز ریاضی -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. دانشگاه فردوسی (مشهد). ب. عنوان.

QA ۳۰۰ / ۸ آ ۷ الف ۵۱۵

کتابخانه ملی ایران ۱۳۱۰۷-۸۰م

آنالیز ریاضی ۳ و کاربردها

(همراه با ۳۵۰ تمرین و مثال)

تألیف

دکتر زهرا افشارنژاد

وزیری، ۲۶۴ صفحه، ۱۰۰۰ نسخه، چاپ اوّل، پاییز ۱۳۸۰

امور فنّی و چاپ : مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی

بها : ۱۲۰۰۰ ریال

شابک ۰-۲۶-۵۷۸۲-۹۶۴ (ISBN: 964-5782-26-0)

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

هدف تألیف این کتاب

با توجه به تجربهٔ دوازده سال تدریس درس آنالیز ریاضی ۳ متوجّه شدم که دانشجویان برای درک بیشتر این درس علاوه بر تئوری مطالب درس، نیاز به مثالهای متعدّد و کاربردهای آن در این درس دارند. لذا بر آن شدم که در سال جهانی ریاضیات به تألیف کتابی در زمینهٔ آنالیز ریاضی ۳ و کاربردهای آن بپردازم. تا آن جایی که اطلاعات این جانب اجازه می‌دهد، کتابهای فارسی در این زمینه، اعمّ از ترجمه یا تألیف کتاب آنالیز، مربوط به پانزده سال پیش می‌باشد که در آنها مثال و کاربرد کمتر دیده می‌شود، به خصوص کاربرد در هندسه. در کتاب حاضر سعی شده که ویژگیهای زیر رعایت شود :.

۱ - از کتابهای چاپ سالهای اخیر (تا آن جایی که در دسترس این جانب بوده) استفاده شود که با بیان ساده‌تری مطالب را ارائه می‌دهند.

۲ - در هر فصل (به جز فصل اوّل که خیلی خلاصه است) مثالهای متعدّدی برای درک مطلب ارائه شده است و سعی شده مثالهای نقض نیز ارائه شوند.

۳ - برای قضایا و مطالب مهمی مانند مشتق، تابع معکوس، تابع ضمنی، رتبه، استوکس و غیره ...، سعی شده حالتهای مختلف اثبات شود و مثالهایی از کاربرد آنها در هندسه، آنالیز و فیزیک آورده شود.

این کتاب شامل چهار فصل بوده و به ترتیب در فصل اول خیلی خلاصه از جبر خطی سخن به میان آمده که مقدمه‌ای برای فصلهای دیگر است. فصل دوم به مشتق و قضایای مربوط به آن اختصاص یافته که در حدّ دورهٔ لیسانس سعی شده است کاربردهای مشتق و قضایای آن ارائه شود. این فصل همچنین متضمّن مثالهای نقض و تمرینات متعدّدی (حدود ۳۶ مثال) است. در فصل سوم از انتگرال در R^n و فرمهای دیفرانسیلی، حالتهای مختلف اثبات قضیه استوکس و کاربردهای آن با ارائه تعداد زیادی مثال (شامل آنالیز برداری)، انتگرال فرمهای دیفرانسیلی و کاربردهای آنها صحبت به میان آمده است. فصل آخر کتاب به انتگرال لبگ و توابع اندازه‌پذیر در حدّ لیسانس و پیش‌نیاز دانشجویان فوق‌لیسانس اختصاص یافته است. در پایان امیدوارم توانسته باشم هدف اصلی خود را ارائه دهم.

زهرا افشارنژاد

فصل اول

جبر خطّی - نرم

به‌دلیل این‌که آنالیز ریاضی نیاز به اطلاعات خوب دربارهٔ جبرخطّی دارد، لذا برآن شدم که این فصل از کتاب را به مطالبی در مورد جبرخطّی و نرم توابع اختصاص دهم. فصل دوم این کتاب در مورد مشتق و قضایای مربوط به آن است که از جبرخطّی و نرم توابع و قضایای مربوطه استفاده خواهد شد.

به سبب این که برخی از این مطالب در جبرخطّی جداگانه بررسی شده است، لذا در این فصل به یادآوری آن مطالبی می‌پردازیم که بیشتر مرتبط با مطالب این کتاب و موردنیاز آن باشد.

۱.۱. تعریف یک فضای برداری

مجموعه X را یک فضای برداری نامند اگر در روابط زیر صدق کند:

الف - $\forall x, y \in X \quad , \quad x + y = y + x,$

ب - $\forall x, y, z \in X \quad , \quad x + (y + z) = (x + y) + z;$

ج - $x + (-x) = 0 \quad , \quad 0 + x = x,$

0 عضو خنثی و $-x$ عضو قرینه x در مجموعه X می‌باشند. همچنین اگر C یک اسکالر باشد، آن‌گاه $C\,x \in X$ جایی که x عضو مجموعه X است.

۱.۲. تعریف مستقل خطی

فرض کنید که c_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ اسکالر باشند و $x_i \in R^n$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، آن‌گاه $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ را **ترکیب خطی** نامند. حال اگر این ترکیب خطی مساوی با صفر باشد

اگر و تنها اگر تمام c_iها، $i = ۱, ۲, ..., n$ مساوی با صفر باشند، آن‌گاه بردارهای $x_۱, ..., x_n$ را مستقل خطّی نامند.

فرض کنید که $A \subset R^n$ و B مجموعه تمام ترکیبات خطّی اعضای A باشد. آن‌گاه گویم A مجموعهٔ B را می‌پیماید. دقت کنید که به جای R^n می‌توان یک فضای برداری جایگزین کرد. اگر A یک فضای برداری باشد آن‌گاه B نیز یک فضای برداری خواهد بود.

هر فضای برداری با بعد متناهی n، دارای یک پایه است. این پایه شامل n تا بردار مستقل خطّی است. در یک چنین فضای برداری هر $n + ۱$ تا بردار نمی‌توانند مستقل خطّی باشند. (وابسته خطّی هستند). مجموعهٔ از این بردارهای مستقل خطّی که تشکیل پایه را می‌دهند، می‌توانند فضای برداری را بپیمایند. برای مثال، پایه استاندارد e_i، $i = ۱, ۲, ..., n$ در R^n که $e_i = (۰, ۰, ..., ۱, ۰, ..., ۰)$، i امین عضوی آن عدد یک و بقیه اعضای آن صفر هستند. یک فضای برداری دارای یک پایهٔ یکتا نیست، بلکه ممکن است تعداد زیادی پایه برای فضا وجود داشته باشد. همان‌طوری که در جبرخطّی خوانده‌اید، بین پایه‌های یک فضا، یک تبدیل خطی معکوس‌پذیر وجود دارد. بنابراین همواره می‌توان یک پایه را برحسب پایهٔ دیگر نوشت. همچنین می‌دانیم که هر عضو یک فضای برداری با بعد متناهی n را می‌توان برحسب پایه آن فضا نوشت. برای مثال اگر فضای برداری، فضای R^n باشد، آن‌گاه به ازای هر $x \in R^n$ داریم $x = \sum_{i=۱}^{n} e_i x_i$ که $x_۱, ..., x_n$، مؤلفه‌های x نامیده می‌شوند. (برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ فضای برداری به کتابهای جبر و جبرخطّی مراجعه شود).

۱.۳. جبرخطی

در این بخش به یادآوری مطالب اساسی یک نگاشت خطی بین دوفضای برداری خواهیم پرداخت. همچنین قضایای مربوط ارائه خواهد شد.

فرض کنید که V و W دوفضای برداری بر روی میدان حقیقی R، $L : V \to W$ باشد. L را خطّی گویم: اگر به ازای هر $s, t \in R$ و به ازای هر $v \in V$ و $w \in W$، $L(sv+tw)= sLv + tLw$.

فرض کنید که $L : V \to W$ یک نگاشت خطی و $v_۱, ..., v_n$ یک پایه برای V باشد. آن‌گاه هر عضو از فضای V را می‌توان به صورت یکتای

$$x = \sum_{i=۱}^{n} v_i x_i$$

نوشت. به سبب این که L خطی است، لذا داریم:

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} x_i Lv_i$$

بنابراین کافی است که اثر نگاشت خطی L را بر روی اعضای پایهٔ فضای برداری V در نظر بگیریم. از طرف دیگر فرض کنید که $w_1, ..., w_m$ یک پایه برای فضای برداری W باشد. با توجه به نگاشت خطی L آن‌گاه $L(v_i)$ عضوی از فضای برداری W است، لذا می‌توان آن را برحسب پایه w_j، $j = 1, 2, ..., m$ نوشت:

$$L(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, w_j \quad , \quad i = 1, 2, ..., n \quad , \quad j = 1, 2, ..., m$$

بنابراین داریم:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, L(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, w_j \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\, a_{ij} \right] w_j$$

مرسوم این است که $A = (a_{ij})$ را با یک ماتریس m سطر و n ستون، یعنی ماتریس $m \times n$ نمایش دهند. بنابراین برحسب پایه‌های $v_1, ..., v_n$ و $w_1, ..., w_m$ داریم:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2}m \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

اگر $V = R^n$ و $W = R^m$، آن‌گاه پایه‌ها برای دوفضای برداری را پایه‌های استاندارد انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید که U یک فضای برداری با بعد k و $M : U \to V$ یک نگاشت خطی باشد. آن‌گاه $B = (b_{ki})$ ماتریس مربوط به M است. در این صورت ترکیب دو تابع L و M یک نگاشت خطی از U به W خواهد بود و داریم:

$$(LM)u_k = L(Mu_k) = L\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} \sum a_{ij}\, w_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_{ki} \right] w_j$$

در حقیقت LM برابر است با حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B. بنابراین $LM(C_{ij})$ یک ماتریس $m \times k$ است.

دقت کنید که اگر $f : R^n \to R$ یک تابع خطی باشد، آن‌گاه f برابر است با یک ماتریس $n \times ۱$، یعنی این که f یک ماتریس یا یک بردار n مؤلفه‌ای می‌باشد، همچنین باید تذکر دهم که نماد $f \in L(v, w)$ را برای یک تابع خطی یا تبدیل خطی از V به W به کار می‌بریم. همچنین نماد A^t برای **ترانهاده** ماتریس A که برابر است با یک ماتریس $n \times m$ که از تعویض سطرها و ستونها در ماتریس A به دست آمده است.

۱.۳.۱. تعریف فضای پوچ

فرض کنید که $f \in L(v, w)$ جایی که V یک فضای برداری با بُعد n و W یک فضای برداری با بُعد m است. مجموعه‌های R_f و N_f به ترتیب برد و *کرنل* تابع f نامیده می‌شوند به طوری که :

$R_f = \{w \in W : w = Lv \ , \ v \in V$ برای یک$\}$,

$N_f = \{v \in V : f(v) = ۰\}$

N_f را **فضای پوچ** تابع f نیز نامیده می‌شود. N_f یک زیرفضای برداری V و R_f یک زیرفضای برداری W می‌باشد.

قضیهٔ ۱. با نمادهای بالا داریم :

$$\dim R_f + \dim N_f = \dim V$$

اثبات : فرض کنید که $v_۱, ..., v_n$ یک پایه برای V باشند. با توجه به این که N_f یک زیرفضای برداری V است، آن‌گاه وجود دارد یک پایه $v_۱, v_۲, ..., v_k$ برای N_f با $k \le n$ (از قضایا برای فضای برداری نتیجه شده است). فرض کنید که $w_j = f(v_j)$، $j = k + ۱, ..., n$. ادعا می‌کنیم که $w_{k+۱}, w_{k+۲}, ..., w_n$ یک پایه برای R_f خواهند بود. اگر $w \in R_f$، آن‌گاه $w = Lx$ برای یک $x \in V$ به طوری که $v = \sum_{j=۱}^{n} x_j v_j$. نظر به این که $f(v_j) = ۰$ برای $j = ۱, ۲, ..., k$، آن‌گاه :

$$w = f(x) = \sum_{j=۱}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=k+۱}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=k+۱}^{n} x_j w_j$$

بنابراین بردارهای w_{k+1} ،...، w_n ، R_f را می‌پیمایند. همچنین این بردارها، مستقل خطی هستند زیرا اگر c_{k+1} ، c_{k+2} ،...، c_n اسکالر باشند، به طوری که $\sum_{j=k+1}^{n} c_j w_j = 0$ آن‌گاه داریم :

$$f\left(\sum_{j=k+1}^{n} c_j v_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} c_j w_j = 0,$$

بنابراین $\sum_{j=k+1}^{n} x_j v_j \in N_f$. اما وجود دارند اسکالرهای $a_1 ,..., a_k$ به طوری که

$$\sum_{j=k+1}^{n} c_j v_j = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$$

با توجه به این که v_1 ,..., v_k پایه برای N_f می‌باشند، پس مستقل خطی هستند و با توجه به مطالب بالا باید تمام c_j ها برابر با صفر باشند. بنابراین w_{k+1} ،...، w_n مستقل خطی هستند.

بُعد کرنل یا فضای پوچ تابع f را پوچی[1] و بُعد برد را رتبه[2] f نامند. نگاشت خطی f را عادی[3] نامند اگر پوچی f برابر با صفر باشد، این تعریف با یک به یک بودن تابع f معادل است. **نگاشت خطی** f یک نگاشت برو است، اگر دارای رتبه m باشد. این مطالب بلافاصله از قضیه ۱ نتیجه می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید که: $f \in L(V, W)$ و $\dim W = \dim V = n$ ، آن‌گاه تابع خطی f یک به یک است، اگر و تنها اگر f برو باشد، به علاوه عادی بودن f معادل با معکوس‌پذیری آن است.

توجه کنید که اگر $V = W$ و f نگاشت خطی بر روی V باشد، آن‌گاه f را یک **عملگر خطی** نامند.

اثبات : فرض کنید v_1 ، v_2 ,..., v_n پایه فضای برداری V باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه f برو است. فرض کنید که $x \in V$ باشد، پس

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) \quad , \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

1. Nallity　　2. Rank

3. Nonsingular

به منظور این که ثابت کنیم f یک تابع برو است، کافی است ثابت شود که بردارهای $f(v_1)$, ..., $f(v_n)$ مستقل خطی هستند. بنابراین تشکیل یک پایه برای W را می‌دهند که نشان‌دهنده بُعد آن نیز می‌باشد. فرض کنید که : $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = 0$ چون f یک به یک است، پس f تنها ۰ را به ۰ انتقال می‌دهد. در نتیجه : $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$، از طرف دیگر v_iها، $i = 1, ..., n$، پایه فضای V و در نتیجه مستقل خطی هستند. بنابراین باید تمام x_iها، $i = 1, ..., n$ مساوی با صفر باشند لذا $f(v_1)$،...، $f(v_n)$ مستقل خطی خواهند بود.

برعکس، فرض کنید که f برو باشد، پس $f(v_1)$،....، $f(v_n)$، مستقل خطی هستند (چرا؟). دو نقطه $x, y \in V$ در نظر می‌گیریم به طوری که $f(x) = f(y)$. باید ثابت شود که $x = y$ چون x و y عضو V هستند پس $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ و $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$.

اکنون $f(x) - f(y) = 0$ را محاسبه می‌کنیم : (توجّه داشته باشید که f خطی است)

$$0 = f(x) - f(y) = f(x - y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i - \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) f(v_i)$$

چون f برو است پس $f(v_i)$ها، $i = 1, 2, ..., n$ مستقل خطی هستند و عبارت بالا تنها وقتی مساوی صفر است که : $x_i - y_i = 0$ به ازای تمام $i = 1, 2, ..., n$ این نتیجه تساوی $x = y$ را خواهد داد.

تبصره: فرض کنید که $L(V, W)$ مجموعه‌ای تمام تبدیلات خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد، اگر $V = W$ آن‌گاه می‌نویسیم: $L(V)$. در حالتی که $V = R^n$ و $W = R^m$، آن‌گاه هر عضو $L(R^n, R^m)$ متناظر با یک نقطه در فضای اقلیدسی R^{nm} است (چرا؟). بنابراین می‌توانیم از مجموعه‌های باز و از توابع پیوسته و خطی صحبت کنیم. به علاوه می‌توان بر روی این فضا یک متریک تعریف کرد. در نتیجه ابتدا به تعریف نرم یک تابع خطی نیازمندیم.

۱.۳.۲. تعریف نرم یک تابع خطی

فرض کنید که $T\in L(V, W)$ آن‌گاه نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{|T(v)| : v\in V,\ |v| \le 1\}$$

دقّت کنید که این تعریف مخصوص فضاهای برداری نرم‌دار است. بنابراین در حالتی که $V = R^n$ و $W = R^m$ ، این تعریف صادق می‌باشد. اگر فضای نرم‌دار نباشد اما با فضای اقلیدسی دیفیومرفیک باشد، مانند فضای منیفلد، در این صورت می‌توانیم به کمک فضای اقلیدسی و توابع دو خطی (یا توابع خطی) نرم تعریف کنیم. در مورد توابعی که بر روی فضاهایی تعریف می‌شوند که نرم‌دار نیستند ولی این فضاها با فضای R^n دیفیومرفیک باشند، ابتدا یک نماینده برای تابع که در فضای R^n تعریف می‌شود تعریف کرده، سپس نرم آن تابع را براساس تعریف ذکر شده بیان می‌کنیم.

در تعریف نرم یک تابع خطی باید توجه داشت که چون $T(v)$ به R^m متعلق است، بنابراین دارای نرم بوده و $|T(v)|$ یک عدد خواهد شد و در نتیجه سوپریمم معنا دارد. در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم که این تعریف در شرایط یک نرم صدق می‌کند.

قضیهٔ ۳. فرض کنید که $T\in L(R^n , R^m)$ ، آن‌گاه :

الف ـ $\|T\| < \infty$ و T یک نگاشت به طور یکنواخت پیوسته از R^n به R^m است؛

ب ـ اگر $T_2\in L(R^n , R^m)$ و T_1 و C یک اسکالر باشد، آن‌گاه

$$\|T_1 + T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\| \quad , \quad \|CT\| = |C|\ \|T\|;$$

ج ـ $\|T_1 T_2\| \le \|T_1\|\ \|T_2\|$ بطوریکه $T_2\in L(R^n , R^m)$ و $T_1\in L(R^m , R^k)$.

با این نرم یک متریک برای فاصله بین T_1 و T_2 در فضای $L(R^n , R^m)$ تعریف می‌کنیم : $\|T_1 - T_2\|$ ، در نتیجه این فضا یک فضای متریکی خواهد بود.

اثبات : الف ـ پایه‌های استاندارد e_i را برای R^n و R^m در نظر می‌گیریم. بنابراین $x\in R^n$ و $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ و $\|x\| \le 1$ در می‌گیریم. چون T یک نگاشت خطی است پس

$$|Tx| = \left| T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i) \right| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i|\ |T(e_i)| \qquad (1)$$

چون $|x| \leq ۱$ در نتیجه $|c_i| \leq ۱$ به ازای هر $i = ۱, ۲, ..., n$ و i نامساوی (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$|T(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \, |T(e_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |T(e_i)| \qquad (۲)$$

از طرف دیگر بنا بر تعریف نرم یک تابع خطی داریم $|Tx| \leq \|T\| \; |x|$ (اثبات کنید).
بنابراین

$$\|T\| \leq \sum_{i=1}^{n} (T(e_i)) < \infty$$

تنها ماندهٔ ثابت می‌کنیم که T به طور یکنواخت پیوسته است. در حقیقت باید ثابت کنیم که به ازای هر $\varepsilon > ۰$ داده شده وجود دارد $\delta > ۰$ به طوری که

به ازای هر $x, y \in R^n$ اگر $d_{Rn}(x, y) < \delta$ آنگاه $d_{Rm}(T(x), T(y)) < \varepsilon$

برای اثبات توجّه می‌کنیم که نرم T کراندر است، پس قرار می‌دهیم $\|T\| = K$ و داریم :

$$|T(x - y)| = |Tx - Ty| \leq \|T\| \; |x - y| \leq K|x - y|$$

حال اگر $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد کافی است $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ انتخاب کنیم. بنابراین شرایط پیوستگی یکنواخت بر قرار می‌باشد.

ب ـ برای اثبات این قسمت با استفاده از تعریف نرم یک نگاشت خطی داریم:

$$|(T_1 + T_2)x| = |T_1 x + T_2 x| \leq \|T_1 + T_2\| \; |x| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|)|x| \qquad (۳)$$

این رابطه به ازای جمیع مقادیر x برقرار است، پس برای $|x| \leq ۱$ نیز برقرار می‌باشد. حال از طرفین (۳) به ازای $|x| \leq ۱$ سوپریمم می‌گیریم و با استفاده از تعریف نرم داریم :

$$\sup|(T_1 + T_2)x|_{|x|=1} = \|T_1 + T_2\| \leq \sup(\|T_1\| + \|T_2\|)|x| \,\big|_{|x|=1}$$

و یا :

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر C یک اسکالر باشد، آن‌گاه :

$$\|CT\| = |C| \; \|T\|$$

می‌دانیم که:

$$|TC\,x| = |CT\,x| = |C|\ |Tx|$$

حال از طرفین این تساوی به ازای $|x| \leq ۱$ سوپریمم می‌گیریم :

$$\sup|CTx| = |C|\ \sup|Tx|\ ,$$

و با استفاده از تعریف نرم یک نگاشت خطی داریم :

$$\|CT\,x\| = |C|\ \|T\|.$$

ج ـ طبق تعریف $(T_۱T_۲)x = T_۱(T_۲x)$ و

$$|T_۱(T_۲x)| \leq \|T_۱\|\ \|T_۲x\| \leq \|T_۱\|\ \|T_۲\|\ |x|$$

و از طرفین به ازای $|x| \leq ۱$ سوپریمم می‌گیریم:

$$(\sup\ |T_۱T_۲x|_{|x|\leq ۱} \leq \sup(\|T_۱\|\ \|T_۱\|\ |x|)_{|x|\leq ۱}$$

و یا

$$\|T_۱T_۲\| \leq \|T_۱\|\ \|T_۲\|$$

اکنون متریک $d = \|T_۱ - T_۲\|$ را برای فضای $L(R^n, R^m)$ تعریف می‌کنیم. باید ثابت شود که این تعریف در خواص متریک صدق خواهد کرد: خاصیت قسمت الف نشان می‌دهد که این تعریف در نامساوی مثلث صدق می‌کند و d همواره مثبت است. اگر $\|T_۱ - T_۲\| = ۰$ ، آن‌گاه $T_۱ - T_۲ = ۰$ و یا $T_۱ = T_۲$ و برعکس. از طرف دیگر به سادگی با استفاده از تعریف نرم یک نگاشت خطی می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\|T_۱ - T_۲\| = \|T_۲ - T_۱\|$$

قضیهٔ زیر، قضیهٔ جالبی است. این قضیهٔ نه تنها برای جبرخطّی و نگاشتهای خطی کاربرد دارد، بلکه در نگاشتهای غیرخطی نیز کارآیی خواهد داشت. دقّت کنید که I را به عنوان نگاشت همانی در R^n در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۴. فرض کنید که : $T \in L(R^n)$ و $\|I - T\| < ۱$ ، آن‌گاه T معکوس‌پذیر و $\|I - T^{-۱}\| \leq \|I - T\|(۱ - \|I - T\|)^{-۱}$

اثبات : قرار می‌دهیم: $A = I - T$ پس: $\|A\| = t < ۱$. فرض کنید که: $S_m = \sum_{k=۰}^{m} A^k$

آن‌گاه
$$\|S_m - S_{m+p}\| = \|\sum_{k=m+۱}^{m+p} A^k\| \leq \sum_{k=m+۱}^{m+p} \|A^k\| \leq \sum_{k=m+۱}^{\infty} \|A\|^k$$

چون: $\|A\| < ۱$ آن‌گاه مجموع بالا یک تصاعد هندسی با قدر نسبت کوچکتر از ۱ خواهد بود و در نتیجه، مجموع فوق برابر است با $\frac{t^{m+1}}{1-t}$ بنابراین داریم:

$$\|S_m - S_{m+p}\| \leq \frac{t^{m+1}}{1-t}$$

حال با استفاده از قسمت ب قضیهٔ ۳، نتیجه می‌شود که $\{S_m\}$ یک دنباله کوشی در $L(R^n)$ می‌باشد. از طرف دیگر اگر $m = 0$، آن‌گاه:

$$\|S_o - Sp\| \leq \frac{1}{1-t}$$

در این جا $S_o = T^{\circ} = I$، پس داریم:

$$\|I - S_p\| \leq \frac{1}{1-t}, \qquad \forall p$$

همچنین مشاهده می‌شود که دنبالهٔ S_m بسمت یک S متقارب است، به طوری که $S \in L(R^n)$ و در نتیجه:

$$\|I - S\| \leq \frac{1}{1-t}$$

از طرف دیگر: $I - T^{m+1} = TS_m = (I - A)S_m$، بنابراین داریم:

$$\|I - TS\| = \lim_{m\to\infty} \|I - TS_m\| = \lim_{m\to\infty} \|A^{m+1}\| = 0$$

دقّت کنید که سری $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|A\|^k$ یک سری متقارب است، پس جمله عمومی آن به سمت صفر میل می‌کند وقتی که $m \to \infty$. این بدین معناست که $TS = I$. چون $TS_m = S_mT$ به ازای هر m، آن‌گاه $ST = I$؛ در نتیجه S معکوس T می‌باشد و قضیه اثبات شده است.

قضیهٔ ۵ فرض کنید که: $S, T \in L(R^n)$. اگر T معکوس‌پذیر باشد و $\|S - T\| \leq \|T^{-1}\|^{-1}$ آن‌گاه S نیز معکوس‌پذیر است و

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \|S - T\| \frac{C^2}{1 - C\|S - T\|}$$

جایی که $C = \|T^{-1}\|$

اثبات: چون

$$\|I - ST^{-1}\| = \|(T - S)T^{-1}\| \leq \|T - S\| \; \|T^{-1}\| < 1$$

با توجه به قضیهٔ ۴، نتیجه می‌شود که ST^{-1} معکوس‌پذیر می‌باشد؛ این معکوس را به U نمایش می‌دهیم، پس $U = (ST^{-1})^{-1}$ از طرف دیگر داریم:

$$S(T^{-1})U = I = S(T^{-1}U)$$

در نتیجه $T^{-1}U$ معکوس راست S است و همچنین می‌دانیم که $U(ST^{-1}) = I$ بر طرفین این رابطه، T را اثر می‌دهیم: $UST^{-1}T = IT$ که نتیجه می‌شود: $US = T$ و $T^{-1}US = T^{-1}T = I$ بنابراین $T^{-1}U$ معکوس چپ S می‌باشد. اکنون دقت می‌کنیم که با توجه به توضیحات بالا خواهیم داشت:

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| = \|T^{-1}U - T^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \; \|I - U\|$$

[علّت جایگزینی S^{-1} با $T^{-1}U$ از رابطه $U = (ST^{-1})^{-1}$ با اثر دادن T^{-1} به دست آمده است].

با استفاده از قضیهٔ ۴ رابطه $\|I - U\| \leq \frac{t}{1 - t}$ به دست می‌آید به طوری که $t = \|I - ST^{-1}\|$. در این رابطه آخر I را با $T^{-1}T$ جایگزین می‌نمایم، خواهیم داشت:

$$(*) \quad t = \|TT^{-1} - ST^{-1}\| = \|T^{-1}(T - S)\| \leq \|T^{-1}\| \; \|T - S\|$$

بنابر فرض قضیه: $\|T - S\| \leq \|T^{-1}\|^{-1}$ ، در نتیجه:

$$t \leq \|T^{-1}\| \; \|T^{-1}\|^{-1} \leq 1$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\|S^{-1} - T^{-1}\| = \|S^{-1}(T - S)T^{-1}\| &\leq \|S^{-1}\| \; \|T - S\| \; \|T^{-1}\| \\ &\leq \|S^{-1}\| \; \|T^{-1}\| \; \|T - S\| \\ &\leq C\|S^{-1}\| \; \|T - S\| .\end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم: $\|S^{-1}\| \leq \frac{C}{1 - \|S \; T\|}$ زیرا از t این نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}t = \|I - ST^{-1}\| &\geq \|I\| - \|ST^{-1}\| \\ &\geq 1 - \|S\| \; \|T^{-1}\| \\ &\geq 1 - C\|S\| ,\end{aligned}$$

و یا:

$$\|S\| \geq \frac{1 - \|I - ST^{-1}\|}{C}$$

و یا:

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{C}{1 - \|I - ST^{-1}\|}$$

حال در مخرج به جای $\|I - ST^{-1}\|$ با استفاده از $(*)$ مقدار قرار می‌دهیم.

در نتیجه:

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{C}{1 - \|T^{-1}\| \ \|T - S\|} \leq \frac{C}{1 - C\|T - S\|}$$

بنابراین رابط نامساوی حکم قضیه اثبات شده است.

زیرقضیه ۵. از قضیهٔ ۵ مطلب جالب زیر استنتاج می‌شود؛ مجموعهٔ تمام اعضای معکوس‌پذیر $L(R^n)$ یک مجموعه بازی مانند A در $L(R^n)$ می‌باشد و همچنین نگاشت $T \to T^{-1}$ یک نگاشت پیوسته از A به خودش می‌باشد. برای بازبودن A، توجه می‌کنیم که بنابر فرض قضیه $\|T - S\| \leq \frac{1}{C}$. در حقیقت، اثبات قضیهٔ ۵ نشان می‌دهد که T^{-1} را می‌توان برحسب T نوشت. چون T^{-1} یک ماتریس است، بنابراین اعضای آن را می‌توان برحسب یک سری از اعضای ماتریس T نوشت. روش دیگر برای فهم این مطلب این است که یک ماتریس مانند T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det T \neq 0$ و $\det T$ یک چندجمله‌ای برحسب اعضای ماتریس T است که مسلماً یک تابع پیوسته بر روی $L(R^n)$ می‌باشد، در نتیجه $\{T : \det T \neq 0\}$ باز هستند.

برای اثبات پیوستگی نگاشت $T \to T^{-1}$ از اثبات قضیهٔ ۵ استفاده می‌کنیم:

فرض کنید که $T، T_1، T_2 \in A$ آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}\|T_1^{-1} - T_2^{-1}\| &= \|T_1^{-1}(T_2 - T_1)T_2^{-1}\| \\ &\leq \|T_1^{-1}\| \ \|T_1 - T_2\| \ \|T_2^{-1}\| \\ &\leq \|T_1 - T_2\| \frac{C^2}{1 - C\|T_1 - T_2\|}\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $\varepsilon > 0$ داده شده وجود دارد $\delta > 0$ به طوری که اگر $\|T_1 - T_2\| < \delta$ آن‌گاه $\|T_1^{-1} - T_2^{-1}\| < \varepsilon$.

کتابهای زیاد و مفیدی در چارچوب جبرخطی وجود دارد که خوانندگان محترم و دانشجویان عزیز می‌توانند به آنها مراجعه کنند. در این جا از دترمینان بحثی نکردم زیرا مطمئن هستم که به طور

کامل در جبرخطی مطالعه شده است. لذا در این جا فرض را بر این گذاشتم که تمام خوانندگان محترم خواص و قوانین دترمینان را می‌دانند. از این خواص در مطالب بعدی کتاب استفاده خواهد شد. جالب خواهد بود اگر یادآور شوم که نظریهٔ دترمینان قبل از ماتریسها در قرن ۱۸ به وجود آمده است. (هم زمان با ریاضیدان اروپایی در چین مستقلاً بدون ارتباط با ریاضیدان اروپایی به نظریه دترمینان توجه شده است). کرامر، ریاضیدان مشهور سویسی قانون معروف خود را دربارهٔ دستگاه معادلات در سال ۱۷۵۰ ارائه داد، اما تعریف کلّی دترمینان قبل از کوشی (۱۸۱۵) به وجود نیامد. اولین بار تعریف دترمینان به صورت امروز توجه ژاکوبین (۱۸۴۱) را جلب کرد. او به دترمینان به صورت یک تابع توجه کرد؛ بدین‌دلیل دترمینان مشتق یک تابع، به ژاکوبین آن معروف می‌باشد (به شرط آن که مشتقّ یک تابع، یک ماتریس مربعی شکل باشد). ژاکوبین نشان داد که یک مجموعه از n تابع و n متغیّر به طور تابعی با هم ارتباط دارند، *اگر و تنها* اگر دترمینان مشتقّ آن (ژاکوبین) مخالف با صفر باشد، بعدها به ماتریس توجه کردند.

در پایان این فصل توجه خوانندگان را به دو قضیه در جبرخطی جلب می‌کنم که مورد استفاده زیادی دارد و در این کتاب مستقیم یا غیرمستقیم از آنها استفاده شده است. اثبات این دو قضیه را در کتابهای جبرخطی یا در فصل نهم کتاب Rudin یافت می‌شود.

قضیه I. فرض کنید که r عدد مثبتی باشد. هرگاه فضای برداری X به وسیله مجموعه‌ای از r بردار پیموده شود، آن‌گاه $\dim X \leq r$.

قضیه II. فرض کنید که X یک فضای برداری و با بُعد n باشد. آن‌گاه

الف - مجموعه E مرکب از n بردار در X، X را می‌پیماید اگر و تنها اگر E مستقل باشد.
ب - X دارای پایه است، و هر پایه از n بردار تشکیل شده است.
ج - هرگاه $1 \leq r \leq n$ و $\{y_1, \dots, y_r\}$ مجموعه مستقلی در X باشد، آن‌گاه X پایه‌ای حاوی $\{y_1, \dots, y_r\}$ دارد.

تمرینات فصل اوّل

۱. فرض کنید که $T : R^{۲} \to R^{۲}$ توسط ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده باشد. نرم T را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید که $T \in L(R^n)$، نشان دهید که $\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ به عضوی از $L(R^n)$ متقارب است، که با e^T نمایش داده می‌شود. به علاوه نشان دهید که اگر $T \in L(R^n)$ و S و $ST = TS$ آن‌گاه $e^{S+T} = e^S e^T$ از این نتیجه بگیرید که e^T به ازای هر T معکوس‌پذیر است.

۳. نشان دهید که اگر $T \in L(R^n)$ و $\| I - T \| < ۱$، آن‌گاه وجود دارد یک $S \in L(R^n)$ به طوری که $e^S = T$. مثالی پیدا کنید که چنین S ای برای T وجود نداشته باشد (T معکوس‌پذیر است).

۴. فرض کنید که A و B تبدیلات خطی باشند، ثابت کنید که BA نیز یک تبدیل خطی است. همچنین ثابت کنید که $A^{-۱}$ خطی و معکوس‌پذیر است اگر BA معکوس‌پذیر باشد.

۵. فرض کنید که $T \in L(E, F)$ و $Ax = ۰$ تنها وقتی که $x = ۰$. ثابت کنید که در این صورت T یک به یک است.

۶. فرض کنید که $T \in L(R^n, R')$، آن‌گاه یک $y \in R^n$ یکتا وجود دارد به طوری که $A_x = x.y$ و $\|A\| = |y|$. (راهنمایی: از نامساوی شوارتز استفاده کنید.)

۷. ثابت کنید که فضاهای پوچ و بردهای یک تبدیل خطی، فضای برداری هستند.

۸. فرض کنید که A زیرمجموعهٔ باز در R^n و $f : A \to R^n$ و $\alpha \geq ۰$ یک اسکالر باشد. همچنین فرض کنید که اگر $x \in A$، آن‌گاه $\alpha x \in A$ و f یک تابع پیوسته باشد که $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ به ازای تمام $x \in A$. نشان دهید که یک عدد مثبت وجود دارد به طوری که

$$\|f(x)\| \leq M|x|$$

۹. فرض کنید که $B = \{x \in R^n : |x| \leq r\}$ و $f : B \to R^n$ نگاشتی با خواصّ زیر است:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{۱}{۳} |x - y| \quad , \quad f(۰) \,| \leq \frac{۲}{۳} r.$$

ثابت کنید که یک $x \in B$ یکتا وجود دارد به طوری که $f(x) = x$ (نقطه ثابت).

۱۰. با استفاده از تعریف نرم ثابت کنید که:

$$|Tx| \leq \|T\| \; |x|$$

فصل دوم

مشتق - توابع مشتق‌پذیر و برخی از کاربردهای آن

در این فصل ما تعریف کلّی مشتق را برای توابع چند متغیّره و غیرحقیقی ارائه می‌دهم. علاوه بر تعریف مشتق یک تابع، از نظریهٔ توابع مشتق‌پذیر و کاربردهای آنها سخن به میان خواهم آورد. در این راستا دربارهٔ قضایای مهمّی چون قضیهٔ تابع معکوس، قضیهٔ تابع ضمنی و قضیهٔ رتبه و کاربردهای آنها مطالبی ارائه خواهم داد.

۲.۱. مشتق

اگر تابع f یک تابع یک متغیّر و حقیقی باشد، یعنی این که $f : I \subset R \to R$ جایی کـه $I = (a , b)$ آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $C \in (a, b)$ مشتق‌پذیر است اگر حد زیر موجود و متناهی باشد.

$$f'(C) = \lim_{t \to C} \frac{f(t) - f(C)}{t - C}$$

این تعریف را می‌توان برای توابع برداری $f_i : (a, b) \to R^n$ ، $1 \leq i \leq n$ توسعه داد. در حقیقت $f = (f_1 , f_2 , \dots , f_n)$ ، آن‌گاه f در نقطهٔ C مشتق‌پذیر است اگر تمام توابع f_i هـا در C مشتق‌پذیر باشند. حال اگر تابع f از یک مجموعه‌ای از R^n به R^m تعریف شده باشد، آیا می‌توان این تعریف را برای تابع f بیان کرد؟ همان‌طوری که اطلاع دارید تمام توابع موردنیاز در علوم لزومی ندارند که یک متغیّره و حقیقی باشند؛ برای مثال می‌توان از تابع بین فضای حقیقی و مختلط نام برد. این تابع یک تابع دومتغیره به یک فضای دوبُعدی می‌باشد.

اگر تابع f یک تابع یک متغیره و حقیقی باشد؛ آن‌گاه مشتق f در نقطه‌ای از حوزهٔ تعریفش نمایندهٔ شیب خطّ مماس بر نمودار f در آن نقطه است. این خطّ مماس همانا یک تابع خطّی می‌باشد.

از این مطلب الهام می‌گیریم و مشتق توابع از R^n به R^m را تعریف می‌کنیم. در فصل قبل برخی از خواصّ تابع خطی را ارائه داده‌ایم، در این جا از آن مطالب برای تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

۲.۱.۱. تعریف مشتق

فرض کنید که $U \subset R^n$ یک مجموعهٔ باز و $f : U \to R^m$. همچنین فرض کنید که $x \in U$. آن‌گاه f را در x **مشتق‌پذیر** گویند اگر وجود داشته باشد یک تابع خطی مانند $L : R^n \to R^m$ به طوری که

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} (f(x + h) - f(x) - Lh) = 0$$

۲.۱.۲. تعریف تابع مستوی

تابع $T : R^n \to R^m$ را یک **نگاشت مستوی** گویند اگر این نگاشت به هر نقطه $x \in R^n$ مقدار $C + Lx$ را نسبت دهد به طوری که $C \in R^m$ و $L : R^n \to R^m$ یک نگاشت خطی باشد.

تبصره ۱: توجه خوانندگان محترم را در تعریف مشتق به چند نکته جلب می‌کنم:

۱. تابع خطی در تعریف مشتق یکتاست.

اثبات: فرض کنید چنین نباشد و برای تعریف مشتق دوتابع خطی مانند L و M وجود داشته باشد، آن‌گاه بنا بر تعریف مشتق می‌توان رابط زیر را نوشت:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|}(Lh - Mh) = 0$$

امّا برای یک $k \neq 0$ معیّن و $t > 0$، خواهیم داشت.

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{|tk|} (L(tk) - M(tk)) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{|k|} (LK - MK) = 0$$

بنابراین $LK = MK$ چون این رابطه برای یک $k \neq 0$ دلخواه از R^n برقرار است، در نتیجه: $L = M$.

۲. تعریف مشتق این مفهوم را می‌رساند که یک تابع در نقطه‌ای مانند x **مشتق‌پذیر** است اگر در نزدیکی x با یک تابع مستوی تقریب‌زده شود.

۳. تعریف مشتق را می‌توان برای فضاهای نرم‌دار توسعه داد: فرض کنید که دو فضای نرم‌دار (هر دو حقیقی یا هر دو مختلط) E و F مفروض باشند، نرم این دو فضا را به ترتیب به $\| \ \|_E$ و $\| \ \|_F$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید تابع $f : A \subset E \to F$ پیوسته و A باز باشد، آن‌گاه تابع f را در $x \in A$ مشتق‌پذیر نامند اگر وجود داشته باشد یک تابع خطی $L : E \to F$ به طوری که تقریب خطی f در x باشد، یعنی این که به ازای تمام $h \in A$ داریم:

$$f(x + h) - f(x) = Lh + \|h\|_E \, \eta(h)$$

جایی که $\eta(h)$ عضوی از فضای F است و $\|\eta(h)\| \to ۰$ وقتی که $\|h\| \to ۰$. می‌توان نشان داد که این تابع L یکتا است. دقت شود ممکن است چنین تابعی وجود نداشته باشد، در این صورت تابع f در x مشتق‌پذیر نمی‌باشد. اگر قرار دهیم: $h = x - x_۰$ آن‌گاه در تمام مماسهای بر نمودار f در $x_۰$ تنها یک نگاشت به صورت $x \to f(x_۰) + L(x - x_۰)$ وجود دارد که L مشتق f در $x_۰$ می‌باشد. در نتیجه مشتق یک تابع در یک نقطه‌ای مانند $x_۰$ خود یک تابع خطی است. این نتیجهٔ مهم همانا تعریف مشتق یک تابع در $x_۰$ براساس کتاب Dieudonne می‌باشد. در حقیقت می‌توان مشتق تابع f را در $x_۰$ چنین نیز بیان کرد: تابع $f : A \subset E \to E$ در $x_۰$ مشتق‌پذیر است اگر وجود داشته باشد تابع خطی $Df(x_۰) \in L(E, F)$ که در رابطه تعریف مشتق صدق کند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر $E = F = R$ آن‌گاه این تعریف همان تعریف مشتق در ریاضی عمومی می‌باشد، یعنی این که مشتقّ تابع f در هر نقطه همانا مماس بر نمودار تابع در آن نقطه است.

تبصره ۲. مطلب مهم دیگری که در مورد مشتق تابع وجود دارد آن است که اگر فضاهای E و F فضاهای به ترتیب R^n و R^m باشند، آن‌گاه مشتق تابع $f : U \subset R^n \to R^m$ در یک نقطه مانند $x \in U$ همانا ماتریس $m \times n$ است، یعنی این که $Df(x)$ برابر است با یک ماتریس که m تا سطر و n تا ستون دارد. در حقیقت می‌توانیم $Df(x)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$f = (f_۱ , f_۲ , \ldots, f_m) \quad , \quad f_i : U \to R \quad , \quad x = (x_۱ , \ldots, x_n)$$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

در نتیجه مشاهده می‌کنیم که مشتق یک تابع در یک نقطه، عضوی از F نیست بلکه متعلّق به فضای توابع خطی بین R^n و R^m می‌باشد. در فرمول بالا $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ مشتق جزیی تابع f_i نسبت به متغیّر x_j است.

برای مشتق یک تابع نمادهای مختلفی به کار می‌برند، برخی آن را به df_x نمایش می‌دهند و برخی دیگر به $Df(x)$ و گاهی‌اوقات به $f'(x)$ نمایش داده می‌شود. دقت شود که محاسبهٔ مشتق یک تابع در یک نقطه به فرم بالا تنها برای فضاهای R^n و R^m صادق است. امّا در مورد فضاهای دیگر در صورتی که بتوانیم یک دیفیومرفیسم بین آن فضاها با فضاهای اقلیدسی برقرار کنیم، آن‌گاه قادر خواهیم بود که مشتق را محاسبه نماییم.

مثال ۱ : مشتق یک تابع ثابت برابر است با 0 که عضو $L(E, F)$ می‌باشد.

مثال ۲ : فرض کنید که F حاصل‌ضرب چند فضای برداری نرم‌دار باشد، یعنی $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ همچنین فرض کنید که $f : U \subset E \to F$ جایی که U زیرمجموعه باز از E است. در این صورت $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ که در آن $f_i : U \to F_i$، $i = 1, 2, \dots, n$. آن‌گاه f در $x_0 \in U$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر یک از f_i در x_0 مشتق‌پذیر باشد. بنابراین $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$ و $f'(x_0) \in L(E, F)$ که $L(E, F)$ با حاصل‌ضرب فضاهای $L(E, F_i)$ یکسان در نظر گرفته شده است. برای مثال اگر $E = R$ و $F = R \times R \times R$ آن‌گاه $f : R \to R^3$ با $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. اگر f در t_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

در این جا x و y و z توابعی از R به R هستند که در t، مشتق‌پذیر می‌باشند. همچنین دقت کنید که در این مثال :

$$L[R\ ,\ R^{3}] = \prod_{i=1}^{3} L(E, F_i) \quad , \quad L(E, F_i) = L(R\ ,\ R)$$

در این حالت نرم مشتق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\| f'(x) \| = \sup \| f_1'(x), \ldots, f_n'(x) \|$$

۲.۱.۳. تعریف تابع مشتق‌پذیر

تابع $f : U \subset E \to F$ را مشتق‌پذیر گویند هرگاه f در تمام نقاط U مشتق‌پذیر باشد.

۲.۱.۴. تعریف ژاکوبین

فرض کنید که $f : U \subset R^n \to R^m$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه ماتریس $f'(x)$ را **ماتریس ژاکوبی** f در x نامند. اگر $n = m$، آن‌گاه دترمینان ماتریس ژاکوبی f را ژاکوبین تابع f در x گویند.

مثال ۳: تابع $f : R^2 \to R^3$ با ضابطهٔ $f(x\ ,\ y) = (x^2 + y^2\ ,\ xy,\ 2x + y)$ مفروض است. در این صورت f در هر نقطه از R^2 مشتق‌پذیر است و $f'(x)$ برابر است با :

$$f = (f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3),\ f_1(x, y) = x^2 + y^2\ ,\ \ f_2(x, y) = xy\ \ ,\ \ \ f_3(x, y) = 2x + y,$$

$$Df(x) = f'(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2},$$

$$f'(x) \in L(R^2\ ,\ R^3)$$

این تابع دارای ماتریس ژاکوبی است اما دارای ژاکوبین نمی‌باشد.

مثال ۴: فرض کنید که $f : R^n \to R^m$ یک تابع خطی باشد آن‌گاه مشتق آن در هر نقطه برابر با خودش می‌باشد، یعنی این که $f'(x) = f$.

قبل از اثبات این مطلب یادآوری می‌کنیم که تعریف مشتقّ ذکر شده برابر است با وجود حدّ زیر به شرط آن که فضاهای مورد مطالعه R^n و R^m باشند :

$$f'(x) = Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|}$$

و یا :

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0$$

اکنون به اثبات مطلب مثال ۴ می‌پردازیم ؛ حدّ زیر را محاسبه می‌کنیم :

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - fh|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h-x) - fh}{h} \right|$$

$$= \lim_{h \to 0} \left| \frac{fh - fh}{h} \right| = 0$$

در نتیجه، مطلب ثابت شده است. این مطلب را چنین می‌توان در ذهن جا داد که مماس بر خط راست در هر نقطه، خود خط می‌باشد.

مثال ۵: فرض کنید که f تابعی است از R^2 به R^2 $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ تعریف شود آن‌گاه f تابعی است مشتق‌پذیر در هر نقطه از R^2 و ژاکوبی آن در هر نقطه وجود دارد و مخالف با صفر است اگر :

$$x \neq y \quad , \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f : R^2 \to R^2 \quad , \quad f : (f_1, f_2) \quad , \quad f_1(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_2(x, y) = 2xy$$

آن‌گاه : $Df(x, y)$ برابر است با ماتریس ژاکوبی

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

دترمینان ژاکوبی = ژاکوبین f در (x, y) = $4x^2 - 4y^2$.

خواصّی که در مورد مشتق توابع یک متغیّره حقیقی داشته‌ایم، برای توابع چند متغیّره با مقدار برداری نیز صادق است. برای مثال قاعدهٔ زنجیری و غیره.

در قضایای زیر فرض بر این است که $U \subset R^n$ یک زیرمجموعه بازی در R^n و $x \in U$ باشد.

به علاوه فرض بر این است که: $f : U \to R^m$.

قضیهٔ ۱ : فرض کنید که f در x مشتق‌پذیر باشد و $\|Df(x)\| < c$ (دقت کنید که تعریف نرم $Df(x)$ همان تعریف نرم توابع خطی است) آن‌گاه وجود دارد : $\delta > 0$ به طوری که

$|f(x+h)| - |f(x)| \leq c|h|$ برای تمام $|h| < \delta$ و f در x پیوسته است.

اثبات: فرض کنید که $\varepsilon = c - \|Df(x)\|$ آن‌گاه بنا به تعریف مشتق وجود دارد: $\delta > 0$ به طوری که

$$|f(x+h) - f(x) - Df(x)h| \leq \varepsilon|h| \qquad (1)$$

در این جا $|h| < \delta$ از این رابطه نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| &\leq |Df(x)h| + \varepsilon|h| \\ &\leq (\|D_f(x)\| + \varepsilon)\ |h| \\ &\leq c|h|.\end{aligned}$$

قضیهٔ ۲: فرض کنید که $f: U \to R$ دارای ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی در نقطهٔ x بوده و f در x مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $Df(x) = 0$.

اثبات: فرض کنید که f در x دارای ماکزیمم نسبی باشد، بنابراین $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $f(y) \leq f(x)$ برای تمام $y \in U$ با $|x - y| < \delta$. به علاوه فرض کنید که $L = Df(x)$؛ آن‌گاه $f(x+h) - f(x) = Lh + r(h)$ به طوری که $\frac{r(h)}{|h|} \to 0$ وقتی که $h \to 0$. فرض کنید که: $V \in R^n$ و $t > 0$ به اندازه کافی کوچک باشد به طوری که $h = tv$. آن‌گاه داریم:

$$L(tv) + r(tv) \leq 0$$

زیرا f در x ماکزیمم نسبی دارد. هنگامی که $t \to 0$، و یا:

$$\lim_{t \to 0} Lv + \frac{r(tv)}{t} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad Lv \leq 0$$

حال اگر v به $-v$ تبدیل شود، آن‌گاه $L(v) \geq 0$ زیرا L خطی است. در نتیجه $Lv = 0$ و چون v اختیاری بوده است. پس: $Df(x) = L = 0$ و مطلب ثابت شده است. اثبات حالت می‌نیمم تابع در x مشابه بالا می‌باشد.

قضیهٔ ۳: فرض کنید که $f: U \to R^m$ در $x \in U$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه مشتقّات جزیی $D_j f_i(x)$، $1 \leq j \leq n$ وجود دارد و داریم:

$$f'(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} D_j f_i(x) u_i$$

که در آن $\{u_1, ..., u_m\}$ پایهٔ استاندارد در R^m و $\{e_1, ..., e_n\}$ پایهٔ استاندارد در R^n می‌باشد.
اگر $f'(x)$ را به صورت ماتریس بنویسیم، آن‌گاه $f'(x)e_j$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f'(x)e_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{m} D_j f_i(x) u_i$$

اثبات قضیهٔ ۳

f در x مشتق‌پذیر است، پس برای j معیّنی داریم:

$$f(x + t e_j) - f(x) = f'(x)(te_j) + r(te_j)$$

جایی‌که $\frac{r(te_j)}{t} \to 0$ همچنانکه $t \to 0$ و با توجه به خطیّ بودن $f'(x)$ رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x) + (te_j) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x)(te_j) + r(te_j)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} f'(x)(e_j) = f'(x)(e_j)$$

حال چون $f'(x)$ وجود دارد و $f = (f_1, ..., f_m)$ آن‌گاه داریم:

$$\lim_{t \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} u_i = f'(x)e_j$$

چون طرف راست رابطهٔ بالا موجود است، بنابراین تک‌تک مؤلفه‌های سمت چپ وجود دارند که همان تعریف مشتقّات جزیی $D_j f_i(x)$ ، $1 \le j \le n$ می‌باشند. اگر قرار دهیم: $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j \in R^n$ (یک بردار دلخواه)، آن‌گاه با استفاده از این قضیه خواهیم داشت:

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(x) h_j \right\} u_i$$

قضیهٔ ۴ : قاعدهٔ زنجیری

فرض کنید که $U \subset R^n$ و $V \subset R^m$ مجموعه‌های باز باشند. همچنین تابع $f : U \to R^m$ و تابع $g : V \to R^k$ به ترتیب در نقطهٔ $p \in U$ و $q = f(p) \in V$ مشتق‌پذیر می‌باشند. آن‌گاه gof در p مشتق‌پذیر است و داریم :

$$D(gof)(p) = Dg(q) o Df(p)$$

اثبات : چون f در p و g در q مشتق‌پذیر است، پس $p \in U \cap f^{-1}(V)$ که متعلّق به حوزهٔ تعریف gof است. فرض کنید که $T = Df(p)$ و $S = Dg(q)$ برای اثبات قضیه رابطه زیر را ثابت خواهیم کرد :

$$r(h) = (gof)(p + h) - (gof)(p) - STh, \tag{۱}$$

که در آن $\frac{r(h)}{|h|} \to 0$ همچنان که $h \to 0$.

برای اثبات (۱) روابط زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم (این روابط براساس مشتق‌پذیری توابع f و g به ترتیب در p و q نوشته شده‌اند).

$$u(h) = f(p + h) - f(p) - Th \tag{۲}$$

$$v(k) = g(q + k) - g(q) - Sk \tag{۳}$$

به ازای تمام $p + h \in U$ و $q + k \in V$. بنابراین با توجه به تعریف مشتق یک تابع داریم : $\frac{u(h)}{|h|} \to 0$ همچنان که $h \to 0$ و $\frac{v(k)}{|k|} \to 0$ همچنان که $k \to 0$. فرض کنید که $k(h) = k = f(p + h) - f(p)$ آن‌گاه بنا به قضیهٔ ۱ و با فرض $c \geq \| T \|$ داریم: $|k| \leq c|h|$ برای $|h|$ به اندازهٔ کافی کوچک. حال $k \to 0$ همچنان که $h \to 0$، در نتیجه $\frac{v(k)}{|h|} \to 0$ همچنان که $h \to 0$. اکنون تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم (به روابط ذکر شده توجه خواهیم کرد) :

$$\begin{aligned}(gof)(p + h) - (gof)(p) &= g(f(p + h)) - g(f(p)) \\ &= g(q + k) - g(q) \\ &= v(k) + Sk .\end{aligned}$$

در این روابط مقدار k را جایگزین می‌کنیم و با توجه به روابط (۲) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(gof)(p + h) - (gof)(p) &= v(k) + S(Th + u(h)) \\ &= v(k) + STh + Su(h)\end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$r(h) = v(k) + Su(h)$$

می‌دانیم که $k \to \circ$ همچنان‌که $h \to \circ$، از عبارت بالا حد می‌گیریم وقتی که $h \to \circ$:

$$|r(h)| = |v(k) + Su(h)| \le |v(k)| + |Su(h)|,$$

$$\lim_{h \to \circ} \frac{|r(h)|}{|h|} \le \lim_{h \to \circ} \frac{|v(k)| + |Su(h)|}{|h|}$$

سمت راست این نامعادله به سمت ۰ میل می‌کند، در نتیجه سمت چپ نیز به سمت ۰ میل خواهد کرد.

مثال ۶: فرض کنید که γ یک تابع مشتق‌پذیر از $(a, h) \subset R$ به یک زیرمجموعه باز $E \subset R^n$ باشد. بنابراین γ یک منحنی مشتق‌پذیر در E است. به علاوه فرض بر این است که f یک تابع مشتق‌پذیر با حوزهٔ تعریف E باشد: $f : E \to R$ در نتیجه $fo\gamma : (a , b) \to R$ و یا به عبارت دیگر این یک تابع حقیقی با متغیّر حقیقی است. اکنون با استفاده از قاعدهٔ زنجیری برای توابع مشتق‌پذیر $fo\gamma$ داریم :

$$g(t) = fo\gamma(t)\ ,\ g'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)$$

در این‌جا چون هر دو تابع برداری در فضاهای R و R^n می‌باشند، در نتیجه می‌توان مشتقّ آنها را برحسب ماتریس محاسبه کرد. در حقیقت می‌دانیم که

$$f'(\gamma(t)) \in L(R^n , R)\ ,\ \gamma'(t) \in L(R , R^n)$$

آن‌گاه $g'(t)$ یک عملگر خطی بر روی R است، یعنی این که $g'(t) \in L(R , R)$. این مطلب را می‌توان به صورت زیر که حاصل‌ضرب دو ماتریس می‌باشد نیز بیان کرد :

$$x \in E\ ,\quad x = (x_1 , x_2 ,\dots, x_n)\quad ,\ t \in (a , b)$$

$$\gamma(t) = x = (x_1(t), x_2(t) ,\dots, x_n(t))\ ,$$

$$\gamma'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix},$$

همچنین داریم :

$$f'(\gamma(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \cdots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

$$= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} D_i f(\gamma(t)) \, x_i'(t)$$

برای مثال اگر $n = ۳$ باشد، آن‌گاه مشتقّ $g(t)$ همان مطالب آشنا در حسابان است. در آنجا با گرادیان یک تابع آشنا شده‌اید. اگر گراد یک تابع را به ∇f نمایش دهید، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} D_i f(\gamma(t)) . \gamma_i'(t) = \nabla f(\gamma(t)) . \sum_{i=۱}^{n} \gamma_i'(t) e_i$$

۲.۱.۵. قضیهٔ مقدار میانگین

در حسابان دیده‌ایم که یکی از ابزارهای مفید کاربردی که از مشتق حاصل می‌شد همانا قضیهٔ مقدار میانگین برای توابع حقیقی یک متغیّره بود. در حقیقت این قضیه مقدار تقریبی تابع را در دو نقطهٔ متفاوت نشان می‌دهد که در محاسبه مورد استفاده قرار می‌گیرد. به واسطهٔ استفادهٔ این مطلب، در این‌جا به توسعهٔ این قضیه برای توابع چندمتغیّره حقیقی می‌پردازیم. امّا ابتدا تعریف مجموعهٔ محدّب را یادآوری می‌نماییم.

۲.۱.۶. تعریف مجموعهٔ محدب

فرض کنید که x و y دو نقطهٔ مجزّا از هم در R^n باشند. آن‌گاه قطعه خطّ بسته بین x و y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$[x, y] = \{(۱ - t)x + ty : ۰ \leq t \leq ۱\},$$

یک زیرمجموعهٔ E از R^n را محدّب نامیم اگر $[x, y] \subset E$ به طوری که $x \in E$ و $y \in E$.

قضیهٔ ۵ (مقدار میانگین).

فرض کنید که $E \subset R^n$ یک زیرمجموعهٔ محدّب و $f : E \to R$ در هر نقطه از E مشتق‌پذیر

باشد، آن‌گاه نقطه‌ای مانند $z\in[x , y]$ وجود دارد به طوری که داریم :

$$f(y) - f(x) = D_z f(y - x) = f'(z)(y - x)$$

اثبات : فرض کنید که: $g(t) = ty + (1 - t)x$ ، در نتیجه: $[x , y] = \{g(t) : 0 \le t \le 1\}$. مشاهده خواهد شد که $g'(t) = y - x$. قرار می‌دهیم: $F(t) = f(g(t))$ ؛ حال بنا بر قضیهٔ قاعدهٔ زنجیری، $F(t)$ در هر نقطه از $[0 , 1]$ مشتق‌پذیر و حقیقی با متغیّر حقیقی می‌باشد، آن‌گاه می‌توان قضیه مقدار میانگین را برای آن به‌کار برد. فرض کنید که: $g(t_0) = z$ ، پس داریم:

$$\begin{aligned} F(t_0) &= f(g(t_0)) = f(z) \\ F'(t_0) &= f'(g(t_0)).g'(t_0) \\ &= f'(g(t_0))(y - x) \end{aligned} \qquad 0 \le t_0 \le 1$$

حال قضیه مقدار میانگین را بکار می‌بریم :

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= F'(t_0)(1 - 0) \\ &= f'(z)(y - x) \end{aligned}$$

اما $F(1) = f(g(1)) = f(y)$ و $F(0) = f(g(0)) = f(x)$ با جایگزینی این مقادیر در بالا حکم قضیه اثبات می‌شود.

نتیجه ۱ از قضیه مقدار میانگین

فرض کنید که E یک زیر مجموعه محدب در R^n و $f: E \to R$ یک تابع حقیقی و مشتق‌پذیر بر روی E باشد به طوریکه $\| Df(x) \| \le M$ به ازای تمام $x \in E$ آنگاه داریم :

$$|f(y) - f(x)| \le M|y - x| \quad , \quad \forall x, y \in E$$

اثبات: با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم

$$\begin{aligned} & f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) \\ \Rightarrow \quad & |f(y) - f(x)| = |f'(z)(y - x)| \le |f'(z)| \ |y - x| \le M \ |y - x| \end{aligned}$$

نتیجه ۲ از قضیه مقدار میانگین

فرض کنید که $f'(x) = ۰$ در هر نقطه از E. آن‌گاه بنابر نتیجهٔ ۱ خواهیم داشت: $f(y) = f(x)$، یعنی این که تابع f بر روی یک مجموعهٔ محدّب مقدار ثابتی است. این نتیجه را می‌توان بر روی مجموعهٔ همبند E از R^n نیز ثابت کرد. آیا این نتیجه را می‌توان بر روی یک مجموعهٔ ناهمبند از R^n توسعه داد؟ (به عنوان تمرین)

قضیهٔ ۶: نتیجهٔ ۱ قضیهٔ مقدار میانگین را می‌توان برای توابع با مقدار برداری، یعنی

$f: U \subset R^n \to R^m$

گسترش داد.

قضیه: فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز و محدّب در R^n و $f: U \to R^m$ در هر نقطه $x \in U$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $\| D F(x) \| \leq M$ به ازای تمام $x \in U$؛ آن‌گاه داریم:

$$|f(y) - f(x)| \leq M \ |y - x|, \qquad \forall x, \ y \in U$$

اثبات: فرض کنید که $a \in R^m$ با $|a| = ۱$ باشد. تابع $\phi : R^m \to R$ را با $\phi(t) = a.t$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این که تابع ϕ یک تابع خطی می‌باشد، پس $D\phi = \phi$ در هر نقطه. بنا بر تعریف نرم یک تابع خطی خواهیم داشت:

$$\| D\phi \| = \| a \| = ۱$$

اکنون قرار می‌دهیم: $g = \phi o f$ آن‌گاه بنا بر قاعدهٔ زنجیری داریم:

$$Dg(x) = D\phi(f(x)). Df(x);$$

$$\| Dg(x) \| \leq \| D\phi \| \ \| D f(x) \|$$

$$\leq ۱ \times M$$

حال با توجه به این که g تابعی حقیقی است، آن‌گاه نتیجه ۱ را به کار می‌بندیم و خواهیم داشت:

$$a.(f(y) - f(x)) = g(y) - g(x) \leq M |y - x|. \qquad (*)$$

از طرف دیگر بردار واحد a را طوری انتخاب می‌کنیم که بردار واحد در جهت بردار $f(y) - f(x)$ باشد، در نتیجه داریم:

$$a.(f(y) - f(x)) = |f(y) - f(x)|$$

با جایگزین کردن این مقدار در رابطهٔ (*) نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید، یعنی این که :

$$|f(y) - f(x)| \leq M\ |y - x|$$

۲.۱.۷. تعریف رده C^r یک تابع

فرض کنید که تابع $f: U \to R^m$ به طوری که $U \subset R^n$ یک زیرمجموعهٔ باز از R^n است. مشتق تابع f را به Df نمایش می‌دهیم که خود تابعی است از U به $L(R^n\ ,\ R^m)$ و خطی نمی‌باشد : $Df : U \to L(R^n\ ,\ R^m)$ اما $Df(x)$ یک تابع خطی از R^n به R^m است. اگر تابع Df در تمام نقاط U پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f را از رده C^r و یا تابع f را به طور پیوسته مشتق‌پذیر نامند.

تعریف مشتق از مرتبهٔ بالای یک تابع

فرض کنید که f همان تابع تعریف شده در بالا باشد، آن‌گاه مشتق مرتبهٔ دوم این تابع به صورت $D^۲f: U \to L(R^n\ ,\ L(R^n\ ,\ R^m))$ تعریف می‌شود، یعنی این که تابع $D^۲f$ به هر نقطه از U، یک تابع خطی از R^n به فضای توابع خطی $L(R^n\ ,\ R^m)$ نسبت می‌دهد. دقت کنید که توابع متعلّق به $(R^n\ ,\ L(R^n\ ,\ R^m))$ یک ماتریس با $m \times n$ سطر و n ستون می‌باشد. در حقیقت هر سطر این ماتریس همان مشتقات جزیی یک عضو ماتریس ژاکوبی f نسبت به متغیّرهای $x_۱\ ,\ x_۲ ,\dots, x_n$ می‌باشد.

تابع f را از ردهٔ $C^۲$ گوییم اگر $D^۲f$ تابعی پیوسته باشد. به همین ترتیب می‌توان از ردهٔ C^r با $r \geq ۱$ را تعریف کرد. تابع f را از ردهٔ C^r، $r \geq ۱$ نامند اگر مشتق مرتبهٔ r تابع به طور پیوسته باشد.

در پایان این بخش به چند مثال نقض می‌پردازیم.

مثال. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin\frac{۱}{x} & \text{اگر} \quad x \neq ۰ \\ ۰ & \text{اگر} \quad x = ۰ \end{cases}$$

مفروض است. این تابع در تمام نقاط پیوسته است، امّا از ردهٔ $C^۱$ نیست؛ زیرا مشتق این تابع یعنی :

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x \sin\frac{۱}{x} - \cos\frac{۱}{x} & \text{اگر} \quad x \neq ۰ \\ ۰ & \text{اگر} \quad x = ۰ \end{cases}$$

در $x = \circ$ پیوسته نیست. بنابراین، این تابع در تمام نقاط به جز $x = \circ$ از ردهٔ C^{1} می‌باشد.

مثال ۲. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{2}\sin\frac{1}{x^{2}} & x \neq \circ \text{ اگر} \\ \circ & x = \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

دارای مشتق زیر است :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^{2}} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^{2}} & x \neq \circ \text{ اگر} \\ \circ & x = \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

این تابع دارای مشتق است امّا مشتق آن در بازهٔ [۱ و ۱-]کراندار نمی‌باشد.

مثال ۳. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{4}e^{-\frac{1}{2}x^{2}}\sin\frac{8}{x^{3}} & x \neq \circ \text{ اگر} \\ \circ & x = \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

دارای مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}x^{2}}[(4x^{3} - \frac{1}{2}x^{5})\sin\frac{8}{x^{3}} - 24\cos\frac{8}{x^{3}} & x \neq \circ \text{ اگر} \\ \circ & x = \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

است. این مشتق در هر همسایگی از نقطهٔ مبدأ دارای ماکزیمم ۲۴ و می‌نیمم ۲۴- می‌باشد؛ در حقیقت برای $h = |x| \leq 1$ داریم :

$$\circ < e^{-\frac{1}{2}x^{2}} < 1 - \frac{1}{4}h^{2}\, e^{-\frac{1}{2}h^{2}} < 1 - \frac{3}{16}h^{2}$$

و

$$|\left(4x^{3} - \frac{1}{2}x^{5}\right)\sin\frac{8}{x^{3}} - 24\cos\frac{8}{x^{3}}| \leq 24 + \frac{9}{2}h^{3}.$$

بنابراین

$$|f'(x)| < \left(1 - \frac{3}{16}h^{2}\right)\left(24 + \frac{9}{2}h^{2}\right) < 24 - \frac{9}{2}h^{2}(1 - h) \leq 24$$

در نتیجه $f'(x)$ بر روی $|x| \leq 1$ و یا [۱ و ۱-] دارای مقدار سوپریمم ۲۴ و مقدار انیمیمم ۲۴- است. امّا این مقادیر جز مقادیر تابع f' نمی‌باشند. بنابراین این تابع دارای مشتق کراندار است، امّا مقدار اکستریمم بر روی بازهٔ بسته وجود ندارد.

مثال ۴. تابع

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{اگر} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad x = 0 \end{cases}$$

بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و تمام مشتقّات آن در $x = 0$ مساوی با ۰ می‌باشد.

۲.۲. مشتقّات جزیی[1] و مشتقّ سویی[2]

با مشتقات جزیی و مشتقّ سویی در ریاضیات عمومی آشنا شده‌ایم. در این جا یادآوری از تعریف برای توابع حقیقی بر روی یک مجموعهٔ باز $U \subset R^n$ و برخی از قضایای مربوط به آنها را ارائه می‌دهم.

۲.۲.۱. تعریف مشتقّ سویی

فرض کنید که f یک تابع حقیقی بر روی یک مجموعهٔ باز $U \subset R^n$ باشد. مشتقّ سویی f در نقطهٔ $C \in U$ در جهت بردار واحد u برابر است با :

$$D_u f(c) = \lim_{|h| \to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{|h|}$$

به شرط آن که این حد وجود داشته باشد.

مثال ۱: فرض کنید که $f : R^2 \to R$ به طوری که $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1+x_2)}$ نمودار این تابع در شکل ۱ نشان داده شده است.

فرض کنید که $u = (u_1, u)$ بردار واحد و $x = (c_1 + hu_1, c_2 + hu_2)$ مشتقّ سویی f در نقطهٔ C و در جهت بردار u عبارت است از :

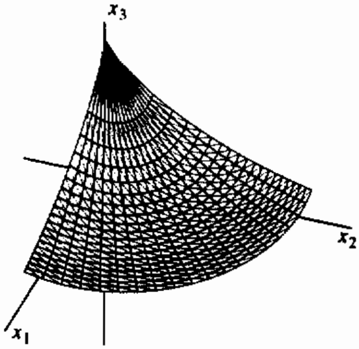
$$D_u f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(c) \frac{e^{-(u_1+u_2)h} - 1}{h}$$

1. Partial Derivatives

2. Directional Derivalive

برای $u_1 + u_2 \neq 0$ این حد برابر است با $-(u_1 + u_2)f(c)$ و اگر $u_1 + u_2 = 0$، آن‌گاه $f(x) = f(c)$ به ازای تمام $h \neq 0$ و در نتیجه $D_u f(c) = 0$. در هر دو حالت $D_u f(c) = -(u_1 + u_2)f(c)$



1

مثال ۲: تابع $f; R^2 \to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2^3}{x_1^4 + x_2^6} & \text{اگر} \quad x = (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad x = 0 \end{cases}$$

به وضوح پیداست که این تابع در $x = 0$ پیوسته نیست زیرا اگر x در طول محور x ها به سمت صفر میل کند، آن‌گاه $\lim f(x) = 0$ هنگامی که $x \to 0$. امّا اگر x در طول منحنی $x_2 = x_1^{2/3}$ به سمت 0 میل کند آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x) = \lim \frac{x_1^4}{x_1^4 + x_1^4} = \frac{1}{2}$$

اکنون از متفاوت بودن این دو حد نتیجه می‌شود که تابع f در $x = 0$ پیوسته نیست. اما مشتّق سویی این تابع در نقطه $C = 0$ وجود دارد. برای اثبات این ادّعا، فرض می‌کنیم که $u_1 \neq 0$ و سپس مشاهده می‌کنیم که حدّ زیر وجود دارد:

$$D_u f(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u_1^2 u_2^3 h^5}{h(h^4 u_1^4 + h^6 u_2^6)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u_1^2 u_2^3}{u_1^4 + h^2 u_2^6{}^2} = \frac{u_2^3}{u_1^2}$$

اگر $u_1 = 0$ و در نتیجه $x = (0, hu_2)$ آن‌گاه، $f(x) = 0$ و در نتیجه $D_u f(0) = 0$
بنابراین به ازای هر بردار واحد u مشتقّ سویی $D_u f(0)$ موجود است.

نتیجهٔ مثال ۲

این مثال نشان می‌دهد که وجود مشتقّ سویی در نقطهٔ $x = c$ به ازای هر بردار واحد تضمین کننده پیوستگی تابع در آن نقطه نمی‌باشد. بنابراین، این مثال اخطار را می‌دهد که وجود مشتقّ سویی برای مشتق‌پذیری کافی نیست.

تبصره ۱ : مشتقّ سویی $D_u f(c)$ اندازهٔ نرخ مقادیر تابع را در نقطهٔ $x = c$ در جهت برداری‌که u مشخّص می‌کند. در حالت خاص، اگر بردار u یکی از بردارهای‌واحد $e_i = (0, 0 \ldots, 1, 0 \ldots 0)$، ...، $i = 1, 2 \ldots n$ انتخاب شود، آن‌گاه، n تا مشتقّ سویی خاصّ زیر را خواهیم داشت :

$$D_j f(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + he_j) - f(c)}{h}$$

در صورت وجود این حد، این مشتقات سویی اندازهٔ نرخ تغییر f را در نقطهٔ $x = c$ در جهتهای محور مختصّات تعیین می‌کنند. این مشتقات سویی خاص ما را به سمت تعریف مشتقّات جزیی راهنمایی می‌کند.

تبصره ۲. در ریاضیات عمومی رابطهٔ بین مشتقّ سویی و گراد یک تابع را تعریف کردیم، در این جا به یادآوری آن روابط در حالت کلّی فضای R^n اکتفا خواهیم نمود :

فرض کنید قرار دهیم: $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$، آن‌گاه $D_u f(c)$ عبارت است از :

$$\nabla f(c).u = D_u f(c) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) . (u_1, \ldots, u_n)$$

این، رابطهٔ بین مشتقات جزیی و گراد و مشتقّ سویی را نشان می‌دهد.

۲.۳. تعریف مشتقّ جزیی

فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز در R^n باشد و $f: U \to R^m$. بنابراین $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ و $f_i: U \to R$ و $x = (x_1, ..., x_n)$, $x \in U$ آن‌گاه مشتقّ جزیی f_i نسبت به متغیّر x_j برابر است با:

$$D_j f_i(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h}$$

اگر این حد وجود داشته باشد، آن‌گاه مشتقّ جزیی تابع f_i نسبت به متغیّر x_j در نقطهٔ x وجود دارد.

چندین نماد برای مشتقات جزیی ارائه شده است، مانند : $D_{x_j} f_i$ ، $D_j f_i(x)$ ، $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ و یا $(f_i)x_j$.

دقّت کنید که وجود مشتقات جزیی یک تابع در یک نقطه، تضمین کنندهٔ مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه نمی‌باشد؛ به مثال زیر مراجعه کنید.

مثال ۳: فرض کنید که تابع $f(s , t)$ به صورت زیر تعریف شود :

$$f(s , t) = \begin{cases} \dfrac{2st}{s^2 + t^2} & \text{اگر} \quad s^2 + t^2 > 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad s^2 = t = 0 \end{cases}$$

مانند مثال ۲ می‌توان ثابت کرد که تابع به جز در نقطهٔ $(s, t) = 0$ مشتق‌پذیر است. در حقیقت در مبدأ تابع پیوسته نمی‌باشد (اثبات مشابه مثال ۲). امّا مشاهده خواهیم کرد که تابع در مبدأ دارای مشتقات جزیی نسبت به t و s است :

$$D_s f(0 , 0) = D_t f(0 , 0) = 0$$

(محاسبه به عنوان تمرین) نظر به این‌که $f(0 , t) = f(s , 0) = 0$ به ازای تمام مقادیر حقیقی s و t ، امّا $f(t , t) = 1$ به ازای تمام $t \neq 0$. بنابراین با وجود این‌که تابع f در مبدأ پیوسته نیست امّا مشتقات جزیی آن در مبدأ وجود دارد. قضیهٔ زیر شرط لازم و کافی برای وجود مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه را ارائه می‌دهد.

قضیهٔ ۶: فرض کنید که U زیرمجموعهٔ بازی در R^n و $f : U \to R^n$ آن‌گاه f در نقطهٔ x بطور پیوسته مشتق‌پذیر است، اگر و تنها اگر مشتقات جزیی تابع در آن نقطه وجود داشته و پیوسته باشند.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم که تابع f در x مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ ۳ داریم:

$$f'(x)c_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \cdot u_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad , \quad x \in U$$

و یا این که

$$f'(x)e_j \cdot u_i = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \cdot u_i \right] \cdot u_i$$

$$= \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = D_j f_i(x) \qquad (1)$$

در (۱)، u_i ها پایهٔ استاندارد برای R^m و e_j ها پایهٔ استاندارد برای R^n می‌باشند. اکنون با استفاده از (۱) عبارت زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$D_j f_i(y) - D_j f_i(x) = f'(y)e_j \cdot u_i - f'(x)e_j u_i$$
$$= (f'(y) - f'(x))e_j u_i$$

قدرمطلق سمت چپ این عبارت برابر است با:

$$|D_j f_i(y) - D_j f_i(x)| = |f'(y) - f'(x))e_j \cdot u_i|$$
$$\leq \|f'(y) - f'(x)\| \ |e_j\| \ |u_i|$$
$$\leq \|f'(y) - f'(x)\| \ . \qquad (2)$$

اکنون توجّه می‌کنیم که f در x بطور پیوسته مشتق‌پذیر است. بنابراین نرم سمت راست نامساوی (۲) از ε کوچکتر است، هرگاه $|y - x| < \delta$. در نتیجه رابطهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$|D_j f_i(y) - D_j f_i(x)| \leq \varepsilon \quad \text{برای} \quad |y - x| < \delta$$

این نامساوی پیوستگی مشتقّ جزیی f_i را نسبت به متغیّر x_j نشان می‌دهد. چون برای i و j دلخواهی مطلب را ثابت کرده‌ایم، لذا پیوستگی مشتقات جزیی اثبات شده است.

اثبات عکس: فرض کنید که مشتقات جزیی تابع f در x پیوسته باشند، ثابت خواهیم کرد که f در x مشتق‌پذیر است.

بدون هیچ‌گونه اشکالی فرض می‌کنیم: $m = 1$ ، زیرا اگر برای مؤلفه‌های f حکم را ثابت کنیم، آن‌گاه برای خود f نیز برقرار خواهد بود. لذا فرض برای این است: $f : U \to R$. چون بنا

بر فرض، U یک مجموعهٔ باز است، پس برای یک x معینی از U وجود دارد یک گوی بازی مانند $S \subset U$ به مرکز x و شعاع r. چون مشتقات جزیی پیوسته هستند، لذا در S نامساوی زیر را خواهیم داشت :

$$|D_j f(y) - D_j f(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad , \quad y \in S \quad , \quad 1 \leq j \leq n \tag{1}$$

توجّه کنید که $|y - x| < r$ (در این جا r همان δ در تعریف پیوستگی می‌باشد).

اکنون h را طوری انتخاب می‌کنیم که $|h| < r$ و قرار می‌دهیم: $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$ و $v_k = h_1 e_1 + \dots + h_k e_k$ با $v_0 = 0$ و $1 \leq k \leq n$. با این نمادگذاریها تفاضل $f(x + h) - f(x)$ را محاسبه می‌نماییم :

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} [f(x + v_j) - f(x + v_{j-1})], \tag{2}$$

زیرا Σ به صورت زیر می‌باشد :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} [f(x + v_j) - f(x + v_{j-1})] &= f(x + v_1) - f(x + v_0) \\ &\quad + f(x + v_2) - f(x + v_1) + \dots \\ &= f(x + v_n) - f(x) \\ &= f(x + h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n) - f(x) \\ &= f(x + h) - f(x),\end{aligned}$$

از طرف دیگر در S و با تعریف v_k داریم :

$$v_j = h_j e_j + (h_{j-1} e_{j-1} + h_{j-2} e_{j-2} + \dots + h_1 e_1) = h_j e_j + v_{j-1}$$

اکنون قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع f در گوی S (دقت کنید که گوی یک مجموعهٔ محدّب است) در دو نقطهٔ $x + v_j$ و $x + v_{j-1}$ به کار می‌بریم :

$$f(x + v_j) - f(x - v_{j-1}) = \nabla f(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j)(v_j + x - x - v_{j-1})$$

به طوری که $\theta_j \in (0, 1)$. در این جا به علّت این که تغییرات بر روی متغیّر x_j است، لذا مشتق سمت راست بالا به مشتق جزیی تبدیل می‌شود، یعنی این که داریم :

$$\begin{aligned}f(x + v_j) - f(x + v_{j-1}) &= \nabla f(z)(v_j - v_{j-1}) \\ &= D_j f(z)\, h_j e_j\end{aligned} \tag{3}$$

در این جا $z = x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j$ که متعلّق به قطعه خطی است که دو نقطهٔ $x + v_j$ و

$x+v_{j-1}$ را به هم وصل می‌کند. اکنون رابطه (۱) را با $y = z$ و با توجّه به مقدار به دست آمدهٔ بالا بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|h_j e_j(D_j f(z) - D_j f(x)| &\le |h_j|\ |D_j f(z) - D_j f(x)| \\ &\le |h_j|\ \frac{\varepsilon}{n} \qquad (۴)\end{aligned}$$

از طرف دیگر تفاضل زیر را با استفاده از روابط (۲) و (۳) و (۴) محاسبه خواهیم کرد:

$$\begin{aligned}&\left| f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j f(x) h_j e_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} [f(x+v_j) - f(x+v_{j-1}) - h_j D_j f(x) e_j] \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} (D_j f(z) - D_j f(x) h_j e_j \right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |h_j|\ |e_j|\ |D_j f(z) - D_j f(x)| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |h_j|\ |D_j f(z) - D_j f(x)| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |h_j|\ \frac{\varepsilon}{n}\end{aligned}$$

حال با توجّه به این که $|h| < r$ ، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{j=1}^{n} e_j h_j (D_j f(z) - D_j f(x) \right| &\le r \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} \\ &\le r\varepsilon\end{aligned}$$

این نتیجه، مشتق‌پذیری تابع f را در x ثابت می‌کند، زیرا در حقیقت این نامساوی برابر است با:

$$|f'(z) - f'(x)| < \varepsilon, \quad \text{به ازای} \quad |z - x| < r$$

که تعریف مشتق‌پذیری تابع f در x است.

نتیجهٔ قضیه ٦

از این قضیه می‌توان این نتیجه راگرفت که تابع f از ردهٔ C^{1} است اگر و تنها اگر مشتقات جزیی f پیوسته باشند.

اثبات : با استفاده از قضیهٔ ٦ می‌دانیم که تابع f در نقطهٔ x مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر مشتقات جزیی f در x پیوسته باشند. اکنون توجّه می‌کنیم که $f'(x)$ یک تابع خطی است که $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$ را به $\sum_{j=1}^{n} h_j D_j f(x)$ می‌برد. ماتریس $f'(x)$ شامل ۱ سطر و n ستون می‌باشد. (دقّت کنید که در اثبات مشتق‌پذیری تابع f در x فرض بر این شد که $m = 1$)؛ یعنی این‌که ماتریس $f'(x)$ به فرم

$$(D_1 f(x), D_2 f(x), \ldots, D_n f(x))$$

است که تمام اعضای این ماتریس پیوسته هستند. بنابراین f در x از رده C^{0} است. این ادعا از آن‌جا سرچشمه می‌گیرد که با در نظر گرفتن پایهٔ استاندارد در R^n و R^m و $A \in L(R^n, R^m)$ یا ماتریس (a_{ij})، بنابر نامساوی کشی-شوارتز[1] (تعریف آن در هر کتاب آنالیز یافت می‌شود، برای مثال می‌توان به کتاب آنالیز Douglass صفحهٔ ۶۳ مراجعه کرد)، نامساوی زیر برقرار است :

$$x \in R^n, \quad |Ax|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1} x_j^2\right)$$

$$\leq \sum_{i,j} a_{ij}^2 \, |x|^2,$$

اکنون با توجّه به تعریف نرم یک تابع خطی (به بخش ۱.۲.۲. مراجعه کنید) و نامساوی بالا خواهیم داشت :

$$\|A\| \leq \left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2}$$

1. Cauchy - Schwartz Inequality

اکنون فرض کنید که $B\in L(R^n , R^m)$ با ماتریس (b_{ij}) باشد، آن‌گاه با توجه به توضیحات داده شده داریم:

$$\|B - A\| \leq \left\{\sum_{i,j}(b_{ij} - a_{ij})^2\right\}^{1/2} \qquad (*)$$

از این نتیجهٔ به دست آمده می‌توان استفاده کرده و ثابت نمود که تابع $Df : x \to Df(x)$ یک تابع پیوسته است زیرا این تابع هر x را به یک ماتریس با اعضای پیوسته نسبت می‌دهد. لذا بنا به قضیهٔ توابع خطی (به کتاب Rudin مراجعه کنید) می‌دانیم که هرگاه درایه‌های A_p با تغییر p به طور پیوسته تغییر کند، آن‌گاه تابعی که $p \to A_p$ یک تابع پیوسته خواهد بود. بنابر فرض قضیهٔ ۶ تمام مشتقات جزیی تابع f که اعضای ماتریس $Df(x)$ هستند، پیوسته می‌باشند.

پس با توجه به $(*)$ پیوستگی تابع Df نتیجه می‌شود.

در نتیجه: $f\in C^1(v)$.

مثال ۴: فرض کنید که تابع حقیقی $f(x) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$ مفروض باشد. آن‌گاه چون مشتقات جزیی این تابع، یعنی $D_1 f(x) = -2x_1 f(x)$ و $D_2 f(x) = -2x_2 f(x)$ توابعی پیوسته برروی R^2 هستند آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۶ و نتیجهٔ آن، تابع f بر روی R^2 از ردهٔ C^1 است.

۱.۳.۲. تعریف شرط لیشیتز[1]

فرض کنید که تابع f همان تابع تعریف شده در قضیهٔ ۶ باشد. آن‌گاه تابع f در شرط لیشیتز از مرتبهٔ K در نقطهٔ $c\in U$ صدق می‌کند اگر وجود داشته باشد عدد مثبتی مانند M به طوری که تابع f در یک همسایگی از c در شرط زیر صدق کند:

$$|f(x) - f(c)| \leq M|x - c|^k$$

دقت کنید که هرگاه تنها از شرط لیشتیز اسم به میان آید، به معنای این است که $k = 1$ و همچنین دقت کنید که به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر تابع f در شرط لیشتیز صدق کند، آن‌گاه f در همان نقطه پیوسته است (به قضیهٔ زیر مراجعه کنید). در ضمن گاهی‌اوقات شرط لیشتیز را جایگزین مشتق‌پذیری می‌کنند. در حقیقت مشتق‌پذیری در هر نقطه، شرط لیشتیز را نتیجه می‌دهد (قضیهٔ زیر).

1. Lipschitz Condition

قضیهٔ ۷: فرض کنید که تابع f قضیهٔ ۶ در نقطه‌ای مانند $c \in U$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع f در شرط لیشتیز صدق می‌کند.

اثبات : بدون آن که به کلیّت استدلال خللی وارد شود برای سادگی $m = ۱$ در نظر می‌گیریم. پس فرض بر این است که f یک تابع حقیقی باشد. بنابر فرض f در c مشتق‌پذیر است، لذا با استفاده از تعریف مشتق‌پذیری و نامساوی کوشی - شوارتز خواهیم داشت (برای مقادیر به اندازهٔ کافی t)

$$|f(c + t) - f(c)| \leq |Df(c)t| + |r(t)|$$

نظر به این که $r(t)/|t| \to ۰$ همچنان که $t \to ۰$ ، پس می‌توان نوشت که $|r(t)| \leq \varepsilon|t|$ و در نتیجه این نامساوی با توجه به قضیهٔ نامساوی نرم برای f به صورت زیر خواهد شد :

$$\begin{aligned} |f(c + t) - f(c)| &\leq \|Df(c)\| \ |t| + \varepsilon|t| \\ &\leq (\|Df(c)\| + \varepsilon| \ |t| \, . \qquad (+) \end{aligned}$$

چون به واسطه این که f در c مشتق‌پذیر است، بنابراین وجود دارد عددی مانند $K > ۰$ به طوری که $\|Df(c)\| \leq K$ ، حال قرار می‌دهیم: $M = K + \varepsilon$ بنابراین نامساوی (+) به صورت زیر در می‌آید :

$$\begin{aligned} |f(c + t) - f(c)| &\leq M|t| \\ &\leq M \ |c + t - c| \end{aligned}$$

که اثبات قضیه را تکمیل می‌کند.

تبصرهٔ ۳: اگر در قضیهٔ ۷، $m > ۱$ آن‌گاه می‌توان قضیه را به صورت زیر اثبات کرد :

چون $f : U \subset R^n \to R^m$ ، آنگاه $f=(f_۱, f_۲, ..., f_m)$ که در آن $f_i : V \to R, \ i = ۱, ۲, ..., m$.

بنابراین اثبات قضیهٔ ۷ را برای هر یک از f_j اعمال می‌کنیم و خواهیم داشت :

$$|f(x) - f(c)| = \left[\sum_{j=۱}^{m} (f_j(x) - f_j(c))^۲\right]^{۱/۲}$$

$$\leq \left(\left[\sum_{j=۱}^{m} M_j^۲ \, |x - c|^۲\right]^{۱/۲} = M\,|x - c| \right)$$

در این جا دقّت شود که بنا بر قضیهٔ ۷ داریم :

$$M = \left[\sum_{j=1}^{m} M_j^2 \right]^{1/2} \qquad . \qquad f_j(x) - f_j(c) | \le M_j \; |x - c|$$

۲.۳.۲. مشتقّات جزیی با مرتبهٔ بالاتر از ۱

همان‌طور که مشتق از مرتبهٔ بالاتر در تجزیه‌وتحلیل یک تابع حقیقی یک متغیّره نقش مهمّی بازی می‌کرد، مشتقات جزیی مرتبهٔ بالاتر در تجزیه‌وتحلیل توابعی با حوزهٔ تعریف در R^n نقش مهمّی بازی می‌کنند. برای مثال در ریاضیات عمومی مشاهده کردیم که چگونه مشتقّات جزیی مرتبهٔ دوم در ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع دومتغیّره اهمیّت داشت. اگر فرض کنیم که $x \in R^n$، $x = (x_1 , ..., x_n)$، آن‌گاه اگر مشتقّات جزیی مرتبهٔ دوم یک تابع حقیقی بر روی R^n وجود داشته باشد، آن‌گاه آنها را با نماد $D_{ij} f(x)$ یا $D_i\, D_j\, f(x)$ نشان می‌دهیم که نمایشگر مشتقّ جزیی مرتبهٔ دوم تابع f نسبت به x_j و x_i می‌باشد. این نماد بدین معناست که

$$D_i\, D_j\, f(x) = D_{ij}\, f(x) = D_i[D_j\, f(x)] = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

به همین ترتیب می‌توان مشتقات جزیی بالاتر را (در صورت وجود) نوشت، برای مثال

$$D_{ijk}\, f(x) = D_i[D_{jk}\, f(x)] = D_i[D_j][D_k\, f(x)]$$

$$= \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\, \partial x_k}\right]$$

قضیه ۸: فرض کنید که U زیرمجموعهٔ در R^n و $f : U \to R$ باشد به طوری که مشتقّات جزیی آن $D_i f$ و $D_j f$ و $D_{ij} f$ در یک همسایگی از نقطهٔ $c \in U$ موجود و پیوسته باشند. به علاوه فرض بر این است که $D_{ij} f = D_i\, D_j\, f$ در نقطهٔ c پیوسته باشد. آن‌گاه مشتقّ جزیی $D_j\, D_i\, f = D_{ji}\, f$ وجود دارد و $D_{ij}\, f(c) = D_{ji}\, f(c)$. قبل از اثبات قضیه، این نکته را یادآور می‌شویم که این قضیه برای تابع $f : U \to R^m$ نیز برقرار است. برای سادگی در اندیس‌گذاری $m = 1$ در نظر گرفتیم. در غیر این صورت می‌توان قضیه را برای $f_i : U \to R$ اثبات کرد. همچنین باز برای ساده‌نویسی $n = 2$ (بدون این که هیچ مشکلی به وجود آید) انتخاب می‌کنیم.

اثبات: $n = 2$ قرار می‌دهیم $c = (a , b)$ و $\delta > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $(s , t) \in U$ هرگاه $|s - a| < \delta$ و $|t - b| < \delta$ (دقت کنید که چون U باز است، آن‌گاه به مرکز c می‌توان یک گوی زد که کاملاً داخل U قرار گیرد). اکنون تفاضل زیر را مورد بررسی قرار

می‌دهیم :

$$\Delta(h, k) = [f(a + h, b + k) - f(a + h, b)] - [f(a, b + k) - f(a , b)]$$

چون مشتقات جزیی وجود دارند، آن‌گاه حدّ این تفاضل را هنگامی که $k \to 0$ و $h \to 0$ محاسبه می‌نماییم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{k}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}\right]$$

$$\left[-\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{D_2 f(a+h,b) - D_2 f(a,b)}{h}$$

$$= D_{12} f(a , b)$$

این حد وجود دارد زیرا بنا بر فرض $D_{12} f$ در c پیوسته است. متشابهاً حدّ تفاضل $\Delta(h , k)$ را هنگامی که $h \to 0$ و $k \to 0$ یعنی این که ابتدا حد را نسبت به h و سپس نسبت به k محاسبه می‌کنیم. بنابراین در صورت وجود این حد خواهیم داشت :

$$\lim_{(k,h)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,k)}{kh} = D_{21} f(a,b) \qquad (*)$$

در نتیجه $D_{21} f(a, b) = D_{12} f(a , b)$ و وجود مشتقّ جزیی مرتبهٔ دوم $D_{21} f(a , b)$ نیز اثبات شده است. لذا کافی است که وجود و مقدار حد $(*)$ را تحقیق کنیم. برای اثبات، $\Delta(h , k)$ را بازنویسی می‌کنیم :

$$\Delta(h, k) = [f(a + h, b + k - f(a , b + k))] - [f(a + h, b) - f(a , b)]$$

اکنون قضیه مقدار میانگین را برای هر یک از کروشه‌های این تساوی به کار می‌گیریم:

$$\Delta(h , k) = h[D_1 f(a + \alpha h , b + k) - D_1 f(a + ah , b)] \qquad 0 < \alpha < 1$$

اکنون دو مرتبه قضیهٔ مقدار میانگین را برای کروشه سمت راست تساوی آخر محاسبه می‌نماییم.

$$\Delta(h , k) = hk[D_{21} f(a + \alpha h , b + \beta k)] \qquad 0 < \beta < 1$$

و یا این که داریم :

$$\frac{\Delta(h , k)}{hk} = D_{21} f(a + \alpha h , b + \beta k)$$

و با توجه به پیوستگی مشتقات جزیی مرتبه دوم داریم :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = D_{21} f(a,b)$$

دقت کنید که این قضیه برای یک تابع با خاصیت مشتق‌پذیری مرتبه دوم در یک همسایگی از نقطه (a,b) برقرار است.

تبصره ۴: همان‌طور که در ریاضیات عمومی (مبحث حسابان) خوانده‌اید، از مشتقات مرتبه دوم در تعیین ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع چند متغیّره حقیقی استفاده می‌کنیم. در ضمن، یادآوری می‌کنیم که قاعدهٔ زنجیری نیز برای مشتقات جزیی ترکیب دوتابع برقرار است. در حقیقت داریم :

$$D_j(gof)(c) = \sum_{k=1}^{n} D_k\, g(f(c))D_j f_k(c)\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

برای اثبات به کتاب «Douglass» صفحه ۳۶۱ مراجعه کنید.

مثال ۵: فرض کنید که $x = (x_1, x_2)$ نقطه در R^2 و $f: U \subset R^2 \to R^2$ تعریف شده توسط $f = (f_1, f_2)$ و $y_1 = f_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ و $y_2 = f_2(x) = 2x_1x_2$ و تابع $g(y) = e^{y_1 - y_2}$ باشد. آنگاه $D_1(gof)(x)$, $D_2(gof)(x)$. برابرند با :

$$\begin{aligned}
D_1(gof)(x) &= D_1\, g(f(x))\, D_1 f_1(x) + D_2\, g(f(x))\, D_1 f_2(x) \\
&= g(f(x))(2x_1) + [-g(f(x))](2x_2) \\
&= 2(x_1 - x_2)\exp(x_1 - x_2)^2 \\
D_2(gof)(x) &= D_1\, g(f(x))\, D_2 f_1(x) + D_2\, g(f(x))\, D_2 f_2(x) \\
&= g(f(x))(2x_2) + [-g(f(x))](2x_1) \\
&= 2(x_2 - x_1)\exp(x_1 - x_2)^2
\end{aligned}$$

مثال ۶: مشتقّات مرتبه دوم تابع $f(x) = f(x_1, x_2) = \mathrm{Ln}(3x_1^2 + 5x_2^2)$ را محاسبه کنید.

حل

$$D_1 f(x) = \frac{6x_1}{3x_1^2 + 5x_2^2} \quad , \quad D_2 f(x) = \frac{10x_2}{3x_1^2 + 5x_2^2}$$

$$D_{11} f(x) = D_1 \frac{6x_1}{3x_1^2 + 5x_2^2} = \frac{-6(3x_1^2 - 5x_2^2)}{(3x_1^2 + 5x_2^2)^2}$$

$$D_{21} f(x) = D_2(D_1 f(x)) = \frac{-60 x_1 x_2}{(3x_1^2 + 5x_2^2)^2} ,$$

$$D_{12} f(x) = D_1(D_2 f(x)) = \frac{-60 x_1 x_2}{(3x_1^2 + 5x_2^2)^2}$$

$$D_{22} f(x) = D_2(D_2 f(x)) = \frac{10(3x_1^2 - 5x_2^2)}{(3x_1^2 + 5x_2^2)^2}$$

تبصره ۵: قضیه ۸ را می‌توان برای مشتقّات مرتبه بالاتر توسعه داد. برای مثال اگر f یک تابع حقیقی تعریف شده بر روی مجموعهٔ باز U و R^n و $c \in U$ باشد. با فرض این که f دارای $k-$ مرتبه مشتق‌پذیری به طور پیوسته در یک همسایگی از c باشد آن‌گاه داریم:

$$D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_r} \dots D_{i_k} f(c) = D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} \dots D_{i_r} f(c)$$

به طوری که $r \leq k$.

در حقیقت در مشتقّات جزیی مرتبه بالاتر ترتیب مشتق‌گیری مهمّ نیست به شرط آن‌که تابع از ردهٔ C^k باشد.

۲.۴. ژاکوبین یک تابع

در پایان بخش ۲ ژاکوبین یک تابع را مورد بررسی قرار داده، برخی از خواصّ آن که برای مطالب این کتاب ممکن است مفید باشد بیان می‌کنیم. تعریف ژاکوبین را در بخش ۱.۲ ارائه داده‌ایم. نمادهای مختلفی برای ژاکوبین به کار می‌برند؛ برای مثال : $J_p(x)$ یا $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$. دقت کنید که چون ژاکوبین به عنوان دترمینان تعریف شده است، بنابراین به نظر می‌رسد که تابع f باید بین دوفضای هم بُعد باشد در صورتی که ژاکوبین تابع $f : R^n \to R^m$ با $n \neq m$ را نیز می‌توان با توضیح زیر تعریف کرد.

فرض کنید $n < m$ (و یا برعکس $m < n$)، آن‌گاه باید مشخص کرد که ژاکوبین f نسبت به چه متغیّرهایی خواسته شده است. برای مثال $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})}$ که $k \leq n$. مثلاً اگر $f : R^2 \to R^3$ توسط ضابطهٔ $f(x, y) = (x^2, 2xy, x + y^2)$ داده شده باشد، آن‌گاه داریم :

$f = (f_1, f_2, f_3)$, $f_1(x, y) = x^2$, $f_2(x, y) = 2xy$,
$f_3(x, y) = x + y^2$

و

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 2x & 2x \\ 2y & 2x \end{bmatrix} = 4x^2$$

و

$$\frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x, y)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} = 4y^2 - 2x$$

و

$$\frac{\partial(f_1, f_3)}{\partial(x, y)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} = 4xy$$

قضیه ۹: فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز در R^n و $g : U \to R^n$ مشتق‌پذیر باشد. به علاوه فرض بر این است که V یک زیرمجموعهٔ باز شامل $g(U)$ در R^n و $f : V \to R^n$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه ژاکوبین fog وجود دارد و در هر نقطه برابر است با :

$$J_{fog}(x) = J_g(x) \,.\, J_f(g(x))$$

اثبات: نظر به این‌که هر دو تابع f و g مشتق‌پذیر هستند، آن‌گاه بنا بر قضیهٔ قاعدهٔ زنجیری fog نیز در V مشتق‌پذیر می‌باشد. بنابراین تعریف ژاکوبین برای تابع fog برقرار است. لذا بنابر تعریف ژاکوبین داریم:

$$
\begin{aligned}
J_{fog}(x) &= \det(D\, fog(x)) \\
&= \det(Df(g(x)).\ Dg(x)) \\
&= (\det Df(g(x)).\ (\det Dg(x)) \\
&= J_f(g(x))\ .\ J_g(x)
\end{aligned}
$$

نتیجهٔ قضیهٔ ۹:

فرض کنید که تابع f تابعی از ردهٔ C^1 و دارای معکوس f^{-1} مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ ۹ این نتیجه به دست می‌آید که:

$$J_{f^{-1}}(y) = \frac{1}{J_f(x)}$$

مثال ۷: فرض کنید $g : R^2 \to R^2$ توسط $(y_1 , y_2) = g(x_1 , x_2) = (x_1^2 - x_1^2 , 2x_1 x_2)$ و $f : R^2 \to R^2$ توسط

$$(u_1 , u_2) = f(y_1 , y_2) = \left(\frac{y_1}{y_1^2+y_2^2} , \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2}\right)$$

تعریف شده باشند. آن‌گاه تابع fog برای تمام $(y_1 , y_2) \neq (0 , 0)$ دارای ژاکوبین است و ژاکوبین آن برابر است با:

$$
\begin{aligned}
J_{fog}(x) &= J_f(g(x))\ .\ J_g(x) \quad , \quad x = (x_1 , x_2) \\
&= \frac{-4}{\|x\|^6} \quad , \quad \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2
\end{aligned}
$$

محاسبهٔ ژاکوبین ساده است؛ (به عنوان تمرین) با توجه به تعریف تابع f و g داریم:

$$fog(x) = \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} , \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)$$

۲.۵. قضیهٔ تابع معکوس

یکی از کاربردهای مهمّ یک تابع از ردهٔ C^1 قضیهٔ تابع معکوس است. در این بخش نخست آن

را توضیح می‌دهیم و اثبات می‌کنیم سپس از کاربردهای آن سخن به میان می‌آوریم. در حقیقت این قضیه شرایطی را به وجود می‌آورد که با آن شرایط می‌توان به وجود معکوس یک تابع به طور موضعی پی برد (کاربرد در آنالیز).

گرچه قضیه را بدون به کاربردن ژاکوبین می‌توان توضیح داد و اثبات کرد، امّا در برخی از کتابها در اثبات و صورت قضیه از ژاکوبین استفاده می‌کنند. لذا ابتدا قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم و سپس به اثبات و توضیح قضیهٔ تابع معکوس می‌پردازیم. برخی دیگر از کتابها مانند Rudin از اصل انقباض برای اثبات قضیه استفاده کرده‌اند. اثبات این قضیه را نیز ارائه خواهم داد.

قضیهٔ تابع معکوس برای هندسه مفید می‌باشد زیرا به طور موضعی وضعیت و خواصّ توپولوژیکی را از یک فضا به فضای دیگر انتقال می‌دهد. این بسیار درکاربرد مهمّ است زیرا می‌توان مسایل را در یک فضای مناسب و آسان برای محاسبه حل کرد و سپس توسط قضیهٔ تابع معکوس در فضای اصلی برگرداند، به شرط این که بین دوفضا بتوان قضیهٔ تابع معکوس به طور موضعی برقرار کرد. برای مثال از این خاصیت بین دوفضای $R^۲$ و $\mathbb{C}$ می‌توان استفاده کرد. یادآور می‌شویم که توابع همدیسی در توابع مختلط چنین نقشی را بازی می‌کنند. همان طوری که می‌دانید محاسبهٔ مشتق در فضای مختلط آسانتر است. مثلاً اگر تابعی در فضای مختلط دارای مشتّق مرتبهٔ اول باشد، آن‌گاه مشتّقات مرتبهٔ بالاتر را نیز دارا می‌باشد. همچنین محاسبهٔ انتگرال از طریق باقی‌مانده که محاسبهٔ انتگرال‌های حقیقی در فضای مختلط است، از همین خاصیت برقراری تابع معکوس (به طور موضعی) بین دوفضای حقیقی و مختلط می‌باشد.

قضیهٔ ۱۰: فرض کنید که U زیرمجموعهٔ بازی در R^n و $f: U \to R^n$ یک تابع از ردهٔ $C^۱$ باشد. همچنین فرض کنید که $x \in U$ و $J_f(x) \neq ۰$، آن‌گاه وجود دارد یک همسایگی N از x به طوری که f بر روی N یک تابع ۱-۱ است.

اثبات: نظر به این که f از ردهٔ $C^۱$ و $J_f(x) \neq ۰$ (بنابر فرض قضیه)، آن‌گاه تمام مشتّقات جزیی تابع f در نقطهٔ x وجود داشته و پیوسته هستند. بنابراین یک همسایگی از x مانند N وجود دارد که به ازای هر n تا نقطه $z(i) \in N$، $i = ۱, ۲, ..., n$ داریم (چرا؟)

$$\det=\begin{bmatrix} D_1 f_1(z^{(1)}) & D_2 f_1(z^{(1)}) & \dots & D_n f_1(z^{(1)}) \\ D_1 f_2(z^{(2)}) & D_2 f_2(z^{(2)}) & \dots & D_n f_2(z^{(2)}) \\ \vdots & & & \\ D_1 f_n(z^{(n)}) & D_2 f_n(z^{(n)}) & \dots & D_n f_n(z^{(n)}) \end{bmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

اکنون دو نقطهٔ مجزا از هم مانند x و y در N انتخاب می‌کنیم و ثابت خواهیم کرد که $f(x) \neq f(y)$ (شرط برقراری ۱-۱ بودن تابع f به روی N). از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌نماییم که $f(x) = f(y)$ باشد. اکنون قضیهٔ مقدار میانگین را برای هر یک از مؤلفه‌های f_i به کار می‌بریم:

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i(z^{(i)})(y - x); \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$
$$= \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(z^{(i)}).(y_j - x_j)$$

بنابر فرض برهان خلف $f_i(y) = f_i(x)$ و در نتیجه تساوی بالا مساوی با صفر خواهد شد. که عبارت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$D_1 f_i(z^{(i)})(y_1 - x_1) + D_2 f_i(z^{(i)})(y_2 - x_2) + \dots + D_n f_i(z^{(i)})(y_n - x_n) = 0$$

این یک دستگاه همگن n معادله خطی برحسب $y_i - x_i$، $i = 1, 2, \dots, n$ می‌باشد. لذا برای $i = 1, 2, \dots, n$ دترمینان (*) را برای ضرایب این دستگاه n معادله خطی خواهیم داشت. از آن‌جا که این دترمینان مخالف با صفر است؛ در نتیجه تنها جواب دستگاه n معادله خطی $y_i - x_i = 0$، $i = 1, 2, \dots, n$ می‌باشد که اثبات قضیه را تکمیل می‌کند، یعنی این که اگر $f(y) = f(x)$ آن‌گاه $x=y$. بنابراین $f(x) \neq f(y)$ نتیجه می‌دهد که $x \neq y$.

۲.۵.۱. اصل انقباض[1]

تعریف: فرض کنید که X یک فضای متریک [فضایی که بتوان بر روی آن یک متر تعریف کرد] با متر یک d باشد و فرض کنید که تابع $F : X \to X$. اگر عددی مثبت مانند $c < 1$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$d(F(x), F(y)) \leq c\,d(x, y), \qquad \forall x, y \in X$$

1. Contraction Principle

آن‌گاه F یک انقباض از X به خودش را تعریف می‌کند. دلیل این نامگذاری معلوم است؛ زیرا تابع F هر دو نقطه را به دونقطه‌ای نسبت می‌دهد که فاصلهٔ بین آنها کمتر از فاصلهٔ بین دو نقطهٔ اوّلیه می‌باشد.

یادآوری: دنبالهٔ $\{x_n\}$ را یک دنبالهٔ کوشی نامند اگر $\forall \varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند N وجود داشته باشد، به طوری که اگر $m > N$ و $n > N$ آن‌گاه $d(x_n , x_m) < \varepsilon$.

قضیهٔ ۱۱: فرض کنید که X یک فضای متریک کامل (هر فضای متریکی را که در آن هر دنبالهٔ کوشی متقارب باشد، فضای متریک کامل نامند) و F یک انقباض از X به خودش باشد. آن‌گاه تابع F تنها یک نقطهٔ ثابت دارد، یعنی این که تنها یک $x \in X$ وجود دارد که $F(x) = x$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم که F یک نقطهٔ ثابت مانند x دارد، آن‌گاه ثابت خواهیم کرد که این نقطه یکتا است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که اگر دو نقطهٔ ثابت وجود داشته باشد، یعنی این که داشته باشیم: $F(x) = x$ و $F(y) = y$ با $x \neq y$، آن‌گاه بنا به تعریف انقباض داریم:

$$d(F(x), F(y)) \leq cd(x, y) , \qquad 0 \leq c < 1 \tag{I}$$

از طرف دیگر چون x و y هر دو نقطه ثابت تابع F هستند، بنابراین داریم:

$$d(F(x), F(y)) = d(x , y) \tag{II}$$

با مقایسهٔ روابط (I) و (II) به این نتیجه می‌رسیم که: $d(x, y) \leq cd(x , y)$ که تناقض است، مگر این که $c = 0$، یعنی این که $d(x, y) = 0$ که نتیجهٔ $x = y$ را می‌دهد.

اکنون به اثبات وجود نقطهٔ ثابت x می‌پردازیم. برای این منظور از روش متوالی استفاده می‌نمایم. نقطه $x_0 \in X$ را انتخاب کرده، دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+1} = F(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

با توجه به این تعریف و این که F یک انقباض است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1} , x_n) &= d(F(x_n), F(x_{n-1})) \\ &\leq c\, d(x_n , (x_{n-1})) \\ &\leq c\, d(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \\ &\leq c(cd(x_{n-1} , x_{n-2})) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le c^{2}d(F(x_{n-2}), F(x_{n-3}))\\
&\le c^{2}(cd(x_{n-2}, x_{n-3}))\\
&\vdots\\
&\le c^{n}d(x_{1}, x_{0})
\end{aligned}
$$

اکنون این نامساوی را برای $n < m$ می‌نویسیم :

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\le \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1})\\
&\le d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \dots + d(x_m, x_{m-1})\\
&\le c^n d(x_1, x_0) + c^{n+1} d(x_1, x_0) + \dots + c^{k+n} d(x_1, x_0)\\
&\le [d(x_1, x_0)](c^n + c^{n+1} + \dots + c^{k+n}), \quad n + k = m\\
&\le [d(x_1, x_0)](1 - c)^{-1} . c^n
\end{aligned}
$$

داخل پرانتز یک سری هندسی با قدر نسبت c که از ۱ کمتر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$d(x_n, x_m) \le \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$$

این رابطه نتیجه می‌دهد که دنبالهٔ $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی چون فضای X متریک کامل است پس متقارب می‌باشد. از طرف دیگر F یک انقباض است، بنابراین به سادگی می‌توان اثبات کرد که پیوسته است. در نتیجه دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد خواهد بود که به x نمایش می‌دهیم و $x \in X$ لذا داریم:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

و از پیوستگی F نتیجه می‌شود که :

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

۲.۵.۲. کاربرد قضیهٔ انقباض

علاوه بر این که قضیهٔ انقباض در اثبات قضیهٔ تابع معکوس به کار می‌آید، در جاهای دیگر نیز کاربرد دارد؛ برای مثال در معادلهٔ انتگرال هم استفاده می‌شود. در بسیاری از مسایل فیزیکی و مهندسی، معادلات انتگرالی ظاهر می‌شوند. این معادلات، شکل کلّی زیر را دارا می‌باشند :

$$f(x) = a + \int_0^x k(x,y) f(y)\, dy \qquad (*)$$

جایی که $a = f(0)$ و تابع پیوسته $k(x, y) = k$ داده خواهد شد. معادله $(*)$ را تحت شرایط

خاص مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید که :

$$\sup_{x \in [\circ, r]} \int_\circ^x |k(x, y)| dy = c < 1$$

آن‌گاه معادلهٔ (*) دارای یک جواب یکتا بر روی بازهٔ $[\circ, r]$ دارد. در حقیقت اگر تابع $T(f)$ را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$T(f)(x) = a + \int_\circ^x k(x, y) f(y) dy$$

آن‌گاه معادلهٔ (*) یک جواب یکتا دارد که نقطه ثابت تابع T است و برعکس؛ برای اثبات این مطلب از قضیهٔ انقباض استفاده می‌نمایم. برای این منظور ثابت می‌کنیم که T یک انقباض است، یعنی این که :

$$\| T(f) - T(g) \| \leq c \| f - g \|$$

اثبات : با استفاده از تعریف نرم یک تابع خطی داریم :

$$\begin{aligned}
\| T(f) - T(g) \| &= \sup_{x \in [\circ, r]} | T(f)(x) - T(g)(x) | \\
&= \sup_{x \in [\circ, r]} \left| \int_\circ^x k(x, y) [f(y) - g(y)] dy \right| \\
&\leq \sup_{x \in [\circ, r]} \int_\circ^x |k(x, y)| \, \| f - g \| \, dy \\
&\leq c \| f - g \|
\end{aligned}$$

بنابراین T یک انقباض است. دقت کنید که در نامساوی بالا از این خاصیت استفاده شده است که $|f(y) - g(y)| \leq \| f - g \|$ زیرا با توجه به تعریف نرم یک تابع بر روی یک بازه می‌توان این نتیجه را به دست آورد. توجه کنید که در برخی کتابها در تعریف نرم $r = 1$ انتخاب می‌کنند. همچنین توابع f و g توابعی کراندار هستند. این مطلب در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال مهم می‌باشد.

مثال ۱۱ : فرض کنید که X یک فضای متریک کامل باشد، مثلاً $X = R$ اگر فاصلهٔ بین دو نقطه از فضای X را به صورت $d(x, y) = |x - y|$ و تابع $T : R \to R$ با ضابطهٔ $T(x) = x + 1$ تعریف

می‌کنیم، آن‌گاه واضح است که :

$$|T(x) - T(y)| = |x - y| \leq d(x, y)$$

و تابع دارای هیچ نقطه ثابت نمی‌باشد. این مثال نشان می‌دهد که برای برقراری قضیهٔ انقباض لازم است $c < ۱$ باشد و با $c = ۱$ نمی‌توان قضیه را برقرار کرد. در نتیجه در **تعریف انقباض یک تابع لازم است که $c < ۱$ باشد.**

مثال ۱۲ : روش متوالی در اثبات قضیهٔ انقباض را برای معادلهٔ انتگرالی

$$f(x) = ۱ + \int_{\circ}^{x} f(y)dy$$

به‌کار برید در حالی‌که در آن $x_{\circ} = \circ$ انتخاب نمایید.

حل :

$$x_۱ = f(\circ) = ۱$$

$$x_۲ = f(x_۱) = f(۱) = ۱ + \int_{\circ}^{x} dy = ۱ + x$$

$$x_۳ = f(x_۲) = ۱ + \int_{\circ}^{x} (۱ + y)dy = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲}$$

$$x_۴ = f(x_۳) = ۱ + \int_{\circ}^{x} \left[۱ + y + \frac{y^۲}{۲} \right] dy = ۱ + x + \frac{۱}{۲} x^۲ + \frac{۱}{۶} x^۳$$

$$\vdots$$

$$x_n = f(x_{n-۱}) = ۱ + \int_{\circ}^{x} \left[۱ + y + \frac{۱}{۲} y^۲ + \dots + \frac{۱}{(n-۱)!} y^{n-۱} \right] dy$$

$$= ۱ + x + \frac{۱}{۲!} x^۲ + \dots + \frac{۱}{n!} x^n .$$

بنابراین، این روش منجر به جواب e^x می‌شود که در حقیقت جواب معادلهٔ دیفرانسیل $x' = x$ با شرایط اولیه $x_{\circ} = x(\circ) = \circ$ می‌باشد. در معادلهٔ دیفرانسیل این روش، **به روش متوالی پیکارد معروف است.**

مثال ۱۳ : فرض کنید $k(x, y) = xe^{-xy}$. آیا می‌توان بر روی بازهٔ $[\circ, r]$ با استفاده از کاربرد قضیهٔ انقباض جوابی برای معادلهٔ $(*)$ به دست آورد یا نه؟

حل: ابتدا سعی می‌کنیم c را به دست آوریم:

$$c = \sup_{x \in [\circ, r]} \int_{\circ}^{x} x e^{-xy}\, dy$$

$$= \sup_{x \in [\circ, r]} (\text{۱} - e^{-xy}) = \text{۱} - e^{-ry}$$

حال با توجه به این‌که $e^{-ry} = e^{-rx^{\text{۲}}}$ هرگاه $y = x^{\text{۲}}$ آن‌گاه $\text{۱} \leq e^{-rx^{\text{۲}}}$ و در نتیجه $\circ < c < \text{۱}$ به دست می‌آید. بنابراین می‌توان قضیهٔ انقباض ا برای معادلهٔ (*) به کار برد. لذا این معادله دارای یک جواب یکتا در بازهٔ $[\circ\,,\, r]$ می‌باشد.

۲.۵.۳. توضیح و اثبات قضیهٔ تابع معکوس

جبر خطی این اطلاعات را به ما می‌دهد که یک دستگاه n معادلهٔ خطی

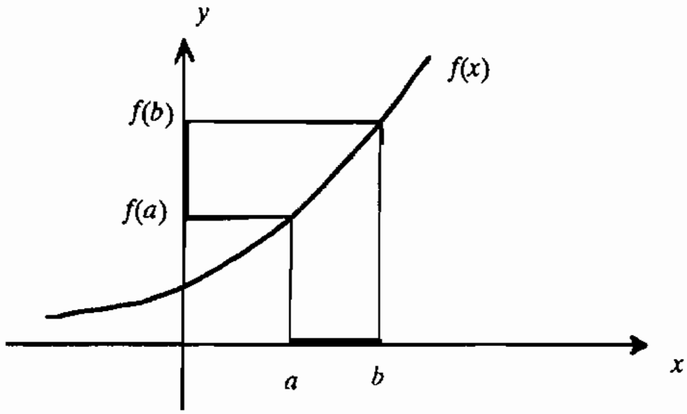
$$a_{\text{۱۱}} x_{\text{۱}} + a_{\text{۱۲}} x_{\text{۲}} + \dots + a_{\text{۱}n} x_n = y_{\text{۱}}$$

$$\vdots$$

$$a_{n\text{۱}} x_{\text{۱}} + a_{n\text{۲}} x_{\text{۲}} + \dots + a_{nn} x_n = y_n$$

در صورتی قابل حل برای $x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}}, \dots, x_n$ است که ماتریس $A = (a_{ij})$ یک ماتریس عادی (ناتکین) باشد، یعنی این‌که $\det A \neq \circ$ (دترمینان A). حال اگر به جای معادلات خطی، تابع $f_i(x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}}, \dots, x_n) = y_i$ قرار گیرد. چه می‌توانیم بگوییم. در حقیقت به جستجوی جوابی برای دستگاه معادلات $f_i(x_{\text{۱}}, \dots, x_n) = y_i$، $i = \text{۱}, \text{۲}, \dots, n$ می‌باشیم. فرض کنید که $f = (f_{\text{۱}}, \dots, f_n)$ و مشتق این تابع یعنی $Df(x)$ مفروض باشد. اکنون انتظار می‌رود که به جای شرط $\det A \neq \circ$ در دستگاه‌های خطی از ژاکوبین تابع f در حلّ معادلهٔ $f_i(x) = y_i$، $x = (x_{\text{۱}}, \dots, x_n)$ استفاده نماییم. در حقیقت ممکن است معادلهٔ $f(x) = y$ با $y = (y_{\text{۱}}, \dots, y_n)$ را با شرط $J_f(x) \neq \circ$ حل کنیم. این مطلب را در کاربرد قضیهٔ تابع معکوس توضیح خواهیم داد که منجر به جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خواهد شد.

فرض کنید که $J_f(x) \neq \circ$، آن‌گاه $Df(x) : R^n \to R^n$ یک تابع خطی ایزومرفیسم (یعنی ماتریس $Df(x)$ معکوس‌پذیر است) خواهد بود. لذا می‌توان نتیجه گرفت که خود تابع معکوس‌پذیر (قضیه تابع معکوس) است. برای مثال فرض کنید که $f : R \to R$ از ردهٔ $C^{\text{۱}}$ و $f'(x_{\circ}) \neq \circ$، آن‌گاه f یک به یک و معکوس‌پذیر در یک همسایگی از $x_{\circ}$ می‌باشد (به شکل زیر مراجعه کنید).



بنابراین هدف اصلی معکوس‌پذیری موضعی و محاسبهٔ مشتق معکوس تابع f، یعنی مشتق $f^{-1}(y)$ می‌باشد. اگر $f'(x) = 0$ آن‌گاه f ممکن است معکوس‌پذیر یا نامعکوس‌پذیر باشد. مثلاً تابع $f(x) = x^3$ نزدیک نقطهٔ $x_0 = 0$ معکوس‌پذیر است. در حالت کلّی $f'(x_0) \neq 0$ تضمین کنندهٔ حلّ معادله $y = f(x)$ برای تمام yها نمی‌باشد. امّا ممکن است اگر محدودیت در نظر بگیریم، یعنی این که در یک همسایگی از x_0، آن‌گاه شاید معادلهٔ نزدیک نقطه x_0 قابل حل باشد. مسأله این است که چقدر نزدیک x_0 موردنظر است؟ جواب این مسأله در قضیهٔ تابع معکوس نهاده شده است.

قضیهٔ تابع معکوس

فرض کنید که $A \subset R^n$ یک مجموعهٔ باز و $f : A \to R^n$ تابعی از ردهٔ C^1 باشد. به علاوه فرض کنید که $x_0 \in A$ و $J_f(x_0) \neq 0$ (یا این که مشتقّ تابع f در x_0 مخالف با صفر و مشتقّ تابع در x_0 معکوس‌پذیر است).

آن‌گاه وجود دارد یک همسایگی از x_0 مانند U در A و یک مجموعهٔ باز مانند W از $f(x_0)$ به طوری که $W = f(U)$ و f دارای معکوس $f^{-1} : W \to U$ از ردهٔ C^1 می‌باشد. همچنین برای $y \in W$ با $x = f^{-1}(y)$ داریم:

$$Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$$

یک نتیجهٔ فوری از این قضیه به دست آمد؛ اگر تابع f از ردهٔ C^r، $r \geq 1$ آن‌گاه f^{-1} نیز C^1 است. اگر $f : A \to R^n$ یک تابع از ردهٔ C^1 و $Df(x_0)$ یک به یک باشد، آن‌گاه به طور موضعی f نزدیک x_0 یک تابع ۱-۱ است. متشابهاً اگر $Df(x_0)$ یک تابع برو در یک همسایگی از x_0 باشد، آن‌گاه f نیز یک تابع برو در یک همسایگی از x_0 است.

اثبات قضیهٔ تابع معکوس[1]

اثبات این قضیه خیلی ساده و قابل فهم خواهد شد اگر ابتدا زیرقضیهٔ زیر را اثبات کنیم.

زیرقضیه : فرض کنید که A یک مجموعهٔ باز در R^n باشد که شامل $o \in R^n$ است. به علاوه فرض بر این است که $f : A \to R^n$ یک تابع مشتق‌پذیر در A و $f(\circ) = \circ$ ، $Df(\circ) = I$ (I ماتریس $n \times n$ همانی است). همچنین Df در $\circ$ پیوسته می‌باشد. آن‌گاه یک همسایگی از $\circ$ مانند U وجود دارد به طوری که داریم :

الف : به ازای هر تمام $x, y \in U$ ، $|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2} |x - y|$ ؛

ب ـ $f(U)$ شامل یک همسایگی از $\circ$ مانند V است؛

ج ـ یک تابع مانند $g : V \to U$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $t \in V$ ، $f(g(t)) = t$ و g در $\circ$ مشتق‌پذیر با مشتق $Dg(\circ)$ می‌باشد.

اثبات : از فرض پیوستگی استفاده می‌کنیم و می‌دانیم که وجود دارد: $\delta > \circ$ به طوری که :

$$\| I - Df(z) \| = \| Df(\circ) - Df(z) \| < \frac{1}{2}$$

به ازای هر $|z| \leq \delta$ ، مجموعهٔ باز U را به فرم $U = \{z : |z| < \delta\}$ تعریف می‌کنیم. تابع F را به صورت $F(z) = z - f(z)$ برای تمام $z \in U$ می‌سازیم. آن‌گاه داریم $DF = I - Df$. در نتیجه $\| DF \| < \frac{1}{2}$. اکنون مشاهده می‌کنیم که به ازای تمام $x, y \in U$ و بنابر تعریف تابع F و همچنین نتیجهٔ قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵ بخش ۲.۱.۵)، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq M|x - y| \quad , \quad M = \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

اکنون $f(x) - f(y)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |F(x) - x - (F(y) - y)| \\ &= |F(x) - F(y) - (x - y)| \end{aligned}$$

---

1. Inverse Function Theorem

$$\geq -|F(x) - F(y)| + |x - y|$$
$$\geq -\frac{1}{2} |x - y| + |x - y|$$
$$\geq \frac{1}{2} |x - y|$$

در این جا قسمت الف اثبات شده است.

اثبات قسمت ب: $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $2\varepsilon < \delta$. مجموعه‌های V و K به صورت زیر می‌سازیم:

$$V = \{t : |t| < \varepsilon\} \quad , \quad K = \{z : |z| \leq 2\varepsilon\}$$

اکنون تابع T را به صورت $T(z) = t + z - f(z)$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $DT = I - DF$ و در نتیجه $\| DT(z) \| < \frac{1}{2}$ به ازای تمام $z \in U$. دو مرتبه از نتیجهٔ قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵ فصل دوم) استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$|T(x) - T(y)| < \frac{1}{2} |x - y| \quad , \quad \forall x, y \in U \qquad (*)$$

در حالت خاص اگر $z \in K$ انتخاب کنیم، آن‌گاه $|T(z) - T(0)| \leq \frac{1}{2} |z|$. بنابراین T یک انقباض را بر روی U تعریف می‌کند و بنابر قضیهٔ انقباض، T بر روی K دارای یک نقطهٔ ثابت یکتا است. این نقطهٔ ثابت را z می‌نامیم، در نتیجه $T(z) = z$. در این حالت با توجه به تعریف T مشاهده می‌کنیم که $f(z) = t$. حال چون z یکتا است، لذا تابع f بر روی U یک به یک خواهد بود. دقت کنید که T یک انقباض را بر روی K نیز تعریف می‌کند، زیرا با توجه به تعریف T و نامساوی به دست آمده $|T(z) - T(0)| \leq \frac{1}{2} |z|$ داریم:

$$T(0) = t + 0 - f(0) = t,$$
$$|T(z) - T(0)| = |T(z) - t| \leq \frac{1}{2} |z|,$$

و از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$|T(z) - t| \geq |T(z)| - |t|$$

از این دو نامساوی نتیجه می‌شود که:

$$|T(z)| - |t| \leq \frac{1}{2} |z|$$
$$\Rightarrow$$
$$|T(z)| \leq \frac{1}{2} |z| + |t|$$

از آن‌جاکه $|t| < \varepsilon$ ، $|z| \leq ۲\varepsilon$ ، آن‌گاه نامساوی بالا به صورت $|T(z)| \leq ۲\varepsilon$ در می‌آید که نشانگر این مطلب است: T مجموعهٔ K را به خودش نقش می‌دهد و با توجه به نامساوی $(*)$، T یک انقباض بر روی K می‌باشد. بنابراین $V \subseteq f(U)$ زیرا هر عضو از V نقشی از یک عضو از U می‌باشد.

اثبات قسمت ج: برای هر عضو $t \in V$ قرارمی‌دهیم $g(t) = z$ که $z \in U$ به‌طوری‌که $f(z)=t$؛ این نقطه با توجه به قسمت ب وجود دارد و یکتا نیز می‌باشد. بنابراین:

$$|g(t_۱) - g(t_۲)| = |z_۱ - z_۲| \leq ۲|f(z_۱) - f(z_۲)|$$
$$\leq ۲|t_۱ - t_۲|$$

این نامساوی نشان می‌دهد که g بر روی V پیوسته است. اکنون قرار می‌دهیم: $f(h) = h + r(h)$ ، بطوریکه $\frac{r(h)}{|h|} \to ۰$ همچنان که $h \to ۰$. بنابراین از نامساوی بالا خواهیم داشت:

$$|g(h) - h| = |g(f(h)) - r(h) - g(f(h))|$$
$$\leq ۲|(f(h) - r(h) - f(h))|$$
$$\leq ۲|r(h)|$$

و از این جا نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{|g(h) - h|}{|h|} \leq ۲\frac{|r(h)|}{|h|}$$

از این نامساوی مشتق‌پذیری تابع g را در نقطهٔ ۰ با $Dg(۰) = I$ نتیجه می‌گیریم و اثبات قسمت ب به اتمام می‌رسد.

اکنون به اثبات قضیهٔ تابع معکوس می‌پردازیم.

اثبات قضیهٔ تابع معکوس

برای اثبات قضیهٔ تابع معکوس از زیرقضیهٔ بالا استفاده می‌کنیم:

ابتدا یک تغییر مستوی در متغیّرها می‌دهیم. با فرض این که $q = f(p)$ توابع $\phi, \psi: R^n \to R^n$ توسط ضوابط $\psi(y) = Df^{-۱}(p)(y - q), \phi(x) = x - p$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $\psi(q) = \phi(p) = ۰$ و $\phi'(p) = I$ و $\psi'(q) = (f'(p))^{-۱}$. اکنون تابع F را بر روی مجموعهٔ باز

$\phi(A)$ توسط ضابطهٔ $F = \psi o f o \phi^{-1}$ تعریف می‌نماییم. بنابراین $F(0) = 0$ و $F'(0) = I$ و F' در 0 پیوسته است. اکنون زیرقضیه را برای F به‌کار می‌بریم. در نتیجه همسایگیهای باز U_0 و V_0 و یک تابع $G : V_0 \to U_0$ وجود دارد به طوری که $FoG = I_{V_0}$ و G در 0 مشتق‌پذیر است. حال قرار می‌دهیم:

$$U = \phi^{-1} o F^{-1}(V_0) = f^{-1}(V) \quad , \quad V = \psi^{-1}(V_0)$$

آن‌گاه U و V همسایگیهای باز به ترتیب از نقاط p و q هستند. تابع $g = \phi^{-1} o G o \psi$ را تعریف می‌کنیم، بنابراین g در q مشتق‌پذیر است و $g(V) = U$ به علاوه داریم:

$$fog = (\psi^{-1} o F o \phi)(\phi^{-1} o G o \psi) = I_V$$

این بحث برای هر نقطه از $u \in U$ برقرار است، لذا g به ازای تمام $y \in U$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در نتیجه با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، اگر قرار دهیم: $y = f(x)$، آن‌گاه $f'(x).g'(y) = I$ و بنابراین $g' = (f')^{-1}$. نظر به این که بنابر فرض، اعضای ماتریس $(f')^{-1}$ توابعی از ردهٔ C^1 (یا C^r، $r \geq 1$) هستند، در نتیجه g' از ردهٔ C^1 (یا ردهٔ C^r، $r \geq 1$) می‌باشد. در اینجا باید دقت شود که مرتبهٔ مشتق‌پذیری تابع g به مرتبهٔ مشتق‌پذیری تابع f بستگی دارد. در حقیقت اگر تابع f از ردهٔ C^r، $r \geq 1$ آن‌گاه تابع g نیز از همین رده است. این اثبات را می‌توان در نمودار زیر نشان داد که ممکن است اثبات قضیه را در ذهن دانشجویان آسانتر کند.

$$\begin{tikzcd}
p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & q \in V \arrow[d, "\psi"] \\
0 \in U_0 \arrow[r, "F"'] & 0 \in V_0
\end{tikzcd}$$

مثال ۱۴: تابع $f : R^2 \to R^2$ با ضابطهٔ

$$f(x , y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x} \ ، \ \sin x + \cos y\right) = (u , v)$$

مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نزدیکی چه نقاطی می‌توانیم x و y را برحسب u و v محاسبه کنیم؟

حل :

در این جا $f = (f_1 , f_2)$ و $f_1(x, y) = u$ و $f_2(x, y) = v$.

در حقیقت به جستجوی یک مجموعه‌ای در R^2 می‌باشیم که تابع f بر روی آن معکوس‌پذیر و ۱-۱ باشد. برای این منظور از قضیهٔ تابع معکوس استفاده می‌کنیم. لذا ابتدا مشخص می‌نماییم که f بر روی چه مجموعه‌ای از ردهٔ C^1 است. به واسطهٔ نوع تابع بلافاصله به نظر می‌رسد که $x \neq 0$. در هر حال ژاکوبین تابع f را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{\partial (f_1,f_2)}{\partial (x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3x^4-y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $J_f(x , y)$ به ازای $x \neq 0$، $(\sin y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$ مخالف با صفر می‌باشد. لذا باید به دنبال نقاطی باشیم که در شرایط بالا صدق کند.

در حالت کلی پیدا کردن چنین نقاطی به طور واضح ساده نیست (ممکن است امکان‌پذیر نباشد). تنها می‌توان با استفاده از قضیهٔ تابع معکوس مطمئن بود که این معادله جواب دارد. با توجه به این قضیه می‌توانیم مشتق تابع معکوس را محاسبه کنیم مثلاً $\frac{\partial x}{\partial u}$ ، $\frac{\partial x}{\partial v}$ و... در حقیقت بنا به قضیهٔ تابع معکوس داریم :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J_f(x, y)}\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-1}{J_f(x, y)}\frac{\partial u}{\partial y} ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-1}{J_f(x, y)}\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-1}{J_f(x, y)}\frac{\partial u}{\partial y}$$

این محاسبه از $g' = (f')^{-1}$ به دست آمده است. چون ماتریس در این مثال یک ماتریس ۲×۲ می‌باشد. لذا محاسبات منجر به فرمول $\frac{\partial x}{\partial u}$ و $\frac{\partial y}{\partial u}$ و... را به خوانندگان محترم واگذار می‌کنم. اکنون با استفاده از ژاکوبین تابع f می‌توان مشتق معکوس تابع f را محاسبه کرد.

مثال ۱۵ : فرض کنید که $u(x, y) = e^x \cos y$ و $v(x, y) = e^x \sin y$ نشان دهید که تابع $(x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$ به طور موضعی معکوس‌پذیر است امّا به طور عام معکوس‌پذیر

نمی‌باشد.

حل : ژاکوبین تابع را محاسبه می‌کنیم :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix}$$

$$= e^{2x} \neq 0$$

بنابراین، این تابع به ازای جمیع مقادیر (x, y) به طور موضعی معکوس‌پذیر است نه به طور عام زیرا برای مثال، اگر $x = 0$، آن‌گاه متغیّر y باید بین دو بازهٔ $2\pi > y \leq 0$ یا $0 < y \leq 2\pi$ صدق کند تا این که تابع ۱-۱ باشد. بنابراین، تابع نمی‌تواند به طور عام معکوس‌پذیر باشد. در حالت کلی داریم :

$$u(x, y + 2\pi) = u(x, y) \qquad v(x, y + 2\pi) = v(x, y)$$

بنابراین، تابع بر روی تمام R^2 یک تابع یک به یک نیست. مشاهده می‌شود با وجود این که **ژاکوبین تابع به ازای جمیع مقادیر مخالف با صفر است امّا تابع به طور عام معکوس‌پذیر نمی‌باشد.**

تبصره ۶: دقت کنید که برای تابع $f : R \to R$ از ردهٔ C^1 اگر $f'(x) \neq 0$ در نتیجه یا $f'(x) > 0$ و یا این که $f'(x) < 0$. بنابراین تابع f باید یک تابع ۱-۱ باشد. زیرا یا تابع صعودی و یا نزولی خواهد بود. امّا در مثال بالا دیدیم که این مطلب برای فضای R^2 صادق نبود.

مثال ۱۶ : تابع $f : R^2 \to R^2$ را با ضابطه $f = (f_1, f_2)$ و

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$$

در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توانیم ژاکوبین این تابع را محاسبه کنیم و مشاهده می‌کنیم که $J_f(x) = 4|x|^2$ در نتیجه $J_f \neq 0$ به ازای تمام $x \neq 0$. بنابراین بنا بر قضیهٔ تابع معکوس تابع f بر روی هر همسایگی از $x \neq 0$ یک تابع ۱-۱ و معکوس‌پذیر است. از y_1 و y_2 روابط زیر به دست می‌آیند :

$$y_1^2 = x_1^4 - 2x_1^2 x_2^2 \quad , \quad y_2^2 = 4x_1^2 x_2^2$$

و

$$y_1^2 + y_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

در نتیجه $x_1^2 + x_2^2 = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$ و $x_1^2 - x_2^2 = y_1$ از این دو رابطه داریم :

$$x_1^2 = \frac{1}{2}[y_1 + (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}]$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = g_1(y_1, y_2) = \pm\Big[\frac{1}{2}[y_1 + (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}]\Big]^{1/2}$$

$$x_2 = g_2(y_1, y_2) = \pm\Big[\frac{1}{2}[-y_1 + (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}]\Big]^{1/2}$$

با توجه به این که در کدام ناحیه چهارگانه مختصات در فضای R^2، نقاط (x_1, x_2) یا (y_1, y_2) را انتخاب نماییم، قضیه تابع معکوس برقرار می‌شود.

۲.۵.۴. کاربرد قضیهٔ تابع معکوس

قضیهٔ تابع معکوس یکی از قضایای بسیار مهم است که کاربردهای زیادی دارد. یکی از نتایج جالب این قضیه این است که هرگاه تابعی در شرایط قضیهٔ تابع معکوس صدق کند، آن‌گاه یک دیفیومرفیسم بین دو فضا به وجود می‌آورد که در زیر، آن را تعریف می‌کنیم.

۲.۵.۵. تعریف دیفیومرفیسم

فرض کنید E و F دو فضا (مثلاً باناخ) باشند و $U \subset E$ باز باشد. تابع $f : U \to F$ را یک تابع دیفیومرفیسم نامند، اگر تابع ۱-۱ و برو و دارای عکس و خود تابع و معکوسش از ردهٔ C^r و $r \geq 1$ باشند. در حقیقت دیفیومرفیسم همان هومرفیسم از رده C^r است. با توجه به این تعریف مشاهده می‌کنیم که شرایط دیفیومرفیسم یک تابع، همان شرایط قضیهٔ تابع معکوس می‌باشد. امّا ممکن است قضیهٔ تابع معکوس دیفیومرفیسم موضعی باشد نه به طور عام. در ابتدای این بخش از اهمیت دیفیومرفیسم بین دو فضا صحبت کردیم و در آن‌جا توضیح دادیم که برقراری یک دیفیومرفیسم بین دو فضا می‌تواند خواصّ توپولوژیکی را از یک فضا به دیگری انتقال دهد. برای مثال توسط یک دیفیومرفیسم هر شکل در یک فضا به همان شکل در فضای دیگر نقش داده می‌شود. البته یک دیفیومرفیسم خواصّ بیشتری دارد که از ذکر آن در این جا خودداری می‌شود.

اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که چگونه می‌توان تشخیص داد یک تابع، دیفیومرفیسم است. یکی از روشها، استفاده از تعریف است که ممکن است محاسبه مشکل باشد، به خصوص در فضای غیر R^n. روش دیگر، استفاده از ژاکوبین یک تابع می‌باشد. در این روش باید دقت شود که اولاً دو فضای همان R^n باشند تا ما قادر به محاسبهٔ ژاکوبین با استفاده از ماتریس ژاکوبین باشیم. حال فرض کنیم که در فضای R^n باشیم. آن‌گاه اگر ژاکوبین تابع در یک نقطه‌ای مخالف صفر باشد. آن‌گاه قضیهٔ تابع معکوس در یک همسایگی از آن نقطه برقرار است و یا این که بر روی این همسایگی می‌توان یک دیفیومرفیسم برقرار کرد. در فضای غیراقلیدسی، محاسبهٔ ژاکوبین یک تابع و همچنین تعریف مشتق‌پذیری مانند فضای اقلیدسی نیست. در این جا این مطلب و استفاده از قضیهٔ تابع معکوس را توضیح می‌دهیم. از جمله فضاهای غیراقلیدسی که بسیار مورد استفادهٔ مسایل فیزیکی می‌باشد، می‌توان به فضای منیفله اشاره کرد. منیفله فضای است که به طور موضعی شبیه فضای R^n می‌باشد. در حقیقت منیفله یک فضای توپولوژیکی است. برای هر نقطهٔ این فضا یک همسایگی وجود دارد که می‌توان بر روی آن یک دیفیومرفیسم (تابع پیوسته ۱-۱ و برو و دارای معکوس پیوسته) را به یک همسایگی باز در R^n تعریف کرد (در این جا n بعد فضای منیفله می‌باشد). در محاسبات مسایل فیزیکی نیاز به استفاده از مشتق برای تعریف سرعت و شتاب است. لذا از منیفله مشتق‌پذیر استفاده می‌کنیم. این منیفله همان منیفله تعریف شده در بالا است که به جای هومومرفیسم از دیفیومرفیسم استفاده می‌شود و یا به عبارت دیگر برقراری قضیه تابع معکوس بین منیفله و R^n می‌باشد. در قضیهٔ تابع معکوس، مشتقّ تابع به‌طور موضعی یک ایزومرفیسم است. از قضیهٔ تابع معکوس بر روی منیفله‌ها چنین استفاده می‌کنیم: چون مشتقّ تابع، ایزومرفیسم است، در نتیجه می‌توانیم یک مختصات موضعی را طوری انتخاب کنیم که تابع f به طور موضعی ۱-۱ باشد. کاربرد دیگر قضیهٔ تابع معکوس، برقراری رابطهٔ هم‌ارزی بین دو تابع است. دو تابع $f:E_1 \to F_1$ و $g : E_2 \to F_2$ هم‌ارز هستند، اگر بین آنها یک دیفیومرفیسم برقرار شود، در حقیقت وجود داشته باشد: دیفیومرفیسم‌های α و β به طوری که نمودار زیر برقرار باشد:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f"] & F_1 \\
E_2 \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g"'] & F_2 \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

این مطلب بدین معنا است که تابع f و g به طور دیفیومرفیسمی با هم برابرند. البته قضیهٔ تابع معکوس را می‌توان برای فضاهای با بعد نامساوی نیز برقرار کرد. این موضوع در حقیقت تعریف فروبری (ایمرشن) می‌باشد (به کتابهای مبعث هندسه منیفله مراجعه شود مانند Boothby).

نوع دیگر قضیهٔ تابع معکوس بیان این مطلب است که تابع f صادق در قضیهٔ تابع معکوس با تابع همانی هم‌ارز است. در این جا مختصری راجع به تعریف مشتق‌پذیری تابع f بین دوفضای غیراقلیدسی توضیح می‌دهم. فرض کنید که بین فضاهای غیراقلیدسی یک رابطهٔ دیفیومرفیسمی (یا قضیهٔ تابع معکوس) با فضای اقلیدسی برقرار باشد؛ آن‌گاه می‌توان مشتق‌پذیری تابع را در فضای اقلیدسی تعریف کرد. و سپس به فضای اصلی بر گردانید. این مطلب را در هندسه منیفلد بیشتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بنابراین برای محاسبهٔ ژاکوبین یک تابع بین دو فضای غیراقلیدسی ابتدا باید بررسی کرد که آیا می‌توان قضیهٔ تابع معکوس را بین فضاها و فضاهای اقلیدسی برقرار کرد یا نه؟ در صورت مثبت بودن جواب، آن‌گاه ژاکوبین را می‌توانیم محاسبه کنیم (در فضای اقلیدسی محاسبه کرده، نتایج آن را برای فضاهای اصلی انتقال دهیم).

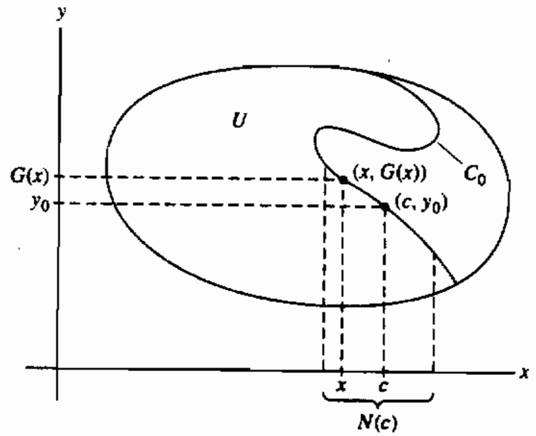
مثال ۱۸ : در پایان، یک مثال کاربردی فیزیکی از کاربرد قضیهٔ تابع معکوس ارائه می‌دهم. فرض کنید که حرکت یک جسم توسّط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مشخص شده باشد. هدف، بررسی رفتار حرکت این جسم است. اگر بتوانیم این دستگاه را مستقیم‌سازی کنیم، یعنی این که اگر یک دیفیومرفیسم بین این دستگاه و دستگاه خطی برقرار باشد، آن‌گاه چون محاسبات در دستگاه خطی آسانتر است، بنابراین کافی است که رفتار جسم را در دستگاه خطی بررسی کنیم و نتیجهٔ حاصل را به دستگاه اصلی با استفاده از همان دیفیومرفیسم انتقال دهیم. در دستگاه معادلات دیفرانسیل حول هر نقطهٔ عادی (نقطهٔ غیرسکون، از نقطه نظر فیزیک) می‌توان یک همسایگی به وجود آورد که در آن همسایگی، دستگاه معادلات مستقیم‌سازی خواهد شد. در حقیقت می‌توان از قضیهٔ تابع معکوس در آن همسایگی استفاده کرد.

۲.٦. قضیهٔ تابع ضمنی[1]

اجازه دهید قبل از این که به توضیح قضیهٔ تابع ضمنی و اثبات آن بپردازیم یک مسأله را مورد بررسی قرار دهیم. مسأله را در فضای R^2 مطرح می‌کنیم تا از نظر فهم مطلب آسانتر باشد. فرض کنید

1. Impticit Function Theorem

که تابع F یک تابع از ردهٔ C^1 بر روی یک زیرمجموعه باز $U \subset R^2$ و $(x, y) \in U$ تعریف شده باشد. به علاوه فرض کنید که $(c, y_0) \in U$ طوری انتخاب شود که $F(c, y_0) = 0$. (دقت کنید که می‌توان $F(x, y_0) = a$ جایی که $a \neq 0$، در این صورت مسأله را برای $F - a$ بررسی خواهیم کرد). مجموعهٔ $U_0 = \{(x, y) \in U : F(x, y) = 0\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه منحنی تراز[1] تابع F متناظر با مقدار $a = 0$ نامیده می‌شود. با توجه به انتخاب (x, y_0) بدیهی است که $(c, y_0) \in U_0$.



مسأله چنین مطرح می‌شود که: آیا می‌تواند همسایگی هرچند کوچک برای x مانند N وجود داشته باشد به طوری که بتوان تابعی مانند G بر روی N با خاصیت $G(c) = y_0$ و $F(x, G(x)) = 0$ ساخت؟ اگر جواب مثبت باشد، آن‌گاه گوییم $y = G(x)$ به طور ضمنی توسط معادلهٔ $F(x, y) = 0$ تعریف شده است. اگر موّفق به حلّ معادلهٔ $F(x, y) = 0$ از راه جبری برای به دست آوردن $y = G(x)$ بشویم، آنگاه قادر خواهیم بود که تابع G را به طور واضح به دست آوریم. در هر حال مسأله این است که به جستجوی وجود تابع G هستیم حتّی اگر نتوانیم به طور واضح آن را محاسبه کنیم. این مطلب را در قضیهٔ تابع ضمنی مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

در حقیقت در قضیهٔ تابع ضمنی بحث در این است که اگر مشتق تابع F نسبت به y (یا x) در یک نقطه‌ای مانند (c, y_0) (یا (x_0, d)) مخالف با صفر باشد، یعنی این که $D_y F(c, y_0) \neq 0$ (یا

---

1. Level Curves

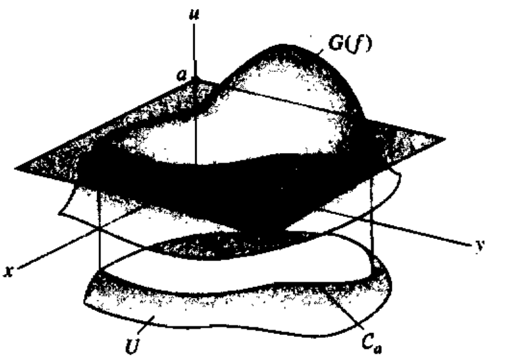
$D_x F(x_\circ , d) \neq \circ$). آن‌گاه تابع G به طور ضمنی بر روی یک همسایگی مانند N وجود خواهد داشت. به علاوه تابع G بر روی N از ردهٔ C^1 می‌باشد، این بحث را می‌توان بر روی یک تابع از R^{m+n} به R^m توسعه داد (قضیهٔ تابع ضمنی).

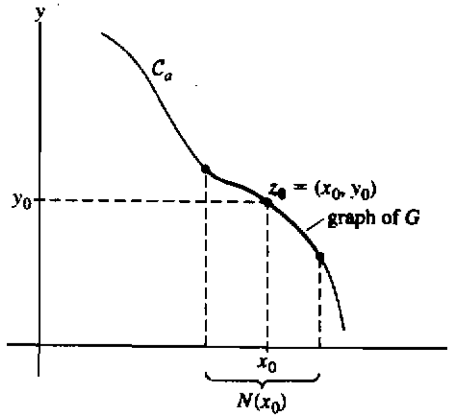
با قضیهٔ تابع ضمنی قادر خواهیم بود که پدیدهٔ جالب و مفید هندسی را با توجه به رفتار توابع از ردهٔ C^1 به وجود آوریم. ابتدا فرض کنید که F تابعی از ردهٔ C^1 و حقیقی بر روی یک زیرمجموعهٔ باز $U \subset R^2$ باشد. نقاط U را با $z = (x , y)$ مشخص می‌کنیم. برای هر a در حوزهٔ مقادیر F، معادلهٔ $F(z) = F(x , y) = a$ یک مجموعه‌ای مانند $U_a = \{z \in U : F(z) = a\}$ را در U تعریف می‌کند. این مجموعه منحنی تراز تابع F نامیده می‌شود. دقت کنید که بدون هیچ شرط یا محدودیتی، ممکن است U_a یک منحنی نشود. برای مثال ممکن است U_a تنها شامل یک نقطه و یا خالی باشد.

برای مشاهدهٔ این پدیده (تشکیل منحنی تراز)، تابع F را توسط نمودار زیر نمایش می‌دهیم.

$G(F) = \{(x , y, u) \in R^3 : z \in U , U = F(z)\}$

حال $G(F)$ را با خط $u = a$ در R^3 قطع می‌دهیم. با این عمل، یک زیرمجموعه مانند $G_a(F)$ به دست خواهد آمد. در مرحلهٔ بعدی، این مجموعه را به طور عمودی بر صفحهٔ xy تصویر می‌کنیم؛ آن‌گاه مجموعهٔ U_a به دست می‌آید که همان منحنی تراز تابع F متناظر با a می‌باشد. (شکل زیر) در این جا $G_a(F)$ یعنی همان $G(F)$ است هرگاه $u = a$ باشد.





مثال ۱۹ : فرض کنید که $F(x , y) = x^2 + y^2 - 1$. به جستجوی نقاطی هستیم که در معادلهٔ

$F(x, y) = \circ$ صدق کند و تابعی که $x = f(y)$ باشد و در $F(x, y) = \circ$ نیز صدق کند. به دست آوردن نقاط $F(x, y) = \circ$ آسان است. این نقاط بر روی دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند. با توجه به شرط $F(f(y), y) = \circ$ داریم $f(y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$. مایل هستیم بدانیم که نزدیک نقاط $(x_\circ, y_\circ)$ با شرط $F(x_\circ, y_\circ) = \circ$ آیا می‌توان f را به دست آورد که یکتا نیز باشد. اگر $y_\circ \neq \pm 1$، آن‌گاه می‌توان ریشهٔ مناسبی انتخاب کرد که $f(y)$ یکتا باشد. مثلاً برای yها مثبت و کوچکتر از ۱ و یا این که yها منفی و بزرگتر از ۱-. حال اگر $y = \pm 1$ در این حالت $x = f(y) = \circ$ و $F(\circ, \pm 1) = \circ$. امّا دقت کنید که تابع $f(y)$ در این نقاط مشتق‌پذیر نمی‌باشد و در این نقاط $\frac{\partial F}{\partial x} = \circ$. بنابراین به دنبال تابعی مانند $y = f(x)$ یا مقداری برای y می‌باشیم که در شرط $\frac{\partial F}{\partial x} \neq \circ$ صدق کند. این شرط تضمین‌کنندهٔ یکتایی و مشتق‌پذیری تابع f (حداقل موضعی) می‌باشد. در حالت کلی تابع $F : R^n \times R^m \to R^m$ را داریم و $F(x, y) = \circ$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. این رابطه معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \circ \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

هدف ما حلّ این n تا معادله برای محاسبهٔ $x_1, x_2, \dots, x_n$ برحسب $y_1, y_2, \dots, y_n$ است. قضیهٔ تابع ضمنی شرایط لازم برای حلّ این نوع معادلات را می‌دهد.

قضیهٔ تابع ضمنی

فرض کنید $E \subset R^{n+m}$ یک زیرمجموعهٔ باز و $f : E \to R^n$ یک تابع از ردهٔ C^1 و (یا C^r، $r \geq 1$). به علاوه فرض بر این است که برای نقطهٔ $(a, b) \in E$ و $f(a, b) = \circ$. اگر $A = f'(a, b)$ و A_x معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه مجموعه‌های باز $U \subset R^{n+m}$ و $W \subset R^m$ که $(a, b) \in U$ و $b \in W$ وجود دارند که دارای خواصّ زیر می‌باشند:

۱- به هر $y \in W$ یک x یکتا نسبت داده می‌شود به طوری که $(x, y) \in U$ و $f(x, y) = \circ$.

۲- اگر $g(y) = x$، آن‌گاه g یک تابعی از رده C^1 (یا C^r، $r \geq 1$) از W به R^n و $g(b) = a$ و $f(g(y), y) = \circ$ است و همچنین $g'(b) = -A_x^{-1} A_y$. قبل از اثبات قضیه، توضیحی راجع به نمادها خواهیم داد. در این جا منظور از A_x همان ماتریس ژاکوبین $(f_1, \dots, f_n)$ نسبت به $x_1, \dots, x_n$ است و A_x معکوس‌پذیر می‌باشد، یعنی این که ژاکوبین $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq \circ$:

توجه داشته باشید که $x\in R^n$ ، $y\in R^m$ و $f = (f_1, ..., f_n)$. همچنین توجه خوانندگان را به این مطلب جلب می‌کنیم که چون تابع f حداقل از ردهٔ C^1 می‌باشد، در نتیجه تمام مشتقّات جزیی تابع f در هر نقطه از E وجود داشته و پیوسته می‌باشند. لذا می‌توان ژاکوبین بالا را محاسبه کرده نماد دیگر که در اثبات این قضیه به‌کار می‌رود، تابع $A\in L(R^{n+m}, R^n)$ به صورت $A = A_x + A_y$ می‌باشد.

در این جا $A_x h = A(h, \circ)$ و $A_y k = A(\circ, k)$ به ازای هر $h\in R^n$ و به ازای هر $k\in R^m$.

بنابراین $A(h, k) = A_x h + A_y k$.

اثبات قضیهٔ تابع ضمنی

برای اثبات قضیهٔ تابع ضمنی از قضیهٔ تابع معکوس استفاده می‌کنیم. برای این منظور تابع F را از E به R^{n+m} به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$F(x, y) = (f(x, y), y) \quad , \quad (x, y)\in E \quad , \quad x\in R^n \quad , \quad y\in Rm$

و نظر به اینکه بنا بر فرض، f از ردهٔ C^1 (C^r ، $r \geq 1$) می‌باشد، آن‌گاه تابع F نیز از همان رده است. اکنون شرایط قضیهٔ تابع معکوس را برای تابع F بررسی می‌کنیم:

ابتدا مشتق F در نقطهٔ (a , b) را محاسبه خواهیم کرد. بنا به تعریف مشتق داریم :

$$f(a + h, a + k) - f(a, b) = (f'(a, b))(h, k) + r(h, k)$$
$$= A(h, k) + r(h, k),$$

$$F(a + h, b + k) - F(a, b) = (f(a + h, b + k), b + k)$$
$$- (f(a, b), b)$$
$$= [(f(a + h, b + k) - f(a, b)), k]$$
$$= [A(h, k) + r(h, k), k]$$
$$= (A(h, k), k) + (r(h, k), \circ)$$

حال اگر $(A(h, k), k) = o\in R^{n+m}$ آن‌گاه $A(h, k) = \circ$ و $k = \circ$. اکنون با توجه به نماد برای A و همچنین با توجه به فرض قضیه که A_x معکوس‌پذیر است داریم :

$$A(h, k) = A_x h + A_y k$$
$$= \circ \quad \Rightarrow$$
$$h = -A^{-1}x\, A_y k$$

چون $k = \circ$ ، بنابراین $h = \circ$. عملگر خطی $F'(a, b)$ مقدار (h, k) را به $(A(h, k), k)$

نقش می‌دهد، لذا با توضیحات بالا $F'(a, b)$ تنها ۰ را به ۰ نقش خواهد داد. بنابراین $F'(a, b)$ یک تابع خطی ۱-۱ و برو است که معکوس‌پذیری را تضمین می‌کند. در نتیجه، تابع F در شرایط قضیهٔ تابع معکوس صدق می‌کند. بنابراین بنا بر قضیهٔ تابع معکوس زیرمجموعه‌های باز U و V در R^{n+m} وجود دارند که F از U به V یک به یک و دارای معکوس از ردهٔ C^1 (یا C^r، $r \geq 1$) است. W را مجموعهٔ تمام $y \in R^m$ انتخاب می‌کنیم که $(0, y) \in V$ و $b \in W$. به واسطهٔ این که V باز است پس $W \subset V$ باز است. در حقیقت می‌توان یک همسایگی باز به مرکز (a, b) در V رسم کرده و برای نقاط $(0, y)$ متعلّق به W داریم

$$F(x, y) = (f(x, y), y) = (0, y)$$

در نتیجه $f(x, y) = 0$. بنابراین به ازای هر y یک x وجود دارد به طوری که $f(x, y) = 0$. کافی است که ثابت کنیم این x یکتا می‌باشد. برای اثبات، از برهان خلف استفاده می‌نماییم. فرض کنید که وجود داشته باشد: $(x', y) = \in V$ به طوری که $f(x', y) = 0$ و $x' \neq x$ پس خواهیم داشت:

$$F(x', y) = (f(x', y), y) = (0, y)$$

و

$$F(x, y) = (f(x, y), y) = (0, y)$$

این دو تساوی نشان می‌دهند که $F(x, y) = F(x', y)$. از آن جاکه F بر روی V یک به یک است، بنابراین باید $(x, y) = (x', y)$ و یا $x = x'$ باشد. در این جا یک قسمت از قضیه که یکتایی و وجود x بود، ثابت شده است. اکنون به اثبات وجود g با شرایط قضیه می‌پردازیم:

برای $y \in W$ تابع g را به صورت $g(y) = x$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه $(g(y), y) \in U$، $(0, y) \in V$ و $f(x, y) = 0$ و یا اینکه $f(g(y), y) = 0$ و در این حالت $(0, y) = (y)$ و $F(g(y))$. نظر به اینکه F روی U در قضیهٔ تابع معکوس صدق می‌کند، پس نگاشتی چون G وجود دارد که معکوس F است و از رده C^1 (یا C^r و $r \geq 1$) می‌باشد. اکنون $g'(y)$ را محاسبه می‌نماییم. قرار می‌دهیم: $\Phi(y) = (g(y), y)$ و خواهیم داشت:

$$\Phi'(y)k = (g'(y)k, k) \quad , \quad y \in W \quad , \quad k \in R^m$$

از طرف دیگر می‌دانیم که به ازای هر $y \in W$ داریم:

$$f(x, y) = f(g(y), y) = f(\Phi(y)) = 0$$

از این تابع، مشتق می‌گیریم که بنا بر قاعدهٔ زنجیری تساوی زیر به دست می‌آید:

$$[f(\Phi(y))]' = f'[\Phi(y)]\Phi'(y)$$

$$= \circ \quad , \quad \forall y \in W$$

مشتق فوق را در نقطهٔ (a, b) می‌نویسیم:

$$f'(\Phi(b)) \quad , \quad \Phi'(b) = f'(a, b).\ \Phi'(b)$$
$$= A.\Phi'(b),$$
$$A.(\Phi'(b))k = A(g'(b)k, k)$$
$$= A_x(g'(b)k + A_y\, k \quad , \quad \forall k \in R^m)$$

حال اگر این تساوی را مساوی با صفر قرار دهیم، داریم :

$$A_x(g'(b)) + A_y = \circ$$

چون بنا بر فرض A_x معکوس‌پذیر است، پس $g'(b) = -A_x^{-1} A_y$ که اثبات قضیه را تکمیل می‌کند.

در این جا قضیهٔ تابع ضمنی را با در نظر گرفتن پایه‌های استاندارد e_i در R^n و R^m به صورت فرمول ارائه خواهیم داد. فرض کنید که تابع $f : R^{n+m} \to R^m$ در شرایط قضیهٔ تابع ضمنی صدق کند، بنابراین داریم :

$$f = (f_1 , f_2 ,..., f_m) \quad , \quad g = (g_1 ,..., g_n)$$
$$A_x = D_x f(a , b) \in L(R^n , R^n), \qquad x = (x_1 ,..., x_n) \in R^n$$
$$y = (y_1 ,..., y_m) \in R^m$$

و یا

$$A_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(a,b)} = n \times n \text{ یک ماتریس}$$

و همچنین $g'(b)$ عبارت است از :

$$g'(b) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(b)} = n \times m \text{ یک ماتریس}$$

به علاوه داریم :

$$A_x g'(b) + A_y = 0 \quad , \quad A_x(a, b)\, g'(b) = D_x f(a, b)\, g'(b)$$

می‌دانیم که :

$$D_x f(a,b) g'(b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(a,b)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(b)}$$

$$A_y = D_y f(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(a,b)}$$

در نتیجه رابطهٔ $A_x g'(b) + A_y = 0$ به صورت زیر در می‌آید :

$$A_x g'(b) + A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x g'(b) = -A_y$$

و یا :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_k} = -\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, m \end{matrix}$$

مثال ۲۰: اگر $n = 2$ و $m = 3$ و $f: R^5 \to R^2$ و $f = (f_1, f_2)$ و f_1 و f_2 با ضابطه‌های زیر داده شده باشند :

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y - 4y_2 + 3,$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3$$

آن‌گاه نقطهٔ $(a, b) = [(0, 1), (3, 2, 7)]$ نقطه‌ای است که در آن نقطه $f(a, b) = 0$

بنابراین داریم :

$$A = Df(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \end{bmatrix}_{(a,b)}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه A_x و A_y عبارتند از :

$$A_x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_y = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال مشاهده می‌شود که $\det A_x \neq 0$ و با توجه به این که تابع f از ردهٔ C^1 است، پس می‌توان قضیهٔ تابع ضمنی را به کار برد. بنابراین $g(b) = g(3, 2, 7) = a = (0, 1)$ و $f(g(y), y) = 0$ در یک همسایگی از نقطهٔ b. دقت کنید که در این جا به سادگی می‌توانیم مشتق تابع $g'(b)$ را محاسبه کنیم، اما محاسبهٔ خود $g(b)$ به طور واضح ساده نمی‌باشد.

محاسبهٔ $g'(b)$

$$A^{-1}x = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

$$g'(b) = -A_x^{-1}A_y = -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

مثال ۲۱: **دستگاه معادلات**

$$\begin{cases} xu + yv^2 = 0, \\ xv^3 + y^2u^6 = 0 \end{cases}$$

را در مورد مطالعه قرار می‌دهیم. آیا می‌توانیم این دستگاه را برحسب x و y برای u و v نزدیک نقطهٔ $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 0)$ حل کنیم و جواب یکتا به دست آوریم؟

حل : در این جا تابع $F : R^4 \to R^2$ مشاهده می‌کنیم که در نقطهٔ $(0, 1, 0, 0)$، $F(x, y, u, v) = 0 \in R^2$ و $A(u, v)$ در این نقطه برابر است با:

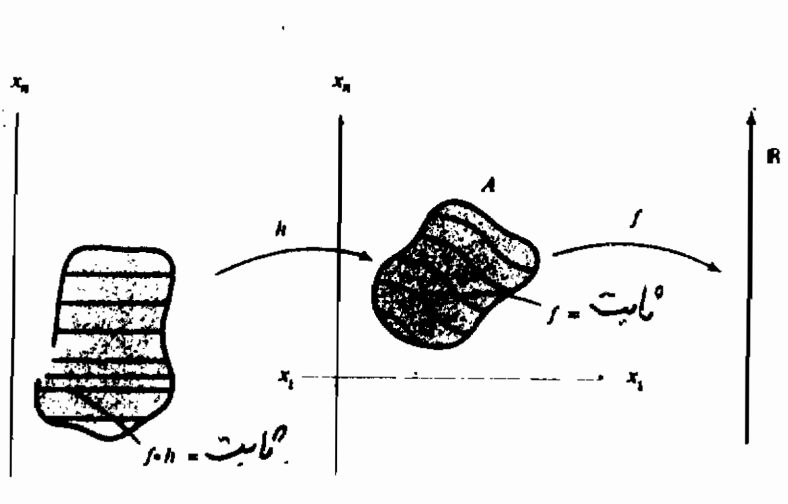
$$A(u,v)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 2yv\\ 6y^2u^5 & 3xv^2\end{bmatrix}$$

بنابراین در نقطه $(0, 1, 0, 0)$، $A(u, v) = 0$. بنابر قضیهٔ تابع ضمنی نمی‌توانیم v و u را برحسب y و x در نقطه داده شده به طور یکتا حل کنیم.

۲.۶.۱. نتیجهٔ قضیهٔ تابع ضمنی

یکی از نتایج مهمّ این قضیه، تکنیک مهمّی در مطالعهٔ سطوح می‌باشد:

فرض کنید که $f : A \subset R^n \to R$ دارای مشتق مخالف با صفر نقطه‌ای مانند $x_0 \in R^n$ باشد. آن‌گاه در یک همسایگی از x_0، تابع f می‌تواند به تابعی تغییر داده شود که این تابع، تصویر بر روی محور x_n است. این تغییر توسط تغییر مختصات به وجود می‌آید که خود تابعی است هموار و دارای معکوس. در این جا تغییر مختصات را با h نمایش می‌دهیم و سطوح از مقدار ثابت قرار دادن تابع به دست می‌آیند (به قضیه زیر مراجعه کنید).



قضیهٔ ۱۲: فرض کنید که $A \subset R^n$ یک مجموعهٔ باز و $f : A \to R$ تابعی از ردهٔ C^r و $r \geq 1$ باشد. به علاوه فرض بر این است که $x_0 \in A$ و $Df(x_0) \neq 0$. آن‌گاه مجموعه‌های باز U و V شامل x_0 و تابع $h : U \to V$ از ردهٔ C^r موجودند به طوری که $h^{-1} : V \to U$ از ردهٔ C^r بوده و

$f(h(x_1, ..., x_n)) = x_n$. این قضیه در حقیقت مستقیم‌سازی تابع f می‌باشد. در ضمن، این قضیه را می‌توان برای تابع $f : A \to R^m$ با $m \le n$ گسترش داد. برای اثبات قضیه به کتاب Marsden می‌توانید مراجعه کنید.

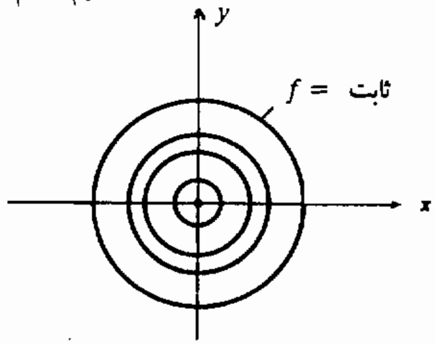
این قضیه بیانگر این مطلب است که تابع h هرچیز را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که سطوح تراز f که از مساوی قرار دادن تابع f با یک مقدار ثابت به دست می‌آید. (در این جا تابع f حقیقی می‌باشد) صفحاتی با بعد $n - ۱$ خواهند شد.

شرط $Df(x_0) \neq ۰$ تضمین کنندهٔ این است که سطوح تراز تابع f از بعد $n - ۱$ باشند؛ مطلب مهمی که در هندسه استفاده می‌شود. در حقیقت می‌توان از قضیهٔ تابع ضمنی استفاده کرد و متغیّرهای دیگر را برحسب یک متغیّر، مثلاً x_n نوشت و یا این که x_n را برحسب متغیّرهای دیگر محاسبه کرد. برای مثال می‌توانیم از کره $n - ۱$ بعدی اسم به میان آوریم که از سطح تراز تابع $f : R^n \to R$ با ضابطهٔ $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ به دست می‌آید. با قرار دادن $f(x_1, ..., x_n) = a$ ، a شعاع کره، می‌توان بعد کره را تعیین کرد.

مثال ۲۲: فرض کنید که $f(x, y) = x^2 + y^2$. آیا می‌توان f را نزدیک (۰ و ۰) مستقیم‌سازی کرد؟

حل:

باتوجه به این که $Df(0, 0) = 0$ ، لذا نمی‌توانیم چنین کاری را انجام دهیم، زیرا سطوح تراز تابع f در (۰ و ۰) منحط می‌باشد (یعنی مشتق آن در (۰ و ۰) مساوی با صفر است) واضح است که سطوح تراز f ، دسته دوایر نشان داده شده در شکل زیر می‌باشند. بدیهی است که هیچ راهی برای تبدیل سطوح ($f =$ مقدار ثابت) نزدیک نقطه (۰ و ۰) به صفحه نمی‌باشد. ولی ما می‌توانیم این مستقیم‌سازی را برای هر نقطهٔ دیگر $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ انجام دهیم.



امّا اگر تابع f را به صورت زیر تعریف کنیم، آن‌گاه می‌توانیم مطمئن باشیم که مستقیم‌سازی انجام می‌شود:

$$f(x, y) = x^{3} + x + y \quad , \quad Df(0, 0) = (1, 1) \neq 0$$

قضیهٔ ۱۲ این مطلب را بیان می‌کند که ما می‌توانیم تابعی مانند h به دست آوریم به طوری که foh یک تصویر باشد. در حقیقت با این تابع، حوزهٔ تعریف f به یک خط تبدیل می‌شود. متشابهاً می‌توانیم این عمل را برای حوزهٔ مقادیر تابع f انجام دهیم، یعنی این که تابعی مانند g به دست آوریم که gof شبیه یک تصویر باشد.

۲.۶.۲. قضیهٔ تابع ضمنی به صورت دیگر

فرض کنید که E یک زیرمجموعهٔ باز در R^{n+m} و $f : E \to R^{m}$ یک تابع از ردهٔ C^{r}، $r \geq 1$ به علاوه فرض کنید که $\bar{p} = (a, b) \in E$ و

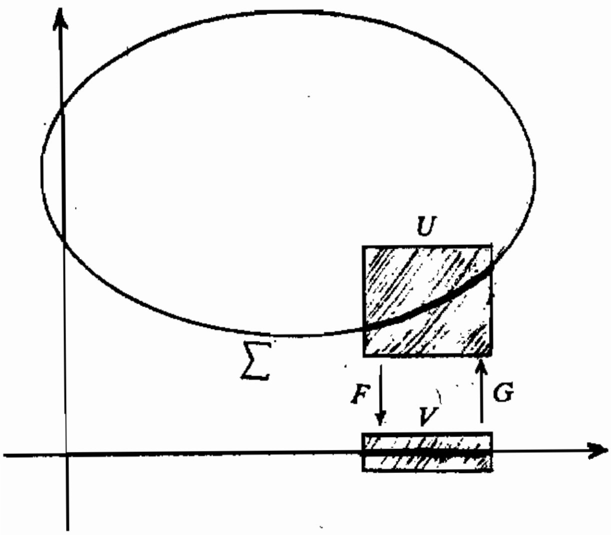
$$\Sigma = \{q \in A : f(p) = q\}$$

سطوح سطح تراز تابع f در p باشد.

اگر $A_x \in L(R^n, R^n)$ معکوس‌پذیر فرض شود. آن‌گاه وجود دارد همسایگیهای U از p با $(a,b) \in V$ و $W \subset R^m$ از b به طوری که تابع $g : W \to R^n$ از ردهٔ C^r بوده

$$\Sigma \cap U = \{(g(y), y) : y \in W\}$$

و $g'(b) = -A_x^{-1} A_y$ باشد.



دقت کنید که تنها مطلب متفاوت با قضیهٔ تابع ضمنی توضیح داده شده، استفاده از سطح تراز است. حال اگر $q = ۰$، لذا صورت دو قضیه یکی می‌باشند. برای اثبات $q = ۰$ را در نظر می‌گیریم و اثبات، دقیقاً همان اثبات ارائه شده است.

در پایان این بخش، قضیهٔ تابع ضمنی را برای حالت خطی توضیح می‌دهم :

قضیه ۱۳ : اگر $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ و اگر A_x معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه متناظر با هر $k \in R^m$ یک $h \in R^n$ یکتا وجود دارد به طوری که $A(h, k) = ۰$ و $h = -A_x^{-1} A_y k$.

اثبات : ابتدا ثابت می‌کنیم اگر h وجود داشته باشد، پس h یکتا است.

اثبات یکتایی :

فرض کنید که h یکتا نباشد و h' نیز وجود دارد بنابراین داریم :

$$A(h, k) = A(h', k) = ۰,$$

$$A(h, k) - A(h', k) = ۰,$$

و یا :

$$A(h - h', ۰) = ۰$$

در نتیجه داریم:

$$A_x(h - h') - A_y(۰) = ۰,$$

و یا :

$$A_x h - A_x h' = ۰$$

پس خواهیم داشت :

$$A_x h = A_x h'$$

چون A_x معکوس‌پذیر است، بنابراین یک به یک نیز می‌باشد و در نتیجه $h = h'$.

تذکر: قضیهٔ تابع ضمنی را می‌توان برای فضاهای غیراقلیدسی نیز بیان کرد. برای مثال می‌توان فضای منیفلد رانام برد. با توجّه به این که فضای منیفلد مشتق‌پذیر به طور موضعی شبیه فضای R^n (n بعد منیفلد است)، می‌باشد. بنابراین قضیهٔ تابع ضمنی بین دو فضای منیفلد تحت شرایط خاص برقرار است.

۲.۷. قضیهٔ رتبه[۱]

یکی دیگر از قضایای مهم که در ریاضیات به خصوص هندسه،کاربرد زیادی دارد، قضیهٔ رتبه است. این قضیه بیانگر این مطلب است که رفتار یک تابع از ردهٔ C^r، $r \geq 1$ نزدیک نقطه‌ای مانند x، مشابه رفتار مشتق آن تابع در x می‌باشد. بنابراین اگر بخواهیم رفتار موضعی تابع صادق در قضیهٔ رتبه را در یک نقطه بررسی کنیم، می‌توانیم توسط مشتق تابع در آن نقطه مورد بررسی قرار دهیم که در این صورت خیلی ساده‌تر خواهد بود. مطلب جالب‌تری که از نتیجهٔ قضیهٔ رتبه به دست می‌آید، عبارت است از به دست آمدن تغییر متغیّر مناسب برای همانی کردن تابع که در پایان قضیهٔ رتبه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این مطلب در هندسه بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. قبل از توضیح و اثبات قضیهٔ رتبه، نمادهای موردنیاز را ارائه خواهم داد.

نمادها - تعاریف

۲.۷.۱. تعریف رتبه

فرض کنید که یک تابع خطی مفروض باشد. آن‌گاه رتبه تابع بُعد حوزهٔ مقادیر آن تابع است. از آن جا که یک تابع خطی متناظر با یک ماتریس است، پس رتبهٔ یک تابع خطی همان رتبهٔ ماتریس آن است که عبارت است از بزرگترین زیرماتریس مربّعی شکل جدا شده از ماتریس با دترمینان مخالف با صفر. حال اگر تابع خطی نباشد، آن‌گاه رتبهٔ تابع همان رتبهٔ مشتقّ این تابع در هر نقطهٔ مورد بررسی است به شرط آن که تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر باشد.

۲.۷.۲. تعریف تصویر

فرض کنید که X یک فضای برداری و $p \in L(X)$ یک عملگر خطی باشد. p را یک تصویر در X گویند اگر $p^2 = p$، یعنی این که به ازای هر $x \in X$ داریم: $p(p(x)) = px$. به عبارت دیگر p هر بردار در برد p، یعنی $R(p)$، را ثابت نگه می‌دارد.

1. Rank Theorem

۲.۷.۳. تعریف فضای پوچ

فرض کنید که X و Y دو فضای برداری و $A \in L(X, Y)$ باشد. آن‌گاه فضای پوچ A که به $N(A)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ تمام x هایی که به X متعلّق است و $Ax = 0$. مجموعهٔ این نقاط کرنل A نیز نامیده می‌شود. حوزهٔ مقادیر A را به $R(A)$ نمایش می‌دهیم. مشاهده کنید که $R(A)$ یک فضای برداری در Y و $N(A)$ نیز یک فضای برداری است. اگر A دارای رتبهٔ ۰ باشد، آن‌گاه به ازای تمام $x \in X$، $Ax = 0$ و $N(A) = X$. یکی از خواصّ تصویر را در این جا شرح می‌دهیم. فرض کنید که p یک تصویر بر روی X باشد، آن‌گاه هر $x \in X$ دارای نمایش یکتایی $x = x_1 + x_2$ با $x_1 \in R(p)$ و $x_2 \in N(p)$ می‌باشد.

اثبات: قرار می‌دهیم $x_1 = px$، $x_2 = x - x_1$، آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} px_2 = p(x - x_1) &= px - px_1 \\ &= px - p(px) \\ &= px - px = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $x_2 \in N(p)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که $x_1 \in R(p)$. با توجه به این که x_1 و x_2 متعلّق به X می‌باشند، لذا می‌توان نوشت: $x = x_1 + x_2$. حال داریم:

$$\begin{aligned} px = p(x_1 + x_2) &= px_1 + p(x_2) \\ &= px_1 + 0 \end{aligned}$$

اگر x_1 در برد p باشد، آن‌گاه $px_1 = x_1$، زیرا بنا بر تعریف تصویر، p هر بردار در برد را تغییر نمی‌دهد. بنابراین اگر $x_1 \in R(p)$، آن‌گاه از روابط بالا نتیجه می‌شود که $px = x_1$ و مطلب، ثابت شده است. فقط یکتایی نمایش فوق را باید ثابت کنیم که آن هم بسیار ساده است. دقت کنید که اگر چنین نباشد پس داریم: $x = x_1 + x_2$ و $x = x'_1 + x'_2$. بنابراین $x_1 = px$ و $x'_1 = px$ و در نتیجه $x_1 - x'_1 = 0$ از تساوی $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ و $x'_1 = x_1$ می‌توان نتیجه گرفت که $x_2 = x'_2$.

خاصیّت دیگر تصویر

فرض کنید که X یک فضای برداری با بُعد متناهی و X_1 یک زیرفضای برداری در X باشد. آن‌گاه یک تصویر مانند p بر روی X وجود دارد به طوری که $R(p) = X_1$.

اثبات : اگر X_1 تنها شامل ۰ باشد، آن‌گاه p را طوری تعریف می‌کنیم که به ازای هر $x \in X$، $px = 0$. حال اگر فرض شود که X_1 دارای بعد $\dim X_1 = k > 0$ و k کمتر از یا مساوی با بعد X باشد، آن‌گاه بنابر قضایای مربوط به پایهٔ یک فضای برداری عبارت زیر را داریم :

فرض کنید که $\{u_1 , u_2 ,..., u_n\}$ یک پایه فضای برداری X باشد، آن‌گاه $\{u_1 ,..., u_k\}$ پایه فضای X_1 خواهد بود. در این جا $\dim X = n$ در نظر گرفتیم. اکنون تصویر p را به صورت زیر برروی X تعریف می‌کنیم :

$$p(c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_k x_k$$

به طوری که $c_1 , c_2 ,..., c_n$ اسکالر هستند. حال به سادگی می‌توان مشاهده کرد که به ازای هر $x \in X$، $px = x_1 \in X_1$. در این جا پایه برای فضای پوچ تصویر p برابر است با $\{u_{k+1} ,..., u_n\}$ اگر $k < n$، آن‌گاه می‌توان تصاویر زیادی بر روی X با خاصیت $R(p) = X_1$ تعریف کرد و p یکتا نمی‌باشد.

قضیهٔ رتبه : فرض کنید که m , n , r اعداد صحیح مثبت با $m \geq r$ و $n \geq r$ و F یک تابع از ردهٔ C^r و $r \geq 1$ مجموعهٔ باز $E \subseteq R^n$ از E زیرمجموعهٔ باز در R^n بتوی R^m باشد. به علاوه فرض کنید که $F'(x)$ دارای رتبهٔ r برای هر $x \in E$ باشد. برای $a \in E$ معینی قرار می‌دهیم $A = F'(a)$ به طوری که Y_1 برد A، و p یک تصویر در R^m با برد Y_1 و Y_2 فضای پوچ p باشد. آن‌گاه مجموعه‌های باز U و V در R^n که در آن $a \in U$ و $U \subset E$ و تابع یک به یک H از V بتوی U وجود دارند به طوری که

$$F(H(x)) = Ax + \phi(Ax) \quad , \quad \forall_x \in V \qquad (*)$$

که در این جا ϕ تابعی از رده C^r، $r \geq 1$ از مجموعه $A(V) \subset Y_1$ بتوی Y_2 بوده و $A(V)$ باز می‌باشد.

اثبات : اگر $r = 0$، آن‌گاه $F(x)$ تابع ثابت است و حکم قضیه برقرار است، زیرا داریم :

$F(H(x)) = \phi(0)$ و $Ax = 0$ در نتیجه $F(x)$ تابع ثابت است. در این حالت $V = U$ و $H(x) = x$ را در نظر می‌گیریم. لذا فرض بر این است که $r > 0$ ؛ بنا به تعریف رتبه، بعد $F'(x)$ یا بُعد برد $A = F'(a)$ برابر با r و بنابراین $\dim Y_1 = r$ می‌باشد. $\{y_1, ..., y_r\}$ را پایه Y_1 در نظر می‌گیریم. $z_i \in R^n$ به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $Az_i = y_i$ ، $1 \le i \le r$. تابع خطی $S : Y_1 \to R^n$ را با ضابطهٔ :

$$S(c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... c_r y_r) = c_1 z_1 + c_2 z_2 + ... + c_r z_r$$

با اسکالرهای c_i ، $i = 1, ..., r$ تعریف می‌نماییم، آنگاه داریم :

$$A(S(y_i)) = As(y_i) = A(z_i) = y_i \tag{1}$$

در نتیجه به ازای هر $y \in Y_1$ تابع AS یک تابع همانی است: $AS(y) = y$. تابع G را با ضابطهٔ زیر بر روی E تعریف می‌کنیم :

$$G(x) = x + Sp[F(x) - Ax] \quad , \quad \forall x \in E \tag{2}$$

از (۲) در نقطه $x = a$ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری مشتق می‌گیریم (در محاسبه مشتق دقت کنید که A یک تابع خطی و $A'x = A$ می‌باشد).

$$\begin{aligned} G'(a) &= I + (Sp[F(x) - Ax])'_{x=a} \\ &= I + S'p[F(x) - Ax]_{x=a}\, p'[F(x) - Ax]_{x=a} \\ &= I + S'p(F(a) - A(a))p'(F(a) - A(a)).\ (F'(a) - A) \end{aligned}$$

چون بنا بر فرض $A = F'(a)$ ، بنابراین $G(a) = I$ و در نتیجه تابع G از E به R^n در قضیهٔ تابع معکوس صدق می‌کند. لذا همسایگیهای باز U و V در R^n وجود دارند به طوری که $a \in V$ و G از U به V یک به یک و دارای معکوس از ردهٔ C^r ، $r \ge 1$ است. این معکوس را به H نمایش می‌دهیم. در صورت نیاز می‌توان U را در V گنجانید و V را محدّب انتخاب کرد، زیرا V باز است. لذا کافی است که داخل V یک گوی زد و به جای U از آن استفاده کرد. از آن جا که p یک تصویر است، پس هر بردار در برد خود را تغییر نمی‌دهد و بنابر فرض برد p ، Y_1 ، با برد A برابر است. بنابراین $PA = A$ و در (۱) مشاهده کردیم که $AS = I$. اکنون رابطهٔ (۲) را با توجه به این توضیحات بازنویسی می‌نماییم.

$$G(x) = x + Sp(F(x) - Ax),$$

$$\begin{aligned} AG(x) &= Ax + A\ Sp(F(x) - Ax) \\ &= Ax + p(F(x) - Ax) \\ &= Ax + p(F(x)) - PA(x) \end{aligned}$$

$$= Ax + p(F(x) - A_x).$$
$$= p(F(x))$$

چون $F(x)\in R^m$ و p یک تصویر در R^m، لذا $p(F(x))\in Y_1$ و از روابط بالا $AG(x) = PF(x)$ به دست می‌آید. نظر به این که $H : V \to U$ معکوس تابع G است و با توجه به نتیجه به دست آمده، داریم: (به جای x مساویش $H(\bar{x})$ با $\bar{x}\in V$ قرار می‌دهیم)

$$AG(H(\bar{x})) = p(F(H(\bar{x})))$$

و یا این که:

$$A\bar{x} = pF(H(\bar{x}), \qquad \forall \bar{x}\in V. \tag{۳}$$

اکنون ψ را به صورت

$$\psi(\bar{x}) = F(H(\bar{x}) - A(\bar{x}) \tag{۴}$$

تعریف می‌کنیم. چون $pA = A$، آن‌گاه روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌دهند که:

$$p(\psi(\bar{x}) = pF(H(\bar{x}) - pA(\bar{x})$$
$$= A(\bar{x}) - A(\bar{x})$$
$$= 0$$

این نتیجه بدین معناست که به ازای هر $\bar{x}\in V$ داریم: $\psi(\bar{x})\in N(p) = Y_2$. با توجه به تعریف ψ مشاهده می‌کنیم که ψ از رده C^r، $r \geq 1$ است و همچنین دقّت کنید که $\psi : V \to Y_2$.
تاکنون وجود تابع H و همسایگیهای باز U و V را ثابت کردیم، حال تابع ϕ را که در شرایط قضیه صدق می‌کند، می‌سازیم. برای این منظور تابع ϕ را طوری تعریف می‌کنیم که $\phi(Ax) = \psi(x)$. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $Ax_1 = Ax_2$، آن‌گاه به ازای هر $x_1, x_2\in V$، $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. این اثبات به ما اطمینان می‌دهد که تابع ψ به Ax بستگی دارد. برای اثبات، چنین عمل می‌کنیم: به ازای هر $x\in V$، قرار می‌دهیم $\Phi(x) = F(H(x))$. چون به ازای هر $x\in V$، رتبهٔ $H'(x)$ برابر با n است [زیرا H معکوس G می‌باشد]. اکنون رتبه $\Phi(x)$ را محاسبه می‌نماییم: بنا بر قاعدهٔ زنجیری

$$\Phi'(x) = F'(H(x)).H'(x) \tag{۵}$$

حال بنا به قضایای جبرخطی رتبهٔ $\Phi(x)$ برابر است با می‌نیمم رتبهٔ $F'(H(x))$ و رتبهٔ $H'(x)$.
می‌دانیم که بنا بر فرض، رتبهٔ $F'(H(x))$ برابر با $r \leq n$ و رتبهٔ $H'(x)$ مساوی با n می‌باشد. بنابراین رتبهٔ $\Phi(x)$ برابر است با r، و در نتیجه بعد برد تابع $\Phi(x)$ برابر با r خواهد بود.

برد $\Phi'(x)$ را به M نمایش می‌دهیم، $\dim M = r$. با توجه به رابطه‌های (۳) و (۵) خواهیم

داشت :

$$
\begin{aligned}
[pF(H(x))]' &= p'(F(H(x)).(F(H(x))' \\
&= pF'(H(x)).H'(x) \\
&= p\Phi'(x) \\
&= (A(x))' = A
\end{aligned}
$$

بنابراین $p\Phi'(x) = A$ چون $Y_1 = R(A)$ و M برد $\Phi'(x)$ و بُعد M و Y_1 هر دو مساوی با r است، در نتیجه p تحدید p به M یک به یک می‌باشد (p یک عملگر خطی و برو است). اکنون فرض کنید که $Ah = \circ$، آن‌گاه $Ah = p\Phi'(x)\, h = \circ$، با توجّه به این که $\Phi'(x)h \in M$ و تحدید p به M یک به یک است، در نتیجه $\Phi(x)h = \circ$. اکنون به تعریف تابع ψ بر می‌گردیم : $\psi(x) = F(H(x)) - Ax$ از این تابع مشتق می‌گیریم :

$$
\begin{aligned}
\psi'(x) &= F'(H(x)).H'(x) - A \\
&= \Phi'(x) - A ,
\end{aligned}
$$

و

$$\psi'(x)h = \Phi'(x)h - Ah = \circ \tag{٦}$$

$h = x_2 - x_1$ در نظر می‌گیریم و تابع $g(t) = \psi(x_1 + th)$ ، $\circ \le t \le 1$ را تعریف می‌کنیم. چون V محدّب انتخاب شده است لذا $x + th \in V$. اکنون قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع $g(t)$ به کار می‌بریم. توجه کنید که $g(1) = \psi(x_2)$ و $g(\circ) = \psi(x_1)$.

$$g(1) - g(\circ) = g'(t) = \psi'(x_1 + th) = \circ$$

از این تساوی رابطهٔ $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ را استنتاج می‌کنیم. بنابراین با $Ax_1 = Ax_2$ شروع کردیم و در نهایت به $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ رسیدیم. اکنون تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\phi(Ax) = \psi(x) = F(H(x)) - Ax \quad , \quad x \in V$$

حال باید ثابت کنیم که این تابع در شرط قضیه صدق می‌کند. $x_\circ$ و $y_\circ$ معینی را طوری انتخاب می‌کنیم که $y_\circ = Ax_\circ$ و $y_\circ \in A(V)$. نظر به این که V باز است، پس یک همسایگی باز W در Y_1 طوری وجود دارد که $x = x_\circ + S(y - y_\circ)$ یک بردار در V باشد. چون AS تابع همانی است، لذا :

$$
\begin{aligned}
Ax &= Ax_\circ + AS(y - y_\circ) = Ax_\circ + ASy - ASy_\circ \\
&= y_\circ + y - y = y
\end{aligned}
$$

حال در تعریف تابع ϕ به جای Ax مساویش y را قرار می‌دهیم :

$$\phi(Ax) = \phi(y) = \psi(x) = \psi(x_\circ + S(y - y_\circ))$$
$$= F(H(x)) - Ax_\circ$$

حال چون ψ و S از ردهٔ C^r ، $r \geq 1$ هستند، لذا تابع ϕ از ردهٔ C^r و ϕ از $A(V) \subset Y_1$ به Y_2 است. در این جا اثبات حکم قضیه به پایان می‌رسد.

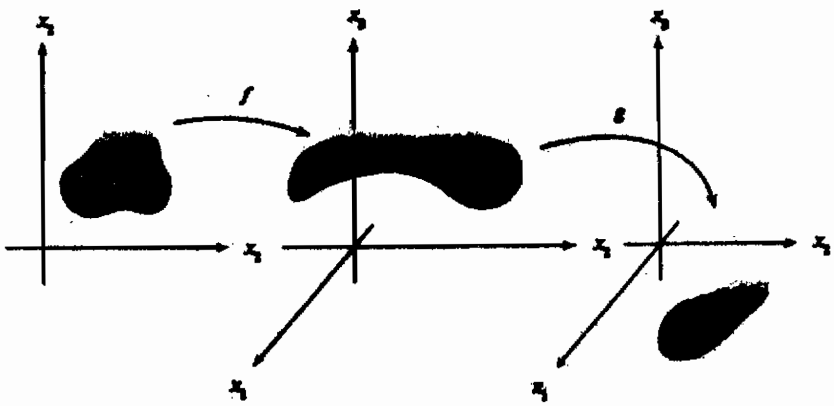
همان‌طوری که درابتدای این بخش توضیح دادیم، یکی از کاربردهای قضیهٔ رتبه، به دست آوردن یک مختصات است که در آن تابع f به حوزهٔ مقادیرش همانی باشد. این مطلب را که در هندسه بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، در دو قضیهٔ زیر بدون اثبات، اما با توضیحات کافی ارائه می‌دهم.

توجه خوانندگان محترم را به این مطلب جلب می‌کنیم که این قضایا را می‌توان از تابع ضمنی نتیجه گرفت. در حالت کلی، این دو قضیه به صورت یک قضیه در بیشتر کتابهای هندسه منیفلد یا توپولوژی مشتق‌پذیر (برای مثال می‌توان به کتاب Boothby اشاره کرد) یافت که اثبات را نیز ارائه داده‌اند.

قضیهٔ ۱۴ : فرض کنید که $A \subset R^p$ یک مجموعهٔ باز و $f : A \to R^n$ یک نگاشت از رده C^r ، و $r \geq 1$ و $p \leq n$ باشد. همچنین فرض کنید که $x_\circ \in A$ و $Df(x_\circ)$ دارای رتبهٔ p باشد. آن‌گاه همسایگیهای باز U و V در R^n با $f(x_\circ) \in U$ و $g : U \to V$ از ردهٔ C^r با معکوس g^{-1} از همان رده وجود دارند به طوری که به ازای تمام $(x_1, \ldots, x_p) \in A$

$$gof(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, \circ, \ldots, \circ)$$

توضیح : این قضیه را می‌توان در شکل زیر نشان داد :



در این قضیه، تابع g حوزهٔ مقادیر f را به مجموعهٔ A تبدیل می‌کند. این تبدیل یک تبدیل صحیح به نظر می‌رسد، زیرا انتظار داریم که حوزهٔ مقادیر f یک سطح p ـ بُعدی باشد. در نتیجه می‌توان این سطح را به یک قطعه در R^p منطبق کرد. توجه کنید که بُعد برد تابع $Df(x_\circ)$ برابر با p است. برای استفاده از این قضیه در کاربرد، باید دقت شود که رتبهٔ تابع f برابر با بُعد حوزهٔ تعریف یا بُعد فضای مقادیر باشد. بنابراین می‌توانیم قضیهٔ تابع معکوس را به کار بریم. این عمل را مستقیم‌سازی حوزهٔ مقادیر (در قسمت تابع ضمنی مستقیم‌سازی حوزهٔ تعریف را توضیح دادیم) نامند. به طور تقریب، این قضیه بیانگر این است که اگر Df دارای رتبهٔ m بر روی R^n باشد، آن‌گاه $n - m$ متغیّر باقی‌مانده را می‌توان حذف کرد (قضیهٔ ۱۵ را ببینید). برای مثال تابع $f(x,y) = x - y$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون $Df(x)$ دارای رتبهٔ ۱ است، آن‌گاه می‌توانیم تابع f را تنها برحسب یک متغیّر بیان کنیم. فرض کنید که $h(x, y) = (x + y, y)$ ، بنابراین $foh(x, y) = x$ که تنها به x بستگی دارد.

قضیهٔ زیر، توسعهٔ قضیهٔ ۱۴ است که محدودیت بر روی مرتبه را که برابر با بُعد حوزهٔ تعریف است بر می‌دارد.

قضیهٔ ۱۵ : فرض کنید که A یک زیرمجموعهٔ باز در R^n و $f : A \to R^N$ تابعی از ردهٔ C^r ، $r \geq 1$، بوده به طوری که $Df(x)$ در یک همسایگی از $x_\circ \in A$ دارای رتبهٔ m باشد. آن‌گاه مجموعهٔ باز $U_1 \subset R^n$ ، مجموعهٔ باز $U_2 \subset R^n$ از نقطهٔ $x_\circ$، همچنین مجموعهٔ باز $V_1 \subset R^N$ از $f(x_\circ)$ و $V_2 \subset R^N$ و توابع $h : U_1 \to V_2$ و $g : V_1 \to V_2$ از ردهٔ C^r وجود دارند به طوری که h و g دارای معکوس از ردهٔ C^r باشند و

$$gofoh(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m, \circ, \circ, \ldots, \circ)$$

مثال ۲۳: فرض کنید که $f : R^2 \to R^3$ توسط $(x, y) \to (x + y^3, xy, y + y^2)$ تعریف شده باشد. آیا می‌توان حوزهٔ مقادیر f را نزدیک نقطهٔ (۰ و ۰) مستقیم‌سازی کرد یا نه؟

حل :

ابتدا ماتریس ژاکوبین را در (۰ و ۰) محاسبه می‌کنیم.

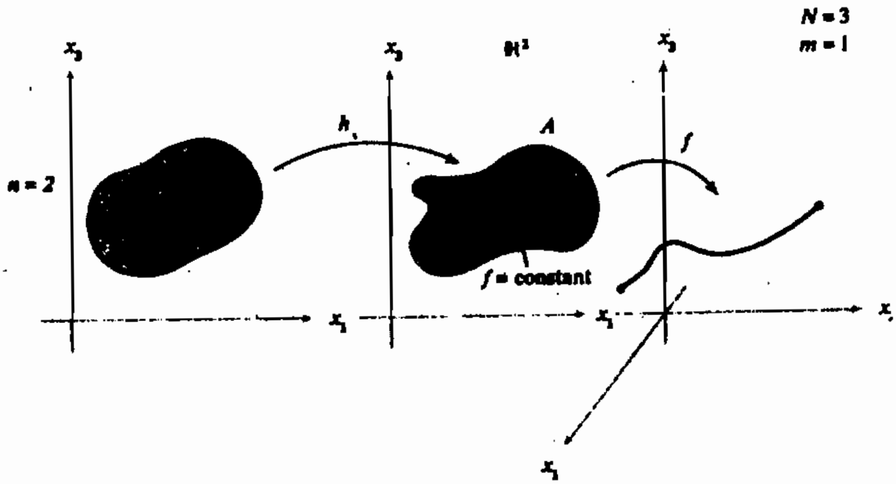
$$\text{ماتریس ژاکوبین } f = \begin{bmatrix} 1 & 3y^2 \\ y & x \\ \circ & 1 + 2y \end{bmatrix}_{(\circ,\circ)} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$$

به وضوح مشاهده می‌شود که این ماتریس دارای رتبهٔ ۲ است زیرا یک زیرماتریس ۲×۲ با دترمینان مخالف صفر وجود دارد. لذا می‌توان قضیهٔ ۱۴ یا ۱۵ را به کار برد و در نتیجه حوزهٔ مقادیر تابع f نزدیک نقطهٔ (۰ و ۰) یک سطح دوبُعدی در R^3 می‌باشد. به علاوه توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ ۱۴ یا ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که تغییر مختصات یا تابع g (قضیهٔ ۱۴) وجود دارد به طوری که حوزهٔ مقادیر f مستقیم‌سازی شود، یعنی این که gof یک تابع همانی بر روی یک همسایگی از (۰ و ۰) در R^2 است.

مثال ۲۴: فرض کنید که $f : R^2 \to R$ توسط $f(x, y) = x^2 + y$ تعریف شده باشد. آیا می‌توان تابع f را برحسب تنها یک متغیّر x یا y نزدیک (۰ و ۰) بیان کرد؟

حل :

ابتدا توجه می‌کنیم که $Df(0, 0) = (0, 1)$ و لذا تابع Df به ازای جمیع مقادیر x دارای رتبهٔ ۱ می‌باشد. قضیهٔ ۱۶ تضمین کنندهٔ جواب مثبت مسأله است.



قضیهٔ ۱۶ (نوع دیگر قضیهٔ رتبه): فرض کنید که A یک زیرمجموعهٔ باز در R^n و $f : R^n \to R^N$ تابعی از ردهٔ C^r، $r \geq 1$ بوده، به‌طوری که $Df(x)$ دارای رتبهٔ m به ازای تمام xها در یک همسایگی از $x_0 \in A$ باشد. آنگاه وجود دارد یک مجموعهٔ باز $U \subset R^n$ و مجموعه باز $V \subset R^n$ با $x_0 \in V$ و یک تابع $h : U \to V$ از ردهٔ C^r با معکوس $h^{-1} : V \to U$ از ردهٔ C^r. به

طوری‌که foh تنها به متغیّرهای $x_1, x_2, ..., x_m$ بستگی دارد؛ یعنی این‌که برای یک تابع $\hat{f}$ از رده C^r، $r \geq 1$ داریم

$$hof(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = \hat{f}(x_1, ..., x_m)$$

شکل بالا را ببینید (اثبات قضایای ۱۴، ۱۵ و ۱۶ در کتاب Marsden می‌باشند) در پایان این فصل چند مسأله را همراه با راه‌حل آنها جهت فهم بیشتر مطالب مطرح می‌کنم.

مسألهٔ ۱: فرض کنید که $B = \{x \in R^n : |x| \leq 1\}$ به‌طوری‌که $f : B \subset R^n \to R$ یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر بر روی نقاط داخل B باشد. همچنین فرض بر این است که بر روی مرز B، $f(x) = 0$. نشان دهید که یک نقطه مانند $x_0 \in \mathrm{int}(B)$ وجود دارد به طوری که $Df(x_0) = 0$.

حل :

این مسأله همان قضیهٔ رُل چند بُعدی است. اگر $f(x) = 0$، آن‌گاه مسأله حل شده است. پس فرض بر این است که $f(x) \neq 0$ به ازای برخی از مقادیر $x \in \mathrm{int}(B)$. در این صورت تابع f در نقاط داخل B دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم می‌باشد (اثبات کنید). بنا بر تعریف B، B یک مجموعهٔ فشرده است. بنابراین یک نقطه اکسترمم برای تابع f در داخل B وجود دارد. اگر این نقطه را به x_0 نمایش بدهیم، آن‌گاه، $Df(x_0) = 0$.

مسأله ۲: نشان دهید که تابع دوخطی $f : R^n \times R^m \to R^p$ در رابطهٔ

$$Df(x_0, y_0)(x, y) = f(x_0, y) + f(x, y_0)$$

صدق می‌کند.

یادآوری: یک تابع را دوخطی نامند اگر نسبت به هر یک از متغیرها خطی باشد.

حل :

تابع f یک تابع مشتق‌پذیر می‌باشد، در نتیجه مشتقّات جزیی آن وجود دارند. نظر به این که $f(x, y_0)$ یک تابع خطی نسبت به x است، لذا مشتقّ آن در جهت $(x \text{ و } 0)$ برابر است با $f(x, y_0)$ که تابعی تنها از x می‌باشد. متشابهاً داریم: $Df(x_0, y_0)(x, 0) = f(x, y_0)$، $Df(x_0, y_0)(0, y) = f(x_0, y)$. حال چون f یک تابع خطی است داریم: $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$، بنابراین رابطهٔ مسأله، برقرار است. دقت کنید که در این جا تساوی $Df(x_0, y_0)(x, 0) = f(x, y_0)$ از این مطلب نتیجه شده است که

مشتقّ هر تابع خطی برابر است با خود تابع و همچنین، از آن‌جا که مشتق در جهت (۰ و x) می‌باشد، پس مقدار y مقدار ثابتی خواهد بود.

مسأله ۳: ژاکوبین تابع

$$f : R^{۲} \to R^{۲} , f(x, y) = (\sin(x \sin y), (x + y)^{۲}$$

را محاسبه نمایید.

حل :

$$f = (f_{۱} , f_{۲})$$

$$\frac{\partial f_{۱}}{\partial x} = \cos(x \sin y)\frac{\partial}{\partial x} (x \sin y) = \sin y \cos(x \sin y),$$

$$\frac{\partial f_{۲}}{\partial x} = ۲(x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x + y) = ۲(x + y);$$

$$\frac{\partial f_{۱}}{\partial y} = \cos(x \sin y)\frac{\partial}{\partial y}(x \sin y) = \cos(x \sin y)\, x \cos y;$$

$$\frac{\partial f_{۲}}{\partial y} = ۲(x + y).$$

$$J_f (x ,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{۱}}{\partial x} & \frac{\partial f_{۱}}{\partial y} \\ \frac{\partial f_{۲}}{\partial x} & \frac{\partial f_{۲}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

باجایگزینی عبارتهای محاسبه شده بالا در دترمینان، ژاکوبین تابع f در هر نقطه (x, y) حاصل می‌شود.

مسأله ۴: نقاط بحرانی[1] تابع $f(x, y) = x^{۳} - ۳x^{۲} + y^{۲}$ را تعیین کنید و نوع آنها را مشخص نمایید.

یادآوری : نقاط بحرانی برای یک تابع حقیقی، نقاطی است که مشتقّ تابع در آن نقاط مساوی با صفر می‌باشد. برای تعیین نوع این نقاط باید مشخص کرد که آنها ماکزیمم یا می‌نیمم و یا نه ماکزیمم و نه

1. Critical Point

می‌نیمم (زینی) هستند. برای اطلاع بیشتر از نقاط بحرانی و تعیین ماکزیمم و یا می‌نیمم دانشجویان محترم می‌توانند به کتابهای ریاضی آنالیز یا حسابان مراجعه کنند. برای مثال می‌توانند به کتاب Douglass صفحه ۳۷۹ مراجعه کنند.

حل :

برای تعیین نقاط بحرانی باید مشتقات جزیی تابع f را مساوی با صفر قرار دهیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

از حلّ این دو معادله مشاهده می‌شود که $y = 0$ و $x = 0$ یا $x = 2$. بنابراین $(0 \text{ و } 0)$ و $(0 \text{ و } 2)$ نقاط بحرانی هستند. به سادگی مشاهده می‌شود که نقطهٔ $(0 \text{ و } 2)$ نقطهٔ می‌نیمم (نسبی) و $(0 \text{ و } 0)$ نقطهٔ زینی است (دانشجویان می‌توانند شخصاً محاسبات مربوطه را انجام دهند).

مسأله ۵: معادلات $u = f_1(x, y)$ و $v = f_2(x, y)$ درنظر بگیرید. نشان دهید که این معادلات نزدیک نقطهٔ (x_0, y_0) معکوس‌پذیر هستند اگر و تنها اگر :

$$\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

در نقطهٔ (x_0, y_0) مخالف با صفر باشد.

حل :

اگر قرار دهیم $f = (f_1, f_2)$ آن‌گاه f تابعی از R^2 به R^2 است و Δ ژاکوبین تابع f در یک نقطهٔ (x, y) می‌باشد. بنا بر قضیهٔ تابع معکوس تابع f در (x_0, y_0) معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر ژاکوبین در این نقطه مخالف با صفر باشد.

مسأله ۶: معادلات

$$\begin{cases} x^2 - yu = 0, \\ xy + uv = 0, \end{cases}$$

مفروض می‌باشند. با استفاده از قضیهٔ تابع ضمنی مشخص کنید که تحت چه شرایطی این معادلات را می‌توان برحسب u و v حل کرد. معادلات را مستقیماً حل کنید و شرایط به دست آمده را مورد بررسی قرار دهید.

حل :

تابع $f_i : R^4 \to R$ ، $i = 1, 2$ را توسط ضابطه $f_1(x, y, u, v) = x^2 - yu$ و

$f_2(x, y, u, v) = xy + uv$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $f = (f_1, f_2)$ و $f : R^4 \to R^2$ آن‌گاه f یک تابع هموار (بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) است. ماتریس

$$\begin{bmatrix} -y & 0 \\ v & u \end{bmatrix}$$

دارای دترمینان $-yu$ می‌باشد. اگر نقطهٔ (x_0, y_0, u_0, v_0) را طوری انتخاب کنیم که $y_0u_0 \neq 0$، آن‌گاه فرضیات قضیهٔ تابع ضمنی برای f برقرار می‌باشد. بنابراین با این شرط، وجود دارد همسایگیهای A از (x_0, y_0) و B از (u_0, v_0) و تابع یکتای $g : A \to B$ از رده C^1، به طوری که
$f(x, y, g(x, y)) = 0$
به ازای تمام $(x, y) \in A$. اگر قرار دهیم $u = g_1$ و $v = g_2$، $g = (g_1, g_2)$ آن‌گاه u و v جواب دستگاه معادلات هستند. بنابراین معادلات به طور یکتا قابل حل برحسب v و u در یک همسایگی از $(x_0$ و $y_0)$ و $(v_0$ و $u_0)$ می‌باشد به شرط آن‌که $y_0u_0 \neq 0$. نظر به این‌که $y_0u_0 \neq 0$، پس $u_0 \neq 0$ و $y_0 \neq 0$ همچنین می‌دانیم که $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ در نتیجه $x_0^2 - y_0u_0 = 0$ و $x_0y_0 + u_0v_0 = 0$.

با محاسبات مستقیم، جوابهای $u = \frac{x^2}{y}$ و $v = -\frac{y^2}{x}$ به دست می‌آید که باید $x \neq 0$ و $y \neq 0$. این همان شرط به دست آمده در بالاست. دقت کنید که از شرط $y_0 \neq 0$ و $u_0 \neq 0$ در معادلهٔ $x_0^2 - y_0u_0 = 0$ استنتاج می‌شود که $x_0 \neq 0$.

مسأله ۷: فرض کنید که $A \subset R^n$ یک مجموعهٔ باز و $f_i : A \to P$، $i = 1, 2, ..., n$ توابعی هموار باشند (دقت کنید گاهی‌اوقات یک تابع از ردهٔ C^r، $r \geq 1$، را هموار نیز گویند).

توابع $f_1, f_2, ..., f_n$ را وابستهٔ تابعی[1] در یک نقطهٔ $x_0 \in A$ نامند اگر وجود داشته باشد یک همسایگی U از نقطهٔ $(f_1(x_0), ..., f_n(x_0)) \in R^n$ و یک تابع هموار $F: U \to R$ به طوری که بر روی یک همسایگی از نقطهٔ $(f_1(x_0), ..., f_n(x_0))$، $DF \neq 0$ و همچنین به‌ازای‌هر x در یک همسایگی از x_0 داشته باشیم:
$F(f_1(x_0), ..., f_n(x_0)) = 0$

الف: ثابت کنید که اگر توابع $f_1, f_2, ..., f_n$، وابستهٔ تابعی در نقطهٔ x_0 باشند، آن‌گاه داریم:

1. Functionally dependent

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\Big|_{x_0}=0$$

ب : اگر $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 0$ و $0 \neq \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}$ بر روی یک همسایگی از x_0 باشد، آن‌گاه توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$، وابستهٔ تابعی هستند و به‌علاوه $f_n = G(f_1, \dots, f_{n-1})$ برای یک G.

حل :

فرض کنید که $f = (f_1, \dots, f_n)$

الف- چون $f_1, \dots, f_n$ وابستهٔ تابعی هستند، پس $Fof = 0$، بنابراین $DF(f(x)). Df(x) = 0$.
حال اگر $J_f(x_0) \neq 0$، آن‌گاه $Df(x)$ در یک همسایگی از x_0 معکوس‌پذیر است (بنا بر قضیهٔ تابع معکوس) لذا $DF(f(x)) = 0$. از قضیهٔ تابع معکوس چنین نتیجه می‌گیریم که مشتق تابع F در یک همسایگی از $f(x_0)$ مساوی با صفر است، یعنی این که $DF(f(x)) = 0$. این نتیجه با تعریف وابستهٔ تابعی تناقض دارد، بنابراین باید $J_f(x_0) = 0$ در یک همسایگی از x_0 باشد.

ب- فرضیات قسمت ب نشان می‌دهد که Df دارای رتبهٔ $n-1$ می‌باشد. در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۱۵، توابع g و h طوری وجود دارند که :

$$gofoh(x_1,\dots, x_n) = (x_1,\dots, x_{n-1}, 0)$$

حال فرض کنید که F آخرین مؤلفهٔ تابع g باشد، آن‌گاه $F(f_1 ,\dots, f_n) = 0$. نظر به این که g یک تابع معکوس‌پذیر است، (بنا بر قضیهٔ تابع ضمنی) آن‌گاه $DF \neq 0$ و بنابراین توابع $f_1 ,\dots, f_n$ وابستهٔ تابعی هستند. از قضیهٔ تابع ضمنی نتیجه می‌شود که $f_n = G(f_1,\dots, f_{n-1})$ که به طور موضعی $F(f_1,\dots, f_n) = 0$ به شرط آن که $\frac{\partial F}{\partial y_n} \neq 0$، $y_n = f_n(x)$ (این شرط بنا بر قضیهٔ تابع ضمنی برقرار است). بنابراین باید ثابت کنیم که شرط $\Delta = \frac{\partial F}{\partial y_n} \neq 0$ برقرار است. برای اثبات دقت می‌کنیم که $DF(f(x)) \times Df(x) = D(F(f(x)))$، برحسب مؤلفه‌های $y = f(x)$ داریم:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix} \qquad (*)$$

حال اگر $\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0$، همچنین با فرض قسمت ب که ژاکوبین $(f_1, ..., f_{n-1})$ نسبت به $x_1, ..., x_{n-1}$ مخالف صفر است، چنین نتیجه می‌شود که $DF = 0$ که با فرض وابستهٔ تابعی تناقض دارد. بنابراین باید $\frac{\partial F}{\partial y_n} \neq 0$. در این جا توجه کنید که چون $\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0$ فرض شده لذا تساوی (*) نشان می‌دهد که:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial y_n}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} = 0$$

که از آن با توجه به فرض ب نتیجه می‌شود $DF = 0$.

تمرینات فصل دوّم

۱ـ فرض کنید که $x = (x_1, x_2) \in R^2$ را تابع $f(x) = |x_1 x_2|$ تعریف می‌کنیم.

الف ـ ثابت کنید که $D_1 f(0) = D_2 f(0) = 0$؛

ب ـ آیا تابع f در مبدأ مشتق‌پذیر است؟

ج ـ ثابت کنید که نمودار تابع f دارای صفحهٔ مماسی در مبدأ نمی‌باشد.

[یادآوری: فرض کنید که تابع $z = f(x)$، $x \in R^2$ نمودار تابع f دارای صفحه مماسی است (به موازات محور z ها در نقطهٔ $(c$ و $f(c))$ نمی‌باشد) اگر و تنها اگر تابع f در نقطهٔ $c \in R^2$ مشتق‌پذیر باشد].

۲ـ با فرض این که $x \neq 0$ متعلّق به R^2 باشد. فرض کنید که $f(x) = \frac{x_1 x_2}{\|x\|}$ یک تابع حقیقی با $f(0) = 0$ است. نشان دهید که نمودار تابع f دارای صفحه مماسی در مبدأ نیست.

۳ـ فرض کنید که $x = (x_1, x_2) \neq 0$ متعلّق به R^2 باشد. تابع حقیقی $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, \quad x \neq 0,$$
$$f(0) = 0$$

الف) آیا تابع در $x = \circ$ پیوسته است؟

ب) ثابت کنید مشتقات جزیی تابع f در هر نقطه از R^2 وجود دارد. این مشتقات جزیی را در $x = \circ$ به دست آورید.

ج) ثابت کنید که $D_{12}f(\circ)$ و $D_{21}f(\circ)$ موجود هستند امّا با هم مساوی نیستند.

۴- تابع حقیقی f را بر روی R^2 به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2 \tan^{-1}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) - x_2^2 \tan^{-1}\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) & , \ x_1 x_2 \neq 0 \\ 0 & , \ x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که $D_{12}f(\circ) = 1$ و $D_{21}f(\circ) = -1$

۵- فرض کنید که تابع f یک تابع حقیقی بر روی یک مجموعه از U در R^n باشد. همچنین فرض کنید که تمام مشتقات جزیی تابع f در هر نقطه از U وجود داشته باشد و همچنین وجود دارد یک عدد مثبت ثابت $M > \circ$ به طوری که به ازای تمام $x \in U$، $|D_j f(x)| \leq M$ (مشتقات جزیی کراندار هستند) $j = 1, 2, ..., n$. ثابت کنید که تابع f بر روی U پیوسته است.

۶- فرض کنید که $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ اگر $x \neq \circ$، توابع $f_j(x) = \dfrac{x_j}{\|x\|}$، $j = 1, 2, ..., n$ تعریف می‌کنیم.

نشان دهید که این توابع در $x \neq \circ$ مشتق‌پذیر هستند. تابع $f = (f_1, ..., f_n)$ را در نظر بگیرید آیا f در $x \neq \circ$ مشتق‌پذیر است، علت آن را توضیح دهید و مشتقّ f را محاسبه کنید.

۷- فرض کنید که توابع f و g، توابعی حقیقی بر روی R^n و مشتق‌پذیر در یک نقطه $c \in R^n$. آن‌گاه اگر $g(c) \neq \circ$ تابع f/g در c مشتق‌پذیر است و

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(c) = \frac{Df(c).g(c) - f(c).Dg(c)}{(g(c))^2}$$

۸- برای توابع زیر تمام نقاطی را به دست آورید که در آن نقاط، توابع مشتق‌پذیر باشند :

الف - $f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)\cos(x_1^2 + x_2^2)$؛

ب - $f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}}$؛

ج - $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)\,\mathrm{Ln}(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2)$؛

د - $f(x_1, x_2) = \tan^{-1}\sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}$؛

هـ - $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)e^{x_1 x_2 x_3}$.

۹- در هر یک از مسایل زیر اوّلاً حوزهٔ تعریف توابع f و g را به دست آورید که توابع بر روی آنها مشتق‌پذیر باشند. ثانیاً حوزهٔ مشتق‌پذیری ترکیب این دو تابع $h = gof$ را پیدا کنید.

همچنین مشتق اول و دوم تابع h را محاسبه نمایید.

الف - $(x_1, x_2) = x \in R^2$، $y = f(x) = x_1^2 + x_2^2$ و $g(y) = \sin y$؛

ب - $y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$، $y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ و $g(y_1, y_2) = e^{y_1}\sin y_2$

ج - $y_i = f_1(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2}$، $y_2 = f_2(x_1, x_2) = \mathrm{Ln}(x_1^2 + x_2^2)$؛

$f = (f_1, f_2)$، $g(y_1, y_2) = \dfrac{y_1}{y_2}$؛

د - $f = (f_1, f_2, f_3)$، $x \in R^2$، $f_1(x) = x_1^2$، $f_2(x) = 2x_1 x_2$، $f_3(x) = x_2^2$ و

$g(y) = \exp(y_1 + y_2 + y_3)$، $y \in R^3$.

هـ - تابع f همان تابع در مسأله د - و $g(y) = \tan^{-1}(y_1 + y_2 + y_3)$

۱۰- فرض کنید g تابعی مشتق‌پذیر بر روی R^2 و $t = (t_1, t_2) \in R^2$ باشد و فرض کنید که $x_1 = f_1(x) = t_1 - t_2$ و $x_2 = f_2(t) = t_2 - t_1$ بـه عـلاوه فـرض بـر ایـن است کـه $h(t) = (gof)(t)$. نشان دهید که به ازای تمام t های متعلّق به R^2، $D_1 h(t) + D_2 h(t) = 0$

۱۱- فـرض کـنید کـه g یک تـابع مشـتق‌پذیر بـر روی R^2 و $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ بـا $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ باشد. به‌علاوه فرض کنید که $y_1 = f_1(x) = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$ و $y_2 = f_2(x) = \dfrac{x_3 - x_1}{x_1 x_2}$.

تابع $h(x) = g(f(x))$ را تعریف کـنید و ثـابت کـنید کـه بـه ازای تـمام xهـا در R^3 و بـا $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ داریم:

$$x_1^2 D_1 h(x) + x_2^2 D_2 h(x) + x_3^2 D_3 h(x) = 0$$

۱۲- مسأله ۱۱ را برای تابع $f = (f_1, f_2)$ با $f_1(x) = x_1^2 - x_2^2 = y_1$ و $y_2 = f_2(x) = x_2^2 - x_1^2$ تکرار کنید با این تفاوت که به ازای تمام $x \in R$، $x_2 D_1 h(x) + x_1 D_2 h(x) = 0$.

۱۳- فرض کنید که f و g توابع دو مرتبهٔ مشتق‌پذیر بر روی R باشند. همچنین فرض کنید که c یک ثابت مثبت باشد. برای $x_1 \in R$ و $x_2 \in R$ تابع

$$h(x) = f(x_1 - cx_2) + g(x_1 + cx_2)$$

را تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $D_{22} h(x) = c^2 D_{11} h(x)$.

۱۴ـ فرض کنید که $f(x)$ یک تابع حقیقی از ردهٔ $C^{۲}$ بر روی $R^{۲}$ باشد. $y_{۱} = g_{۱}(x) + cx_{۲}$ و $y_{۲} = g_{۲}(x) = x_{۱} - c\,x_{۲}$، $g = (g_{۱}, g_{۲})$ تعریف می‌کنیم جایی که c یک ثابت مثبت است. اگر $h = fog$، آن‌گاه $D_{۲۲}f(x) - c^{۲}\,D_{۱۱}f(x)$، $x = (x_{۱}, x_{۲})$ را برحسب h محاسبه نمایید.

۱۵ـ فرض کنید که f یک تابع مشتق‌پذیر حقیقی بر روی $R^{۲}$ و $\nabla f(x)$ گرادیان تابع $f(x)$ باشد. در مختصّات دکارتی داریم $\| \nabla f(x) \|^{۲} = D_{۱}f^{۲}(x) + D_{۲}f^{۲}(x)$. اگر تابع g، تابعی از مختصّات قطبی به مختصات دکارتی $(x_{۱}, x_{۲})$ باشد و $h(r, \theta) = f(g(r, \theta))$. آن‌گاه نشان دهید که:

$$(\| \nabla f)(g(r, \theta)) \|^{۲} = \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^{۲} + \left[\frac{۱}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right]^{۲}$$

۱٦ـ فرض کنید که f همان تابع مسأله ۱۵ باشد و g نیز همان تابع با این تفاوت که $x_{۱} = g_{۱}(r, \theta) = r\cosh\theta$ و $x_{۲} = g_{۲}(r, \theta) = r\sinh\theta$ تابع $h = fog$ تعریف می‌کنیم.

الف ـ عبارت $\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^{۲} - \left[\frac{۱}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right]^{۲}$ را برحسب $D_{۱}f$ و $D_{۲}f$ محاسبه کنید؛

ب ـ نشان دهید که

$$\frac{\partial^{۲} h}{\partial r^{۲}} + \frac{۱}{r}\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) - \frac{۱}{r^{۲}}\left(\frac{\partial^{۲} h}{\partial \theta^{۲}}\right) = D_{۱۱}f - D_{۲۲}f$$

۱۷ـ فرض کنید که $f : R \to R^{n}$ مشتق‌پذیر و $|f(t)| = ۱$ به ازای تمام t ها حقیقی باشد. نشان دهید که $f'(t).f(t) = ۰$ به ازای تمام $t \in R$. این نتیجه را از نقطه‌نظر هندسی توضیح دهید.

۱۸ـ فرض کنید که A یک زیرمجموعهٔ باز در R^{n}، $x_{۰} \in A$ و توابع f و g، توابعی مشتق‌پذیر در $x_{۰}$ و حقیقی باشند. نشان دهید که fg در $x_{۰}$ مشتق‌پذیر و:

$$D(fg)(x_{۰}) = f(x_{۰})\,Dg(x_{۰}) + g(x_{۰})\,Df(x_{۰})$$

۱۹ـ فرض کنید که P و V و T متغیّرهای حقیقی و مثبت هستند که توسط رابطهٔ $pV = kT$ (k یک عدد ثابت مثبت است) تعریف می‌شوند. بنابراین هر یک از این متغیّرها تابعی برحسب دومتغیر دیگر می‌باشد. نشان دهید که:

$$\frac{\partial p}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial p} = -۱$$

همچنین نشان دهید که این معادله، تنها وقتی برقرار است که رابطهٔ $F(p, V, T)$ برای تمام p و V و T در حوزهٔ تعریف F (F یک تابع از ردهٔ $C^{۱}$ است) با $D_{j}F(p, V, T) \neq ۰$، $j = ۱, ۲, ۳$ می‌باشد.

۲۰ - فرض کنید که A یک زیرمجموعهٔ باز در R^n و $f: A \to R$. اگر u بردار واحد در R^n باشد،
الف - ثابت کنید که اگر f در یک نقطه‌ای مانند p مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق‌پذیر $D_u f(p)$ وجود دارد و $D_u f(p) = Df(p).u$.
ب - $n = ۲$ و

$$f(s, t) = \frac{s^۲ t}{s^۴ + t^۲} \quad , \quad (s, t) \neq (۰, ۰)$$

و

$$f(۰, ۰) = ۰ \quad , \quad (s, t) = (۰, ۰)$$

نشان دهید که اگر مشتقّ سویی تابع f در p در جهت هر بردار واحد وجود داشته باشد، آن‌گاه لازم نیست که تابع در p حتماً مشتق‌پذیر باشد. این بدین معناست که اگر مشتقّ تابع در p وجود داشته باشد، آن‌گاه مشتق سویی نیز وجود دارد، اما عکس این مطلب صادق نیست.

۲۱ - فرض کنید که :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^۲ + y^۲} & , \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & , \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

ثابت کنید با وجود این که f در (۰ و ۰) پیوسته نیست اما $D_۱ f$ و $D_۲ f$ در هر نقطه از $R^۲$ موجود است.

۲۲ - فرض کنید که f یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر بر روی یک مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ باشد. همچنین فرض بر این است که f در نقطهٔ $x_۰ \in E$ دارای ماکزیمم موضعی است. ثابت کنید که $f'(x_۰) = ۰$.

۲۳ - اگر f یک تابع مشتق‌پذیر از E، زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ بتوی R^m باشد، به علاوه اگر به ازای هر $x \in E$، $f'(x)$ ۰؛ آن‌گاه f در E ثابت است.

۲۴ - تابع f بر روی $R^۲$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۲x^۲ y - \dfrac{۴x^۶ y^۲}{(x^۴ + y^۲)^۲} & , \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & , \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف - ثابت کنید که به ازای هر $(x, y) \in R^۲$، آن‌گاه :

$$۴x^۴ y^۲ \leq (x^۴ + y^۲)^۲$$

و سپس نتیجه بگیرید که f پیوسته است.

ب ـ تابع $g_\theta(t)$ را به صورت $g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $g_\theta(0) = 0$، $g'_\theta(0) = 0$ و $g''_\theta(0) = 2$ لذا هر، g_θ یک می‌نیمم موضعی اکید در $t = 0$ دارد. به عبارت دیگر تحدید f به هر خط مار بر $(0, 0)$ می‌نیمم موضعی اکیدی در $(0, 0)$ خواهد داشت.

ج ـ ثابت کنید که $(0, 0)$ یک می‌نیمم موضعی برای f نیست، زیرا $f(x, x^2) = -x^4$.

۲۵ـ یک تابع حقیقی بر روی $R^n - \{0\}$ را **همگن و از درجهٔ** k نامند، اگر $(f(tx)) = t^k f(x)$ به ازای هر $x \in R^n$ و $x \neq 0$ هر $t \in R$، $t > 0$. ثابت کنید که اگر تابع f همگن و از درجهٔ k و مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\sum_{j=1}^{n} x_j D_j f(x) = kf(x)$$

[این مطلب را قضیه اولر (اویلر) نامند]

۲۶ـ فرض کنید که $u = u(x, y, z)$ و $v = v(x, y, z)$ و $h(x, y, z) = f(u, v)$.

الف ـ اگر این توابع مشتق‌پذیر باشند، قاعدهٔ زنجیری را برای تابع $h(x, y, z)$ بنویسید.

ب ـ در صورتی که $f(u, v) = u^2 + v \sin u$ و $v = y = \sin x$ و $u = x e^y$ آن‌گاه قاعدهٔ زنجیری را برای تابع h مورد بررسی قرار دهید.

۲۷ـ فرض کنید که $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$ نشان دهید که:

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = y\frac{\partial F}{\partial x}$$

۲۸ـ فرض کنید که $F : R^2 \to R$ یک تابع مشتق‌پذیرباشد که در رابطه $F(x, f(x)) = 0$ و $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ صدق کند. ثابت کنید که $f'(x) = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$ جایی که $y = f(x)$.

۲۹ـ مشتق‌پذیری تابع زیر را مورد بررسی قرار دهید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x, y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۳۰ـ Df توابع زیر را محاسبه کنید:

الف ـ $f : R^3 \to R^2$، $f(x, y, z) = (x^2 y, xe^z)$،

ب - $f : R^3 \to R$ ، $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$

ج - $f : R^2 \to R^2$ ، $f(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$

۳۱- نشان دهید که برای تابع $f : I \subset R \to R^n$ اگر $\frac{df_i}{dx}$ و $i = 1, 2, ..., m$ وجود داشته باشد، آن‌گاه Df وجود دارد.

۳۲- ماتریس ژاکوبین توابع زیر را محاسبه کنید:

الف - $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ب - $f(x, y, z) = (z \sin x, z \sin y)$

ج - $f(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy), x^2y^2)$ د - $f(x, y, z) = x^{y+z}$

د - $f(x, y, z) = (z^{xy}, x^2, \tan(xyz))$ ز - $f(x, y, z) = xyz$

۳۳- فرض کنید که $f : A \subset R^n \to R^m$ و $g : B \subset R^m \to R^p$ از ردهٔ C^2 و $f(A) \subset B$ باشد، آن‌گاه اگر $x_0 \in A$ و $x, y \in R^n$ ثابت کنید که:

$$D^2(gof(x_0))(x, y) = D^2(g(x_0))(Df(x_0).x, Df(x_0).y) + Dg(f(x_0)).D^2f(x_0)(x, y)$$

۳۴- فرض کنید $p : R^n \to R^m$ یک تابع مستوی (تابع خطی به اضافه یک مقدار ثابت) و $f : A \subset R^n \to R^k$ یک تابع k مرتبهٔ مشتق‌پذیر باشد. ثابت کنید که:

$$D^k(fop)(x_0)(x_1, ..., x_k) = D^kf(p(x_0))(Dp(x_0)(x_1), ..., Dp(x_0)x_k)$$

۳۵- در مسایل زیر نقاط بحرانی توابع را تعیین کنید و مشخص کنید که این نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم یا زینی هستند.

الف - $f(x, y) = x^3 + yx^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$ ب - $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$

ج - $f(x, y) = (\cos 2x)\sin y + z^2$ د - $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$

۳۶- فرض کنید $f : R \to R$ و f' بر روی یک همسایگی از $x = a$ وجود داشته باشد و $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l$. آن‌گاه ثابت کنید که $f'(a) = l$ (راهنمایی: از قضیهٔ مقدار میانگین استفاده کنید) به علاوه مشخص کنید که آیا تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & x < 0 \\ 0 , & x \geq 0 \end{cases}$$

می‌تواند مشتق یک تابعی باشد.

۳۷- فرض کنید که $f_n(x) = xe^{-nx}$ ، $x \in [0, \infty)$ ، $n = 0, 1, 2, ...$

الف - نشان دهید که $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ وجود دارد. تابع f را به طور واضح به دست آورید.

ب ـ آیا f یک تابع پیوسته است؟

۳۸ـ فرض کنید که تابع $f: R^2 \to R$ یک تابع همساز (هارمونیک) باشد، یعنی این که $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. به علاوه فرض بر این است که نقطهٔ (x_0, y_0) یک نقطهٔ ماکزیمم اکید موضعی باشد. ثابت کنید که تمام مشتقات جزیی مرتبه دوم تابع f در نقطهٔ (x_0, y_0) مساوی با صفر هستند.

۳۹ـ فرض کنید که توابع حقیقی f_1 و f_2 و f_3 بر روی R مشتق‌پذیر باشند و همچنین فرض کنید که

$$F(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) & f_3(x_3) \end{vmatrix}$$

مشتقات جزیی D_1F، D_2F و D_3F را برحسب مشتقات توابع f_1 و f_2 و f_3 و دترمینان بنویسید.

۴۰ـ می‌دانیم که لاپلاسین یک تابع حقیقی تعریف شده بر روی یک مجموعهٔ باز $U \subset R^n$ به $\nabla^2 f(x)$ نمایش داده می‌شود که برابر است با $\sum_{j=1}^{n} D_{jj} f(x)$. حال اگر این مجموع برابر با صفر باشد، آن‌گاه تابع f را یک تابع همساز نامند، یعنی این که داریم: $\nabla^2 f(x) = 0$ به ازای تمام $x \in U$ برای هر یک از توابع زیر $\nabla^2 f$ را محاسبه کرده و تعیین کنید که آیا تابع همساز است یا نه.

الف ـ $f(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$ ب ـ $f(x) = e^{x} \sin x_2$

ج ـ $f(x) = \mathrm{Ln}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ د ـ $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{(n-1)/2}$

۴۱ـ فرض کنید که تابع f در R^2 از ردهٔ C^2 باشد. زاویهٔ θ معین را در نظر بگیرید. تابع $g = (g_1, g_2)$ را توسط

$$y_1 = g_1(x_1, x_2) = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$$

و

$$y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

تعریف می‌کنیم نشان دهید که: $\forall x \in R^2$ و $\nabla^2 h(x) = (\nabla^2 f)(g(x))$.

این مسأله نشانگر آن است که تحت یک دوران صفحه، حول زاویهٔ θ لاپلاسین تغییر نمی‌کند.

۴۲- فرض کنید که f یک تابع از ردهٔ C^3 در R^3 باشد و $g = (g_1 , g_2 , g_3)$ تابعی که تغییر مختصات کروی به دکارتی را مشخص می‌کند:

$$x_1 = g_1(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \theta \sin \phi$$
$$x_2 = g_2(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \theta \sin \phi$$
$$x_3 = g_3(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \phi$$

فرض کنید که $h = fog$ نشان دهید که:

$$\begin{aligned}(\nabla^2 f)(g(\rho, \theta, \phi)) &= D_{11}\, h(\rho, \theta, \phi) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} D_{22}\, h(\rho, \theta, \phi) \\ &+ \frac{1}{\rho^2} D_{33}\, h(\rho, \theta, \phi) + \frac{2}{\rho} D_1\, h(\rho, \theta, \phi) \\ &+ \frac{\cot \theta}{\rho^2} D_3\, h(\rho, \theta, \phi)\end{aligned}$$

۴۳- فرض کنیدکه تابع g یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر بر روی $U = \{y \in R^2 : y_1 > 0, y_2 > 0\}$ باشد. برای $x = (x_1 , x_2)$ در R^2، فرض کنید که $y_1 = f_1(x) = e^{x_1}$ و $y_2 = f_2(x) = e^{x_2}$ و $f = (f_1 , f_2)$، $h = gof$ نشان دهید که:

$$D_{11}\, h(x) + D_{22}\, h(x) = y_1^2\, D_{11}\, g(f(x)) + y_2^2\, D_{22}\, g(f(x)) + y_1\, D_1\, g(f(x)) + y_2\, g(f(x))$$

۴۴- یک تابع $f = (f_1 , f_2)$ از ردهٔ C^1 از R^2 به R^3 در **معادلات کوشی - ریمن صادق است**، اگر $D_1 f_1 = D_2 f_2$ و $D_2 f_1 = D_1 f_2$ نشان دهید که هر یک از توابع زیر در معادلات کوشی - ریمن صدق می‌کند:

الف - $f_1(x_1 , x_2) = x_1^2 - x_2^2 \quad , \quad f_2(x_1 , x_2) = 2x_1 x_2$

ب - $f_1(x_1 , x_2) = e^{x_1} \cos x_2 \quad , \quad f_2(x_1 , x_2) = e^{x_1} \sin x_2$

ج - $f_1(x) = \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad , \quad f_2(x) = \dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$، $x = (x_1 , x_2)$

د - $f_1(x) = \operatorname{Ln}(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \quad , \quad f_2(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$

۴۵- نشان دهید که اگر به ازای $t \neq 0$، $f(t) = t + 2t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ و $f(0) = 0$، آن‌گاه $f'(0) = 1$ و f' در $(1 \text{ و } -1)$ کراندار است، اما f در هیچ همسایگی از 0 یک به یک نیست. از این مسأله نتیجه بگیرید که در قضیهٔ تابع معکوس باید f' در هر نقطهٔ مورد بررسی از ردهٔ

C^1 باشد، حتی اگر $n = 1$.

۴۶- نشان دهید که دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0, \\ x - y + 2z + u = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0, \end{cases}$$

را می‌توان نسبت به u و y و x برحسب z یا نسبت به u و z و x و برحسب y و یا نسبت به u و z و x و برحسب x حل کرد. اما حلّ آن نسبت به y و z و x و برحسب u میسّر نیست.

۴۷- تابع حقیقی f را در R^2 به صورت $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2$ تعریف می‌کنیم.

الف - نقاطی را که در آن گرادیان f صفر است (نقاط بحرانی) پیدا کنید و نوع آن نقاط را (ماکزیمم - می‌نیمم یا زینی) تعیین نمایید؛

ب - مجموعهٔ تمام نقاط از تابع f را بیابید که در آنها $f(x , y) = 0$. در صورت امکان این مجموعه را از نقطه نظر هندسی توصیف کنید و قضیهٔ تابع ضمنی را برای مسأله مورد بررسی قرار دهید.

۴۸- تابع $f : R^2 - \{0\} \to R^2$ را به صورت

$$f(x, y) = \left(\frac{s^2 - t^2}{s^2 - t^2} , \frac{s_t}{s^2 + t^2}\right)$$

تعریف می‌کنیم. رتبهٔ مشتق این تابع را در یک نقطه $(x, y) \neq (0, 0)$ به دست آورید و نقش تابع f را توصیف کنید.

۴۹- تابع

$$f(x ,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , \ (x ,y) \neq (0 , 0) \\ 0 & , \ (x ,y) = (0 , 0) \end{cases}$$

مفروض است. نشان دهید که این تابع از ردهٔ C^1 در R^2 و مشتقات جزیی تابع f وجود دارند ولی $D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_{21} f(0 , 0)$.

۵۰- فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز در R^n و $f : U \to R^n$ از ردهٔ C' باشد. اگر $f'(p)$ در

هر نقطه $P\in U$ عادی[1] باشد (یعنی این‌که دترمینان این ماتریس مخالف با صفر باشد. در این حالت تابع یک به یک و دارای ماکزیمم رتبه می‌باشد)، آن‌گاه $f(U)$ باز است.

۵۱- تابع $f: R^2 \to R^2$ به وسیلهٔ $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ تعریف می‌شود.

الف ـ نشان دهید که f بر روی نوار $\{(x, y) : -\pi < y < \pi\}$ یک به یک است؛

ب ـ اگر g معکوس f باشد (ثابت کنید که قضیهٔ تابع معکوس برای f برقرار است)، آن‌گاه $g'(۰, ۱)$ را به دست آورید.

۵۲- تابع $f: R^2 \to R^2$ را به صورت $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $Df(p)$ برای $p \neq 0$ معکوس‌پذیر است. فرمول واضحی برای معکوس تابع به دست آورید. قضیهٔ تابع معکوس را برای نقطهٔ (۰ و ۱) مورد بررسی قرار دهید.

۵۳- تابع $g: R^2 \to R^2$ را به وسیلهٔ $g(x, y) = (y\cos x, (x + y)\sin y)$ و $f: R^2 \to R^3$ را به وسیلهٔ $f(x, y) = (x^2 - y, 3x - 2y, 2xy + y^2)$ تعریف کنید.

الف ـ نشان دهید که g یک همسایگی از $(\frac{\pi}{2}$ و ۰$)$ را به یک همسایگی از $(\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2})$ یک به یک و برو نقش می‌دهد؛

ب ـ اگر $h = fog^{-1}$، ماتریس $h'\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

۵۴- معادلات:

$$uz - 2e^{uz} = 0,$$
$$u - x^2 - y^2 = 0,$$
$$v^2 - xy \operatorname{Ln} v - 1 = 0$$

مفروض است. z را برحسب تابعی از (v و u) و (v و u) را برحسب تابعی از (x, y) به طور واضح تعریف کنید. نقش قضیهٔ تابع ضمنی و معکوس را برای این مسأله شرح دهید. همچنین $\frac{\partial z}{\partial x}(0, e)$ را محاسبه کنید.

۵۵- فرض کنید که $f: R^n \to R^n$ و $g: R^n \to R^n$ توابعی از ردهٔ C^1 باشند. تابع $h: R^n \to R^n$ توسط $h(x) = f(g_1(x_1), ..., g_n(x_n))$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که $g = (g_1, ..., g_n)$ و $x = (x_1, ..., x_n)$. نشان دهید که مشتق h در نقطهٔ x برابر است با یک ماتریس $n \times n$ قطری که اعضای قطر $g_1'(x_1)$، $g_2'(x_2)$، ...، $g_n'(x_n)$ می‌باشند.

1. Nan-Singular

۵۶- الف - رابطهٔ بین مختصات دکارتی و قطبی را در نظر بگیرید. نشان دهید که $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}(r_\circ , \theta_\circ) = r_\circ$.

ب - با توجّه به رابطهٔ بین مختصات قطبی و کروی ثابت کنید که:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = r^{۲} \sin y$$

در چه ناحیه‌ای می‌توانیم (r , ϕ , θ) را برحسب (x , y, z) حل کنیم.

۵۷- فرض کنید که f در شرایط قضیهٔ تابع معکوس صدق کند و g معکوس موضعی تابع f، $g = f^{-۱} : W \to V$ باشد. به علاوه فرض کنید که $x_\circ \in U$ و $y_\circ = f(x_\circ)$ نشان دهید که:

$$J_f (x_\circ)D_۱ g_i (y_\circ) = \begin{vmatrix} \delta_{i۱} & D_۱f_۲(x_\circ) & D_۱f_۳(x_\circ) \\ \delta_{i۲} & D_۲f_۲(x_\circ) & D_۲f_۳(x_\circ) \\ \delta_{i۳} & D_۳f_۲(x_\circ) & D_۳f_۳(x_\circ) \end{vmatrix}$$

جایی که $\delta_{ij} = ۱$ اگر $i = j$ و $\delta_{ij} = \circ$ اگر $i \neq j$. از این تساوی رابطهٔ زیر را استنتاج کنید:

$$D_۱ g_۱ = \frac{\partial(f_۲ , f_۳)/\partial(x_۲ , x_۳)}{\partial(f_۱ , f_۲ , f_۳)/\partial(x_۱ , x_۲ , x_۳)}$$

همچنین روابطی برای بقیهٔ مشتقات $D_j g_i$ به دست آورید.

۵۸- تعیین کنید که آیا منحنی $x^۲ + y + \sin(xy) = \circ$ را می‌توانیم برحسب $y = f(x)$ در یک همسایگی از (۰ و ۰) بنویسیم؟ آیا قضیهٔ تابع ضمنی این اجازه را به ما می‌دهد که معادله را به فرم $x = h(y)$ در یک همسایگی از (۰ و ۰) بنویسیم؟

۵۹- فرض کنید $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ یک نقطه از مکان هندسی باشد که توسط $z^۲ + xy - a = \circ$ و $z^۲ + x^۲ - y^۲ - b^۲ = \circ$ تعریف شده است.

الف - تحت چه شرایطی می‌توان این مکان هندسی را نزدیک $(x_\circ$ و $y_\circ$ و $z_\circ)$ برحسب $x = f(z)$ و $y = g(z)$ شرح داد؟ ب - $f'(z)$ و $g'(z)$ را محاسبه کنید.

۶۰- فرض کنید که $f_۱$ و $f_۲$ و $f_۳$ توابعی از ردهٔ $C^۱$ از $R^۴$ به R باشند. شرایط کافی ارائه دهید که معادلات $f_۱(x , y, z , t) = \circ$، $f_۲(x , y, z , t) = \circ$ و $f_۳(x , y, z , t) = \circ$ را برای x و y و z برحسب t حل کنیم.

۶۱- فرض کنید که تابع $f : R^۲ \to R^۲$ در شرایط معادلات کوشی - ریمن صدق کند؛ (به مسأله ۴۴ مراجعه کنید). نشان دهید که $J_f (x , y) = \circ$ اگر و تنها اگر $Df(x , y) = \circ$. بنابراین f به‌طور

موضعی معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $Df(x, y) \neq 0$. همچنین ثابت کنید که معکوس تابع هم در معادلات کوشی - ریمن صدق می‌کند. به علاوه نشان دهید که اگر تابع f در معادلات کوشی - ریمن صدق نکند، آن‌گاه مطلب بالا صحیح نخواهد بود.

۶۲- فرض کنید که $f : R^n \to R^m$ از ردهٔ C^1 و $Df(x_0)$ دارای رتبهٔ m باشد. این بدین معناست که $Df(x_0)$ یک نگاشت برو می‌باشد. آن‌گاه نشان دهید که یک همسایگی از $f(x_0)$ وجود دارد که کاملاً در حوزهٔ مقادیر f قرار خواهد گرفت.

۶۳- نشان دهید که قضیهٔ تابع ضمنی، قضیهٔ تابع معکوس را نتیجه خواهد داد.

۶۴- تابع $f : R^4 \to R^2$ توسط $f(x , y, u, v) = (u^3 + vx + y, uy + v^3 - x)$ داده شده است. در چه نقاطی می‌توانیم $f(x , y, u , v) = 0$ را برای u و v برحسب x و y حل کنیم؟ $\frac{\partial u}{\partial x}$ را محاسبه نمایید.

۶۵- فرض کنید که $f : R \to R$ از رده C^1 و $u = f(x)$ ، $v = -y + xf(x)$ باشد. اگر $f'(x_0) \neq 0$ نشان دهید که این تبدیل نزدیک (x_0 , y) معکوس‌پذیر و دارای فرم زیر است :

$$x = f^{-1}(u) \quad , \quad y = -v + uf^{-1}(u)$$

۶۶- فرض کنید که $f(x , y, z) = x^2 - yz - \sin(xz)$ و

$$g(x , y, z) = (x \cos y, x \sin y \cos z , x \sin y \sin z)$$

مشتقّ fog را محاسبه کنید.

۶۷- آیا ممکن است دستگاه معادلات

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3,$$
$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

را برای $u(x , y, z)$ و $v(x , y, z)$ نزدیک $(x , y, z) = (1, 1, 1)$ و $(u , v) = (1, 1)$ حل کنیم؟

۶۸- فرض کنید که f یک تابع حقیقی بر روی R^2 و از ردهٔ C^2 باشد. به علاوه فرض بر این است که f همگن و از درجه p باشد (به مسأله **۲۵** مراجعه کنید). ثابت کنید که به ازای هر $x \in R^2$ داریم :

$$x_1^2 D_{11} f(x) + 2x_1 \; x_2 D_{12} f(x) + x_2^2 D_{22} f(x) = p(p - 1)f(x)$$

۶۹- فرض کنید که f همگن از ردهٔ C^k و حقیقی بر روی زیرمجموعهٔ بازی در R^n تعریف شده باشد؛ ثابت کنید که هر k امین مشتقّ جزیی f نیز همگن و از درجهٔ $p - k$ می‌باشد.

۷۰- برای a و b معیّن با $0 < a < b$ و $x \in R^3$ فرض کنید که :

$$f(x) = (ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2)\exp(-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

تمام نقاط بحرانی تابع f را به دست آورید. نشان دهید که تابع f دارای یک می‌نیمم و یک ماکزیمم نسبی است و دارای ۴ نقطهٔ بحرانی است که نه ماکزیمم و نه می‌نیمم نسبی هستند.

۷۱- تابع f را در R^3 با ضابطهٔ $f(x, y, z) = x^2y + e^x + z$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $D_1 f(0, 1, -1) \neq 0$ و $f(0, 1, -1) = 0$. بنابراین بااستفاده‌از قضیهٔ تابع ضمنی ثابت کنید که تابعی مانند g در R^2 وجود دارد به طوری که $g(1, -1) = 0$ و $f(g(y, z), y, z) = 0$. همچنین $D_1 g(1, -1)$ و $D_2 g(1, -1)$ را پیدا کنید.

۷۲- تابع $f(x , y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x , y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} , \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) \quad , \quad (x,y) \neq (0,0)$$

رتبهٔ $f'(x , y)$ را محاسبه کنید و برد f را بیابید.

۷۳- $\phi(x , t)$ را برای $t \geq 0$ به صورت:

$$\phi(x,t) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \sqrt{t} \\ -x + 2\sqrt{t} & \sqrt{t} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم برای $t < 0$ قرار می‌دهیم: $\phi(x , t) = -\phi(x , |t|)$. نشان دهید که ϕ بر R^2 پیوسته و $D_2 \phi(x , 0) = 0$ به ازای هر x تابع $f(t)$ را مساوی با $\int_{-1}^{1} \phi(x,t)\,dx$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر $|t| \leq \frac{1}{4}$، آن‌گاه:

$$f'(0) \neq \int_{-1}^{1} D_2 \phi(x , 0)\,dx$$

فصل سوم

انتگرال - فرمهای دیفرانسیلی

بدون شک خوانندگان محترم و دانشجویان عزیز با انتگرال‌گیری و تعریف انتگرال برای توابع حقیقی یک متغیّره و دومتغیّره در ریاضیات عمومی (حسابان) آشنا شده‌اند. در آن جا دیدیم که چگونه می‌توانیم ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم بدون این که دلیل اصلی آن را بدانیم. همچنین دانستیم که به سادگی در محاسبات انتگرال‌گیری از تغییر متغیّر استفاده می‌کنیم. در این جا مطالب را با استدلال ارائه خواهیم داد و انتگرال چندگانه را (بر روی زیرمجموعه‌ای از R^n) تعریف می‌کنیم و تغییر ترتیب و تغییر متغیّر را توضیح خواهیم داد. قضایای مفید برای محاسبهٔ انتگرالهای چندگانه، همانا قضایای فوبینی[1] هستند. این قضایا را برای انتگرال دوگانه بر روی یک مستطیل در ریاضی عمومی مطالعه کرده‌ایم. در این فصل، این مطلب برای انتگرال چندگانه شرح داده می‌شود.

۳.۱. انتگرال چندگانه

همانا در تعریف انتگرال دوگانه از مستطیل در R^2 و یا در تعریف انتگرال سه گانه از حجم در R^3 استفاده کرده‌ایم. در تعریف انتگرال چندگانه نیز از تعریف حجم یک مستطیل در R^n استفاده خواهیم کرد. ابتدا این مستطیل را تعریف می‌کنیم.

1. Fubini

۳.۱.۱. تعریف حجره n - بُعدی

یک مستطیل در R^n را به I^n نمایش می‌دهیم که «یک حجره[1] n بُعدی» نامیده می‌شود. لازم به یادآوری است که «یک حجره» عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط $(x_1, ..., x_n)$ ، $x = (x_1, ..., x_n)$ ، $x \in R^n$ که در نامساوی $a_i \leq x_i \leq b_i$ صدق می‌کنند، در این جا $a_i < b_i$ ، $i = 1, 2, ..., n$ ، اعداد حقیقی هستند. دقّت کنید که اگر $n \geq 3$ ، آن‌گاه $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ را حجم I^n نامند.

۳.۱.۲. تعریف انتگرال

انتگرال چندگانه را می‌توان با تکرار انتگرال‌گیری متوالی محاسبه کرد. لذا به صورت زیر نیز می‌توان آن را تعریف کرد. فرض کنید که I^n یک حجره و f یک تابع پیوسته و حقیقی تعریف شده بر روی I^n باشد؛ قرار می‌دهیم : $f = f_n$ و

$$f_{n-1} = f_{n-1}(x_1, ..., x_n) = \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)\, dx_n$$

چون تابع f_n بر روی I^n پیوسته است، آن‌گاه f_{n-1} نیز بر روی I^{n-1} پیوسته خواهد بود، بنابراین انتگرال زیر موجود است و قرار می‌دهیم :

$$f_{n-2} = \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})\, dx_{n-1}$$

به همین ترتیب f_{n-2} بر روی I^{n-2} پیوسته است زیرا f_{n-1} پیوسته می‌باشد. از این‌رو می‌توان انتگرال f_{n-2} را بر روی I^{n-2} محاسبه کرد. این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا به یک انتگرال یک متغیّره برسیم. در حقیقت این روش انتگرال‌گیری همان توسعهٔ روش انتگرال‌گیری دوگانه و سه گانه می‌باشد.

مثال ۱ : انتگرال دوگانهٔ $\int_A (x+y)x\, dx\, dy$ را بر روی مربع $A: 0 \leq y \leq 1$ و $0 \leq x \leq 1$ محاسبه می‌کنیم :

$$\int_A (x+y)x\, dx\, dy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} \left[x^2 + yx \right] dy \right) dx$$

1. Cell

$$= \int_{\circ}^{\text{۱}} \left(x^{\text{۲}} + \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}x\right) dx = \tfrac{\text{۱}}{\text{۳}} + \tfrac{\text{۱}}{\text{۴}} = \tfrac{\text{۷}}{\text{۱۲}}$$

دقّت کنید که اگر A یک مربع نباشد امّا یک مثلث باشد، آن‌گاه ما تابع را بر روی یک مربع توسعه می‌دهیم به طوری که f خارج از A مساوی با صفر باشد.

مطلب بعدی که مورد بررسی قرار می‌دهیم این است که آیا انتخاب ترتیب انتگرال‌گیری در حاصل انتگرال‌گیری دخالت دارد یا نه. در زیر، قضیه‌ای را ارائه می‌دهیم که شرایط لازم برای عدم‌دخالت ترتیب انتگرال‌گیری در حاصل انتگرال‌گیری توضیح خواهد داد.

۳.۱.۳. تعریف یک مجموعهٔ کراندار

مجموعهٔ $A \subset R^n$ را یک مجموعهٔ کراندار گویند اگر و تنها اگر یک عدد مثبت $M \geq \circ$ وجود داشته باشد به طوری که A زیرمجموعهٔ یک‌گوی به مرکز صفر و شعاع M باشد، یعنی این که $A \subset D(\circ , M)$ بنابراین یک مجموعه کراندار است اگر بتوان آن را در داخل یک‌گوی به مرکز مبدأ جا داد. در نتیجه به ازای هر $x \in A$، $|x| < M$. دقّت کنید که اگر A یک مجموعهٔ باز باشد، آن‌گاه یک پوشش باز $\{u_i\}$ برای آن وجود دارد به طوری که U_i مجموعه‌های باز می‌باشند. مسلماً اگر A فشرده باشد، پس این پوشش دارای تعداد متناهی عضو است.

تعریف یک مجموعه با حجم

فرض کنید که $A \subset R^n$ باشد. یک تابع ویژه‌ای مانند l_A، $l_A : R^n \to R$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$l_A(x) = \begin{cases} \text{۱} & x \in A \\ \circ & x \notin A \end{cases}$$

آن‌گاه A را دارای حجم نامند اگر l_A انتگرال‌پذیر باشد و حجم A عدد زیر است :

$$V(A) = \int_A l_A(x)dx$$

اگر A یک مجموعه کراندار باشد، آن‌گاه انتگرال‌پذیری l_A معنا دارد.

قضیهٔ ۱ : فرض کنید که $A \subset R^n$ یک زیرمجموعهٔ باز و کراندار دارای حجم و همچنین فرض کنید که $g: A \to R^n$ یک نگاشت $C^{\text{۱}}$ و یک به یک با $J_g(x) \neq \circ$ به ازای هر $x \in A$ باشد.

به علاوه فرض بر این است که $B = g(A)$ یک مجموعهٔ کراندار و دارای حجم است. برای تابع $f : B \to R$ قابل انتگرال‌گیری، آن‌گاه $fog|J_g|$ قابل انتگرال‌گیری بر روی A است و داریم :

$$\int_B f = \int_A (fog)\ |J_g|$$

یعنی این که :

$$\int_B f(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n = \int fg(x_1, ..., x_n)\ |J_g|\ dx_1 dx_2 ... dx_n$$

این قضیهٔ به توسعهٔ قضیهٔ فوبینی برای فرمول تغییر متغیّر در انتگرال‌گیری چندگانه معروف می‌باشد. برای اثبات این قضیهٔ به کتاب Marsden مراجعه کنید. در زیر اثبات این قضیه را در حالتهای توابع یک متغیّره و انتگرالهای دوگانه شرح می‌دهم. حالت کلّی‌تر از این قضیهٔ را بعد از ارائه چندین تعریف بیان خواهم کرد.

قضیه ۲ : فرض کنید که g یک تابع حقیقی به طور پیوسته مشتق‌پذیر بر روی بازهٔ $I = [a\ ,\ b]$ و f یک تابع حقیقی پیوسته بر روی $g(I)$ باشد. اگر قرار دهیم : $c = g(a)$ و $d = g(b)$ ، آن‌گاه به ازای تمام x ها در $[a\ ,\ b]$ داریم :

$$\int_a^x f(g(t))g'(t)dt = \int_c^{g(x)} f(y)\, dy$$

و یا :

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_c^d f(y)\, dy$$

اثبات : چون f و g و g' توابعی پیوسته هستند، آن‌گاه $(fog)g'$ نیز بر روی I پیوسته است. دقّت کنید که در حالت کلّی بازهٔ $I = [a\ ,\ b]$ با بازهٔ $J = [c\ ,\ d]$ برابر نیست. به دلیل این که f بر روی $g(I)$ پیوسته است، پس بر روی این بازه انتگرال‌پذیر می‌باشد برای $x \in I$ تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$F(x) = \int_a^x f(g(t))g'(t)dt$$

و توسط قضیهٔ اساسی حساب انتگرال داریم :

$$F'(x) = f(g(t))\, g'(t)$$

برای هر $y \in g(I)$ تابع G را با

$$G(y) = \int_c^y f(z)dz$$

تعریف می‌کنیم؛ بنابراین $G'(y) = f(y)$ و قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌دهد که Gog دارای مشتق و به ازای هر $x \in I$،

$$G'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x) = F'(x)\,, \qquad \forall x \in I$$

یعنی این که :

$$G(g(x)) = \int_c^{g(x)} f(y)dy = F(x) + K = \int_a^x f(g(x))\, g(x) + K$$

از این تساوی رابطهٔ $Gog = F + K$ به دست می‌آید که در آن K مقدار ثابتی است. برای تعیین مقدار K، قرار می‌دهیم: $x = a$، پس $c = g(a)$ و باتوجه‌به تعریف تابع $F(x)$ داریم :

$$F(a) + K = \int_a^a f(g(t))\, g'(t)dt + K = 0 + K$$

$$= \int_c^c f(y)dy = 0$$

در نتیجه $K = 0$ و

$$Gog(x) = F(x) = \int_a^x f(g(t))\, g'(t)dt$$

در این جا حکم قضیه ثابت شده است؛ تنها باید توجه داشت که اگر $x = b$ آن‌گاه :

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(t))\, g'(t)dt$$

مثال ۲: برای $k \in N$، انتگرال $\int_1^e (Ln\,x)\frac{k}{x}\,dx$ را محاسبه کنید.

حل :

قرار می‌دهیم : $g(x) = \text{Ln}\,x$ بر روی بازهٔ $[1, e]$. بنابرایـن: $g(1) = 0$ و $g(e) = 1$ و $g'(x) = \frac{1}{x}$ با این تغییر متغیر داریم :

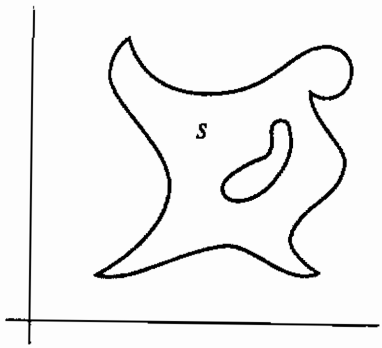
$$\frac{(\text{Ln}\,x)^k}{x} = (g(x))^k \,.\, g'(x) = f(g(x)).g'(x)$$

در نتیجه : $f(y) = y^k$ جایی که $y = g(x)$ و انتگرال به صورت زیر در می‌آید :

$$\int_{1}^{e} (\text{Ln}\ x)\frac{k}{x}\,dx = \int_{0}^{1} y^k\,dy = \frac{1}{k+1}$$

۱.۳.۴. تعریف حوزهٔ ریمانی

یک حوزهٔ ریمانی در R^2 ناحیهٔ کرانداری است که مرز آن شامل تعدادی متناهی از منحنی‌های هموار قابل مستقیم‌سازی باشد (شکل زیر)



فرض کنید که S یک حوزهٔ ریمانی در R^2 و f یک تابع حقیقی کراندار با حوزهٔ تعریف S باشد؛ همچنین فرض کنید که D مجموعهٔ نقاط پیوستگی f بر روی S باشد. آن‌گاه S توسّط مستطیل $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ احاطه می‌شود. اگر f خارج از S صفر فرض شود، آن‌گاه می‌توان f را بر روی مستطیل R توسعه داد. بنابراین می‌توان انتگرال تابع f بر روی R را محاسبه کرد :

$$\iint_S f(x, y)dA = \iint_R f(x, y)dA$$

قضیهٔ ۳: فرض کنید f یک تابع انتگرال‌پذیر و تعریف شده بر روی یک حوزهٔ ریمانی مانند $S' \subset R^2$ باشد. همچنین فرض کنید که T تابعی یک به یک و به طور پیوسته مشتق‌پذیر تعریف شده، بر روی یک مجموعهٔ باز U باشد به طوری که $T(U)$ شامل S' و $J_T \neq 0$ بر روی U باشد. به علاوه فرض کنید که S یک حوزهٔ ریمانی در U است که T آن را به طور یک به یک به S' نقش می‌دهد. آن‌گاه $(foT)\,|J_T|$ بر روی S انتگرال‌پذیر است و

$$\int_S \int (foT)\,|J_T(x\,,\,y)|\;dx\;dy$$
$$=\int_{S'} \int f(u\,,\,v)du'\,,\,dv,$$

جایی که u و v توابعی از x و y هستند.

اثبات این قضیه در کتاب Douglass آمده است. اما با استفاده از فرمهای دیفرانسیلی در بخش ۳.۲ همین کتاب خواهد آمد، به سادگی می‌توانیم ثابت کنیم که : $du \wedge dv = J_T\,dx \wedge dy$ (در بخش ۳.۲ به عنوان مثال توضیح داده خواهد شد). در نتیجه با جایگزین $u = T_1(x, y)$ و $v = T_2(x, y)$ در انتگرال S' بلافاصله قضیه اثبات می‌شود. در بخش ۳.۲ این قضیه را در حالت کلّی $n \geq 1$ اثبات خواهیم کرد.

مثال ۲: فرض کنید که $x = T_1(r, \theta) = r\cos\theta$ و $y = T_2(r, \theta) = r\sin\theta$ آن‌گاه :

$$J_T\,(r\,,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

بنابراین J_T بر روی هیچ مجموعهٔ باز در صفحهٔ θ و r مساوی با صفر نمی‌باشد به شرط آن‌که $r \neq 0$. از طرف دیگر T یک تابع ۱-۱ بر روی بازهٔ $0 \leq \theta < 2\pi$ با $r > 0$ اختیاری می‌شود. در نتیجه می‌توان قضیهٔ ۳ را به کار برد و در این صورت داریم :

$$\int_{(x\,,y)} \int f(x\,,\,y)dx\;dy = \int_{(r\,,\theta)} \int f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)r\;dr\;d\theta$$

این همان مطلبی است که در ریاضیات عمومی (حسابان) آمده است.

قضیهٔ ۴: فرض کنید که

الف - $f(x\,,\,t)$ بر روی $a \leq x \leq b$ و $c \leq t \leq d$ تعریف شده باشد؛

ب - T یک تابع صعودی بر روی $[a\,,\,b]$ است؛

ج - $f' \in R(T)$ به ازای هر $t \in [c\,,\,d]$، $R(T)$ حوزهٔ مقادیر تابع T می‌باشد؛

د - $c < s < d$ و به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x\,,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x\,,s)\right| = \left|D_2 f(x\,,t) - D_2\,T(x\,,s)\right| < \varepsilon,$$

هـ ـ به ازای هر $x\in[a, b]$ و هر $t\in(s-\delta, s+\delta)$ تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)\, dT(x), \qquad c \le t \le d$$

آن‌گاه $(D_{\text{۲}} f)^s \in R(T)$ و $\frac{\partial f^s}{\partial t} = $ و $F'(s)$ وجود دارد و تساوی زیر را داریم:

$$F'(s) = \int_a^b D_{\text{۲}} f(x, s)\, dT(x)$$

در حقیقت این قضیه، نشانگر این مطلب است که: برای یک تابع دومتغیّره f که نسبت به یک متغیر می‌توان آن را مشتق و نسبت به تغییر دیگر می‌توان آن را انتگرال گرفت، شرایطی وجود دارد؛ به طوری که می‌توان جای این دو عمل را عوض کرد.

اثبات: تفاضل زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$A(x, t) = \frac{f(x, t) - f(x, s)}{t - s}, \qquad \text{۰} < |t - s| < \delta$$

بنابر قضیهٔ مقدار میانگین یک عدد u بین t و s وجود دارد به طوری که $A(x, t) = D_{\text{۲}} f(x, u)$.
توجه داشته باشید که حدّ $A(x, t)$ وقتی که $t \to s$ همان مشتقّ جزیی تابع f نسبت به t است. اکنون با استفاده از فرض د ـ داریم:

$$|A(x, t) - D_{\text{۲}}\, \phi(x, s)| < \varepsilon, \qquad \text{۰} \le x \le b, \qquad \text{۰} < |t - s| < \delta \tag{۱}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} = \frac{\int_a^b f(x, t)\, dT(x) - \int_a^b f(x, s)\, dT(x)}{t - s} \tag{۲}$$

$$= \int_a^b \frac{(f(x, t) - f(x, s))\, dT(x)}{t - s}$$

$$= \int_a^b A(x, t)\, dT(x)$$

اکنون با توجه به رابطهٔ (۱)، $A^t \to D_{\text{۲}} f(x, s)$ به طور یکنواخت همچنانکه $t \to s$. پس $D_{\text{۲}} f(x, s) \in R(T)$ زیرا بنا بر فرض، به ازای هر t، $A^t \in R(T)$. کافی است ثابت کنیم که $F'(s)$ وجود دارد و برابر با انتگرال داده شده است. رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که اگر $s \to t$ پس

$\frac{F(t) - F(s)}{t - s}$ به سمت $F'(s)$ (به توضیح زیر توجه کنید) و $A(x, t)$ به سمت $D_2 f(x, t)$ میل خواهد کرد. در نتیجه داریم :

$$\lim_{t \to s} \frac{F(t) - F(s)}{t - s} = F'(s) = \lim \int_a^b A(x, t) dT(x) = \int_a^b D_2 f(x, s) dT(x).$$

توضیح : در این جا توجه داشته باشید که چون حدود انتگرال به t وابسته نیست، لذا می‌توان حد را به داخل انتگرال برد. این مطلب را همچنین می‌توان از قضایای آنالیز استفاده کرد. فرض کنید که T یک تابع صعودی بر روی $[a, b]$ و $f_n \in R(T)$ بر روی $[a, b]$، $n = 1, 2, \dots$ باشد. اگر فرض شود که f_n به طور یکنواخت بر روی $[a, b]$ به سمت f میل می‌کند، آن‌گاه داریم :

$$\int_a^b f\, dT = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\, dT$$

دقت کنید که ممکن است $a = -\infty$ و $b = \infty$ باشد. بنابراین حدّ سمت راستِ رابطهٔ (۲) وجود دارد و در نتیجه $F'(s)$ موجود است.

مثال ۳: فرض کنید که :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt)\, dx, \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \sin(xt)\, dx.$$

ادّعا می‌کنیم که $f'(t) = g(t)$. در این جا باید توجه داشت که هر دو انتگرال وجود دارد زیرا وقتی که $x \to \pm\infty$ آن‌گاه توابع زیر انتگرال به واسطهٔ تابع نمایی e^{-x^2} به سمت ۰ میل خواهند کرد. دقّت کنید که تابع زیر انتگرال $f(t)$ از نظر قدرمطلق از e^{-x^2} و تابع زیرانتگرال $g(t)$ از نظر قدرمطلق از $|x| e^{-x}$ کوچکتر هستند. از طرف دیگر انتگرالهای نامبرده این دو تابع همگراست. در نتیجه هر دو انتگرال فوق وجود دارند.

اثبات ادعا: تساوی زیر برقرار است :

$$\frac{1}{\beta} \int_\alpha^{\alpha+\beta} (\sin\alpha - \sin t) dt = \frac{1}{\beta} [\, t \sin\alpha + \cos t\,]_\alpha^{\alpha+\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta} [(\alpha + \beta) \sin\alpha + \cos(\alpha + \beta) - \alpha \sin\alpha - \cos\alpha]$$

$$= \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha}{\beta} + \sin \alpha$$

حال چون توابع سینوسی همواره از ۱ کوچکتر یا با آن مساوی هستند و توابع سینوسی با افزایش زاویه زیاد می‌شوند، پس داریم :

$$|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta|$$

در نتیجه :

$$\beta > 0 , \quad \left|\frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} (\sin\alpha - \sin t)dt\right| \leq \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} |\sin\alpha - \sin t| \, dt$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} |\alpha - t| \, dt \leq \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}t^2 - at\right)_{\alpha}^{\alpha+\beta}$$

$$\leq \frac{1}{2}\beta$$

بنابراین :

$$\left|\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha}{\beta} + \sin\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\beta < \beta$$

اگر β را مثبت انتخاب نکنیم، آن‌گاه به جای β از $|\beta|$ استفاده می‌کنیم :

$$\left|\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha}{\beta} + \sin\alpha\right| < |\beta|$$

این نامساوی به ازای هر β برقرار است. در این رابطه برای یک $h \neq 0$ قرار می‌دهیم : $\beta = xh$, $\alpha = xt$ و معینی آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\left|\frac{\cos(xt + xh) - \cos(xt)}{xh} + \sin xt\right| \leq |xh|$$

اکنون تفاضل زیر را محاسبه می‌کنیم :

$$\frac{f(t + h) - f(t)}{h} - g(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2}\cos(xt + xh) - e^{-x^2}\cos xt)dx}{h}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\sin xt \, dx ,$$

و یا :

$$\left|\frac{f(t + h) - f(t)}{h} - g(t)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{xe^{-x^2}(\cos(xt + xh) - \cos xt)}{xh} + \sin xt\right| dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| xe^{-x^2} \right| . \left| xh \right| dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| h \right| x^2 e^{-x^2} dx$$

حال اگر $h \to 0$، آن‌گاه سمت راست نامساوی بالا به سمت صفر میل خواهد کرد و لذا سمت چپ نیز به سمت صفر میل می‌کند و این ادّعا ثابت می‌شود.

همان طوری که در ریاضیات عمومی آمده است ترتیب انتگرال‌گیری در حاصل انتگرال‌گیریهای چندگانه تأثیری ندارد. در این جا این مطلب برای انتگرالهای بیش از سه گانه یا به طور کلی انتگرال‌گیری بر روی یک مستطیل در R^n یا یک حجره مانند I^n توضیح داده خواهد شد.

قضیهٔ ۵: فرض کنید که f یک تابع حقیقی پیوسته بر روی I^n ($f \in C(I^n)$) باشد. آن‌گاه انتگرال تابع f بر روی I^n به ترتیب انتگرال‌گیری بستگی ندارد.

اثبات: فرض کنید که $L(f)$ و $L'(f)$ انتگرال تابع f بر روی I^n با ترتیب متفاوت باشند. ثابت می‌کنیم که $L(f) = L'(f)$. ابتدا حالت خاص را در نظر می‌گیریم، یعنی این که فرض می‌کنیم تابع $h(x) = h_1(x_1) ,..., h_n(x_n)$ به طوری که $h_i : R \to R$ و $x = (x_1, x_2 ,..., x_n)$، $x \in R^n$ در حقیقت $h(x)$ تابعی است که قابل تبدیل به حاصل‌ضرب توابع متغیّرهای جداپذیر می‌باشد. در این حالت به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که ترتیب انتگرال‌گیری در حاصل انتگرال تأثیر ندارد زیرا داریم:

$$L(h) = \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i) dx_i = \int_{a_1}^{b_1} h_1(x_1) dx_1 \int_{a_2}^{b_2} h_2(x_2) dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} h_n(x_n) dx_n = L'(h)$$

حال اگر A را جمع متناهی این نوع توابع در نظر بگیریم، آن‌گاه قضیه در مورد اعضای آن برقرار است. A یک جبر از توابع بر روی I^n است؛ یعنی این که قوانین جمع و ضرب در مورد توابع متعلق به A برقرار است. یا به عبارت دیگر اگر $f_1 , f_2 \in A$، آن‌گاه $f_1 + f_2 \in A$ و $Cf_1 \in A$ جایی که C یک اسکالر است. قضیهٔ استون وایراشتراس (به کتاب Rudin مراجعه کنید) بیان کنندهٔ این مطلب است که همواره تابعی مانند $g \in A$ وجود دارد به طوری که:

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \quad , \quad x \in I^n \tag{1}$$

توجه داشته باشید که تابع f بر روی یک مجموعهٔ فشرده مانند I^n تعریف شده است، لذا

می‌توان قضیهٔ استون و ایراشتراس رابه‌کار برد (می‌دانید که هر حجرهٔ n بُعدی یک مجموعهٔ فشرده است) فرض کنیم $\nu = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. نرم یک تابع مانند $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in I^n\}$$

حال رابطهٔ (۱) و تعریف نرم بالا بلافاصله نتیجه می‌شود که : $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{\nu}$

اکنون تفاضل $L(f)$ و $L(g)$ را محاسبه می‌نماییم :

$$\begin{aligned}
|L(f-g)| = |L(f) - L(g)| &= \left| \int_{I^n} (f(x) - g(x))\,dx \right| \\
&\leq \int_{I^n} |(f(x) - g(x))|\,dx \\
&\leq \int_{I^n} \|(f - g\|\,dx \\
&< \int_{I^n} \frac{\varepsilon}{\nu}\,dx \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{\nu} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

بنابراین داریم :

$$|L(f-g)| < \varepsilon$$

متشابهاً می‌توان نتیجه گرفت که $|L'(f-g)| < \varepsilon$ زیرا $L(g) = L'(g)$ چون $g \in A$. البته دقت شود که $L(f)$ و $L'(f)$ ممکن است تنها در یک علامت با هم متفاوت باشند. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}
|L(f) - L'(f)| &= |L(f) - L(g) + L'(g) - L'(f)| \\
&\leq |L(f) - L(g)| + |L'(g) - L'(f)| \\
&\leq (\varepsilon + \varepsilon = ۲\varepsilon)
\end{aligned}$$

چون ε دلخواه بود، پس حکم قضیه برقرار است.

۳.۲. توابع انتگرال‌پذیر

در مباحث ریاضیات عمومی و آنالیز مقدماتی در مورد این نوع توابع، به خصوص توابع یک متغیّره و دومتغیّره و حتی سه متغیّره بحث شده است. اما در این جا از توابع انتگرال‌پذیر بر روی R^n صحبت خواهیم کرد.

فرض کنید که $f : A \subset R^n \to R$ یک تابع کراندار با حوزهٔ کراندار A باشد. همچنین فرض کنید که مستطیل $B = [a_1 , b_1] x ... x [a_n , b_n]$ شامل A باشد. به علاوه فرض بر این است که f بر روی نقاطی از مستطیل که متعلّق به A نیست مساوی با صفر باشد. هر یک از این بازه‌های $[a_i , a_i]$ ، $i = 1 , 2 ,..., n$ را به صورت افراز تقسیم می‌کنیم، یعنی این که هر یک از این بازه‌ها را توسط نقاط $x^i_1 ,..., x^i_{mi}$ تقسیم می‌کنیم. حجم این مستطیل را برابر با $V(B) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ در نظر می‌گیریم. این افراز را به p و $L(f , p)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$L(f , p) = \sum_{R \in p} \left[\inf\{f(x) : x \in R\right] V(R)$$

جایی که R مستطیلهای حاصل شده از افراز p است و مجموع بر روی این مستطیلها محاسبه می‌شود. همچنین $U(f , p)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود.

$$U(f , p) = \sum_{R \in p} \left[\sup\{f(x) : x \in R\}\right] V(R)$$

اکنون با توجه به تعاریف بالا مشاهده می‌شود که برای هر افراز $L(f , p) \le U(f , p)$. حال فرض کنیم p' افراز دیگری باشد که هر زیرمجموعهٔ آن به p متعلّق است، p' را تظریف[1] p نامند. بنابراین $L(f , p) \le L(f , p')$ و $U(f , p') \le U(f , p)$ در حقیقت مستطیل اوّلیه را تقسیم کرده و باز ممکن است این تقسیمات کوچک وکوچکتر شوند. درست مانند حالت $n = 1$ برای تعریف انتگرال ریمانی. مجموعه‌ای از $L(f , p)$ و $U(f , p)$ به ازای هر افراز یک مجموعه کراندار پایین که دارای یک inf است قرار می‌دهیم :

$s = \sup\{L(f , p)$: یک‌افزار است $p\}$

و $S = \inf\{U(f , p)$: هرافزار است $p\}$ ؛ آن‌گاه $s \le S$. این نماد تعریف زیر را ارائه می‌دهد:

1. Refinement

۳.۲.۱. تعریف انتگرال‌پذیر ریمانی

$\overline{\int_A} f = S$ را انتگرال پایینی نامیده می‌شود. اگر $\underline{\int_A} f = s$ و f انتگرال بالایی $s = S$، آن‌گاه انتگرال‌پذیر ریمانی نامند و انتگرال f بر روی A توسط عبارات زیر تعریف می‌شود:

$$\int_A f = \sup\{L(f,p) : \text{است یک‌افراز } p\}$$

$$= \inf\{U(f,p) : \text{است یک‌افراز } p\}$$

به جای $\int_A f$ از نماد $\int_A \cdots \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1, ..., dx_n$ استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۶ (*قضیه داربو*)[1]: فرض کنید که $A \subset R^n$ یک مجموعه کراندار و قرار گرفته در یک مستطیل S باشد. همچنین فرض کنید که f یک تابع کراندار بر روی A و قابل توسعه بر روی S با تعریف $f = 0$ خارج از A باشد. آن‌گاه f یک تابع انتگرال‌پذیر با انتگرال I است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به طوری اگر p هرافراز با زیر مستطیلهای $S_1, ..., S_N$ با قطرهای کمتر از δ و اگر $x_1 \in S_1, ..., x_N \in S_N$ باشد، آن‌گاه:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) V(S_i) - I \right| < \varepsilon$$

حاصل جمع $\sum_{i=1} f(x_i)V(s_i)$ یک جمع ریمانی نامیده می‌شود.

شرط ریمانی: وسیلهٔ مهمی برای اثبات بسیاری از خواص انتگرال است.

---

1. Darboux Theorem

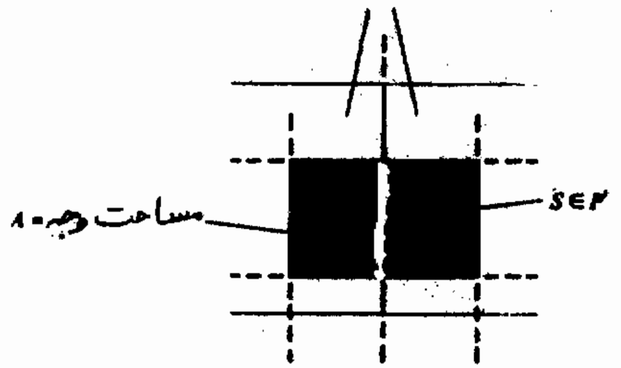
۳.۲.۲. شرط ریمانی

f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد، یک افراز P_ε از S به طوری که $0 \leq U(f_1, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$

اثبات: برای اثبات قضیهٔ داربو و شرط ریمانی از چهار مرحله استفاده می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: ثابت می‌شود که f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر f در شرط ریمانی صدق کند،

مرحلهٔ دوم: ثابت می‌شود که f در شرط قضیهٔ داربو صدق می‌کند اگر و تنها اگر f انتگرال‌پذیر باشد. بنابراین اگر حکم قضیهٔ داربو اثبات شود، آن‌گاه انتگرال‌پذیری و شرط ریمانی نیز اثبات خواهد شد. برای این منظور ثابت می‌کنیم اگر p یک افراز با مستطیل $B \subset R^n$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد. به طوری که هر افراز دیگری مانند p' با زیرمستطیلهای با قطرهای کمتر از δ مجموع حجمهای زیرمستطیلهای p' که کاملاً در یک مستطیل از افراز p نیستند کمتر از ε خواهد شد. فرض کنید که p تشکیل شده از مستطیلهای $V_1, ..., V_m$ باشد. مساحت کُل وجه‌هایی را که بین هر دو مستطیل قرار می‌گیرند با T نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم: $\delta = \frac{\varepsilon}{T}$ و p' را هر افرازی در B در نظر می‌گیریم که زیرمستطیلهای آن قطرهای کمتر از δ داشته باشند. آن‌گاه برای هر مستطیل مانند $S \in p'$ به طوری که S داخل یکی از V_i نباشد، می‌توان فرض کرد که S در دو مستطیل مجاور هم واقع شود (بنابراین اگر T_1 مساحت وجه مشترک این دو مستطیل مجاور باشد، آن‌گاه چون قطر S از δ کمتر است پس $U(s) \leq \delta T$ و در نتیجه $\sum_{s \in p'} U(s) < \delta T = \varepsilon$ (به شکل زیر مراجعه کنید).



از طرف دیگر چون f کراندار است، آن‌گاه وجود دارد: $M > 0$ به طوری که به ازای تمام $x \in s$، $|f(x)| < M$. وجود دارد افرازهای p_1 و p_2 از S به طوری که $I - L(f, p_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ و

$U(f, P_۲) - I < \frac{\varepsilon}{۲}$. یک افراز مانند p را طوری انتخاب می‌کنیم که تظریف هر دو $p_۱$ و $p_۲$ باشد. آن‌گاه خواهیم داشت: $I - L(f, p) < \frac{\varepsilon}{۲}$ و $U(f, P) - I < \frac{\varepsilon}{۲}$. توسط مرحلهٔ اول $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که برای هر افراز p با زیرمستطیلهایی با قطرهای کمتر از δ، حاصل جمع حجمهای زیرمستطیهایی که در زیرمستطیلهای حاصل از p قرار نگیرند، کمتر از $\frac{\varepsilon}{۲M}$ است. حال فرض کنید $S_۱, ..., S_N$ یک افرازی در زیرمستطیلهای با قطرهای کمتر از δ باشد، به طوری که $S_۱, ..., S_K$ زیرمستطیلهایی هستند که در داخل زیرمستطیلهای p باشند $S_{K+۱}, ..., S_N$ باقی‌مانده زیرمستطیلهای در p نباشند آن‌گاه:

$$\sum_{i=۱}^{N} f(x_i)V(S_i) = \sum_{i=۱}^{K} f(x_i)V(S_i) + \sum_{i=K+۱}^{N} f(x_i)V(S_i)$$

$$\leq \left[U(f, p) + M. \frac{\varepsilon}{۲M} = U(f, p) + \frac{\varepsilon}{۲}\right]$$

$$< I + \varepsilon$$

متشابهاً داریم:

$$\sum_{i=۱}^{N} f(x_i) V(S_i) \geq L(f,p) - \frac{\varepsilon}{۲} > I - \varepsilon$$

بنابراین

$$\left| \sum_{i=۱}^{N} f(x_i) V(S_i) - I \right| < \varepsilon \quad .$$

■

اثبات مرحلهٔ اوّل: فرض کنید که f انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > ۰$ یک افراز p'_ε وجود دارد. به طوری که $U(f, P_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{۲}$ جایی که $I = \int_A f$. این نامساوی برقرار است زیرا بنا به تعریف $I = \inf\{U(f, p) : \text{یک افراز است } p\}$. حال اگر p تظریف p'_ε باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$U(f, p) \leq U(f, p'_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{۲}$$

متشابهاً p''_ε را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$L(f, p''_\varepsilon) > I - \frac{\varepsilon}{۲}$$

با فرض $p_\varepsilon = p'_\varepsilon \cup p''_\varepsilon$ اگر p تظریف p_ε باشد، آن‌گاه داریم:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, p) \leq U(f, p) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین :

$$0 \leq U(f, p) - L(f, p) < \varepsilon$$

که همان شرط ریمانی می‌باشد.

برعکس: فرض کنید که f در شرط ریمانی صدق کند؛ آن‌گاه برای هر $\varepsilon = 0$ یک p_ε وجود دارد به طوری که $0 \leq U(f, p_\varepsilon) - L(f, p_\varepsilon) < \varepsilon$. این نامساوی بدین معناست که $S = s$. در حقیقت برای هر p داریم :

$$L(f, p) \leq s \leq S \leq U(f, p)$$

بنابراین اگر $\varepsilon > U(f, p_\varepsilon) - L(f, p_\varepsilon)$، آن‌گاه $S - s < \varepsilon$ چون $\varepsilon > 0$ دلخواه بود در نتیجه $S = s$ که همان تعریف انتگرال‌پذیری f است.

اثبات مرحلهٔ دوّم: فرض کنید که f در شرط داربو صدق کند. ثابت خواهیم کرد که I داده شده در قضیهٔ داربو برابر با $S = \inf\{U(f, p) : p$ یک افراز است$\}$ است. برای اثبات، دقت کنید که برای $\varepsilon > 0$ داده شده یک افراز مانند p چنان می‌سازیم که $|U(f, p) - I| < \varepsilon$. این نشان دهندهٔ $I \leq S$ می‌باشد.(چرا؟)متشابهاً $I \leq s$ خواهیم‌داشت،پس $I \leq s \leq S \leq I$ و درنتیجه $s = S = I$.
برای ساختن افراز p به روش زیر عمل می‌کنیم: $\delta > 0$ را طوری انتخاب کنید که p یک افراز با قطرهایی کوچکتر از δ باشد آن‌گاه داریم :

$$|\Sigma f(x_i) V(S_i) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

جایی که $S_1, ..., S_N$ افراز p را می‌سازد. اکنون x_i را طوری انتخاب می‌کنیم که :

$$|f(x_i) - \sup_{S_i}(f)| < \frac{\varepsilon}{V(S_i) 2N} \quad (*)$$

آن‌گاه :

$$|U(f, p) - I| \leq |U(f, p) - \Sigma f(x_i)V(S_i)| + |\Sigma f(x_i)V(S_i) - I|$$

حال با توجه به نامساوی (*) داریم :

$$|U(f, p) - \Sigma f(x_i)V(S_i)| < \left(\sum \frac{\varepsilon V(S_i)}{V(S_i) 2N} = \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

بنابراین $|U(f, p) - I| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ، بدین‌گونه مطلب ثابت شده است.

برعکس: فرض کنید که f انتگرال‌پذیر باشد، با انتگرال I در اثبات قضیهٔ داربو نشان دادیم که برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر p یک افراز در مستطیل $S_1, ..., S_N$ با قطرهای کوچکتر از δ باشد و اگر $x_i \in S_i$، N، ...، $i = 1, 2$ آن‌گاه داریم:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i)V(S_i) - I \right| < \varepsilon$$

در این جا قضیه اثبات شده است.

مثال ۴: حاصل جمع ریمانی را برای $f : [a , b] \to R$ محاسبه کنید و از نقطه نظر هندسی تعبیر نمایید.

حل:

فرض کنید که $p : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ یک افراز و $z_i \in [x_i , x_{i+1}]$ باشد. با استفاده از تعریف حاصل جمع ریمانی داریم:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(x_{i+1} - x_i)$$

که مساحت کل مستطیلهای نشان داده شده در شکل زیر می‌باشد. مساحت مستطیلهای زیر محور x ها با علامت منفی به حساب آمده است. بنابراین $L(f, p) \leq R \leq U(f, p)$ در نتیجه قضیهٔ داربو برقرار است.

مثال ۵: نشان دهید که $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (با استفاده از تعریف انتگرال).

حل :

بازهٔ [۱و ۰] رابه n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم: $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$,..., $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.

این تقسیم‌بندی را به‌عنوان یک افراز درنظر می‌گیریم و دقت می‌کنیم که بر روی بازهٔ $\left[\frac{i}{n}, \frac{(i+1)}{n}\right]$ تابع $f(y) = x$ دارای $\inf = \frac{i}{n}$ و $\sup = \left(\frac{i+1}{n}\right)$ می‌باشد. بنابراین داریم :

$$U(f, p) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i+1}{n}\right] \left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)$$

و

$$= \frac{1}{n^2} \frac{1}{2} n(n+1),$$

و

$$L(f,p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(0 + 1 + \ldots + (n-1))$$

یادآوری: $1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)$. بنابراین

$$U(f, p) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad , \quad L(f, p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

هر دوی این عبارات به سمت $\frac{1}{2}$ میل می‌کند همچنان که $n \to \infty$. بنابراین بنا بر شرط ریمانی مشاهده می‌کنیم که f انتگرال‌پذیر و مقدار آن برابر با $\frac{1}{2}$ است.

در این بخش مجدّداً به تعریف انتگرال یک تابع بر روی یک مجموعه بر می‌گردیم و برخی از مطالب را در حالت کلّی بیان می‌کنیم.

۳.۳. تعریف تکیه‌گاه (محمل)[1]

تکیه‌گاه یک تابع $f(x)$ برروی R^n عبارت است از بستار مجموعهٔ تمام نقاطی که در آن $f(x) \neq 0$. دقت کنید که خارج از تکیه‌گاه نیازی نیست که تابع $f(x) = 0$ بلکه ممکن است اصلاً تعریف نشده باشد. اگر این مجموعه فشرده باشد، آن‌گاه تکیه‌گاه را فشرده می‌نامند. حال اگر انتگرال تابعی با تکیه‌گاهی در I^n تعریف شده باشد پس داریم :

1. Support

$$\int_{Q^n} f = \int_{I^n} f \qquad (۱)$$

این مطلب در بخش قبلی بدون ذکر نام تکیه گاه توضیح داده شده است. معمولاً تکیه گاه فشرده بیشتر مورد توجّه است.

فرض کنید که Q^n شامل تمام نقاطی در R^n با خاصیت زیر باشد: $x\in R^n$, $x = (x_1 ,..., x_n)$ با $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq 1$, $x_i \geq 0$ $i = 1, 2,..., n$ برای مثال اگر $n = 3$ آن‌گاه این مجموعه یک چهار وجهی 0 , e_1 , e_2 , e_3 در R^3 می‌باشد. یک چنین مجموعه‌ای را سادک[1] نامند. حال فرض کنید که تابع f بر روی Q^n پیوسته باشد، پس انتگرال f بر روی Q^n وجود دارد. اگر I^n را مکعب واحد در نظر بگیریم، در نتیجه Q^n در I^n قرار دارد. حال ثابت می‌کنیم که می‌توان انتگرال f بر روی Q^n را تا انتگرال بر روی I^n توسعه داد. با توجه به این که ممکن است تابع f در I^n تعریف نشده نباشد. در حقیقت ثابت می‌کنیم که (توجه داشته باشید که Q^n تکیه گاه f است) اگر f بر روی I^n تعریف شده و پیوسته باشد. اولین حالت رابطهٔ (۱) مورد بررسی قرار نخواهد گرفت. لذا فرض را بر این می‌گذاریم که f بر روی I^n پیوسته نباشد، با وجود این رابطهٔ (۱) برقرار خواهد بود.

اثبات : تابع $\phi(t)$ را برای $0 < \delta < 1$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1-\delta \\ \dfrac{1-t}{\delta} & 1-\delta < t \leq 1 \\ 0 & 1 < t \end{cases}$$

همچنین تابع $F(x)$ را بر روی I^n با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم :

$$F(x) = \phi(x_1 + x_2 + ... + x_n) f(x), \quad x \in I^n$$

حال ادّعا می‌کنیم که : $F \in C(I^n)$

اثبات ادعا : بنا بر فرض، f بر روی Q^n پیوسته است ولی ممکن است بـه ازای $x \in I^n - Q^n$ عـدم‌پیوستگی داشـته بـاشد. از طـرف دیگـر نـقاط x مـتعلّق بـه $I^n - Q^n$ بـاید در نـامساوی $1-\delta \leq x_i \leq 1$ و $i = 1 , 2 ,..., n$ صدق می‌کنند زیرا اگر $x_i \geq 0$ ، $i = 1 , 2 ,..., n$ آن‌گاه $x \in Q^n$ و با توجه به این که قرار می‌دهیم $t = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ، پس به ازای $x \in I^n - Q^n$ آن‌گاه $\phi(t) = \frac{1-t}{\delta}$. بنابراین ناپیوستگی تابع f در بازهٔ $-\delta < t \leq 1$ قرار می‌گیرد. با قرار دادن

1. Simplex

$(x_1, \ldots, x_{n-1}) = y$ و $x = (y, x_n)$، آن‌گاه به ازای هر $y \in I^{n-1}$ مجموعه از تمام x ها که در نامساوی $f(y, x_n) \neq F(y, x_n)$ صدق کند یا مجموعه‌ای تهی است و یا این که طول هر قطعهٔ آن بیش از δ نمی‌باشد، زیرا اگر :

$F(y, x_n) \neq f(y, x_n)$ آن‌گاه با توجه به تعریف $F(x)$، $\phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \neq 1$. در نتیجه $\phi(t) = 0$ و یا $\phi(t) = \frac{1-t}{\delta}$، $t = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ در این حالت $1 - \delta < t \leq 1$ و بنابراین $1 - \delta < y + x_n \leq 1$ و یا $1 - \delta - y < x_n < 1 - y$، لذا طول نقاط x_n بیشتر از δ نیست. اگر $\phi(t) = 0$ در این صورت $F(y, x_n) = 0$، پس $t > 1$ که در آن $f(y, x_n) = 0$ و در نتیجه $F(y, x_n) = f(y, x_n)$ که برخلاف فرض می‌باشد. لذا در این حالت تنها $\phi(t) = \frac{1-t}{\delta}$ قابل قبول است. از طرف دیگر چون $0 \leq \phi(t) \leq 1$ پس داریم :

$$|F_{n-1}(y) - f_{n-1}(y)| = \left| \int_{a_n}^{b_n} F_n(y, x_n) - f_n(y, x_n)\, dx \right|$$

$$\leq \int_{a_n}^{b_n} |F_n(y, x_n) - f_n(y, x_n)|\, dx$$

$$\leq \int_{a_n}^{b_n} |\phi(y + x_n) f_n(y, x_n) - \phi_n(y, x_n)|\, dx$$

$$\leq \int_{a_n}^{b_n} (\phi(y + x_n) - 1| \; |f_n(y, x_n)|\, dx$$

$$\leq \int_{a_n}^{b_n} |f_n(y, x_n)|\, dx \leq \left(\int_{a_n}^{b_n} \|f\|\, dx \right) = \left(\|f\| \, (b_n - a_n) \right)$$

بنابراین :

$$|F_{n-1}(y) - f_{n-1}(y)| \leq \|f\| \delta \qquad (*)$$

در این جا دقت کنید که چون x_n ها بر روی یک خط با طول کمتر از ۱ قرار دارند، پس به جای $|x_n|$ از بیشترین مقدار آن یعنی ۱ استفاده نمودیم. از رابطهٔ (*) نتیجهٔ زیر را می‌توان استنتاج کرد. (دقت کنید که از تعریف انتگرال نیز استفاده شده است).

$$\left| \int_{I^n} F(x)\, dx - \int_{I^n} f(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_{a_n}^{b_n} F_n(y, x_n)\, dx - \int_{a_n}^{b_n} f_n(y, x_n)\, dx_n \right|$$

$$= |F_{n-1}(y)(b_n - a_n) - f_{n-1}(y)(b_n - a_n)|$$

$$\leq |F_{n-1}(y) - f_{n-1}(y)|\ \delta \leq \delta^2\ \|f\|$$

حال اگر $\delta > 0$ کوچک انتخاب کنیم پس $\delta^2 < \delta$ و همچنان که $\delta \to 0$ آن‌گاه f_n حدّ یکنواخت از دنبالهٔ یک تعداد توابع پیوسته است، چون انتگرال $\int_{I^n} F_n$ موجود است، پس $\int_{I^n} f_n$ به ازای هر n موجود است.

۳.۳.۲. تعریف تابع اوّلیه[1]

فرض کنید تابع G تابعی از یک بازهٔ باز $E \subset R^n$ به R^n باشد. اگر یک عدد صحیح مانند m و یک تابع حقیقی مانند g با حوزهٔ تعریف E وجود داشته باشد به طوری که:

$$G(x) = \sum_{i \neq m} x_i e_i + g(x) e_m \quad , x \in E$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + e_m(g(x) - x_m)$$

$$= x + e_m(g(x) - x_m)$$

آن‌گاه تابع G را **تابع اوّلیه** نامند. یک تابع اولیه حداکثر یک مختص را تغییر می‌دهد.

مشتق‌پذیری تابع G به تابع g بستگی دارد زیرا نسبت به تمام مؤلفه‌های x به جز مؤلفهٔ m ام از ردهٔ ∞ است حال اگر تابع g از ردهٔ C^r ، $r \geq 1$ ، باشد آن‌گاه تابع اوّلیه $G(x)$ نیز از ردهٔ C^r ، $r \geq 1$ است. فرض کنید که g از ردهٔ C^1 باشد، آن‌گاه داریم :

$$x = (x_1, ..., x_n)$$

$$G(x) = (x_1, ..., x_n) + (g(x_1, ..., x_n) - x_m)\, e_m ,$$

1. Primetive Function

$G = (G_1 ,..., G_n) + G_i(x) = x_i , i \neq m$

$G_m = g(x)$

$$G'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ژاکوبین تابع G در هر نقطه برابر است با :

$$\det G'(x) = J_G(x) = 1 \times 1 \times \ldots \times \frac{\partial g(x)}{\partial x_m} \times 1 \times \ldots = \frac{\partial g(x)}{\partial x_m}$$

در نتیجه $J_G(a) \neq 0$، اگر و تنها اگر مشتقّ جزیی g نسبت به x_m در نقطهٔ a مخالف با صفر باشد.

۳.۳.۳. تعریف ضربه[1]

هر عملگر خطی مانند B بر روی R^n که برخی از اعضای پایهٔ استاندارد R^n را تغییر دهد، یک ضربه نامیده می‌شود. برای مثال B می‌تواند برخی از پایه‌ها را جا به جا کند مانند :

$$B(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_4e_4 + \ldots) = x_1 e_1 + x_2 e_4 + x_3 e_3 + x_4 e_2 + \ldots$$

در این جا پایهٔ e_2 با e_4 جابه‌جا شده‌اند. گاهی‌اوقات یک ضربه ممکن است چند پایه را تغنیر دهد یا جابه‌جا نماید. در زیر خواهیم دید که یک تابع از ردهٔ C^1 را می‌توان ترکیبی از توابع اوّلیه و ضربه نوشت.

قبل از اثبات این مطلب یک تصویر بر روی R^n را تعریف می‌کنیم که در قضیه استفاده خواهیم کرد. تصویر p را بر روی R^n با $p_m x = x_1e_1 + \ldots + x_m e_m$ تعریف می‌کنیم به طوری که

1. Flip

$p_\circ x = \circ$, $1 \leq m \leq n$ فضای پوچ p توسط پایهٔ $\{e_{m+1}, ..., e_n\}$ و برد این تصویر توسط پایهٔ $\{e_1 , e_2, ..., e_m\}$ تشکیل می‌شود. در این جا $\{e_1, ..., e_n\}$ پایهٔ استاندارد R^n می‌باشد. علّت ایـن تقسیم‌بندی آن است که فضای پوچ p شامل $x \in R^n$ است که $p_m\, x = \circ$. در نتیجه بنابر تعریف تصویر باید $e_i = \circ$ ، $i = 1, 2, ..., m$ و بنابراین نقاطی از R^n در فضای پوچ p قرار دارند که m تا مختص اول آن $\circ$ باشند، لذا فضای پوچ p توسط پایهٔ $\{e_{m+1}, ..., e_n\}$ تشکیل می‌شود.

قضیهٔ ۷: فرض کنید که F یک تابع از ردهٔ C^1 از یک زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ به R^n باشد که $F(\circ) = \circ$ ، $\circ \in E$ و $F'(\circ)$ معکوس‌پذیر است. آن‌گاه یک همسایگی از $\circ \in R^n$ وجود دارد که در آن F را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$F(x) = B_1 \dots B_{n-1}\ G_n o \dots o G_1(x)$$

به طوری که هر یک از G_i یک تابع اوّلیـه از ردهٔ C^1 بـر روی یک هـمسایگی از $\circ$ کـه $G_i(\circ) = \circ$ و $G_i'(\circ)$ معکوس‌پذیرند، $i = 1, 2, ..., n$ و B_i ، $i = 1, ..., n-1$ یک ضربه و یا یک عملگر همانی هستند. در حقیقت تابع F را می‌توان به طور موضعی برحسب ترکیب ضربه‌ها و توابع اوّلیه نوشت.

اثبات: برای اثبات قضیه، رابطهٔ زیر را برای هر m ثابت خواهیم کرد.

$$P_{m-1} F_m(x) = P_{m-1} x \quad , \quad x \in V_m \tag{1}$$

جایی که $F = F_1$. اثبات (۱) براساس استقرار می‌باشد. رابطهٔ (۱) برای $m = 1$ برقرار است زیرا اگر $m = 1$ پس $F = F_1$ و بنابر فرض F_1 در قضیهٔ تابع معکوس صدق می‌کند پس همسایگی باز از $\circ$ مانند V_1 در R^n وجود دارند.که در آن F مـعکوس‌پذیر است. حـال دقت مـی‌کنیم کـه $P_{m-1}F_m(x)$برای $m = 1$ با $P_{m-1}x$ برابر است زیرا $m = 1$ ، پس $P_{m-1} = P_\circ$ و بنابر فرض $P_\circ F_1(x) = P_\circ x = \circ$. در نتیجه رابطهٔ (۱) برای $m = 1$ برقرار می‌باشد و فرض بر این است که رابطهٔ (۱) برای $1 \leq m \leq n-1$ برقرار باشد. حال ثابت می‌کنیم که که رابطهٔ (۱) برای $m+1$ نیز برقرار خواهد بود. رابطهٔ (۱) را برحسب تعریف تصویر می‌نویسیم. اگر قرار دهیم :

$$F_m(x) = y = (e_1 y_1 + \dots + e_n y_n)$$

آنگاه :

$$P_{m-1} F_m(x) = P_{m-1}(e_1 y_1 + \dots + e_n y_n) = P_{m-1}(y)$$

(بنا بر تعریف تصویر) $= e_1 y_1 + \dots + e_{m-1} y_{m-1}$

(بنا بر تعریف تصویر و رابطه (۱)) $= P_{m-1} x = e_1 x_1 + \dots + e_{m-1} x_{m-1}$

در نتیجه داریم :

$$F_m(x) = y = e_1 y_1 + \dots + e_{m-1} y_{m-1} + \sum_{i=m}^{n} e_i y_i$$

$$= P_{m-1} x + \sum_{i=m}^{n} e_i y_i = P_{m-1} x + \sum_{i=m}^{n} \alpha_i(x) e_i$$

که در آن $\alpha_i(x) = y_i$ ، $i = m, \dots, n$ و α_i ها توابعی حقیقی و از ردهٔ C^1 در V_m می‌باشند.

مشتقّ $F_m(x)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$F'(x) e_m = \sum_{i=m}^{n} D_m \alpha_i(x) e_i$$

توجه کنید که این تساوی براساس قضیهٔ ۳ فصل دوم، برای مشتقات یک تابع نوشته شده است. چون بنابر فرض استقرا $F'(\circ)$ معکوس‌پذیر می‌باشد، پس حداقل یکی از $D_m \alpha_i(\circ)$ باید مخالف با ۰ باشد، در نتیجه وجود دارد : $m \le k \le n$ به طوری که $D_m \alpha_k(\circ) \neq \circ$. اکنون ضربهٔ B_m را طوری تعریف می‌کنیم که m و k را عوض کند. اگر $k = m$ آن‌گاه B_m یک تابع همانی است. تابع اولیه $G_m(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$G_m(x) = x + [\alpha_k(x) - x_m] e_m \quad , \quad x \in V_m$$

مشاهده می‌شود که G_m از ردهٔ C^1 بر روی V_m می‌باشد زیرا α_k بر روی V_m از ردهٔ C^1 است. با توجه به این که $D_m \alpha_k(\circ) \neq \circ$ ، پس ژاکوبین $G_m(\circ)$ مخالف با صفر است و در نتیجه $G'(\circ)$ معکوس‌پذیر می‌باشد. لذا بنابر قضیهٔ تابع معکوس وجود دارد همسایگی از ۰ مانند U_m در V_m به طوری که $G_m(x)$ بر روی V_m به V_{m+1} یک تابع یک به یک و معکوس‌پذیر است.

اکنون تابع $F_{m+1}(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$F_{m+1}(y) = B_m F_m \circ G_m^{-1}(y) \quad , \quad y \in V_{m+1}$$

بنابراین $F_{m+1}(y)$ از ردهٔ C^1 بر روی V_{m+1} است فقط باید ثابت کنیم که : $F_{m+1}(\circ) = \circ$ ، $F'_{m+1}(\circ)$ معکوس‌پذیر است. با توجه به تعریف F_{m+1} داریم :

$$F_{m+1}(\circ) = B_m F_m \circ G_m^{-1}(\circ) = B_m F_m(\circ) = B_m(\circ) = \circ$$

$$F'_{m+1}(\circ) = (B_m F_m)'(G_m^{-1}(\circ)).(G_m^{-1}(\circ))'$$

با توجه به این که $(G_m^{-1}(\circ))'$ و $F'_m(\circ)$ معکوس‌پذیر هستند، پس ژاکوبین این توابع در ۰

مخالف با ۰ می‌باشد. و در نتیجه دترمینان عبارت سمت راست بالا مساوی با ۰ نخواهد بود. لذا $F'_{m+1}(0)$ نیز معکوس‌پذیر است. بنابراین ثابت شد که تابع F_{m+1} در شرایط قضیه صدق می‌کند. اکنون ثابت می‌کنیم که رابطهٔ (۱) برای F_{m+1} برقرار است:

$$\begin{aligned} P_m F_{m+1}(G_m(x)) &= P_m B_m F_m \circ G_m^{-1}(G_m(x)) \quad , \quad x \in U_m \\ &= P_m B_m F_m(x) \\ &= P_m B_m(P_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m + \dots) \end{aligned}$$

حال بنا بر تعریف B_m که جای m را با k عوض می‌کند و با توجه به تعریف p_m خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_m F_{m+1}(G_m(x)) &= p_m[e_1x_1 + \dots + e_{m-1}x_{m-1} + \alpha_k(x)e_m + \dots] \\ &= p_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m + x_m e_m - x_m e_m \\ &= p_m x + (\alpha_k(x) - x_m)e_m \end{aligned} \tag{۲}$$

از طرف دیگر بنابر تعریف $G_m(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} p_m(G_m(x)) &= p_m(x + (\alpha_k(x) - x_m)\, e_m) \\ &= p_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m \end{aligned} \tag{۳}$$

با مقایسهٔ روابط (۲) و (۳) مشاهده می‌کنیم که (۳) = (۲) یعنی این که

$$p_m F_{m+1}(G_m(x)) = p_m(G_m(x)) \quad , \quad \forall y = G_m(x) \in V_{m+1}$$

در نتیجه رابطهٔ (۱) برقرار است. اکنون از تعریف تابع $F_{m+1}(y)$ استفاده می‌کنیم و با مقدار دادن به m حکم قضیه ثابت خواهد شد:

$$\begin{aligned} B_m F_{m+1}(y) &= B_m B_m F_m G_m^{-1}(y) \\ &= IF_m G_m^{-1}(y) = F_m G_m^{-1}(y) = F_m G_m^{-1}(G_m(x)) \end{aligned}$$

و یا

$$F_m(x) = B_m F_{m+1} G_m(x)$$

اکنون در این رابطه به m مقادیر از ۱ تا n را خواهیم داد و با قرار دادن $F = F_1$ داریم:

$$\begin{aligned} F = F_1 &= B_1 F_2 G_1 = B_1 B_2 F_3 \circ G_2 G_1 \\ &= B_1 B_2 B_3 F_4 \circ G_3 \circ G_2 \circ G_1 \\ &= \dots \\ &= B_1 \dots B_{n-1} F_n \circ G_{n-1} \circ G_{n-2} \circ \dots \circ G_1 \end{aligned} \tag{۴}$$

اما بنا بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$F_n(x) = p_{n-1}x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i$$
$$= p_{n-1}x + \alpha_n(x)e_n$$

که یک تابع اولیه است و حکم قضیه را برقرار می‌کند.

۳.۳.۴. افرازهای واحد[1]

برای انتگرال توابع بر روی یک مجموعهٔ فشرده یا انتگرال یک تابع با تکیه‌گاه فشرده گاهی‌اوقات نیاز به برخی تکنیکهاست که یکی از آنها افرازهای واحد می‌باشد.
در حقیقت، افرازهای واحد به ما کمک می‌کنند که از حالت موضعی به حالت کلّی برسیم. افرازهای واحد ممکن است ناحیهٔ انتگرال‌گیری را به حالت مطلوب (در صورت عدم‌حالت مطلوب) تبدیل کنند. برای تعریف افرازهای واحد، ابتدا قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۸: فرض کنید که $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در R^n و $U = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ باشد. آن‌گاه یک دنباله $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ از توابع حقیقی با خواصّ زیر وجود دارند.

الف- هر $\varphi_j \in C^\infty(R^n)$ و برای یک $\alpha = \alpha(j) \in A$ ، φ_j خارج از زیرمجموعهٔ فشرده از U_a صفر خواهد شد؛

ب- به ازای هر زیرمجموعهٔ فشرده K از U ، بر روی K ، $\varphi_j = 0$ به استثنای یک تعداد متناهی از jها؛

ج- به ازای هر j ، $0 \le \varphi_j \le 1$ ، $\sum_j \varphi_j = 1$.

اثبات این قضیه، در سه زیرقضیهٔ زیر گنجانده شده است :

زیرقضیهٔ ۱ : برای هر مجموعهٔ باز $U \subset R^n$ ، یک دنباله از زیرمجموعه‌های فشرده $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $K_i \subset \text{int}\, K_{i+1}$ به ازای هر i و $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. در حقیقت k_i ها یک پوشش برای U می‌باشند.

اثبات : فرض کنید K_i یک مجموعه از تمام نقاطی مانند p باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

---
1. Partition of unity

گوی B به مرکز p و به شعاع $\frac{1}{i}$ زیرمجموعهٔ U بوده و $|p| \le i$ می‌باشد. بنابراین (K_i) شرایط قضیه را در بر دارد.

$$K_i = \{p \in R^n : B\left(p, \frac{1}{i}\right) \subset U, \ |p| \le i\}$$

زیرقضیهٔ ۲: یک دنباله‌ای از گونه‌های باز $(V_j)_{j=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که :

الف - $V = \cup_j V_j$؛

ب - به ازای هر j، یک $\alpha \in A$ وجود دارد؛ به طوری که $\bar{V}_j \subset U_\alpha$؛

ج - به ازای هر مجموعهٔ فشرده $K \subset V$ و برای تعداد متناهی زیادی از j، $K \cap V_j = \phi$.

اثبات : فرض کنید که (K_i) دنبالهٔ تعریف شده در زیرقضیهٔ ۱ باشد. قرار می‌دهیم $L_0 = K_i$ و به ازای $i \ge 1$ $L_i = K_{i+1} \setminus \text{int } K_i$. بنابراین $U = \cup_i L_i$ و $L_i \cap K_{i-1} = \phi$ زیرا $K_i \setminus \text{int } K_{i-1}$. به ازای هر $p \in L_i$، یک $\alpha \in A$ وجود دارد که $p \in U_\alpha$ نظر به این که U_α و K_{i-1} باز هستند، پس وجود دارد: $\delta > 0$ به طوری که گوی $V_p = B(p, \delta)$ در $\bar{V}_p \subset V_\alpha$ و $V_p \cap K_{i-1} = \phi$ صدق می‌کند. چون L_i فشرده است، لذا توسط یک تعداد متناهی از مجموعه‌های V_p پوشیده می‌شود، یعنی این که $L_i \subset \bigcup_{p \in F_i} V_p$ و F_i یک مجموعه متناهی می‌باشد. در نتیجه $\left\{ V_p : P \in \bigcup_{i=}^{\infty} F_i \right\}$ مجموعه‌ای قابل شمارش از گوی‌های باز است. بنابراین الف و ب اثبات شده است. اگر K یک زیرمجموعهٔ فشرده از U باشد، آن‌گاه $K \subset K_m$ برای یک m ای، زیرا $\cup\text{int } K_m = U$. نظر به این که $V_p \cap K_m = \phi$ اگر $P \in F_i$ با $i > m$، مشاهده می‌شود که $V_j \cap K = \phi$ برای تعداد متناهی زیاد j.

زیرقضیهٔ ۳: فرض کنید که $V = \{u : |u - p| < \delta\}$ یک گوی باز در R^n باشد. آن‌گاه وجود دارد تابعی مانند ψ از ردهٔ C^∞ بر روی R^n به طوری که $\psi(u) > 0$ اگر $u \in V$ و $\psi(u) = 0$ هرگاه $u \notin V$.

اثبات : تابع g بر روی R توسط ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ e^{-1/t} & t > 9 \end{cases}$$

آن‌گاه $g(t) > \circ$ به ازای $t > \circ$ و g از ردهٔ C^{∞} (ثابت کنید) می‌باشد. قرار می‌دهیم $f(t) = g(\text{۱} - t)$، پس f از ردهٔ C^{∞} و $f(t) = \circ$ برای $t \geq \text{۱}$ و $f(t) > \circ$ به ازای $t < \text{۱}$. در پایان قرار می‌دهیم. $\psi(u) = f\left(\frac{|u-p|^{\text{۲}}}{\delta^{\text{۲}}}\right)$ که تابع مطلوب است.

اکنون به اثبات قضیهٔ ۸ می‌پردازیم. فرض کنید که $(V_j)_{j=\text{۱}}^{\infty}$ دنباله‌ای از گوی‌های باز زیرقضیهٔ ۲ باشد. برای هر j، فرض کنید که ψ_j یک تابع تعریف شده در زیرقضیهٔ ۳ است. بنابراین ψ_j از ردهٔ C^{∞} و خارج از V_j صفر است. V_j در زیرمجموعه‌ای از U_α قرار دارد. تابع ψ_j اکیداً مثبت در V_j می‌باشد. اگر N یک مجموعهٔ باز کراندار با بستار در U باشد، آن‌گاه تنها تعداد متناهی زیادی V_j مجموعهٔ N را قطع می‌کنند، در نتیجه $\psi = \sum_j \psi_j$ خوش تعریف و از ردهٔ C^{∞} بر روی U است. به علاوه بر روی U، $\psi > \circ$. قرار می‌دهیم $\phi_j = \psi_j / \psi$. به وضوح پیداست که $(\phi_j)_{j=\text{۱}}^{\infty}$ دارای خواصّ خواسته شده است.

تعریف افرازهای واحد

یک گردایه‌ای از توابع $(\phi_j)_{j=\text{۱}}^{\infty}$ با خواصّ قضیهٔ ۸ را یک افراز واحد C^{∞} نامند. این افراز واحد را (پیرو) مطیع پوشش $\{u_\alpha\}$ برای U نیز نامند.

نتیجهٔ قضیهٔ ۸

فرض کنید که K یک زیرمجموعهٔ فشرده U در R^n باشد. آن‌گاه یک تابع $\phi \in C^{\infty}(R^n)$ وجود دارد به طوری که $\phi = \text{۱}$ بر روی K و خارج از یک زیرمجموعهٔ فشرده از U صفر و هرجای دیگر $\circ \leq \phi \leq \text{۱}$ می‌باشد.

اثبات : فرض کنید $(\phi_j)_{j=\text{۱}}^{\infty}$ یک افراز واحد و مطیع پوشش $\{U_\alpha\}$ باشد. چون K فشرده است، آن‌گاه توسّط خاصیت قضیهٔ ۸ مجموعهٔ $J = \{ j : \phi_j(u) \neq \circ \}$ برای برخی $u \in K$، یک مجموعهٔ متناهی است. بنابراین $\phi = \sum_{j=J} \phi_j$ تابع مطلوب می‌باشد.

تبصره : این قضیه را می‌توان برای شرایط پیوستگی تنها بر روی توابع ϕ_j و با تعداد متناهی به صورت زیر نیز بیان کرد.

قضیهٔ ۹ : فرض کنید که K یک زیرمجموعهٔ فشرده در R^n و $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز K باشد. آن‌گاه توابع پیوستهٔ حقیقی ψ_1 و ψ_2 و ... و ψ_5 وجود دارند به طوری که :

الف - $0 \le \psi_i \le 1$ برای $1 \le i \le s$ ؛

ب - هر ψ_i دارای یک تکیه‌گاه در یکی از V_α ها است ؛

ج - $\psi_1(x) + \dots + \psi_s(s) = 1$ به ازای هر $x \in k_i$

اثبات : این قضیه را می‌توان از قضیهٔ ۸ نتیجه گرفت. دقت داشته باشید که اگر تابعی از ردهٔ C^∞ باشد پس پیوسته می‌باشد. همچنین این قضیه همان نتیجهٔ قضیه ۸ است. امّا در آن‌جا بدون ذکر تکیه‌گاه از تعریف آن استفاده شده است. به دلیل این که اثبات زیر یک اثبات ساده و قابل فهم می‌باشد. لذا این نوع اثبات را برای قضیه ارائه داده می‌شود.

اثبات : هر $x \in K$ متعلّق به حدّاقل یک V_α می‌باشد که آن را با اندیس $\alpha(x)$ نمایش می‌دهیم، یعنی این که $x \in V_{\alpha}(x)$. نظر به این که $V_{\alpha}(x)$ مجموعه‌های باز هستند، آن‌گاه به مرکز هر x یک گوی باز $B(x)$ با خاصیّت زیر وجود دارد :

$$\bar{B}(x) \subset W(x) \subset \bar{W}(x) \subset V_\alpha(x) \qquad (1)$$

با توجه به فشرده بودن K که توسط تعداد متناهی مجموعهٔ باز V_α پوشیده می‌شود، آن‌گاه داریم :

$$K \subset B(x_1) \cup B(x_2) \cup \dots \cup B(x_s), \qquad x_1, x_2, \dots, x_s \in K \qquad (2)$$

حال رابطهٔ (۱) این اجازه را به ما می‌دهد که این گوی‌ها را طوری انتخاب کنیم که $\bar{B}(x_i) \subset V_\alpha(x_i)$. اکنون توابع پیوسته حقیقی $\phi_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\phi_i(x)=1$ بر روی $B(x_i)$ ، $\phi_i(x) = 0$ خارج از $W(x_i)$ ، $0 \le \phi_i(x) \le 1$ بین $B(x_i)$ و $W(x_i)$. بنابراین تکیه‌گاه این توابع در $\{V_\alpha\}$ است زیرا $W(x_i) \subset V_{\alpha(x_i)}$. حال توابع ψ_i را می‌سازیم.

$$\psi_1 = \phi_1 \quad , \quad \psi_{i+1} = (1 - \phi_1) \dots (1 - \phi_i)\phi_{i+1} , \qquad i = 1, 2, \dots, s-1$$

این توابع بلافاصله در دو شرط الف و ب صدق می‌کنند زیرا توابع ϕ_iها همواره بین ۰ و ۱ قرار دارند و دارای تکیه‌گاه در یکی از V_α ها می‌باشند. کافی است ثابت کنیم که مجموع s تا از این توابع برابر با ۱ می‌باشد. برای این منظور رابطهٔ زیر را ثابت خواهیم کرد:

$$\psi_1 + \dots + \psi_i = 1 - (1 - \phi_1) \dots (1 - \phi_i) \qquad (3)$$

-این رابطهٔ برای $i = ۱$ برقرار است زیرا $\psi_۱ = \phi_۱$. اکنون از فرض استقرا استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که رابطهٔ (۳) برای i برقرار باشد:

$$(\psi_۱ + \dots + \psi_i) + \psi_{i+۱} = ۱ - (۱ - \phi_۱) \dots (۱ - \phi_i)$$
$$+ (۱ - \phi_۱) \dots (۱ - \phi_i)\phi_{i+۱}$$
$$= ۱ - (۱ - \phi_۱) \dots (۱ - \phi_i)(۱ - \phi_{i+۱}), \qquad x \in R^n$$

اکنون مجموعهٔ s تا از این توابع را با هم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{s} \psi_i(x) = ۱ - \prod_{i=۱}^{s} (۱ - \phi_i(x))$$

$x \in R^n$، اگر $x \in B(x_i)$، پس بنا به تعریف ϕ_iها، $\phi_i(x) = ۱$ و در نتیجه $۱ - \phi_i(x) = ۰$، $\sum_{i=۱}^{s} \psi_i(x) = ۱$. حال چون مجموعهٔ K توسط این نوع گوی‌ها پوشیده می‌شود و هر عضو $x \in K$ به یکی از این گوی‌ها متعلّق است، در نتیجه همواره بر روی K باید $۱ - \phi_i = ۰$ و بنابراین اگر هر $x \in K_۱$ آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{s} \psi_i(x) = ۱$ و بدین‌گونه اثبات به پایان می‌رسد.

نتیجهٔ قضیهٔ ۹

هرگاه $f \in C(R^n)$ و دارای تکیه‌گاه در K باشد آن‌گاه:

$$f = \sum_{i=۱}^{s} \psi_i f$$

که هر یک از $\psi_i f$ دارای تکیه‌گاه در یکی از V_α ها می‌باشد.

اثبات:

$$\psi_۱(x) f(x) + \psi_۲(x) f(x) + \dots + \psi_s f(x)$$
$$= f(x)(\psi_۱(x) + \psi_۲(x) + \dots + \psi_s(x)) = f(x)$$

این نتیجه به ما کمک می‌کند که f را برحسب توابع پیوسته‌ای مانند ψ_i با تکیه‌گاه فشردهٔ کوچک بر روی K بنویسیم که در انتگرال‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این جا یک کاربرد از افراز واحد را ارائه می‌دهیم. اما قبلاً تعریف یک تابع از ردهٔ C^r، $r \geq ۱$ بر روی هر زیرمجموعه از R^n را شرح داده خواهد شد.

۳.۳.۵. تعریف از ردهٔ C^r

فرض کنید که A یک زیرمجموعه از R^n باشد (دقت کنید که نوع مجموعه یعنی باز و یا بسته بودن آن مطرح نیست.) تابع $f : A \to R^m$ را از ردهٔ C^r نامند اگر به ازای هر $a \in A$ وجود داشته باشد یک همسایگی باز U از a در R^n و یک تابع مانند F از ردهٔ C^r بر روی U به طوری که $F(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in U \cap A$.

نتیجهٔ ۲ قضیهٔ ۸

فرض کنید که A یک زیرمجموعه در R^n باشد. اگر f یک تابع هموار (C^∞) بر روی A باشد، آن‌گاه وجود دارد یک مجموعهٔ باز U و یک تابع هموار $F(C^\infty)$ بر روی U به طوری که $A \subset U$ و $F(t) = f(t)$ به ازای هر $t \in A$.

اثبات: بنا به تعریف ۳.۳.۵ به ازای هر $a \in A$، یک مجموعهٔ باز U_a و یک تابع F_a از ردهٔ C^∞ در U_α وجود دارد به طوری که F_a با تابع f بر روی $A \cap U_a$ منطبق است.

فرض کنید که $U = \cup_{a \in A} U_\alpha$ و $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ یک افراز C^∞ واحد باشد. برای هر j وجود دارد $a = a(j)$ به طوری که خارج از یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ U_a صفر شوند. بنابراین تابع F_a و φ_i خارج از یک زیرمجموعهٔ فشرده U_a صفر می‌شوند و یک تابع هموار بر روی U است (یعنی این که می‌تواند توسط قرار دادن آن مساوی با ۰ تا U گسترش پیدا کند). قرار می‌دهیم: $F = \Sigma\varphi_j F_{a(j)}$ که همان تابع مطلوب است.

۳.۳.٦. تغییر متغیّر در انتگرالها

در بخش ۳.۱ تغییر متغیّر برای انتگرالهای دوگانه و سه گانه توضیح داده شده است. در این جا این مطلب را برای حالت کلّی R^n شرح می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۰: فرض کنید که T یک تابع از ردهٔ C^1 و ۱-۱ از یک زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ به R^n باشد، به طوری که $y_T(x) \neq 0$ به ازای هر $x \in E$. به علاوه فرض کنید که f یک تابع حقیقی پیوسته بر روی R^n با تکیه‌گاه فشرده در $T(E)$ باشد، آن‌گاه:

$$\int_{T(E)} f(y)\ dy = \int_E f\,(T(x))\ \ |J_T(x)|\ \ dx \tag{۱}$$

چون T یک تابع از ردهٔ C^1 و ۱-۱ است، پس قضیهٔ تابع معکوس برای آن صادق است و در نتیجه T^{-1} به طور موضعی وجود خواهد داشت. این نتیجه به ما این اطمینان را می‌دهد که $f(T(x))$ دارای تکیه‌گاه فشرده در E است، زیرا $T : E \to R^n$ یک تابع C^1 و T^{-1} معکوس آن نیز از ردهٔ C^1 است زیرا ژاکوبین این تابع در هر نقطه از E مخالف با صفر می‌باشد. لذا تابع T^{-1} یک مجموعهٔ فشرده را به یک مجموعهٔ فشرده نسبت می‌دهد. بنابراین تابع $f(T(x))$ دارای تکیه‌گاه فشرده در E خواهد بود. دلیل استفاده از قدرمطلق در این است که امکان دارد حاصل دو انتگرال در علامت با هم متفاوت باشند. برای مثال اگر $n = ۱$ و T یک تابع صعودی باشد، آن‌گاه تساوی (۱) بدون قدرمطلق مشکلی به وجود نمی‌آورد. اما اگر تابع T نزولی باشد پس $T'(x) < ۰$ و در نتیجه ژاکوبین T با علامت منفی خواهد بود که امکان دارد در حاصل تساوی مشکل به وجود آورد.

اثبات : اگر تابع T یک‌تابع ضربه باشد، آن‌گاه تساوی (۱) برقرار است زیرا T تنها در مختص را جابه‌جا می‌کند و چون تابع f و T پیوسته هستند در حاصل انتگرال هیچ تغییری داده نمی‌شود. اکنون قضیه را برای یک تابع اولیه اثبات خواهیم کرد.

فرض کنید که T یک تابع اولیه باشد پس $T(x) = \sum_{i \neq m}^{n} x_i e_i + g(x) e_m$ چون T یک به یک از ردهٔ C^1 است، در نتیجه تابع g نیز چنین خواصّی را داراست. در نتیجه $y_i = x_i$ بـرای $i \neq m$ و $y_m = g(x)$ و بنابراین $dy_i = dx_i$ ، $i \neq m$ ، $dy_m = D_m g(x) dx_m$ ، از طرف دیگر می‌دانیم که چون T یک تابع اولیه است پس $J_T(x) = D_m g(x)$ حال با توجه به تعریف انتگرال بلافاصله قضیه برای این نوع تابع صادق است :

$$\int_{T(E)} f(j) dy = \int_E f(T(x)) dx_1 \ldots \left[\sum_{m=1} dx_m\, D_m g(x)\right] \ldots dx_n$$

$$= \int_E f(t(x))\ J_T(x) dx_1 \ldots dx_n$$

زیرا به جز در m در انتگرالها یکی از dx_i ها تکرار خواهد شد که حاصل انتگرال را ۰ می‌کند.

حال فرض می‌کنیم که قضیه برای دو تبدیل مانند P و Q برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که برای ترکیب این دو تبدیل نیز برقرار خواهد بود : قرار مـی‌دهیم $S(x) = P(Q(x))$. فـرض کـنید کـه

$y = Q(x)$ و $z = P(y)$ چون قضیه برای P و Q برقرار است، پس $dy = |J_Q(x)|.dz = |J_p(y)|dy$ و داریم :

$$\int_{P(F)} f(z)dz = \int_{F=Q(E)} f(p(y)) \ |J_p(y)| \ dy$$

$$= \int_E f(p(Q(x))(J_p(Q(x)) \ | \ |J_G(x)| \ dx$$

نظر به این که $J_S(x) = J_P(y)\ J_Q(x)$ ، با جایگزینی این تساوی در انتگرال بالا خواهیم داشت :

$$\int_{P(F)} f(z)dz = \int_E f(p(Q(x)) \ |J_s(x)| \ dx$$

در قضیهٔ ۷ ثابت شد که اگر یک تابع از ردهٔ C^1 باشد، آن‌گاه می‌توانیم آن را برحسب ترکیب توابعی از تابع اولیه و تابع ضربه بنویسیم. چون قضیه برای تابع اولیه و تابع ضربه و ترکیب دو تبدیل ثابت شده است، در نتیجه به سادگی با استفاده از قضیهٔ ۱۰ و همچنین افرازهای واحد می‌توانیم قضیه را ثابت کنیم :

به ازای هر $t \in E$ یک همسایگی مانند $U \in E$ وجود دارد به طوری که تابع T را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$T(x) = T(t) + B_1 \dots B_{n-1} G_n o \dots G(x-t) \, , \, x \in U$$

لذا قضیه برای T بر روی U برقرار است زیرا برای توابع B_i و G_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ برقرار می‌باشد. قرار می‌دهیم: $V = T(U)$ و بنابر قضیهٔ $T(U) \subset T(E)$. کافی است که در مورد تکیه گاه f در V بحث کنیم. فرض کنید که $K \subset T(E)$ تکیه گاه تابع f باشد. چون به ازای هر $y \in T(E)$ آن‌گاه y به یک مجموعهٔ باز مانند V_y متعلّق می‌باشد که $\{V_y\}$ یک پوشش برای K است. اکنون از افرازهای واحد استفاده می‌کنیم و می‌دانیم که $f = \sum_{i=1}^{s} \psi_i f$ به طوری که هر ψ_i یک تابع حقیقی پیوسته با تکیه گاه در یکی از V_y ها می‌باشد. پس هر $\psi_i f$ دارای تکیه گاه در یکی از V_y ها خواهد بود. و چون قضیه برای $\psi_i f$ برقرار است، در نتیجه برای تابع f نیز برقرار می‌باشد. دقت کنید که ثابت کردیم اگر f دارای تکیه گاه در K باشد آن‌گاه $\psi_i f$ دارای تکیه گاه در یکی از مجموعه‌های پوششی از K خواهد بود (قضیه ۹).

تبصره : این قضیه در برخی از کتابها بدون تکیه گاه اثبات شده است. در حقیقت، قضیه در کتاب

Marsden به فرم زیر ارائه شده است :

فرض کنید که $A \subset R^n$ یک مجموعه باز کراندار و دارای حجم باشد. به علاوه $g : A \to R^n$ تابعی از ردهٔ C^1 یک به یک و $J_g(x) \neq 0$ به ازای تمام $x \in A$ است. همچنین $|J_g(x)|$ و $\frac{1}{|J_g(x)|}$ بر روی A کراندار باشد. فرض کنید $B = g(A)$ و B دارای حجم V است. برای تابع $f : B \to R$ کراندار و انتگرال‌پذیر، آن‌گاه

$$\int_B f = \int_A (f o g) \; |J_g| = \int f(g(x_1, ..., x_n)) \, \frac{\partial(g_1, ..., g_n)}{\partial x_1, ..., x_n} \, dx_1, ..., dx_n$$

در این جا از تکیه‌گاه، صحبتی به میان نیامده بلکه از کراندار بودن استفاده شده است. اثبات این قضیه در کتاب Marsden (صفحات ۳۰۶ تا ۳۱۶) آمده است. به طور خلاصه می‌توان اثبات را چنین توضیح داد. فرض کنید که یک مستطیل مجزا S را در A رسم کنیم. آن‌گاه g بر روی S می‌تواند مستوی باشد، یعنی این که $g(S)$ یک متوازی‌السّطوح خواهد بود (دقت کنید که g یک تابع ۱-۱ است). اگر g مستوی باشد، آن‌گاه حجم آن برابر است با $V(S) \; |\det(\bar{g})|$ (برای تعریف به ص ۳۰۱ مراجعه کنید) جایی که $\bar{g}$ قسمت خطی تابع g است. گرچه $g(x_0) + Dg(x_0)$ تقریب تابع g نزدیک x_0 است، بنابراین $V(g(S)) \approx |J_g| \; V(S)$ (حجم) و در نتیجه $f(g(x)) \; |J_g(x)| \; dx \approx f(y)dy$، جایی که $y = g(x)$ لذا با تقسیم کردن A به چنین مستطیلهایی مانند S و جمع انتگرالهای آنها، قضیه اثبات خواهد شد.

این قضیه برحسب اندازهٔ یک تابع نیز بیان شده است (به کتاب Marsden مراجعه شود).

تمرینات بخش ۳.۱ و ۳.۲

۱- با استفاده از مختصات استوانه‌ای $g(r , \theta , z) = (r \cos\theta , r \sin\theta , z)$ بر روی ناحیهٔ $\{(r, \theta, z) : r > 0 , 0 < \theta \leq 2\pi\}$، انتگرال تابع $f(x , y , z) = (x^2 + y^2) z^2$ را بر روی ناحیهٔ $A = \{(x , y , z) : x^2 + y^2 < 1 , |z| < 1\}$ محاسبهٔ کنید.

۲- یک مثال نقض بزنید که نشان دهندهٔ این باشد که فرمول تغییر متغیّر برای یک تابع که ۱-۱ نمی‌باشد برقرار نیست حتی اگر $J_g(x) \neq 0$

راهنمایی : تابع $f = 1$ و $g(x , y) = (e^x \cos y , e^x \sin y)$ را در نظر بگیرید.

۳- انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_A x^2y^2\,dx\,dy$ ، جایی که $\{A = (x, y) : 0 < x < y^2, 0 < y < 2, x < 1\}$

ب) $\int_A \sin(x^2 + y^2)dx\,dy$ ، جایی که A یک دیسک واحد است

ج) $\int_{R^3} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$

د) $\int_A \frac{y}{\sqrt{x}}\,dx\,dy$ جایی که A مربع واحد $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ است

ر) $\int_A x\,dx\,dy$ جایی که $A = \{(x, y) : 0 < x < \sqrt{\pi}, 0 < y < \sin x^2\}$

۴ـ فرض کنید $u : A \subset R^2 \to]a, b[$ ، $v : B \subset R^2 \to]c, d[$ دو تابع از ردهٔ C^1 حقیقی یک به یک باشند، جایی که A و B زیرمجموعه‌های باز هستند. همچنین فرض بر این است که در هر نقطه $(x, y) \in A \cap B$ $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$. به علاوه فرض کنید که تابع f بر روی $W = \{(x, y) : a < u(x, y) < b, c < v(x, y) < d\}$ پیوسته باشد آن‌گاه نشان دهید که:

$$\int_W f = \int_c^b \int_a^b f(u, v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) du\,dv$$

با استفاده از این رابطه انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_W (x^2 + y^2)dx\,dy$$

به طوری که

$$W = \{(x, y) : x > 0, y > 0, -1 < x^2 - y^2 < 1, xy < 1\}$$

۳.۴. فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی[1]

در اصل فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی وسیله‌ای برای توسعهٔ قضیه استوکس چند بُعدی است. فرمهای دیفرانسیلی نقش اساسی در هندسهٔ دیفرانسیلی از نقطه‌نظر توپولوژیکی بازی می‌کند. فرض کنید که E یک فضای برداری بر روی R با بُعد متناهی n باشد. به علاوه نماد $E^r = E \times E \times \ldots \times E$، $r-$ مرتبه را در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۱۲ : فرض کنید E فضای برداری تعریف شده در بالا باشد. به ازای هر عدد مثبت و صحیح r، $1 \leq r \leq n$ وجود دارد یک فضای برداری $\Lambda^r E$ و یک تابع چندخطی متناوب r $E \to \Lambda^r E$ که توسط $(u_1, \ldots, u_r) \to u_1 \Lambda \ldots \Lambda u_r$ تعریف می‌شود و دارای خاصیت زیر است:

اگر $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه‌برای E باشد، آنگاه اعضای $i_1 < i_2 < \ldots < i_r\} \leq n$ و $\{v_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda v_{i_r}\}$ تشکیل یک پایه را برای $\Lambda^r E$ می‌دهند.

متناوب[2] در این‌جا بدین معناست که $u_1 \Lambda \ldots \Lambda u_r = 0$ اگر $u_i = u_j$ به ازای $i \neq j$. نماد $\Lambda^r E$ را **حاصل‌ضرب متناوب** یا **حاصل‌ضرب خارجی**[3] می‌نامند. اگر $r = 0$، آن‌گاه $\Lambda^0 E = R$ تعریف می‌کنیم. اعضای $\Lambda^r E$ را که می‌توان به شکل $u_1 \Lambda \ldots \Lambda u_r$ نوشت **تجزیه‌پذیر**[4] نامیده می‌شود. چنین اعضایی، $\Lambda^r E$ را تولید می‌کنند. اگر $r > \dim E$ آن‌گاه $\Lambda^r E = \{0\}$ تعریف می‌کنیم.

اثبات اجمالی : اثبات این قضیه را به طور خلاصه توضیح داده می‌شود.

اگر F یک فضای برداری بر روی R و $g: E^r \to F$ یک تابع $r-$ خطی متناوب باشد، آن‌گاه یک تابع خطی یکتا $g_* : \Lambda^r E \to F$ وجود دارد به طوری که برای تمام $u_1, \ldots, u_r \in E$ داریم:

$$g(u_1, \ldots, u_r) = g_*(u_1 \Lambda \ldots \Lambda u_r)$$

به‌علاوه اگر $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایه‌برای E باشد، آن‌گاه مجموعه‌ای از اعضای $u_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda u_{i_r}$، $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ یک پایه برای $\Lambda^r E$ است.

1. Differential Forms
2. Alternating
3. Exterior
4. Decomposable

اثبات: برای هر زیرمجموعهٔ S از n تایی مرتب $\{1, 2, ..., n\}$ با دسته‌بندی $r-$ تایی، ما حرف t_s را انتخاب می‌کنیم. این حرف می‌تواند تشکیل یک پایه برای یک فضای برداری با بُعد مساوی و با ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{r}$ را بدهد (به کتاب Lang صفحه ۵۱۷ مراجعه کنید). این فضایی است که از ترکیب خطی این حرف به وجود می‌آید. به جای t_s می‌توان نوشت:

$t_{(i)} = t_{i_1 \dots i_r}$ با $i_1 < \dots < i_r$، فرض کنید که $\{v_1, ..., v_n\}$ یک پایه برای E و $u_1, ..., u_r$ اعضای E باشند. به علاوه فرض بر این است که $A = (a_{ij})$ یک ماتریس با اعضای مقادیر ثابت باشد به طوری که:

$u_1 = a_{11} v_1 + \dots + a_{1n} v_n$

$\vdots$

$u_r = a_{r_1} v_1 + \dots + a_{r_n} v_n$

$u_1 \Lambda \dots \Lambda u_r = \sum_s \det(A_{t_s})$ را تعریف می‌کنیم. ادّعا می‌کنیم این حاصل‌ضرب دارای خواصّ خواسته شدهٔ در قضیه است.

در حقیقت این تعریف چندخطی و متناوب است که از خاصیت دترمینان نتیجه می‌شود. قرار می‌دهیم: $t_s = v_{i_1} \Lambda \dots \Lambda v_{i_r}$ آن‌گاه، $i_1 < \dots < i_r$ با $S = \{i_1, ..., i_r\}$. قضیهٔ استاندارد بر روی توابع خطی، بیان کنندهٔ این مطلب است که همیشه یک تابع خطی یکتا وجود دارد که مقادیر برحسب اعضای پایه شرح می‌دهد. به خصوص اگر $g : E^r \to F$ یک تابع چندخطی متناوب باشد، آن‌گاه یک تابع خطی یکتا مانند $g_* : \Lambda^r E \to F$ وجود دارد به طوری که برای هر مجموعه S داریم:

$g_*(t_s) = g(v_{i_1}, ..., v_{i_r})$

بنابراین با جایگزینی t_s، به ازای هر عضو $u_1, ..., u_r$ از فضای E خواهیم داشت:

$g_*(v_{i_1} \Lambda \dots \Lambda v_{i_r}) = g(v_{i_1}, ..., v_{i_r})$

در این‌جا یک قسمت از قضیهٔ ثابت شده است؛ تنها کافی است ثابت کنیم که $v_{i_1} \Lambda \dots \Lambda v_{i_r}$ یک پایه است.

فرض کنید که $\{v_1, ..., v_n\}$ یک پایه برای فضای E باشد، آن‌گاه اعضای $\{v_{i_1} \Lambda \dots \Lambda v_{i_r}\}$ با تمام انتخابهای دسته‌های $r-$ تایی مرتب $(i_1, ..., i_r)$ تولیدکنندهٔ فضای $\Lambda^r E$ است. تعداد این اعضا دقیقاً $\binom{n}{r}$ می‌باشد. بنابراین باید مستقل خطی باشند که تشکیل یک پایه برای $\Lambda^r E$ خواهند داد.

۳.۴.۱. تعریف یک فرم (صورت) دیفرانسیلی

فرض کنید که U یک مجموعهٔ باز در R^n باشد. یک فرم دیفرانسیلی از درجه r یا یک فرم r- بُعدی عبارت است از یک تابع $\omega : U \to \Lambda^r E^*$ که از مجموعهٔ U به حاصل‌ضرب متناوب r- مرتبه از E^* است. در این جا E^* فضای دوگانی E می‌باشد. یک فرم دیفرانسیلی را از ردهٔ C^p، $p \geq 0$ گویند، اگر تابع ω از این رده C^p باشد. فرض کنید که $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ یک پایه برای E^* باشد، آن‌گاه هر فرم (صورت) دیفرانسیلی را برحسب مختّصات تابعی با توجّهٔ به پایهٔ $\{\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_r}\}$ بیان می‌شود، یعنی این که به ازای هر $x \in U$ داریم:

$$\omega(x) = \sum_{(i)} f_{i_1 \dots i_r}(x)\, \lambda_{i_1} \Lambda \dots \Lambda \lambda_{i_r} \qquad (*)$$

جایی که $f_{(i)} = f_{i_1 \dots i_r}$ یک تابع حدّاقل پیوسته بر روی U است. مرتبهٔ مشتق‌پذیری این توابع مرتبهٔ مشتق‌پذیری ω می‌باشد. یک فرم دیفرانسیلی را تجزیه‌پذیر نامند اگر بتوان آن را تنها برحسب $f(x)\, \lambda_{i_1} \Lambda \dots \Lambda \lambda_{i_r}$ نوشت. این فرم را استاندارد نیز نامند. دقت کنید که ترتیب اندیس i_1، ...، i_r مهم است یعنی این که $i_1 < i_2 < \dots < i_r$. واضح است که فرمهای دیفرانسیلی از مرتبه r تشکیل یک فضای برداری خواهند داد. فرض کنید که $E = R^n$ و f یک تابع مشتق‌پذیر بر روی U باشد. آن‌گاه به ازای هر $x \in U$ مشتقّ تابع $f(x)$، $Df(x)$، تابعی است خطی از R^n به R که عضوی از E^* است؛ بنابراین، دیفرانسیل هر تابع مشتق‌پذیر یک فرم ۱- بُعدی در $U \subset R^n$ است که آن را با df نمایش می‌دهیم. فرض کنید که λ_i، i امین تابع مختصاتی فضای دوگان R^n باشد. آن‌گاه:

$$d\lambda_i = \lambda'_i(x) = \lambda_i$$

زیرا λ_i یک تابع خطی است، حال فرض کنید که $(x_1, ..., x_n)$ مختصات یک نقطهٔ $x \in R^n$ باشد. معمول بر این است که نماد $\lambda_i(x) = dx_i$ را به کار گیریم. این کمی نادرست است، اما برای محاسبه مفید می‌باشد. لذا ω را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\omega = \sum_{(i)} f_{(i)}\, dx_{i_1} \Lambda \dots \Lambda dx_{i_r}$$

تا این که به صورت $(*)$ نشان دهیم. در حقیقت برای تعریف یک فرم دیفرانسیلی، از دیفرانسیل یک تابع استفاده می‌کنیم تا این که از مشتق آن. توجه کنید که $\lambda'_i(x) = \lambda_i$ پایه برای فضای دوگانی R^n است.

تبصره ۱ : اجازه دهید که تعریف فرم (صورت) دیفرانسیلی را به طور ساده‌تری برحسب یک تابع در

زیر ارائه دهیم :

تعریف : یک k فرم دیفرانسیلی بر روی R^n عبارت است از جمع و ضرب توابع حقیقی و فرمهای دیفرانسیلی dx_i ، $i = ۱, ۲, ..., n$ که آن را با فرم زیر بیان می‌کنیم :

$\omega = \Sigma\, a_{i_1 \dots i_k}(x) \quad dx_{i_1} \Lambda\, dx_{i_2} \Lambda \dots \Lambda dx_{i_k}$

که جمع بر روی تمام ترکیب k تایی از n تا اندیس بسته می‌شود و $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ توابع حقیقی و از ردهٔ C^r ، $r \geq ۰$ بر روی یک زیرمجموعهٔ باز در R^n و یا ممکن است بر روی تمام R^n تعریف شده باشد. فرم $dx_{i_1} \Lambda\, dx_{i_2}$ را یک فرم‌دیفرانسیلی خارجی نیز می‌نامند. یک $p-$ فرم را فرم $p-$ بعدی هم نامیده می‌شود.

مثالها

۱ - فرم ۰ - بُعدی تنها یک تابع مشتق‌پذیر است (یا یک تابع پیوسته است)؛

۲ - فرم ۱ - بُعدی در R^3 عبارت است از $fdx + gdy + hdz$ که در آن f و g و h توابعی پیوسته از متغیّرهای x و y و z هستند؛

۳ - فرم ۲ - بُعدی در R^3 به صورت $fdx \Lambda dy + gdx \Lambda dz + hdy \Lambda dz$ می‌باشد؛

۴ - فرم ۳ - بُعدی در R^3 ممکن است به صورت $fdx \Lambda dy \Lambda dz$ باشد که یک فرم استاندارد است.

فرمهای دیفرانسیلی در بسیاری از مسایل فیزیکی، مهندسی و ریاضی ظاهر می‌شوند. در ریاضی می‌توان از کاربرد فرمهای دیفرانسیلی در اثبات قضیهٔ مهمّ حساب دیفرانسیل انتگرال نام برد. این قضیهٔ مهم همانا قضیهٔ استوکس در حالت کلّی است و در حالت خاص قضیهٔ گرین و واگرایی می‌باشد. علّت کاربرد فرمهای دیفرانسیلی در این قضایا وجود عملگر گراد، واگرایی و تاو است. در مکانیک هامیلتنی و مکسول کاربرد این فرمها بیشتر مشاهده خواهد شد (به کتاب R. Abraham & ela مراجعه کنید).

تبصره ۲: در کتابهایی که سالهای اخیر به چاپ رسیده‌اند، ابتدا تانسورها را تعریف نموده و سپس با استفاده از این تعریف، یک فرم دیفرانسیلی یا فرم خارجی را تعریف کرده‌اند.

تعریف تانسور بر روی فضای خطی عبارت است از یک نگاشت چندخطی از فضاهای باناخ E_1 و ...، E_k به فضای باناخ F است که نسبت به هر یک از متغیّرها خطی می‌باشد. تانسورها کاربرد زیادی برای ساختن متریک بر روی فضاهای غیراقلیدسی دارند و از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشند. برای مثال تعریف تانسورها را بر روی میدانهای برداری که مورد استفادهٔ فیزیک است می‌توان نام برد، در این جا به طور خلاصه تانسور را شرح خواهیم داد (برای اطلاعات بیشتر به منفیلدهای مشتق‌پذیر و کتاب ذکر شده بالا مراجعه کنید).

۳.۴.۲. تانسور[1]

قبل از تعریف تانسور به یادآوری جبرهای خطی می‌پردازیم. فرض کنید که V یک فضای برداری با بعد n بر روی اعداد حقیقی باشد. آن‌گاه V^* یک فضای دوگانی V می‌باشد که از تمام توابع خطی حقیقی بر روی V تشکیل شده است. یعنی این‌که توابعی مانند $f: V \to R$ به طوری که $f(av + b\omega) = af(v) + bf(\omega)$ به ازای هر $V, \omega \in V$ فضای دوگانی یک فضای برداری می‌باشد. برای مثال، اگر $V = R^n$ آن‌گاه V^* از تمام توابع خطی حقیقی بر روی R^n تشکیل شده است.

قضیه ۱۳: فرض کنید که $(u_1, ..., u_n)$ پایه‌ای برای فضای برداری V باشد، آن‌گاه وجود دارد یک پایه مانند $(u_1^*, ..., u_n^*)$ برای V^* که پایهٔ دوگانی $(u_1, ..., u_n)$ نامیده می‌شود به طوری که $u_j^*(u_k) = \delta_k^j$ جایی که δ_k^j مساوی با ۱ است، اگر $j = k$ و مساوی با صفر است، اگر $j \neq k$.

اثبات: اعضای V^* را مانند $u_1^*, ..., u_n^*$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر

$$x = \sum_{i=1} x_j u_j$$

آن‌گاه $u_k^*(x) = x_k$ به ازای $k = 1, ..., n$، بنابراین u_k^* یک تابع خطی خوش تعریف بر روی V و $u_k^*(u_j) = \delta_j^k$ می‌باشد. به علاوه اگر $(\Sigma a_j u_j^*)(u_k) = 0$ آن‌گاه $\alpha_k = 0$ به ازای هر k. در نتیجه u_1^*، u_2^*، ...، u_n^* مستقل خطی هستند. همچنین مشاهده می‌کنیم که اگر $a_j = \alpha(u_j)$ آن‌گاه:

$$\alpha(x) = \Sigma x_j\, \alpha(u_j) = \Sigma a_j . x_j = (\Sigma a_j u_j^*)(x), \qquad \forall x \in V,$$

لذا $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j^*$. بنابراین u_1^*، ...، u_n^* فضای V و V^* را می‌پیماید و می‌تواند پایه‌ای برای

1. Tensor

V^* باشد. از این قضیه بلافاصله نتیجه می‌شود که بُعد فضای V و V^* مساوی است. همچنین می‌توان یک تناظر یک به یک بین V و V^* برقرار کرد. برای اطلاعات بیشتر به کتاب آنالیز Browder یا کتابهای جبرخطی مراجعه کنید.

۳.۴.۳. تعریف تانسور کوواریانت[1]

(هموررا) تانسور کوواریانت از مرتبهٔ r برروی V عبارت است از یک تابع خطی $\alpha : V^r \to R$ که نسبت به هر یک از متغیرها خطی می‌باشد. در این جا V^r یعنی r مرتبه $V \times \ldots \times V$ تانسور کووارینت V را به $T^r(V)$ نشان می‌دهند اگر $v_1, \ldots, v_n$ اعضای V و c یک اسکالر باشد، آن‌گاه :

$$\alpha(v_1, \ldots, + v_i + c\omega, v_{i+1}, \ldots, v_r) = \alpha(v_1, \ldots, v_r) + c\alpha(v_1, \ldots, \omega, v_{i+1}, \ldots, v_r)$$

مثال ۴ : $T^1(V)$ یک عضوی از V^* است. هموررا از مرتبهٔ ۲ تنها یک تابع دوخطی بر روی $V \times V$ است. $T^r(V)$ یک فضای برداری می‌باشد. اگر α و β دو عضو V^* باشند، آن‌گاه تعریف می‌کنیم : $\gamma(v, \omega) = \alpha(v)\beta(\omega)$ ، γ را حاصل‌ضرب تانسور نامند و به صورت $\gamma = \alpha \otimes \beta$ نمایش داده می‌شود. این تعریف را می‌توانیم برای هر تانسور با هر مرتبه به‌کار برد. فرض کنید که α یک تانسور از مرتبه r و β یک تانسور از مرتبه s باشد، آن‌گاه تانسور حاصل‌ضرب $\alpha \otimes \beta$ که خود یک تانسور از مرتبهٔ $r + s$ است توسط فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$\alpha \otimes \beta(v_1, \ldots, v_{r+s}) = \alpha(v_1, \ldots, v_r)\, \beta(v_{r+1}, \ldots, v_{r+s})$$

توجه کنید وقتی از تانسور نام می‌بریم همان تانسور هموررا می‌باشد و با توجه به تعریف آن، نماد زیر را خواهیم داشت :

$$T^r(V) = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{\text{مرتبه } -r} \qquad (*)$$

همچنین یک فرم دیفرانسیلی را می‌توان برحسب تانسورها تعریف کرد: فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز در R^n باشد. یک فرم دیفرانسیل ω از مرتبهٔ r در U (یا فرم دیفرانسیلی r بُعدی) عبارت از تابعی از U به $\Lambda^r(R^n)^*$ است در این جا Λ^r یک تانسور متناوب[2] می‌باشد به طوری که اگر $a \in \Lambda^r$ آن‌گاه $\alpha(V_1, \ldots, V_r) = 0$. هرگاه وجود داشته باشد $j \neq k$ به طوری که $V_j = V_k$

1. Covariant 2. Alternating

برای مثال اگر α و β تانسورها از مرتبهٔ ۱ باشند، آن‌گاه تانسور از مرتبهٔ ۲، $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$، یک تانسور متناوب است. یکی از خواصّ این نوع تانسور رابطهٔ زیر می‌باشد :

$$\alpha(v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, v_j, v_{k+1}, ..., v_r) = -\alpha(v_1, ..., v_{k+1}, ..., v_{j-1}, ..., v_r)$$

یعنی این که اگر جای دوعضو عوض شود، حاصل در یک منها ضرب می‌شود.

۳.۴.۴. جمع و ضرب فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی

۱- فرمهای دیفرانسیلی با بُعد مساوی را می‌توان با هم جمع کرد. برای مثال جمع فرمهای یک بُعدی $\Sigma f_i\, dx_i$ و $\Sigma g_i\, dx_i$ برابر است با $\Sigma (f_i + g_i)dx_i$

۲- **ضرب فرمها** : ضرب فرمهای دیفرانسیلی که ضرب‌خارجی نیز نامیده می‌شوند به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید که

فرمهای m بُعدی
$$w_1 = \sum a_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_n) dx_{i_1} \Lambda\, dx_{i_2} \Lambda ... \Lambda\, dx_{i_m}$$

و فرم k بُعدی
$$w_2 = \sum b_{i_1 ... i_k}(x_1, ..., x_n) dx_{i_1} \Lambda ... \Lambda dx_{i_k}$$

بر روی زیرمجموعهٔ بازی مانند $E \subset R^n$ باشند؛ آن‌گاه $w_1 \Lambda w_2$ را حاصل‌ضرب خارجی یا ضرب فرمهای w_1 و w_2 نامند و این حاصل‌ضرب برابر است با یک فرم $(m + p)$- بُعدی بر روی E در R^n. باید دقت شود که اگر $m + p > n$، آن‌گاه حاصل‌ضرب دو فرم مساوی با صفر است زیرا یکی از dx_j ها باید تکرار شده باشد. همچنین ممکن است $m + p \leq n$ باز یکی از dx_j تکرار شود، آن‌گاه حاصل‌ضرب فرمها مساوی با صفر است. برای مثال اگر $dx_1 \Lambda dx_2$ و $dx_1 \Lambda dx_2 \Lambda dx_3$ فرمهای دوبُعدی و سه‌بُعدی در R^3 باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب این دوفرم مساوی با صفر است، زیرا حاصل یک فرم ۵- بُعدی خواهد بود که در R^3 تنها باید مساوی با ۰ باشد. همچنین فرم dx_1 یک فرم ۱- بُعدی صفر است زیرا dx_1 تکرار شده در صورتی که حاصل‌ضرب آن دو فرم، یک فرم سه‌بُعدی است. اثبات این مطالب را در کتاب آنالیز Browder بیابید.

مثال ۵: حاصل‌ضرب دو فرم $\omega = xdx - ydy$ و $\lambda = xdx - zdy + y^2dz$ را در R^3 محاسبه کنید.

حل :

$$\omega \Lambda \lambda = (xdx - ydy) \Lambda (xdx - zdy + y^2dz)$$
$$= x^2dx\Lambda dx - xzdx\Lambda dy + xy^2dx\Lambda dz + yxdy\Lambda dx + yzdy\Lambda dy - y^3dy\Lambda dz$$
$$= dx\Lambda dy(-xz + xy) + dx\Lambda dz(xy^2) - y^3dy\Lambda dz$$

قوانین شرکت‌پذیری و توزیعی برای عمل ضرب فرمها و یا عمل جمع برقرار می‌باشد. به عبارت دیگر فرض کنید که ω و λ و E فرمهای دیفرانسیلی باشند، آن‌گاه داریم:

$$(w \Lambda \lambda)\Lambda \sigma = w \Lambda(\lambda \Lambda \partial)$$

$$(w + \lambda)\Lambda \sigma = w \Lambda \sigma + \lambda\Lambda\partial$$

قوانین جمع و ضرب همان قوانین بالا می‌باشند. برای اثبات می‌توانید به کتاب Browder مراجعه کنید.

۳.۴.۵. تعریف فرم (صورت) اساسی

فرض کنید که I یک k تایی مرتب $\{i_1 , i_2 ,..., i_k\}$ باشد و آن‌گاه فرم k بُعدی $dx_I = dx_{i_1}\Lambda dx_{i_2}\Lambda...\Lambda dx_{i_k}$ را یک فرم اساسی یا یک فرم متعارف k بُعدی نامند اگر جایگشتهایی در k تایی مرتب انجام گیرد. آن‌گاه فرم به دست آمده برحسب فرم اساسی به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$dx_{j_1}\Lambda dx_{j_2}\Lambda...\Lambda dx_{J_k} = S(J_1,...,J_k)dx_J$$

که در آن dx_J یک k تایی مرتب $\{J_1 ,..., J_k\}$ و $S(J_1 ,..., J_k)$ تعداد جایگشتها در k تایی مرتب می‌باشد و مساوی با ۱ است، اگر تعداد جایگشتها زوج و مساوی با ۱- است اگر تعداد جایگشتها فرد باشد. برای مثال اگر سه تایی مرتب {۳ و ۲ و ۱} را در نظر بگیریم آن‌گاه فرم اساسی دوبُعدی در R^3 برابر است با: $dx_1\Lambda dx_2$, $dx_1\Lambda dx_3$, $dx_2\Lambda dx_3$ یعنی تنها سه فرم دوبعدی اساسی در R^3 وجود دارند. حال اگر ۱ را با ۲ یا ۳ با و... در سه‌تایی مرتب عوض کنیم، آن‌گاه براساس فرمهای اساسی خواهیم داشت :

$$dx_2\Lambda dx_1 = -dx_1\Lambda dx_2 ,\ dx_3\Lambda dx_1 = -dx_1\Lambda dx_3 ,...$$

در حالت کلی داریم: $dx_i\Lambda dx_j = -dx_j\Lambda dx_i$ این خاصیت را **پاد تعویض یا ضدمتقارن** برای ضرب فرمها نامند (برای اثبات به کتاب Browder مراجعه کنید).

در R^n تنها به تعداد $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ فرم اساسی وجود دارد. لذا با این فرمول مشاهده می‌کنیم که

فرم اساسی n بُعدی در R^n تنها یک فرم $dx_I = dx_1 \Lambda dx_2 \Lambda \ ... \ \Lambda dx_n$ خواهد بود. همچنین تعداد فرمهای اساسی دوبعدی در R^3 مساوی با سه است.

تبصره ۳: همان طور که در قسمت ضرب فرمها آمده است حاصل‌ضرب دو فرم که یک اندیس بیش از یک مرتبه تکرار شود مساوی با صفر است زیرا داریم :

$$dx_i \Lambda dx_i = -dx_i \Lambda dx_i \Rightarrow dx_i \Lambda dx_i = 0$$

مثال ۶: نشان دهید که هر فرم k بُعدی در R^3 با $K > 3$ برابر است با صفر.

حل :

چون ۳تایی مرتب در R^3 {۳ و ۲ و ۱} است، در نتیجه برای هر فرم بیش از ۳- بُعدی باید یکی از اندیس‌ها تکرار شود و در نتیجه با روابط بالا این فرم مساوی با صفر است، مثلاً $dx_1 \Lambda dx_2 \Lambda dx_1 \Lambda dx_3$ که مساوی با $-dx_1 \Lambda dx_1 \Lambda dx_2 \Lambda dx_3$ می‌باشد برابر با ۰ خواهد شد زیرا $dx_1 \Lambda dx_1 = 0$

مثال ۷ : فرمهای $\gamma = zdy$ ، $\alpha = xdx - ydy$ ، $\beta = xdy - zdy$ ، $\omega = ydx \Lambda dz + xdy \Lambda dz \ \Lambda zdy$ و $\theta = xyzdx \Lambda dy \Lambda dz$ مفروضند. حاصل‌ضرب خارجی $\alpha \Lambda \beta$ ، $\alpha \Lambda \beta \Lambda \gamma$ ، $\alpha \Lambda \omega$ و $\alpha \Lambda \theta$ را محاسبه کنید.

حل :

با توجه به این که $dy \Lambda dy = dx \Lambda dx = 0$ آن‌گاه داریم

$$\alpha \Lambda \beta = (xdx - ydy) \Lambda (xdy - zdy + y^2 dz) = x^2 dx \Lambda dy - xzdx \Lambda dy + xy^2 dx \Lambda dz$$

$$- yxdy \Lambda dy + yzdy \Lambda dy - y^3 dy \Lambda dz = (x^2 - xz) dx \Lambda dy + xy^2 dx \Lambda dz - y^3 dy \Lambda dz ;$$

$$\alpha \Lambda \beta \Lambda \gamma = (\alpha \Lambda \beta) \Lambda \gamma = z(x^2 - xz) dx \Lambda dy \Lambda dy + xy^2 zdx \ \Lambda dz \Lambda dy - y^3 dy \Lambda dz \Lambda dy$$

$$= -xy^2 zdx \Lambda dy \Lambda dz ;$$

$$\alpha \Lambda \omega = xydx \Lambda dx \Lambda dz + x^2 dx \Lambda dy \Lambda dz - y^2 dy \Lambda dx \Lambda dz - yxdy \Lambda dy \Lambda dz$$

$$= (xy + x^2) dx \Lambda dy \Lambda dz + y^2 dx \Lambda dy \Lambda dz = (xy + x^2 + y^2) dx \Lambda dy \Lambda dz ;$$

$\alpha \Lambda \theta$ مساوی با صفر است زیرا θ یک فرم سه بُعدی و α یک فرم یک بُعدی می‌باشند، در صورتی که حاصل‌ضرب این دو فرم باید در R^3 باشد، پس $\alpha \Lambda \theta = 0$ (یک فرم چهاربُعدی).

مثال ۸: فرمهای یک‌بُعدی $\alpha = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ و $\beta = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$ و فرم دوبعدی $\gamma = h_1 dy\Lambda dz + h_2 dz\Lambda dx + h_3 dx\Lambda dy$ مفروضند. حاصل‌ضرب خارجی $\alpha \Lambda \beta$ و $\alpha \Lambda \gamma$ را محاسبه کنید و نشان دهید که این نتایج متناظر با حاصل‌ضرب اسکالری دو بردار معمولی است.

حل :

$$\alpha \Lambda \beta = (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)\Lambda(g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz)$$
$$= f_1 g_1 dx\Lambda dx + f_1 g_2 dx\Lambda dy + f_1 g_3 dx\Lambda dz + f_2 g_1 dy\Lambda dx + f_2 g_2 dy\Lambda dy + f_2 g_3 dy\Lambda dz$$
$$+ f_3 g_1 dz\Lambda dx + f_3 g_2 dz\Lambda dy + f_3 g_3 dz\Lambda dz$$
$$= (f_1 g_2 - f_2 g_1)dx\Lambda dy + (f_1 g_3 - f_3 g_1)dx\Lambda dz + (f_2 g_1 - g_2 f_3)dy\Lambda dz\ ;$$
$$\alpha \Lambda \gamma = (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)\Lambda(h_1 dy\Lambda dz + h_2 dz\Lambda dx + h_3 dx\Lambda dy)$$
$$= f_1 h_1 dx\Lambda dy\Lambda dz + f_1 h_2 dx\Lambda dz\Lambda dx + f_2 h_1 dy\Lambda dy\Lambda dz + f_2 h_2 dy\Lambda dz\Lambda dx$$
$$+ f_2 h_3 dy\Lambda dx\Lambda dy + f_3 h_1 dz\ \Lambda dy\Lambda dz + f_3 h_2 dz\Lambda dz\Lambda dx + f_3 h_3 dz\Lambda dx\Lambda dy$$
$$= (f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3)dx\Lambda dy\Lambda dz$$

$\alpha \Lambda \beta$ حاصل‌ضرب $f{\times}g$ است به طوری که بردار $f = [f_1 , f_2 , f_3]$ و $g = [g_1 , g_2 , g_3]$ در نظر بگیریم.

نتیجه: در حالت کلی هر یک یا دوفرم با یک بردار تابعی متناظر خواهد بود. به هر فرم ۰-بُعدی یا سه‌بُعدی یک تابع اسکالری متناظر می‌باشد.

در حالت کلی می‌توانیم هر فرم k- بعدی در R^n را برحسب فرم اساسی k بعدی در R^n بنویسیم زیرا با جایگشتهای متعدد می‌توانیم هر فرم k- بُعدی را به فرم اساسی یا متعارف تبدیل کنیم.

۳.۴.۶. تغییر متغیّر و تبدیل در فرمها (صورتها)

یک‌تبدیل توسط $T: D \subset R^k \to E \subset R^n$ از رده C^1 مفروض است. به طوری که $k \le n$.
اگر $x = (x_1 ,..., x_n) \in E$ و $u = (u_1 ,..., u_k) \in D$ بطوریکه $x_i = T_i(u)$ و $i = 1, 2 ,..., n$.
آن‌گاه هر فرم k- بُعدی در E را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$dx_{i_1}\Lambda dx_{i_2}\Lambda ... \Lambda dx_{i_k} = \frac{\partial(T_{i_1}, T_{i_2},..., T_{i_k})}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2},..., x_{i_k})}\ du_1\ \Lambda\ ...\ \Lambda du_k$$

و در نتیجه فرم k- بُعدی $\omega = f(x)dx_{i_1}\Lambda ... \Lambda dx_{i_k}$ با این تبدیل برابر خواهد شد با :

$$\omega_T = f(T(x)) \frac{\partial (T_{i_1},..., \partial T_{i_k})}{\partial (x_{i_1},...,x_{i_k})} du_1 \Lambda \, ... \, \Lambda du_k$$

مسأله ۱ : اگر $x = x(u , v)$ و $y = y(u , v)$ آن‌گاه نشان دهید که :

$$dx \Lambda dy = \frac{\partial (x , y)}{\partial (u , v)} du \Lambda dv$$

حل :

دیفرانسیل dx و dy عبارت است از :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \, , \, dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

با این روابط حاصل‌ضرب خارجی $dx\Lambda dy$ عبارت است از :

$$dx\Lambda dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \Lambda \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} du\Lambda du + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} du\Lambda dv\right)$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} dv\Lambda du + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} dv\Lambda dv$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} du\Lambda dv - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} du\Lambda dv$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right) du\Lambda dv$$

$$= \frac{\partial (x , y)}{\partial (u , v)} du\Lambda dv$$

مسأله ۲ : اگر $x = x(u , v , w)$ و $y = y(u , v , w)$ و $z = z(u , v , w)$ آن‌گاه نشان دهید که

$$dx\Lambda dy\Lambda dz = \frac{\partial (x , y , z)}{\partial (u , v , w)} du\Lambda dv\Lambda dw$$

حل : مانند مسألهٔ ۱ عمل می‌کنیم.

$$dx = x_u \, d_u + x_v \, dv + x_w \, dw$$

$$dy = y_u \, du + y_v \, dv + y_w \, dw$$

$$dz = z_u\, du + z_v\, dv + z_w\, dw$$

با توجه به این روابط حاصل‌ضرب خارجی $dx\wedge dy\wedge dz$ را محاسبه می‌کنیم :

$$dx\wedge dy\wedge dz = [(x_u\, du + x_v\, dv + x_w\, dw)\wedge(y_u\, du + y_v\, dv + y_w\, dw)]$$
$$\wedge(z_u\, du + z_v\, dv + z_w\, dw) = (x_u\, y_v\, du\wedge dv + x_u\, y_w\, du\wedge dw + x_v\, y_u\, dv\wedge du$$
$$+ x_v\, y_w\, dv\wedge dw + x_w\, y_u\, dw\wedge du + x_w\, y_v\, dw\wedge dv)\wedge(z_u\, du + z_v\, dv + z_w\, d_w)$$
$$= x_u\, y_u\, z_w\, du\wedge dv\wedge dw + x_u\, y_w\, z_v\, du\wedge dw\wedge dv + x_v\, y_v\, z_w\, dv\wedge du\wedge dw$$
$$+ x_v\, y_w\, z_u\, dv\wedge dw\wedge du + x_w\, y_u\, z_u\, dw\wedge du\wedge dv + x_w\, y_v\, z_u\, dw\wedge dv\wedge du$$

دقت کنید جملاتی را که یکی از du و dv و یا dw تکرار شده‌اند حذف کردیم و اکنون با توجه به خاصیت پارتعویض، حاصل‌ضرب بالا را برحسب فرم استاندارد $du\wedge dv\wedge dw$ مرتب می‌نماییم.

$$dx\wedge dy\wedge dz = (x_u y_v z_w - x_u y_w z_v - x_v y_u z_w + x_v y_w z_u + x_w y_u z_v - x_w y_v z_u)$$
$$du\wedge dv\wedge dw = [x_u(y_v z_w - y_w z_v) - y_u(x_v z_w - x_w z_v) + z_u(x_v y_w - y_v x_w)]$$
$$du\wedge dv\wedge dw$$

در نتیجه داریم :

$$dx\wedge dy\wedge du = \frac{\partial(x\, ,\, y\, ,\, z)}{\partial(u\, ,\, v\, ,\, w)}$$

تبصره ۴: دو مسأله بالا در حساب انتگرال مقدماتی نیز ظاهر می‌شوند. در حقیقت این دو مسأله همان قضیهٔ تغییر متغیّر در انتگرالهای دوگانه و سه‌گانه می‌باشد. برای مثال تبدیل انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی به مختصات قطبی و تبدیل انتگرال سه‌گانه در مختصات دکارتی به مختصات کروی یا استوانه‌ای را می‌توان یادآور شد. در آنجا دیدیم که $\frac{\partial(x\, ,\, y)}{\partial(r\, ,\, \theta)}$ و در نتیجه : $dxdy = rdrd\theta$ و همچنین در انتگرال سه‌گانه مشاهده کردیم که $\frac{\partial(x\, ,\, y\, ,\, z)}{\partial(p\, ,\, \theta)\, ,\, \varphi)} = p^{2}\sin\varphi$ و در نتیجه : $dxdydz = p^{2}\sin\varphi dpd\theta d\varphi$. اثبات حالت کلی این مطلب در این فصل ارائه خواهد شد.

۳.۵. مشتق‌گیری[1] از فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی

فرض کنید که ω یک فرم p – بُعدی در E یک زیرمجموعهٔ باز در R^n باشد. به علاوه فرض بر این است که ω از ردهٔ C^1 است، یعنی این که اگر $\omega = \sum_I f_I(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$ به طوری که

1. Differentiation

$I = \{i_1, ..., i_p\}$ ، آن‌گاه $f_I(x)$ همگی از ردهٔ C^1 بر روی E هستند. مشتق بیرونی [1] ω که آن را با $d\omega$ نمایش می‌دهیم عبارت است از یک فرم $(p+1)$ بُعدی در E

$$dw = \sum_I df_I(x) \Lambda dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda ... \Lambda dx_{i_p}$$

در حقیقت مشتقّ بیرونی اثر عملگر d بر روی فرم p- بُعدی w می‌باشد.

مثال ۹ : فرض کنید که $w = f(x)$ یک فرم ۰- بُعدی از ردهٔ C^1 در R^3 باشد، آن‌گاه داریم :

$$x = (x, y, z) \in R^3 , \ dw = df(x) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

که همان دیفرانسیل تابع $f(x)$ می‌باشد. بنابراین dw یک فرم ۱- بُعدی در R^3 است.

مثال ۱۰ : اگر $w = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ یک فرم ۱- بُعدی در R^3 باشد، آن‌گاه

$$dw = df_1 \Lambda dx + df_2 \Lambda dy + df_3 \Lambda dz \text{ و } f_i = f_i(x, y, z), \qquad i = 1, 2, 3$$

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} dx + \frac{\partial f_i}{\partial y} dy + \frac{\partial f_i}{\partial z} dz , \qquad i = 1, 2, 3$$

در نتیجه dw به صورت فرم دو بُعدی زیر خواهد بود :

$$dw = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz\right) \Lambda dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz\right) \Lambda dy$$

$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz\right) \Lambda dz$$

$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \Lambda dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dx \Lambda dz + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \Lambda dz$$

مثال ۱۱ : فرض کنید که $w = f(X) dx \Lambda dy + g(X) dx \Lambda dz$ یک فرم ۲- بُعدی از ردهٔ C^1 در R^3 باشد، به طوری که $X = (x, y, z)$ آن‌گاه داریم :

$$dw = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \Lambda dx \Lambda dy + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz\right) \Lambda dx \Lambda dz$$

---

1. Exteriar Derivative

$$= \frac{\partial f}{\partial z} dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy\wedge dx\wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z} dx\wedge dy\wedge dz - \frac{\partial g}{\partial y} dx\wedge dy\wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

تبصره ۵: دقت کنید که اگر یک فرم n- بُعدی در یک زیرمجموعهٔ باز E در R^n داشته باشیم، آن‌گاه مشتق بیرونی این فرم در E مساوی با صفر خواهد شد، زیرا در هر جملهٔ آن حداقل یکی از dx_i و $i = 1, 2, ..., n$ تکرار خواهد شد. همچنین دقت کنید که مشتق بیرونی هر فرم p- بُعدی یک فرم $(p + 1)$- بُعدی می‌باشد. اما عکس آن صادق نیست، یعنی این که برای مثال هر فرم ۱ - بُعدی ممکن است برابر با مشتق یک فرم ۰ - بُعدی نباشد. در حالت کلی یک فرم $(p + 1)$- بُعدی نمی‌تواند مشتق بیرونی یک فرم p- بُعدی باشد. به مثال زیر توجّه کنید.

مثال ۱۲ : فرض کنید که $w = xdy$ یک فرم ۱ - بُعدی در R^2 باشد. حال اگر فرض شود که این فرم ۱ -بُعدی مشتق بیرونی یک فرم ۰ - بُعدی است، پس لازم است که یک فرم ۰ - بُعدی مانند γ وجود داشته باشد که $d\gamma = w$. حالا با توجه به مشتق فرمهای دیفرانسیلی داریم :

$$d(d\gamma) = dw = d(xdy) = dx\wedge dy$$

در صورتی که $d(d\gamma) = 0$ (به قضیهٔ پوانکاره مراجعه کنید)، در حالی که $dx\wedge dy \neq 0$ و تساوی بالا صحیح نیست. توجه کنید که در قضیهٔ ۲ ثابت خواهد شد که یک فرم $w = f_I(x)dx_I$ وقتی مساوی با صفر است که تمام $f_I(x) = 0$ باشند. حال با توجه به این قضیه مشاهده خواهد شد که $dx\wedge dy \neq 0$

مثال ۱۳ : اگر $w = yzdx + x^2dz$ آن‌گاه dw را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} dw &= d(yz)\wedge dx + d(x^2)\wedge dz \\ &= (zdy + ydz)\wedge dx + 2xdx\wedge dz \\ &= zdy\wedge dx + ydz\wedge dx + 2xdx\wedge dz \\ &= -zdx\wedge dy + (2x - y)dx\wedge dz \end{aligned}$$

قضیهٔ ۲ : فرض کنیدکه $\alpha = \sum_I f_I(x)dx_I$ یک فرم pـ بُعدی و $\beta = \sum_J g_J(x)dx_J$ یک فرم q بُعدی از ردهٔ C^1 در E یک زیرمجموعهٔ باز در R^n باشند، آن‌گاه :

الف - $d(\alpha\Lambda\beta) = d\alpha\Lambda\beta + (-1)^p\alpha\Lambda d\beta$

ب - اگر α از ردهٔ C^2 در E باشد، آن‌گاه $d(d\alpha) = 0$ (قضیهٔ پوانکاره)

اثبات الف) قضیه را برای $\alpha = f(x)dx_I$ و $\beta = g(x)dx_J$ اثبات می‌کنیم. زیرا اگر قضیه را برای هر جمله از $d(\alpha\Lambda\beta)$ اثبات کنیم، آن‌گاه برای Σ آن نیز برقرار است. دقت کنید که می‌دانیم مجموع فرمهای kـ بُعدی، خود نیز یک فرم kـ بُعدی است؛ بنابراین داریم :

$$\alpha = fdx_{j_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p} \qquad , \qquad \beta = gdx_{J_1}\Lambda dx_{J_2}\Lambda...\Lambda dx_{J_q}$$

$$d\alpha = df\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p} \qquad , \qquad d\beta = dg\Lambda dx_{j_1}\Lambda dx_{j_2}\Lambda..\Lambda dx_{j_q}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که :

$$\alpha\Lambda\beta = fg\, dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}\Lambda dx_{j_1}\Lambda dx_{j_2}\Lambda...\Lambda dx_{j_q}$$

اکنون $d(\alpha\Lambda\beta)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{aligned}
d(\alpha\Lambda\beta) &= d(fg)\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}\Lambda dx_{j_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_q}\\
&= (fdg + gdf)\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}\Lambda dx_{j_1}\Lambda...\Lambda dx_{J_p}\\
&= gdf\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}\Lambda dx_{J_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_q} + fdg\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_q}\\
&= gdf\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_q} + (-1)^p fdg\Lambda dx_{j_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_p}\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}\\
&= df\Lambda dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}\Lambda gdx_{J_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_q} + (-1)^p dg\Lambda dx_{j_1}\Lambda...\Lambda fdx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{j_p}\\
&= d\alpha\Lambda\beta + (-1)^p d\beta\Lambda\alpha \qquad (1)
\end{aligned}$$

در این رابطه علامت $(-1)^p$ به دلیل تعویض p مرتبه جابه‌جایی به وجود آمده است.

اثبات (قضیه پوانکاره)

دوباره فرض می‌کنیم که $\omega = dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}$ یک فرم pـ بُعدی از ردهٔ C^2 باشد. در این جا باید یادآوری کنیم که اگر قضیه برای این صورت ω اثبات شود، آن‌گاه برای هر فرم pـ بُعدی برقرار است زیرا یک فرم وقتی مساوی صفر است که تمام ضرایب $dx_{i_1}\Lambda...\Lambda dx_{i_p}$ آن مساوی با صفر باشد (قضیهٔ ۱۴) اکنون $d(d\omega)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$d\omega = df\Lambda\, dx_{i_1}\Lambda ... \Lambda dx_{i_p} \qquad , \qquad d^2\omega = d(d\omega) = d(df)\Lambda\, dx_{i_1}\Lambda ... \Lambda dx_{i_p}$$

حال مشاهده خواهیم کرد که $d(df) = 0$ در حقیقت، دیفرانسیلِ دیفرانسیل هر تابع مساوی با صفر است. فرض کنید که $f \in C^2(E)$ آن‌گاه $f = f(x_1, ..., x_n)$ و $df = \sum_{i=1}^{n} D_i f dx_i$ در نتیجه :

$$d^2f = d(df) = \sum_{i=1}^{n} d(d_i f)\lambda\, dx_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(x) dx_i\, \Lambda dx_j$$

چون : $D_{ij}f = D_{ji} f$ و $dx_i \Lambda dx_j = -dx_j \Lambda dx_j$ ، پس $d^2f = 0$ بنابراین $d^2\omega = 0$ و قضیه اثبات شده است.

مثال ۱۴ : اگر α و β فرمهای ۱ - بُعدی باشند، نشان دهید که قضیهٔ ۱۳ برای آنها برقرار است. (α و β فرمهای از ردهٔ C^2 فرض شده‌اند).

حل :

ابتدا نشان می‌دهیم که قسمت الف قضیهٔ ۱ برای α و β برقرار است :

$$\alpha = \sum_i f_i\, dx_i \qquad , \qquad \beta = \sum_j g_i\, dx_j$$

$$d\alpha = \sum_i df_i \Lambda dx_i \qquad , \qquad d\beta = \sum_j dg_j \Lambda dx_j$$

$$d(\alpha\Lambda\beta) = d\Big(\sum_i \sum_j f_i g_j dx_i\, \Lambda dx_j\Big) = \sum_i \sum_j d(f_i g_j)\, \Lambda dx_i\, \Lambda dx_j$$

$$= \sum_i \sum_j \left[\left(\sum_k D_k (f_i g_j) \right) \Lambda dx_i\, \Lambda dx_j \right]$$

$$= \sum_i \sum_j \left[\left(\sum_k f_i D_k g_j + g_j D_k f_i \right) \Lambda dx_i \Lambda dx_j \right]$$

$$= \sum_i \sum_j \left[\left(f_i \sum_k D_k g_j \right) \Lambda dx_i \Lambda dx_j + \left(g_j \sum_k D_k f_i \right) \Lambda dx_i \Lambda dx_j \right]$$

$$= \sum_i df_i \Lambda dx_i \Lambda \sum_j g_j \, dx_j - \sum_i f_i \, dx_i \Lambda \sum_j D_k \, g_j \Lambda dx_j$$

$$= d\alpha \Lambda \beta - \alpha \Lambda d\beta$$

اگر $\alpha = fdx$ و $\beta = gdy$ فرمهای یک بُعدی در $R^۲$ باشند آن‌گاه:

$$d(\alpha \Lambda \beta) = d(fdx \Lambda gdy) = d(fg) \Lambda dx \Lambda dy$$

$$= (gdf + fdg) \Lambda dx \Lambda dy$$

$$= df \Lambda dx \Lambda gdy - fdx \Lambda dg \Lambda dy$$

$$= d\alpha \Lambda \beta - \alpha \Lambda d\beta$$

اکنون ثابت می‌کنیم که: $d(d\alpha) = ۰$

$$d\alpha = df \Lambda dx = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \Lambda dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dx \Lambda dy \, ,$$

$$d(d\alpha) = -d\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\left(\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} dy \right) \Lambda dx \Lambda dy = ۰$$

قضیهٔ ۱۴: فرض کنید $W = \sum_I b_I(x) dx_I$ یک فرم استاندارد پیوسته p- بُعدی در E یک زیرمجموعه در R^n باشد. آن‌گاه $\omega = ۰$ در E اگر و تنها اگر هر یک از $b_I(x) = ۰$ به ازای هر $x \in E$. دقت کنید که برای فرمهای استاندارد صحیح است و در غیر این صورت ممکن است $\omega = ۰$ اما $b_I(x) \neq ۰$، برای مثال $dx \Lambda dy + dy \Lambda dx = ۰$

اثبات: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم که $\omega = ۰$ و $u \in E$ موجود است. که برای اندیس در $J = \{j_۱, ..., J_p\}$، $b_J(u) > ۰$ آن‌گاه چون b_J پیوسته است وجود دارد یک همسایگی از u به طوری که $b_J(x) > ۰$ به ازای هر x در آن همسایگی، یعنی این که وجود دارد $h > ۰$ به طوری که اگر $|x_i - v_i| \leq h$ و $i = ۱, ۲, ..., n$ آن‌گاه $b_J(x) > ۰$. به دلیل این که ω یک فرم استاندارد فرض شده است؛ آن‌گاه حدّاقل یک جمله از فرم p- بُعدی که با تغییر جملات حذف نخواهد شد، مخالف با صفر می‌باشد، در نتیجه $\omega \neq ۰$ حدّاقل به ازای نقاطی در همسایگی از V به شعاع h. عکس این مطلب کاملاً بدیهی است زیرا تمام جملات ω مساوی با صفر می‌باشند.

۳.۵.۱. پایایی مشتق یک فرم (صورت) p- بعدی تحت تبدیلات

فرض کنید که V_m یک فضای m- بُعدی و V_n یک فضای n- بُعدی باشد. به علاوه فرض کنید که $T: V_m \to V_n$ یک تبدیل از ردهٔ C^1 است. اگر ω یک فرم p- بُعدی در V_n باشد، آن‌گاه ω_T یک فرم p- بُعدی است که توسط تبدیل T بیان می‌شود. اگر $x \in V_n$ در نتیجه $x_i = t_i(u)$، $u \in V_m$. در حقیقت، اگر $W = f(x)dx_I$ آن‌گاه $\omega_T = f(T(x))dt_I$ به طوری که $dt_I = dt_{i_1} \Lambda dt_{i_2} \Lambda ... \Lambda dt_{i_p}$. در این جا دقت کنید که dt_i برابر است با $\sum_{j=1}^{n} D_j t_i(u) du_j$ بنابراین توسط تبدیل T فرم ω_T یک فرم p- بُعدی در V_m خواهد بود. پس فرم p- بُعدی تحت تبدیل T پایایی شد. از طرف دیگر این تبدیل در فرمهای p- بُعدی را تغییر متغیّر نیز نامیده‌اند. در قضیهٔ زیر ثابت خواهد شد که مشتق‌گیری، ضرب و جمع فرمها نیز تحت تبدیلات پایایی می‌باشند.

قضیهٔ ۱۵ : فرض کنید که E یک مجموعهٔ باز در R^n و T یک تبدیل از ردهٔ C^1 از E به یک مجموعهٔ باز $V \subset R^m$ باشد و به علاوه ω را یک فرم p- بُعدی و λ را یک فرم k بُعدی در V در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم :

الف) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$ اگر $k = p$؛

ب) $(\omega \Lambda \lambda)_T = \omega_T \Lambda \lambda_T$؛

ج) $(d\omega)_T = d(w_T)$ اگر ω از رده C^1 و T و از ردهٔ C^2 باشد.

اثبات :

الف ـ فرض کنید که : $\omega = \sum_I f_I(x) dx_I$ و $\lambda = \sum_I g_I(x) dx_I$ آن‌گاه

$$\lambda + \omega = \sum_I (f_I(x) + g_I(x)) dx_I,$$

$$(\omega + \lambda)_T = \sum_I (f_I(T(u)) + g_I(T(u)) dt_I$$

$$= \sum_I f_I(T(u)) dt_I + \sum_I g_I(T(u)) dt_I$$

$$= \omega_T + \lambda_T$$

ب - $\omega = \sum_I f_I(x)dx_I$ و $\lambda = \sum_J g_J(x)dx_J$ را در نظر می‌گیریم، پس :

$$\omega\Lambda\lambda = \sum_{I,J} f_I(x)g_J(x)dx_I\Lambda dx_J ;$$

$$(\omega\Lambda\lambda)_T = \sum_{I,J} f_I(T(u))g_J(T(u))dt_I\Lambda dt_J$$

$$= \left[\sum_I f_I(T(u))dt_I\right] \Lambda \left[\sum_J g_J(T(u))\Lambda dt_J\right]$$

ج - ابتدا مطلب را برای یک فرم ۰- بُعدی اثبات می‌کنیم. که فرم ۰- بُعدی $f(x)$ مفروض است به طوری که $x \in V$، $x_i = T_i(u)$، $i = ۱, ۲, ..., m$، که $u = (u_۱, ..., u_n)$ چون f مشتق‌پذیر است پس:

$$df(x) = \sum_{i=۱}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i$$

بنابراین $(df(x))_T$ برابر است با :

$$(df(x))_T = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial f(T(u))}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\,du_j \qquad (۱)$$

از طرف دیگر $f_T(x) = f(T(u))$ و $df_T(x)$ برابر است با :

$$df_T(x) = d(f(T(u)) = \sum_i D_i f(T(u))d(T_i(u)) \qquad (۲)$$

$$= \sum_i \sum_j D_i f(T(u))\,\frac{\partial T_i(u)}{\partial u_j}\,du_j$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) بدین نتیجه می‌رسیم که $(df(x))_T = d(f_T(x))$ که مطلب ثابت می‌شود. اکنون برای اثبات حالت کلی یک فرم p- بُعدی مانند ω در V از قسمت ب استفاده می‌کنیم. در بالا ثابت کردیم که قضیه برای فرم ۰- بُعدی برقرار است، حال فرض می‌کنیم که قضیه برای فرم $(p-۱)$- بُعدی برقرار باشد، این فرم $(p-۱)$- بُعدی را با ω نمایش می‌دهیم و لذا $\omega\Lambda dx_i$ یک فرم p- بُعدی می‌باشد. اکنون با استفاده از تعریف مشتقّ فرم دیفرانسیلی و قضیهٔ ۱۳ و قسمت ب این قضیه داریم :

$$d(\omega\Lambda dx_i) = d\omega\Lambda dx_i + (-۱)^{p-۱}\,\omega\Lambda d(dx_i) = d\omega\Lambda dx_i ;$$

در این جا $d(dx_i) = ۰$ (بنا بر قضیهٔ پوانکاره). اکنون $(d(\omega\Lambda dx_i))_T$ را محاسبه می‌کنیم :

$$(d(\omega \Lambda dx_i))_T = (d\omega \Lambda dx_i)_T = (d\omega)_T \, \Lambda (dx_i)_T \qquad (*)$$

چون ω یک فرم $(p - ۱)$- بُعدی است، پس قضیه، برای آن برقرار است و همچنین $(dx_i)_T = d(x_i)_T$. بنابراین رابطهٔ $(*)$ به صورت زیر در خواهد آمد :

$$(d(\omega \Lambda dx_i))_T = d(\omega_T) \Lambda d(x_i)_T = d(\omega_T \Lambda dx_i)_T$$
$$= d(\omega \Lambda dx_i)_T$$

قضیهٔ ۱۶ : فرض کنید که T یک تابع از ردهٔ C^1 از یک زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ به یک مجموعهٔ $V \subset R^m$ و S یک تابع از ردهٔ C^1 از V به یک مجموعهٔ باز $W \subset R^p$ و ω یک فرم k- بُعدی در W باشد. بنابراین ω_s یک فرم k- بُعدی در V و $(\omega_s)_T$ یک فرم k- بُعدی در E خواهد بود. آن‌گاه $(\omega_s)_T = \omega_{sT}$ ، جایی که $(ST)(x) = S(T(x))$

اثبات : اگر قضیه را برای دو فرم ثابت کنیم، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۱۴ برای حاصل‌ضرب این دو فرم نیز برقرار است. چون قضیه برای فرم ۰ - بُعدی برقرار است، آن‌گاه اگر قضیه را برای یک فرم ۱ - بُعدی ثابت کنیم در نتیجه برای هر فرم k- بُعدی نیز برقرار خواهد شد زیرا هر فرم k- بُعدی از فرمهای ۰ - بُعدی و ۱ - بُعدی تشکیل شده است.

فرض کنید که $y = T(x)$ و $z = S(y)$ و $t_1, ..., t_m$ و $s_1, ..., s_p$ به ترتیب مؤلفه‌های T و S و $\omega = dz_q$ یک فرم ۱ - بُعدی باشد آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ ۱۵ خواهیم داشت :

$$\omega_s = d(z_q)_S = \sum_j D_j s_q(y) dy_j',$$

$$(\omega_s)_T = ((dz_q)_S)_T = \sum_j \sum_i D_j \, s_q(T(x)) D_i \, t_j \, dx_i = \omega_{ST}$$

مثال ۱۵ : رابطهٔ $(dw)_T = d(w_T)$ را برای $w = xdy \Lambda dz$ و تبدیل $T(u, v, w) = (x, y, z)$ $x = u + v - w$ و $y = u^۲ - v$ ، $z = v + w^۲$ بررسی کنید.

حل :

$$dw = d(x \Lambda dy \Lambda dz) = dx \Lambda dy \Lambda dz,$$

$$(dw)_T = d(u + v - w) \Lambda d(u^۲ - v) \Lambda d(v + w^۲)$$

$$= (du + dv - dw)\Lambda(2udu - dv)\Lambda(dv + 2wdw)$$
$$= (udv\Lambda du - 2udw\Lambda du - du\Lambda dv + dw\Lambda dv)\Lambda(dv\Lambda dw)$$
$$= -2udw\Lambda du\Lambda dv + 4uwdv\Lambda dw - 2wdu\Lambda dv\Lambda dw$$
$$-2(u + w + 2uw)du\Lambda dv\Lambda dw. \qquad (1)$$

اکنون w_T و $d(w_T)$ را محاسبه می‌نماییم :

$$w_T = (xdy\Lambda dz)_T = (u + v - w)d(u^2 - v)\Lambda d(v + w^2)$$
$$= (u + v - w)(2udu - dv)\Lambda(dv + 2wdw)$$
$$= (2u^2 + 2uv - 2uw)du\Lambda dv + (-4u^2w - 4uvw + 4uw^2)dw\Lambda du$$
$$+ (-2uw - 2vw + 2w^2)dv\Lambda dw\ ;$$
$$d(w_T) = d(2u^2 + 2uv - 2uw)\Lambda du\Lambda dv + d(-4u^2w + 4uw^2)$$
$$\Lambda dw\Lambda du + d(-2uw - 2vw + 2w^2)\Lambda dv\Lambda dw$$
$$= -2udw\Lambda du\Lambda dv - 4uwdv\Lambda dw\Lambda du - 2wdu\Lambda dv\Lambda dw$$
$$= -2(u + w + 2uw)du\Lambda dv\Lambda dw. \qquad (2)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) با (۲) به این نتیجه می‌رسیم که $d(w_T) = d(w)_T$

۳.۶. انتگرال از فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی

۳.۶.۱. تعریف یک تابع C^1 بر روی یک مجموعه بسته

یک تابع مانند f را بر روی یک مجموعهٔ فشرده (یا مجموعهٔ بسته) $D \subset R^p$ به R^n از ردهٔ C^1 یا C^r ، ($r \geq 1$) نامند اگر یک تابع مانند g از ردهٔ C^1 (یا C^r و $r \geq 1$) بر روی یک مجموعهٔ باز $W \subset R^p$ به R^n داشته باشد به طوری که $D \subset W$ و $g(x) = f(x)$ به ازای هر $x \in D$.

۳.۶.۲. تعریف یک سطح p- بُعدی

فرض کنید E یک مجموعهٔ باز در R^n باشد. یک سطح p- بُعدی در E عبارت است از یک تابع از ردهٔ C^1 مانند Φ از یک مجموعهٔ فشرده $D \subset R^p$ به داخل E . D را **حوزهٔ پارامترها** نامند. ممکن است که D یک حجرهٔ p- بُعدی یا سادک p- بُعدی در نظر گرفته شود. برای مثال می‌توان از پارامتری کردن یک منحنی در R^3 نام برد. یک منحنی هموار مانند C در فضای سه‌بُعدی V_3 با مختصات (x , y , z) برحسب پارامتر به صورت $x = x(t)$ و $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ نمایش داده

می‌شود، جایی که $a \leq t \leq b$. این منحنی هموار را می‌توان توسط یک تبدیل از ردهٔ C^r، $r \geq 1$، $T : V_1 \to V_2$ بیان کرد. بنابراین منحنی C یک نگاشت هموار (یا از ردهٔ C^r ، $r \geq 1$) از یک مجموعهٔ بسته $[a , b]$ به داخل V_2 است. دقت کنید که یک سطح p- بُعدی یا یک منحنی هموار در R^3 از حوزهٔ پارامتری به داخل $E \subset R^n$ است نه به یک زیرمجموعهٔ E

۳.٦.۳. تعریف انتگرال فرمهای دیفرانسیلی

به هر سطح p- بُعدی Φ در E یک عدد $\int_{\Phi} w = w(\Phi)$ نسبت می‌دهیم؛ در حقیقت داریم :

$$\int_{\Phi} w = \int_{D} \sum a_{i_1,\dots,}a_{i_p}\,\Phi(u)\frac{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}{\partial(u_1,\dots,u_p)}du_1\dots du_p$$

به طوری که $D \subset R^p$ حوزهٔ پارامتری است. اگر $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ مؤلفه‌های Φ باشند، آنگاه $\Phi : (u_1, \dots, u_p) \to (\phi_{i_1}(u),\dots,\phi_{i_p}(u))$. توجه کنید که انتگرال سمت چپ بالا معنا دارد، زیرا انتگرال سمت راست را قبلاً تعریف کرده‌ایم:

مثال ۱۶ : اگر $w = x^2dx + ydy + xyzdz$ و C منحنی $x = t$ و $y = t$ و $z = t$، $0 \leq t \leq 1$ باشد، آنگاه $\int_C w$ را محاسبه کنید:

$$\int_C w = \int_{[0,1]} (t^2 + t + t^3)dt = \frac{13}{12}$$

مثال ۱۷ : فرض کنید که γ یک سطح یک بُعدی از ردهٔ C^1 (یک منحنی از ردهٔ C^1) در R^3 با حوزهٔ پارامتر $D = [0 \text{ و } 1]$ و $w = xdy + ydx$ در R^3 باشد، آنگاه

$$\int_{\gamma} w = \int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t)]dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma(0)\gamma_2(0)$$

جایی که $x = \gamma_1(t)$ و $y = \gamma_2(t)$ در نتیجه $w = (\gamma_1(t))\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t))dt$. از نتیجهٔ

محاسبهٔ $\int_\gamma w$ چنین استنباط می‌شود که حاصل انتگرالها تنها به نقطهٔ ابتدایی و انتهایی بستگی دارد. اگر منحنی γ یک منحنی بسته باشد، آن‌گاه $\int_\gamma w = 0$ خواهد شد. این همان مطلبی است که در ریاضیات عمومی (حسابان) تحت انتگرال منحنی‌الخط به دست آمده است. بعداً ثابت می‌کنیم که هر فرم کامل دارای چنین خاصیتی می‌باشد. انتگرال فرمهای ۱ - بُعدی را انتگرال منحنی‌الخط می‌نامند.

مثال ۱۸ : فرض کنید که $\gamma(t) = (a\cos t\ ,\ b\sin t)$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ یا $a > 0\ ,\ b > 0$ مقادیر ثابت و $w = xdy$ باشد آن‌گاه داریم :

$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi} ab\ \cos^2 t\ dt = \pi ab$$

که مساحت بیضی می‌باشد. در این جا باید توجه کرد که منحنی γ یک منحنی بسته یا یک بیضی است. در حقیقت، $\int_\gamma xdy$ مساحت ناحیه‌ای است که توسط γ محاصره شده است، این حالت خاص از قضیهٔ گرین می‌باشد.

مثال ۱۹ : فرض کنید $w = xdy\Lambda dz + ydx\Lambda dy$ یک فرم ۲ - بُعدی و S یک سطح با $y = u - v$ و $x = u + v$ و $z = uv$ با $0 \leq u \leq 1$ ، $0 \leq v \leq 1$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ $\int_S\int w$ (انتگرال دوگانه بر روی سطح S).

حل :

$$\begin{aligned}
w_T &= (u + v)d(u - v)\Lambda d(uv) + (u - v)d(u + v)\Lambda d(u - v)\\
&= (u + v)^2 du\Lambda dv - 2(u - v)du\Lambda dv\\
&= (u^2 - 2u + v^2 + 2v + 2uv)\ du\Lambda dv\ ;\\
\int_S\int w &= \int_D\int w_T = \int_0^1\int_0^1 (u^2 - 2u + v^2 + 2v + (uv)dudv\\
&= \int_0^1 \left(v^2 + 3v - \frac{2}{3}\right) dv = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

مثال ۲۰: فرض کنید که D یک حجرهٔ سه بُعدی با $۰ \le r \le ۱$ و $۰ \le \theta \le \pi$ و $۰ \le \varphi \le ۲\pi$ حوزهٔ پارامتری و سطح $(x , y , z) = \Phi(r , \theta , \varphi)$ با ضابطهٔ زیر باشد:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \ \ , \ \ y = r \sin\theta \sin\varphi \ \ , \ \ z = r \cos\theta$$

بنابراین $w = dx\Lambda dy\Lambda dz$ $\int_\Phi$ برابر است با:

$$\int_\Phi dx\Lambda dy\Lambda dz = \int_D J_\Phi \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_۰^۱ dr \int_۰^\pi d\theta \int_۰^{۲\pi} r^۲ \sin^۲ y \, d\varphi = \frac{۴\pi}{۳}$$

توجه کنید که در این جا $J_\Phi = r^۲\sin^۲\varphi$ که قبلاً در ۳.۳ محاسبه شده است. در این مثال، Φ ناحیهٔ D را بر روی یک کره با شعاع واحد در $R^۳$ نقش می‌دهد. این تابع در داخل D یک تابع ۱-۱ می‌باشد، امّا در برخی از نقاط مرزی (کرانه) ممکن است ۱-۱ نباشد. انتگرال بالا حجم $\Phi(D)$ را مشخص می‌کند.

مثال ۲۱: فرض کنید $w = xydy\Lambda dz + xdz\Lambda dx + ۳xzdx\Lambda dy$ و S سطحی با ضابطهٔ $z = x^۲ + y^۲$ با $D = (۰ \le x \le ۱ \ , \ ۰ \le y \le ۱)$ باشد؛ آن‌گاه $\int\int_S w$ را محاسبه کنید.

حل :

در این جا $x = u$ و $y = v$ در نظر می‌گیریم، آن‌گاه :

$$\begin{aligned} w_T &= uvdv\Lambda d(u^۲ + v^۲) + ud(u^۲ + v^۲)\Lambda du + ۳u(u^۲ + v^۲)du\Lambda dv \\ &= uvdv\Lambda(۲udu + ۲vdv) + u(۲udu + ۲vdv)\Lambda du + (۳u^۳ + ۳uv^۲)du\Lambda dv \\ &= (۳u^۳ + ۳uv^۲ - ۲u^۲v - ۲uv)du\Lambda dv \ ; \end{aligned}$$

تبصرهٔ ۶: دقت کنید که در مثالهای بالا w_T محاسبه شده است، به جای w_T می‌توان از ژاکوبین در فرمول انتگرال استفاده کرد که نتیجهٔ حاصل، مساوی می‌باشد. در مثالهای بالا به سبب سادگی محاسبه w_T از آن به جای ژاکوبین استفاده شده است. در حقیقت $\hat{w}_T = w[\Phi(u)] \, J_\Phi$

۳.۶.۴. برخی از خواصّ انتگرال فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی

۱- اگر $w_۱$ و $w_۲$ فرمهای p- بُعدی در $E \subset R^n$ (باز) باشند، آن‌گاه $w_۱ = w_۲$ اگر و تنها اگر

$w_\text{۱}(\Phi) = w_\text{۲}(\Phi)$ به ازای هر سطح p- بُعدی در E. فرم p- بُعدی $w = \circ$ اگر $w(\Phi) = \circ$ به ازای هر سطح p- بُعدی در E.

۲- فرض کنید C یک عدد حقیقی و w یک فرم p- بُعدی باشد آن‌گاه Cw یک فرم p- بُعدی به شکل زیر است:

$$\int_\Phi Cw = C\int_\Phi w$$

۳- فرض کنید $w = w_\text{۱} + w_\text{۲}$ آن‌گاه به ازای هر سطح p- بُعدی در E داریم:

$$\int_\Phi w = \int_\Phi w_\text{۱} + \int_\Phi w_\text{۲}$$

اثبات این خواص مشکل نمی‌باشد. خواصّ دیگری برای انتگرال وجود دارد که بعداً در قضیه استوکس شرح خواهیم داد.

قضیه ۱۷: فرض کنید w یک‌فرم p- بُعدی در یک زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ و Φ یک سطح p- بُعدی در E با حوزهٔ پارامتری $D \subset K^p$ و Δ یک سطح p- بُعدی در K^n با حوزهٔ پارامتری D باشد، به طوری که $u = \Delta(u)$، $u \in D$ آن‌گاه داریم:

$$\int_\Phi w = \int_\Delta w_\Phi$$

اثبات: $w = a(x)\, dx_{i_\text{۱}} \Lambda \ldots \Lambda dx_{i_p}$ و Φ مؤلفه‌ها $\varphi_\text{۱}, \varphi_\text{۲}, \ldots, \varphi_n$ را در نظر می‌گیریم، آن‌گاه $\omega_\Phi = a(\Phi(u))\, d\phi_{i_\text{۱}} \Lambda d \Lambda \ldots \phi_{i_p}$.

کافی است ثابت کنیم که $J(u)\, du_\text{۱} \Lambda \ldots \Lambda du_p = d\phi_{i_\text{۱}} \Lambda \ldots \Lambda d\phi_{i_p}$، زیرا بنابر تغییر متغیّر در انتگرال، مطلب ثابت شده است. فرض کنید که $[A]$ یک ماتریس $p \times p$ با اعضای $\alpha(r, q) = D_q \phi_{i_r}(u)$، $r, q = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, p$ و یا این که

$$[A] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi_{i_\text{۱}}}{\partial u_\text{۱}} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_{i_\text{۱}}}{\partial u_p} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial\phi_{i_p}}{\partial u_\text{۱}} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_{i_p}}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم :

$$d\phi_{i_r} = \frac{\partial\phi_{i_r}}{\partial u_1} du_1 + \ldots + \frac{\partial\phi_{i_r}}{\partial u_p} du_p = \sum_{q=1}^{p} \alpha(r, q) du_q$$

بنابراین : $\alpha(r, q) = \frac{\partial\phi_{i_r}}{\partial u_p}$ در نتیجه تساوی زیر برقرار است :

$$d\phi_{i_1} \Lambda d\phi_{i_2} \Lambda \ldots \Lambda d\phi_{i_p} = \sum_{r=1}^{p} \alpha(1, q) \ldots a(p, q_p)\, du_{q_1} \Lambda \ldots \Lambda du_{q_p} \qquad (*)$$

برای فهم مطلب، این تساوی را برای $q = p = 2$ می‌نویسیم:

$$d\phi_{i_1} = \sum_{q=1}^{2} \alpha(1, q) du_q = \alpha(1, 1) du_1 + \alpha(1, 2) du_2,$$

$$d\phi_{i_2} = \sum_{q=1}^{2} \alpha(2, q) du_q = \alpha(2, 1) du_1 + \alpha(2, 2) du_2,$$

$$\begin{aligned} d\phi_{i_1} \Lambda d\phi_{i_2} &= (\alpha(1, 1)\alpha(2, 2) - \alpha(1, 2)\alpha(2, 1)) du_1 \Lambda du_2 \\ &= \det[A] = d\phi_{i_1} \Lambda d\phi_{i_2} \end{aligned}$$

اکنون به رابطهٔ $(*)$ بر می‌گردیم و دقت می‌کنیم که با خاصیت پاد تعویض رابطهٔ $(*)$ به صورت زیر خواهد شد :

$$\begin{aligned} d\phi_{i_1} \Lambda \ldots \Lambda d\phi_{i_p} &= \alpha(\sum_{r=1}^{p} 1, q_1) \ldots \alpha(p, q_p) = S(q, \ldots, q_p) du_1 \Lambda \ldots \Lambda du_p \\ &= \det[A] du_1 \Lambda \ldots \Lambda du_p \\ &= J(u) du_1 \Lambda \ldots \Lambda du_p \end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۸ : فرض کنید که T یک تابع از ردهٔ C^1 از یک زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ به داخل مجموعهٔ باز $V \subset R^m$ و Φ یک سطح p- بُعدی در E و w یک فرم p- بُعدی در V باشد؛ آن‌گاه :

$$\int_{T\Phi} w = \int_{\Phi} w_T$$

اثبات : فرض کنید که D حوزهٔ پارامتری سطح Φ باشد، پس D نیز حوزهٔ پارامتری Φ است $\Delta(u) = u$ تعریف می‌کنیم، اکنون با توجه به قضیهٔ ۱۶ و ۱۷ داریم :

$$\int_{T\Phi} w = \int_{\Delta} w_{T\Phi} = \int_{\Delta} (w_T)_{\Phi} = \int_{\Phi} w_T$$

۳.۷. فرمهای (صورتهای) بسته و کامل

۳.۷.۱. تعریف

فرض کنید $U \subset R^n$ یک مجموعهٔ باز و w یک فرم p- بُعدی از ردهٔ C^1 در U باشد. اگر $dw = 0$ w را یک فرم بسته نامند. اگر یک فرم $(p-1)$ بُعدی در U مانند λ وجود داشته باشد، w را کامل گویند، به طوری که $d\lambda = w$. به سادگی مشاهده می‌شود که فرم کامل، یک فرم بسته است. اما عکس آن صادق نیست مگر تحت شرایط خاص که در قضیهٔ زیر مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

دقت کنید بنا بر قضیهٔ پوانکاره $dw = d(d\lambda) = 0$. توجه کنید که لمی به نام لم پوانکاره وجود دارد که بیانگر این مطلب است که فرمهای بسته بر روی یک مجموعهٔ ستاره‌ای شکل و باز کامل می‌باشد (به کتاب Spivake , Rudin مراجعه کنید).

قضیهٔ ۱۹: فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز و محدّب در R^n و f یک تابع از ردهٔ C^1 بر روی U باشد. r یک عدد مثبت و صحیح و $1 \le r \le n$ و $D_j f(x) = 0$ به ازای هر $x \in U$ و $r \le J \le n$ آن‌گاه تابعی مانند F از ردهٔ C^1 بر روی U وجود دارد به طوری که :

$$D_r F(x) = f(x) , D_j F(x) = 0 , r < j \le n , x \in V$$

اثبات : قرار می‌دهیم $x = (x' , x_r , x'')$، $x = (x_1 ,..., x_n) \in V_1$. اگر $r = 1$، آن‌گاه تنها x' وجود دارد و اگر $r = n$ آن‌گاه x'' وجود ندارد. فرض کنید که V مجموعه‌ای از تمام نقاط (x', x_r) متعلّق به R^r باشد به طوری که (x' , x_r , x'') به U متعلّق است. چون U در R^n محدّب است پس V نیز در R^r محدّب خواهد بود. بنابر فرض، $D_jf(x) = 0$ ، $r \le j \le n$. لذا تابع f به x'' بستگی ندارد و یا تابعی مانند φ وجود دارد به طوری که $\varphi(x' , x_r) = f(x)$. اگر $r = 1$، آن‌گاه V تنها یک بازه بر روی محور x_1 خواهد بود. اکنون تابع $F(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$F(x) = \int_0^{x_1} \varphi(t)dt \quad , \quad x \in U$$

لذا داریم :

$$D_r F(x) = D F(x) = \varphi(t)$$

حال اگر $r > 1$، آن‌گاه E را مجموعه‌ای از تمام نقاط $x' \in R^{r-1}$ را در نظر می‌گیریم که

$(x', x_r) \in V$ به ازای برخی از x_r ها. بنابراین E یک مجموعهٔ محدّب و باز در R^{r-1} است زیرا E یک تصویر است. اکنون $F(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_{\alpha(x')}^{x_r} \varphi(x', t)dt, \; x \in E$$

در این جا α تابعی حقیقی بر روی E می‌باشد به طوری که $(x', a(x')) \in V$ به ازای هر $x' \in E$ به عبارت دیگر $\alpha(x') = x_r$. دلیل استفادهٔ تابع a در این است که: α نقاط x' و x_r را به هم وصل می‌کند (دقت کنید که V محدّب است). تابع $F(x)$ در حکم قضیه صدق می‌کند زیرا $D_r F(x) = \varphi(x', x_r) = f(x)$.

قضیه ۲۰: فرض کنید که U یک زیرمجموعهٔ باز و محدّب در R^n و r یک عدد صحیح مثبت باشد؛ آن‌گاه هر فرم بسته بر روی U کامل است.

اثبات: γ_r، $r = ۱, ۲, ..., n$ را مجموعهٔ تمام فرمهای rـ بُعدی مانند w از ردهٔ $C^۱$ در U با نمایش استاندارد در نظر می‌گیریم:

$$w = \sum_I f_I(x) \, dx_I$$

جایی که dx_I شامل $dx_{r+۱}, dx_{r+۲}, ..., dx_n$ نمی‌باشد. اگر $r = ۱$، آن‌گاه می‌توان $w = f(x)dx_۱$، $w \in \gamma_۱$ را انتخاب کرد. در این صورت چون $dw = ۰$ آن‌گاه $D_j f(x) = ۰$، $۱ < j \le n$. در این حالت بنابر قضیهٔ ۱۹ تابعی مانند $F \in C^۱(U)$ وجود دارد به طوری که $D_۱ f = F$ و $D_j F = ۰$ بنابراین:

$$dF = \sum_{i=۱}^{n} D_i F(x) \, dx_i = ۰ + D_۱ F(x) \, dx_۱ = f(x) \, dx_۱ = dw$$

در نتیجه، حکم قضیه برقرار است. اکنون فرض می‌کنیم که حکم قضیه برای $\gamma_{r-۱}$ برقرار باشد. یعنی این که تمام فرمهای در $\gamma_{r-۱}$ که شامل $dx_r, ..., dx_n$ نیستند، حکم قضیه برای آنها صادق است. لذا بنابر روش استقرا، قضیه را برای γ_r ثابت می‌کنیم. فرض کنید که w هر فرم kـ بُعدی، $w = \sum_I f_I(x) \, dx_I$، با $r < j \le n$ معین باشد، آنگاه بنابر فرض قضیه داریم:

$$dw = \sum_I \sum_{j=۱}^{n} D_j f_I(x) \, dx_j \wedge dx_I = ۰$$

برای جملاتی که هیچ فرم dx_{r+1} به بعد در dw وجود ندارد و برای $r < j \leq n$ در dw هیچ اندیسی تکرار نخواهد شد. در نتیجه $dw = 0$ اگر و تنها اگر هر یک از $D_j f_I(x)$ مساوی با صفر باشد (قضیهٔ ۱۴). اکنون فرم w را با توجه به جملات شامل dx_r بازنویسی می‌کنیم :

$$w = \lambda + \sum_{I_0} f_{I_0}(x)\, dx_{I_0} \wedge dx_r$$

جایی که $\lambda \in \gamma_{r-1}$ و حکم بر آن برقرار است. بنابر قضیهٔ ۱۹، تابعی مانند $F_I(x) \in C^1(U)$ وجود دارد به طوری که برای $r < j \leq n$، $D_j F_I(x) = 0$ و $D_r F_I(x) = f_I(x)$. اکنون فرمهای β و α را به صورت $\beta = \sum_{I_0} f_I(x)\, dx_{I_0}$ و $\alpha = w - (-1)^{k-1}\, d\beta$ می‌سازیم. آن‌گاه α یک فرم kـ بُعدی خواهد بود :

$$\begin{aligned}
\alpha &= w - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{r} D_j F_I(x)\, dx_{I_0} \wedge dx_j \\
&= w - \sum_{I_0} D_r F_I(x) dx_{I_0} \wedge dx_r - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{r-1} D_j F_I(x)\, dx_{I_0} \wedge dx_j \\
&= \lambda + \sum_{I_0} F_I(x)\, dx_{I_0} \wedge dx_r - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{r-1} D_j F_I(x)\, dx_{I_0} \wedge dx_j \\
&\quad - \sum_{I_0} D_r F_I(x)\, dx_{I_0} \wedge dx_r \\
&= \lambda - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{r-1} D_j F_I(x) dx_{I_0} \wedge dx_j
\end{aligned}$$

چون dx_r در عبارت بالا وجود ندارد :

$$d\alpha = dw - (-1)^{k-1} d(d\beta) = 0$$

بنابراین $\alpha \in \gamma_{r-1}$ و در نتیجه حکم قضیه برای آن برقرار است و در نتیجه یک فرم $(k-1)$ بُعدی مانند γ در U وجود دارد به طوری که $d\gamma = \alpha$. اکنون فرم μ را به صورت $\mu = \gamma + (-1)^{k-1}\beta$ تعریف می‌کنیم، آنگاه $d\mu = w$ زیرا :

$$\begin{aligned}
d\mu &= d\gamma + (-1)^{k-1} d\beta = \alpha + (-1)^{k-1}\, d\beta = w - (-1)^{k-1}\, d\beta \\
&\quad + (-1)^{k-1} d\beta = w
\end{aligned}$$

بنابراین ثابت کردیم که به ازای هر فرم بسته kـ بُعدی w در U وجود دارد. یک فرم $(k-1)$

بُعدی به طوری که $d\beta = w$، پس w کامل است.

قضیه ۲۱: فرض کنید که $U \subset R^n$ یک زیرمجموعهٔ باز باشد به طوری که هر فرم بسته در آن کامل است. به علاوه فرض کنید که تابع T از U به یک زیرمجموعهٔ باز $V \subset R^n$ یک تابع ۱-۱ از ردهٔ C^2 و معکوس‌پذیر باشد. آن‌گاه هر فرم بسته k- بُعدی در V کامل است.

دقت کنید که T در شرایط دیفمومرفیسم تعریف صدق می‌کند به شرط آن که معکوس T نیز از ردهٔ C^1 باشد. لذا هرگاه یک دیفمومرفیسم بین دو مجموعه برقرار باشد، آن‌گاه خواصّ دو مجموعه را به هم انتقال می‌دهد. در این جا دقت کنید که خاصیت کامل بودن یک فرم، یک خاصیت توپولوژیکی نیست، اما باز هم دیفمومرفیسم این خاصیت را انتقال می‌دهد. نکتهٔ دیگر این که دلیل انتخاب T از ردهٔ C^2 به سبب فرم کامل می‌باشد. زیرا از $d(dT) = d^2T$ استفاده می‌کنیم که لازم است T از ردهٔ C^2 باشد.

اثبات: فرض کنید که w یک فرم k- بُعدی و بسته در V باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۱۵، w_T یک فرم بسته است زیرا $dw_T = (dw)_T = 0$. از طرف دیگر چون w کامل است، پس وجود دارد یک فرم $(k-1)$ بُعدی β به طوری که $d\beta = w$ و همچنین با توجه به قضیه ۱۵ داریم:

$$w_T = (d\beta)_T = d(\beta_T)$$

در نتیجه w_T در U کامل است. ∎

مثال ۲۲: فرض کنید $U = R^2 - \{0\}$ باشد. فرم یک بُعدی $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ در R^2 بسته است (محاسبات به عهده دانشجویان).

۳.۸. انتگرال فرمهای (صورتهای) دیفرانسیلی

فرض کنید که D یک زیرمجموعهٔ فشرده در R^p و E یک زیرمجموعه باز در R^n باشد. تابع Φ از ردهٔ C^r $(r \geq 1)$ از D به داخل E راکه یک سطح p- بُعدی با حوزهٔ تعریف D در E است در نظر می‌گیریم. D را می‌توان یک حجره یا یک سادک در نظر گرفت. برای مثال یک منحنی مشتق‌پذیر در فضای R^3 که در محاسبات انتگرال‌گیری در فضای R^3 مورد استفاده قرار می‌گیرد، یک سطح ۱- بُعدی در R^3 است. همچنین یک سطح ۲- بُعدی در R^3 را می‌توان به عنوان مثال ارائه داد.

فرض کنید $w = \sum_I f_I(x)\ dx_I$ یک فرم p- بُعدی بر روی E باشد، آن‌گاه به هر w یک عدد $w(\Phi)$ به صورت زیر نسبت می‌دهیم :

$$\int_\Phi w = \int_D \sum_I f_I\ (\Phi(u))\ J_\Phi(u)\ du$$

این تعریف معنا دارد، زیرا انتگرال سمت راست را قبلاً تعریف کرده‌ایم و معنا دارد. اگر مؤلفه‌های Φ را به $\phi_1, \dots, \phi_n$ نمایش دهیم آن‌گاه $J_\Phi(u)$ عبارت است از :

$$J_\Phi(u) = \frac{\partial(\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)}$$

مثال ۲۳: فرض کنید $w = y^2dx + 2xy\ dy$ و Φ یک منحنی مشتق‌پذیر از $[-1 \text{ و } 1]$ به R^2 با ضابطهٔ $y = t^2$ ، $x = t$ باشد، آن‌گاه داریم :

$$w = y^2dx + 2xydy = t^2d(t) + 2t^2.td(t^2)$$
$$= t^2dt + 4t^4dt = (t^2 + 4t^4)\ dt,$$
$$\int_\Phi w = \int_{[-1,1]} (t^2 + 4t^4)dt = \int_{-1}^1 (t^2 + 4t^4)\ dt = 2$$

در این مثال دقت کنید که $\phi_1(t) = x$ و $\phi_2(u) = y$ در نتیجه $J_\Phi(u)$ برابر است با دترمینان یک ماتریس 1×1 می‌باشد، برای مثال $J_\Phi(u) = \frac{dx}{dt} = 1$ و یا $J_\Phi = \frac{dy}{dt} = 2t$. در حالت کلّی اگر γ یک سطح ۱- بُعدی (یا منحنی) از ردهٔ C^1 با حوزهٔ پارامتری $[-1 \text{ و } 1]$ در R^2 باشد، آن‌گاه $\phi_1(t) = x$ و $\phi_2(t) = y$. حال اگر w فرم ۱- بُعدی مثال باشد، آنگاه :

$$\int_\Phi w = \int_{[-1,1]} \phi_2^2(t)\phi_1' dt + 2\phi_1(t).\phi_2(t).\phi_2'(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^1 \phi_2(t)(\phi_2(t)\phi_1'(t) + 2\phi_1(t)\phi_2'(t))\,dt$$

$$= \int_{-1}^1 \phi_2(t)(\Phi'(t) + \phi_1(t)\phi_2'(t))\,dt$$

مثال ۲۴: فرض کنید $w = xdy$ و Φ یک منحنی یک پارامتری $(a\cos t\ ,\ b\sin t)$ با حوزهٔ پارامتری $[a\ ,\ 2\pi]$ باشد، آن‌گاه:

$$\int_{\Phi} w = \int_{\Phi} xdy = \int_{0}^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} ab\cos^{2} t\,dt = \pi ab$$

که مساحت بیضی $\Phi(t)$ است.

مثال ۲۵: فرض کنید که S یک سطح ۲ـ بُعدی در R^3 با حوزهٔ پارامتری D با معادلات پارامتری $x = x(u\ ,\ v)$ و $y = y(u\ ,\ v)$ و $z = z(u\ ,\ v)$ باشد، آن‌گاه با توجه به تغییر متغیّر در فرمهای دیفرانسیلی داریم:

$$dx\Lambda dy = \frac{\partial(x\ ,\ y)}{\partial(u\ ,\ v)}\,du\Lambda dv$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

در نتیجه:

$$dx\Lambda dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)\Lambda\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right)$$

$$= \frac{\partial(x\ ,\ y)}{\partial(u\ ,\ v)}\,du\Lambda dv$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{S} w = \int_{D} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\frac{\partial(x\ ,\ y)}{\partial(u\ ,\ v)}\,dudv$$

مثالها در این زمینه همان تغییر متغیّر در انتگرالهای دوگانه می‌باشد که قبلاً در بخش ۳.۱ و ۳.۲ ارائه شده است.

مثال ۲۶: مشابه مثال ۲۵ را می‌توان برای فضای R^3 با حوزهٔ پارامتری $D \subset R^3$ توسعه داد در این جا مثالهای تغییر متغیّر در انتگرال سه گانه را یادآور می‌شویم:

۳.۸.۱. جهت[1]

تا کنون انتگرال‌گیری بدون در نظر گرفتن جهت توضیح داده شده است. در ریاضی عمومی مشاهده می‌شود که قضیهٔ گرین یا استوکس برحسب ناحیه یاسطح محاسبه می‌شوند. در راستای تعریف انتگرال استوکس که حالت کلی نسبت به قضیه گرین و استوکس است نیاز به تعریف جهت داریم.

تعریف :

فرض کنید که V یک فضای برداری با بُعد k بر روی R باشد. اگر $(v_1, ..., v_k)$ و $(w_1, ..., w_k)$ پایه‌های مرتب برای V باشند، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم: $w_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} v_j$ که در آن a_{ij} اعضای یک ماتریس عادی هستند. $(v_1, ..., v_k)$ و $(w_1, ..., w_k)$ را در یک جهت نامند اگر $\det(a_{ij}) > 0$. این تعریف برای هر دو پایهٔ مرتب V صادق است. فرض کنید که $V = R^k$. جهتی که شامل پایهٔ استاندارد $(e_1, ..., e_k)$ باشد، جهت معمول نامیده می‌شود. یک پایهٔ R^k هم جهت با پایهٔ استاندارد را اغلب به طور مثبت جهت‌دار می‌نامند. برای مثال اگر $k = 3$، آن‌گاه جهت مثبت همان تعریف دستگاه مختصات راستگرد می‌باشد که در ریاضی عمومی آمده است.

فرض کنید که یک سادک استاندارد Q^k باشد، یعنی این که Q^k مجموعه‌ای از تمام نقاطی مانند $q \in R^k$ است که $q = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i$ با $a_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq 1$، مفروض باشد. آن‌گاه یک سادک مستوی جهت‌دار عبارت است از یک سطح kـ بُعدی در R^n با حوزهٔ پارامتری Q^k که توسط تابع مستوی زیر داده شده است :

$$\phi(a_1 e_1 + ... + a_k e_k) = P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i (p_i - p_0)$$

جایی که $p_i \in R^n$، $i = 1, ..., k$ و $\phi(0) = p_0$ و $\phi(e_i) = p_i$، $i = 1, ..., k$ نقطهٔ P_0 را نقطهٔ شروع در نظر می‌گیریم. برحسب تابع مستوی تابع ϕ را به صورت زیر می‌نویسیم :

1. Orientation

$$\phi(q) = p_\circ + Aq \quad , \quad q \in Q^k \qquad A \in L(R^k , R^n)$$

به طوری که $A(e_i) = p_i - p_\circ$ ، $i = ۱ , ۲ ,..., k$. در این جا دقت کنید که چون $q = \sum_{i=۱}^{k} a_i e_i$ ، پس خواهیم داشت:

$$\phi(\sum_{i=۱}^{k} a_i e_i) = \phi(q) = p_\circ + \sum_{i=۱}^{k} a_i(p_i - p_\circ)$$

$$= p_\circ + \sum_{i=۱}^{k} a_i Ae_i = p_\circ + A(\sum_{i=۱}^{k} a_i e_i)$$

$$= p_\circ + Aq$$

در این روابط از $\phi(e_i) = p_i$ استفاده شده است، زیرا $\phi(e_i) = p_\circ + p_i - p_\circ = p_i$. در این تعریف $p_\circ , p_۱ , p_۲ ,..., p_k$ را می‌توان رئوس یک چندضلعی در نظر گرفت که ترتیب آن از $p_\circ$ به p_k و یا جهت ϕ می‌باشد. اگر ترتیب رئوس عوض شود، آن‌گاه با توجه به جایگشتیهای $\{\circ , ۱ , ۲ ,..., k\}$ به $\{i_\circ , i_۱ ,..., i_k\}$ می‌توان علامت زیر را برای آن در نظر گرفت:

$$\bar{\phi} = S(i_\circ , i_۱ ,..., i_k)\phi$$

جایی که $S(i_\circ , i_۱ ,..., i_k) = \pm ۱$. بنابراین $\bar{\phi} = \phi$ اگر تعداد جایگشتیها زوج و یا $S = ۱$ و در غیر این صورت $\bar{\phi} = \phi$. باید این نکته را توضیح داد که این تساوی براساس شروع نقطه است، یعنی این که لزومی ندارد که از نقطهٔ $P_{i_\circ} = P_\circ$ شروع کنیم، بلکه ممکن است از P_m آغاز کرده باشیم. لذا تساوی $\bar{\phi} = \varepsilon\phi$ با $\varepsilon = \pm ۱$ به معنای یک هم‌ارزی است. در حقیقت اگر $\varepsilon = ۱$ پس ϕ و $\bar{\phi}$ در یک جهت و $\varepsilon = -۱$ و ϕ و $\bar{\phi}$ در جهت مخالف یکدیگر می‌باشند.

تبصره ۱ : در تعریف سادک جهت‌دار مستوی، یک رابطه بین دو سادک راکه دارای یک مجموعه از رئوس هستند تعریف کردیم که این رابطه، «یک جهت بودن» می‌باشد. در صورتی که تعریف جهت همان است که در ابتدای این بخش آمده است. اگر $k = n$ و بردارهای $P_i - P_\circ$ ، $۱ \leq i \leq n$ ، مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه تبدیل خطی A در تعریف سادک مستوی جهت‌دار معکوس‌پذیر است، لذا اگر $\det A > \circ$ آن‌گاه ϕ را به طور مثبت جهت‌دار نامند و اگر $\det A < \circ$، ϕ را به طور منفی جهت‌دار نامند و این تعریف ارائه شده در ابتدای بخش می‌باشد. اگر در حالت

خاص، سادک استاندارد $[\circ , e_1 ,..., e_k]$ را در R^k انتخاب کنیم، آن‌گاه $A_{\bullet}$ یک تابع همانی و دارای جهت مثبت خواهد بود. یک سادک ۰ - بُعدی جهت‌دار، نقطه‌ای است که به آن یک علامت ضمیمه می‌شود، مثلاً $\phi = p_{\bullet}$ یا $\phi = -p_{\bullet}$

تبصره ۲: بر روی یک سادک مستوی جهت‌دار که یک سطح جهت‌دار می‌باشد، انتگرال را تعریف می‌کنیم که ما را به قضیهٔ استوکس نزدیک می‌نماید. ممکن است انتگرال بر روی یک سطح محاسبه شود که شامل چندین سادک باشد، در این صورت ابتدا این نوع سطح را تعریف خواهیم کرد. باید این نکته تذکر داده شود که این تعاریف در محاسبهٔ انتگرالها بر روی سطوح جهت‌دار و قضیهٔ استوکس مؤثر می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که در محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه و مساحت رویه‌ها و غیره در ریاضیات عمومی از ناحیه‌هایی صحبت به میان می‌آید که جهت به آنها داده می‌شود و یا انتگرال دوگانه که بر روی یک ناحیهٔ بستهٔ جهت‌دار محاسبه می‌شود. در حالت کلّی R^n ، برای جهت دادن به یک سطح از سادکهای جهت‌دار استفاده خواهیم کرد.

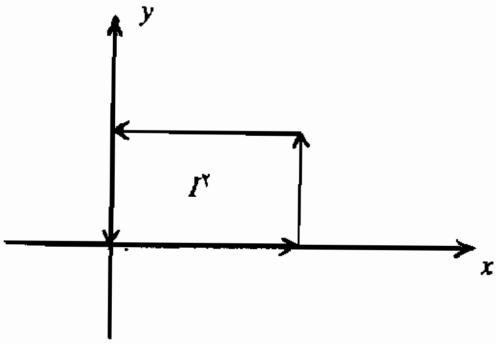
۳.۸.۲. تعاریف مکعب k - بعدی تکین - زنجیر

یک مکعب k - بُعدی تکین[1] در R^n ، $A \subset R^n$ باز، عبارت است از یک تابع پیوسته $F: [\circ , 1]^k \to A$ که در آن $[\circ , 1]^k = [\circ , 1] \times [\circ , 1] \times ... \times [\circ , 1]$ ، ضرب بازه‌های $[\circ , 1]$ به تعداد k مرتبه. اگر $k = \circ$ آن‌گاه بازهٔ یک نقطه خواهد بود و $F : \{\circ\} \to A$ یک نقطه در A را نشان می‌دهد که همان سادک ۰ - بُعدی می‌باشد. برای مثال یک مکعب ۱ - بُعدی همانا یک منحنی است. یک مکعب n- بُعدی در R^n است که توسّط $I^n(x) = x$ تعریف شود، یک مکعب n- بُعدی تکین استاندارد در R^n نامیده می‌شود که همان سادک استاندارد $\phi = [\circ , e_1 ,..., e_n]$ می‌باشد. در حقیقت یک مکعب k- بُعدی در R^n همان سادک مستوی جهت‌دار است. مجموع جبری این مکعبها با ضرایب صحیح را یک **زنجیر**[2] **k- بُعدی** در R^n نامند. برای مثال فرض کنید که مکعبهای k- بُعدی $\phi_1 , \phi_2 , \phi_3 , \phi_4$ را در R^n داشته باشیم، آن‌گاه $\phi_1 - 2\phi_1 + \phi_4 - 3\phi_3$ یک زنجیر k- بُعدی در R^n خواهد بود. بنابراین برحسب سادکهای مستوی جهت‌دار، یک زنجیر عبارت است از مجموع یک تعداد متناهی سادکهای مستوی جهت‌دار که ممکن است یکی یا چند تا از آنها

1. Singular n- Cube 2. Chain

بیش از یک مرتبه در مجموع تکرار شده باشند.

به هر زنجیر kـ بُعدی Γ در A یک زنجیر $(k-1)$ بُعدی در A نسبت می‌دهیم که کرانهٔ[1] زنجیر نامیده می‌شود. کرانهٔ زنجیر را به $\partial\Gamma$ نمایش می‌دهیم. به سبب این که Γ از مجموع سادکها تشکیل شده است، لذا باید کرانهٔ یک سادک را نیز تعریف کنیم. قبل از آن، یک مثال از کرانهٔ زنجیر ارائه می‌دهم. I^2 یک مربع واحد در R^2 که تشکیل شده از ۴ مکعب یک بعدی که جهت آنها عکس عقربه‌های ساعت تعریف شده است.



فرض کنید که ϕ یک سادک kـ بُعدی جهت‌دار در R^n باشد: $\phi = [P_0, P_1, ..., P_k]$.

کرانهٔ ϕ یک زنجیر $(k-1)$ بُعدی به صورت زیر است که به $\partial\phi$ نمایش داده می‌شود:

$$\partial\phi = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \; [P_0, ..., P_{j-1}, P_{j+1}, ..., P_k] = \sum_{j=0}^{k} \phi_j$$

در حقیقت، P_j در ϕ حذف شده است. برای مثال اگر $\phi = [P_0, P_1, P_2]$ آن‌گاه

$$\partial\phi = [P_1, P_2] - [P_0, P_2] + [P_0, P_1]$$
$$= [P_0, P_1] + [P_1, P_2] + [P_2, P_0]$$

در این جا $\partial\phi$ بر کرانهٔ یک مثلث جهت‌دار منطبق می‌باشد. در تعریف کرانهٔ سادک مستوی جهت‌دار باید دقت کرد که هر یک از سادکهای حاصل، یک سادک مستوی جهت‌دار با حوزهٔ پارامتری Q^{k-1} است و اگر این سادکها را به ϕ_j نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$\phi_j(u) = P_0 + Bu \,,\; u \in Q^{k-1} \,,\; B \in L(R^{k-1}, R^n)$$

1. Boundary

به طوری که

$$Be_i = P_{i+1} - P_0 \quad \text{اگر} \quad j \le i \le k-1$$

$$Be_i = P_i - P_0 \quad \text{اگر} \quad 1 \le i \le j-1$$

و سادک ϕ_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_0(u) = P_1 + Bu\,,\ Be_i = P_{i+1} - P_1\,,\ 1 \le i \le k-1$$

فرض کنید T یک تابع از ردهٔ C^2 از یک زیرمجموعهٔ باز در R^n بتوی یک مجموعهٔ باز V در R^m باشد (T حتماً نباید ۱-۱ باشد). همچنین فرض بر این است که ϕ یک سادک k- بُعدی جهت‌دار مستوی در E باشد. آن‌گاه تابع مرکب $\Phi = To\phi = T\phi$ یک سادک مستوی در V خواهد بود که دارای حوزهٔ پارامتری Q^k است. Φ یک سادک k- بُعدی جهت‌دار از ردهٔ C^2 نامیده می‌شود. هر زنجیر تشکیل شده از این نوع سادکها را یک زنجیر از رده C^2 در V نامند. کرانهٔ Φ برابر است با $\partial\Phi = T(\partial\phi)$ و کرانهٔ یک زنجیر $\psi = \sum_{i=1}^{r} \Phi_i$ برابر است با:

$$\partial\psi = \sum_{i=1}^{r} \partial\Phi_i$$

۳.۸.۳. کرانهٔ به طور مثبت جهت‌دار

فرض کنید که Q^n یک سادک استاندارد در R^n و ϕ_0 یک تابع همانی با حوزهٔ تعریف Q^n باشد. ϕ_0 به عنوان کرانهٔ یک سادک n- بُعدی مثبت جهت‌دار در نظر گرفته می‌شود. کرانهٔ ϕ_0 یعنی $\partial\phi_0$ ، یک زنجیر مستوی $(n-1)$- بُعدی است که زنجیر را کرانهٔ به طور مثبت جهت‌دار Q^n نامند. برای مثال اگر $n = 3$ آن‌گاه کرانهٔ به طور مثبت جهت‌دار Q^3 عبارت است از:

$$[e_1, e_2, e_3] - [0, e_2, e_3] + [0, e_1, e_3] - [0, e_1, e_2]$$

اکنون یک مجموعهٔ E را در R^n کراندار می‌کنیم زیرا قصد داریم در قضیهٔ استوکس انتگرال یک فرم دیفرانسیلی را بر روی یک مجموعهٔ دارای کرانه‌ای محاسبه نماییم. این درست همان جهت دادن به ناحیه‌ای است که در انتگرال دوگانه و سه‌گانه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید که T یک تابع ۱-۱ از Q^n به R^n و از ردهٔ C^2 باشد که دارای ژاکوبین مثبت است (حداقل داخل Q^n). اگر قرار دهیم $E = T(Q^n)$ ، آن‌گاه چون T از ردهٔ C^2 و ۱-۱ و ژاکوبین مثبت است، پس T در قضیهٔ تابع معکوس صدق می‌کند. چون Q^n یک مجموعهٔ بسته است، پس E بستار یک زیرمجموعهٔ باز در R^n می‌باشد. کرانهٔ به طور مثبت جهت‌دار مجموعهٔ E را یک زنجیر $(n-1)$

بُعدی $\partial T = T(\partial\phi_{\circ})$ تعریف می‌کنیم و با ∂E نمایش می‌دهیم. اگر $E = T_1(Q^n) = T_2(Q^n)$، آن‌گاه $\partial T_1 = \partial T_2$ و اگر از اتحاد چندین زیرمجموعه تشکیل شده باشد، آن‌گاه :

$$\partial\Omega = \partial T_1 + \dots + \partial T_r$$

جایی که $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$ و $E_i = T_i(Q^n)$، $i = 1, 2, \dots, n$ داخل مجموعه‌های E_i دو به دو مجزّا از یکدیگر هستند. برای مثال مربع واحد در R^2 را در نظر بگیرید که از اتحاد $\phi_1(Q^2)$ و $\phi_1(Q^2)$ با تعریف زیر به وجود آید :

$$\phi_1(u) = u \, , \, \phi_2 = e_1 + e_2 - u$$

بنابراین :

$$\phi_1 = [\circ , e_1 , e_2] \, , \, \phi_2 = [e_1 + e_2 , e_r , e_1]$$

تابع همانی

$$\phi_1(u) = P_{\circ} + Au = \circ + u$$

$$\phi_2 = e_1 + e_2 - u = e_1 + e_2 + Bu_1 \, , \, Bu = -u$$

$$= [e_1 + e_2 , e_2 , e_1]$$

در حقیقت برای ϕ_1، $Ae_1 = e_1$ و $Ae_2 = e_2$ و برای ϕ_2، $Be_1 = e_2 - (e_1 + e_2) = -e_1$ و $Be_2 = e_1 - (e_1 + e_2) = -e_2$. اکنون کرانهٔ این دو سادک را محاسبه می‌کنیم :

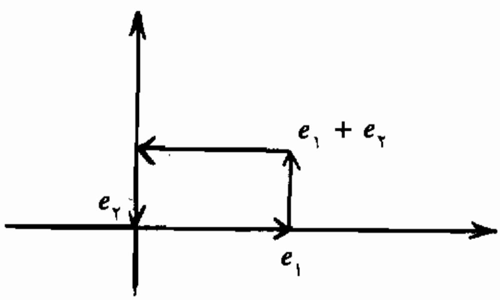
$$\partial\phi_1 = [e_1 , e_2] - [\circ , e_2] + [\circ , e_1]$$

$$\partial\phi_2 = [e_2 , e_1] - [e_1 + e_2 , e_1] + [e_1 + e_2 , e_2]$$

از طرف دیگر کرانهٔ مربع واحد در R^2 عبارت است از :

$$\partial I^2 = [\circ , e_1] + [e_1 , e_2 + e_1] + [e_1 + e_2 , e_2] + [e_2 , \circ] + [e_1 , e_2] + [e_2 , e_1]$$

$$= \partial\phi_1 + \partial\phi_2$$



$\partial I^{۲}$ کرانهٔ به طور مثبت جهت‌دار در $I^{۲}$ است که از ۰ شروع شده و به $e_{۲}$ ختم شده است. از $I^{۲}$ به جای سادک استفاده می‌شود. اگر Φ را یک سطح ۲- بُعدی با حوزهٔ پارامتری $I^{۲}$ در R^{n} در نظر بگیرید. آن‌گاه Φ زنجیری دوبُعدی به صورت زیر خواهد بود :

$$\Phi o\phi_{۱} + \Phi o\phi_{۲}$$

پس کرانه Φ عبارت است از :

$$\begin{aligned}\partial\Phi &= \partial(\Phi o\phi_{۱}) + \partial(\Phi o\phi_{۲})\\ &= \Phi(\partial\phi_{۱}) + \Phi(\partial\phi_{۲}) = \Phi(\partial I^{۲})\end{aligned}$$

مثال : $\Sigma : R^{۲} \to R^{۳}$ به طوری که

$$\Sigma(u , v) = (\sin u \cos v , \sin u \sin v , \cos u) ,$$

$$D : ۰ \leq u \leq \pi , ۰ \leq v \leq ۲\pi$$

بنابراین Σ یک سطح ۲- بُعدی در $R^{۳}$ است که دارای حوزهٔ پارامتری مستطیل D در $R^{۲}$ و دارای کره‌ای به شعاع واحد به عنوان برد می‌باشد. کرانهٔ این سطح دوبُعدی عبارت است از :

$$\partial\Sigma = \Sigma(\partial D) = \gamma_{۱} + \gamma_{۲} + \gamma_{۳} + \gamma_{۴} ;$$

$$\gamma_{۱} = \gamma_{۱}(u) = \Sigma(D_{۱}) = \Sigma(u , ۰) = (\sin u , ۰ , \cos u);$$

$$\gamma_{۲} = \gamma_{۲}(v) = \Sigma(D_{۲}) = \Sigma(\pi , v) = (۰ , ۰ , -۱) ;$$

$$\gamma_{۳} = \gamma_{۳}(u) = \Sigma(D_{۳}) = \Sigma(\pi - u , ۲\pi) = (\sin u , ۰ , -\cos u) ;$$

$$\gamma_{۴} = \gamma_{۴}(v) = \Sigma(D_{۴}) = \Sigma(۰ , ۲\pi - v) = (۰ , ۰ , ۱)$$

دقت کنید که در این مثال جهت را مثبت در نظر گرفته‌ایم و از ۰ شروع شده است.

اکنون به انتگرال از فرمهای دیفرانسیلی بر روی سادکهای مستوی جهت‌دار و زنجیرهای مستوی بر می‌گردیم و قضایایی را که به اثبات قضیهٔ استوکس کمک می‌کند شرح خواهیم داد. به دلیل این که از سادکهای k- بُعدی بحث کردیم، بر این نکته توجه می‌کنیم که یک سادک ۰- بُعدی جهت‌دار یعنی یک نقطه با ضمیمهٔ یک علامت که آن را به $\phi = P_{۰}$ و یا $\phi = -P_{۰}$ نمایش می‌دهیم. اگر f یک تابع حقیقی پیوسته باشد، آن‌گاه تساوی زیر را تعریف می‌کنیم :

$$\int_{\phi} f = \varepsilon f(P_{۰})$$

جایی که ϕ یک سادک ۰- بُعدی جهت‌دار و $\varepsilon = \pm ۱$ می‌باشد.

قضیه ۲۲: فرض کنیدکه ϕ یک سادک kـ بُعدی جهت‌دار برروی یک مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ و $\bar{\phi} = \varepsilon\phi$ باشد آن‌گاه به ازای هر فرم kـ بُعدی w در E داریم:

$$\int_{\bar{\phi}} w = \varepsilon \int_{\phi} w$$

اثبات: اگر $k = ۰$، آن‌گاه ما یک فرم ۰ـ بُعدی و سادک ۰ـ بُعدی خواهیم داشت که بنابر نماد و قرار داد، حکم قضیه برای آن برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $k \geq ۱$ و ϕ را به صورت $\phi = [P_۰ ,..., P_k]$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید که $۱ \leq j \leq k$ و $\bar{\phi}$ از جابه‌جایی P_j با $P_۰$ به وجود آمده باشد. آن‌گاه چون یک جابه‌جایی انجام شده، $\varepsilon = -۱$ بنابراین:

$$\bar{\phi}(u) = P_j + Bu \;\;,\;\; u \in Q^k ,\, B \in L(R^k , R^n) \,;$$

$$Be_i = P_i - p_j \,,\, i \neq j$$

با توجه به $\phi(u) = P_۰ + Au$ و $A \in L(R^k , R^n)$ اگر قرار دهیم: $Ae_i = x_i$، $۱ \leq i \leq k$ آن‌گاه بردارهای ستونی ماتریس B، یعنی Be_i برابرند با:

$$x_۱ - x_j \,,\, x_۲ - x_j ,..., x_{j-۱} - x_j \,,\, -x_j \,,\, x_{j+۱} - x_j ,..., x_k - x_j$$

در حقیقت داریم: $Be_i = P_i - P_j$، زیرا: $Ae_i = x_i$. از طرف دیگر بنا به تعریف سادک ϕ داریم: $x_i = P_i - P_۰$ از این تساوی، تساویهای زیر نتیجه می‌شود:

$$x_i = P_i - P_۰ \Rightarrow x_i - x_j = P_i - P_۰ - (P_j - P_۰)$$

$$\quad\quad = P_i - P_j \;\;,\;\; i \neq j$$

بنابراین $Be_i = P_i - P_j$ هرگاه $i \neq j$. امّا برای j، بردار ستونی Be_j برابر است با

$$Be_j = P_۰ - P_j = -(P_j - P_۰) = -x_j$$

دقت کنید که در سادک $\bar{\phi}$ تنها جای $P_۰$ و P_j عوض شده است، یعنی این که به جای $P_۰$ از P_j شروع کردیم. در نتیجه تفاوت دترمنیان دو ماتریس A و B تنها در یک علامت، آن هم در ستون jام است؛ زیرا تمام ستونهای ماتریس B دارای x_j هستند و ستون jام آن $-x_j$ می‌باشد. حال با توجه به این که $\det A = -\det B$ و با توجه به تعریف انتگرال فرمهای دیفرانسیلی حکم قضیه برقرار خواهد بود. فرض می‌کنیم که $۰ \leq i < j \leq k$ و $\bar{\phi}$ از جابه‌جایی P_i با P_j در سادک ϕ به وجود آمده باشد. آن‌گاه $\bar{\phi}(u) = P_۰ + C(u)$ به طوری که C با A تنها در یک علامت آن هم در ستون jام اختلاف خواهند داشت که در مرتبهٔ حکم قضیه برقرار خواهد بود.

قضیه ۲۳: فرض کنید که w یک فرم kـ بُعدی در یک زیرمجموعهٔ باز $E \subset R^n$ و Φ یک سطح kـ بُعدی در E با حوزهٔ پارامتری $D \subset R^k$ و Δ یک سطح kـ بُعدی در R^k با حوزهٔ پارامتری D باشد که توسط رابطهٔ $u = \Delta u$ ، $u \in D$ تعریف شده است. آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\int_{\Phi} w = \int_{\Delta} w_{\Phi}$$

اثبات: بدون این که به کلیت استدلال خللی وارد شود فرم kـ بُعدی w را به صورت $w = f(x)dx_{i_1} \Lambda dx_{i_2} \Lambda \dots \Lambda dx_{i_k}$ در نظر می‌گیریم، زیرا اگر قضیه را برای یک جمله از یک فرم kـ بُعدی ثابت کنیم، آن‌گاه برای تمام جملات به طور مشابه اثبات خواهد شد. مؤلفه‌های Φ را با $\phi_1, \dots, \phi_n$ نمایش می‌دهیم، آن‌گاه بنابر تعریف تغییر متغیّر در فرمهای دیفرانسیلی داریم:

$$w_{\Phi} = a(\Phi(u))\, d\phi_{i_1} \Lambda \dots \Lambda\, d\phi_{i_k}$$

کافی است ثابت کنیم که

$$J_{\Phi}(u)\, du_1\, \Lambda \dots\, \Lambda du_k = d\phi_{i_1} \Lambda \dots \Lambda d\phi_{i_k}$$

زیرا در این صورت با استفاده از تعریف انتگرال فرمهای دیفرانسیلی و این حقیقت که $x_{i_r} = \phi_{i_r}$ ، $1 \le r \le k$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\int_{\Phi} w = \int_{D} f(\Phi(u)) J_{\Phi}(u) du = \int_{\Delta} w_{\Phi}$$

برای اثبات این مطلب قرار می‌دهیم:

$$a(p\,,\,q) = D_q \phi_{i_p}(u)$$

جایی که $a(p\,,\,q)$ اعضای ماتریس $k \times k$ است که به صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_{i_1}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \phi_{i_1}}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial \phi_{i_1}}{\partial u_k} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial \phi_{i_k}}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \phi_{i_k}}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial \phi_{i_k}}{\partial u_k} \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر داریم:

$$d\phi_{i_p} = \sum_{j=۱}^{k} D_j \phi_{i_p}(u)\,du_j = \sum_{q=۱}^{k} a(p,q)\,du_q$$

لذا $a(p\,,\,q) = \dfrac{\partial \phi_{i_p}}{\partial u_q}$ خواهد بود. اکنون با توجه به تعریف ضرب فرمهای دیفرانسیلی تساوی زیر را می‌نویسیم:

$$d\phi_{i_۱}\Lambda\ldots\Lambda d\phi_{i_k} = \sum_{p=۱}^{k} a(۱,q)\ldots a(k,q_k)\,du_{q_۱}\Lambda\ldots\Lambda du q_k$$

حال با توجه به قانون بادتعویض، فرم استاندارد du را در تساوی بالا جایگزین می‌کنیم:

$$d\phi_{i_۱}\Lambda\ldots\Lambda\, d\phi_{i_k} = \sum_{p=۱}^{k} a(۱,q)\ldots a(k,q_k)\,S\,(q_۱,\ldots,q_k)du_۱\Lambda\ldots\Lambda\, du_k$$

$$= \det A du_۱\ \Lambda\ldots\Lambda\ du_k$$

$$= J_\Phi(u)du_۱\ \Lambda\ldots\Lambda\ du_k$$

برای درک این مطلب تساوی بالا را برای $k = ۲$ می‌نویسیم:

$$k = ۲\,,\, p = ۱\,,\,۲\,,\, q = ۱\,,\,۲$$

$$d\phi_{i_۱} = \sum_{q=۱}^{۲} a(۱,q)du_q = a(۱,۱)du_۱ + a(۱,۲)du_۲$$

$$d\phi_{i_۲} = \sum_{q=۱}^{۲} a(۲,q)du_q = a(۲,۱)\,du_۱ + a(۲,۲)\,du_۲$$

$$[a(\,d\phi_{i_۱}\Lambda d\phi_{i_۲} = ۱\,,\,۱)du_۱ + a(۱\,,\,۲)du_۲]\Lambda[a(۲\,,\,۱)du_۱ + a(۲\,,\,۲)du_۲]$$

$$= a(۱\,,\,۱)a(۲\,,\,۱)du_۱\ \Lambda\ du_۱ + a(۱\,,\,۱)du_۱\ \Lambda\ du_۲ + a(۱\,,\,۲)a(۲\,,\,۱)du_۲\ \Lambda du_۱$$

$$+\ a(۱\,,\,۲)a(۲\,,\,۲)du_۲\ \Lambda\ du_۲$$

$$= [a(۱\,,\,۱)a(۲\,,\,۲) - a(۱\,,\,۲)a(۲\,,\,۱)]\ du_۱\ \Lambda\ du_۲ = \det\ du_۱\ \Lambda\ du_۲$$

قضیهٔ ۲۴: فرض کنید که T یک تابع از ردهٔ $C^۱$ از $E \subset R^n$ زیرمجموعهٔ باز بتوی زیرمجموعهٔ باز $V \subset R^m$ و Φ یک سطح k- بُعدی در E و w یک فرم k- بُعدی در V باشد. آن‌گاه:

$$\int_{T\Phi} w = \int_{\Phi} w_T$$

اثبات: فرض کنید که D حوزهٔ پارامتری سطح Φ باشد، سپس $T\Phi$ با حوزهٔ پارامتری D یک سطح

k- بُعدی در E می‌باشد. $\Delta u = v$ تعریف می‌کنیم و با استفاده از قضیهٔ ۲۳ و تبدیل $w_{T\Phi} = (w_T)_\Phi$ ، خواهیم داشت :

$$\int_{T\Phi} w = \int_{\Delta} w_{T\Phi} = \int_{\Delta} (w_T)_\Phi = \int_{\Phi} w_T$$

۳.۹. قضیهٔ استوکس

قضیهٔ استوکس یکی از قضایای مهم در محاسبات ریاضی می‌باشد. یک حالت خاصّ آن قضیهٔ اساسی حساب انتگرال است. در این بخش سعی می‌شود اثبات این قضیه برای یک فرم دیفرانسیلی بر روی یک مستطیل n- بُعدی، بر روی یک مجموعهٔ باز و بر روی یک زنجیر، ارائه داده شود. در انتها حالتهای خاصّ این قضیه که قضیهٔ گرین و واگرایی و قضیهٔ اساسی حساب انتگرال است، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳.۹.۱. تعاریف مستطیل n - بُعدی - انتگرال

فرض کنید :

$$R = [a_1 , b_1] \times [a_2 , b_2] \times \ldots \times [a_n , b_n]$$

یک مستطیل n- بُعدی در R^n باشد که از حاصل‌ضرب n تا بازهٔ بسته $[a_i , b_i]$ به وجود آمده است؛ کرانهٔ این مستطیل تشکیل شده است از :

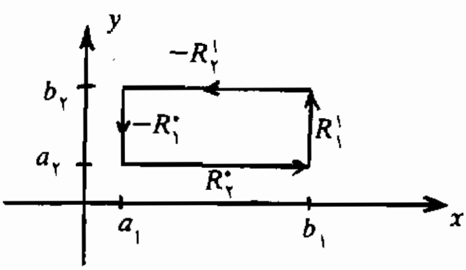
$$\partial R = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (R_i^0 - R_i^1)$$

جایی که :

$$R_i^1 = [a_1 , b_1] \times \ldots \times \{b_i\} \times \ldots \times [a_n , b_n]$$

$$R_i^0 = [a_1 , b_1] \times [a_2 , b_2] \times \ldots \times \{a_i\} \times \ldots \times [a_n , b_n]$$

برای مثال اگر $n = 2$ ، آن‌گاه شکل زیر مشخص‌کنندهٔ کرانهٔ مستطیل دوبُعدی در R^2 است.



در این شکل $R_1^\circ = \{a_1\} \times [a_2 , b_2]$ با جهت مخالف است زیرا $i = 1$. R_1° خطی به موازات محور y ها با $x = a_1$ و اندازه $[a_2 , b_2]$ است. $R_2^\circ = [a_1 , b_1] \times \{a_2\}$ با جهت ثبت می‌باشد زیرا $i = 2$ R_2° خطی به موازات محور x ها با $y = a_2$ و اندازه $[a_1 , b_1]$ می‌باشد. $R_1^1 = \{b_1\} \times [a_2 , b_2]$ با جهت مثبت است زیرا $i = 1$. R_1^1 خطی به موازات محور y ها با اندازهٔ $[a_2 , b_2]$ و $x = b_1$ است. $R_2^1 = [a_1 , b_1] \times \{b_2\}$ با جهت منفی می‌باشد زیرا $i = 2$. R_2^1 خطی به موازات محور x ها با اندازه $[a_1 , b_1]$ و $y = b_2$ خواهد بود.

$$\partial R = -R_1^\circ + R_1^1 + R_2^\circ - R_2^1$$

فرض کنید که w فرم $(n - 1)$- بُعدی به صورت زیر باشد:

$$w(x) = f(x)dx_1 \Lambda ... \Lambda\, dx_{j-1} \Lambda dx_{j+1} \Lambda ... \Lambda dx_n = f(x)dx_I\, ,\ x \in R^n$$

آن‌گاه تعریف می‌کنیم:

اگر $i = \circ$ و $i = j$

$$\int_{R_i^\circ} w = \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx_I$$

و مساوی با $\circ$ است اگر $i \neq j$ ، متشابهاً انتگرال بر روی R_i^1 را تعریف می‌کنیم و انتگرال بر روی کرانهٔ جهت‌دار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\partial R} w = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[\int_{R_i^\circ} w - \int_{R_i^1} w \right]$$

۳.۹.۲. قضیهٔ استوکس بر روی یک مستطیل n- بُعدی در R^n

فرض کنید که R یک مستطیل n- بُعدی در یک زیرمجموعهٔ باز $U \subset R^n$ و w یک فرم $(n - 1)$ بُعدی بر روی آن باشد، آنگاه:

$$\int_R dw = \int_{\partial R} w$$

اثبات:

با توجه به تعاریف و نمادها و انتخاب $w(x) = f(x)\, dx_I$ توضیح داده شده در بالا خواهیم

داشت :

اگر $i \neq j$

$$\int_{R_i^{0}} w = \int_{R_i^{1}} w = 0$$

بنابراین :

$$\int_{\partial R} w = (-1)^j \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_n}^{b_n} [f(x_1,\dots,a_j,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,b_j,\dots,x_n)] dx_I \qquad (1)$$

از طرف دیگر بنا به تعریف مشتق از یک فرم دیفرانسیلی داریم :

$$dw(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} D_i f(x) dx_i \right) \wedge dx_I$$

به دلیل فرم dx_I و تکرار فرم dx_i در روابط بالا خواهیم داشت :

$$dw(x) = D_j f(x) dx_j \wedge dx_I = (-1)^{j-1} D_j f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

اکنون از $d\,w(x)$ نسبت به متغیر x_j انتگرال می‌گیریم :

$$\int_R dw(x) = (-1)^{j-1} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_j}^{b_j} D_j f(x) dx_j \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n$$

$$= (-1)^j \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} \left[-f(x_1,\dots,b_j,\dots,x_n) + f(x_1,\dots,a_j,\dots,x_n) \right]$$

$$\dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n$$

$$= (-1)^j \int \left[f(x_1,\dots,a_j,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,b_j,\dots,x_n) \right] dx_I \qquad (2)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) مشاهده می‌شود که (۲) = (۱) و حکم قضیه برقرار است. این قضیه را می‌توان برای یک زیرمجموعهٔ پارامتری شده توسط یک مستطیل نیز توسعه داد.

در حقیقت، فرض کنید $T : R \to V$ از یک مستطیل nـ بُعدی در R^n به یک زیرمجموعهٔ باز V در R^n و از ردهٔ C^1 و یک به یک باشد. آن‌گاه داریم:

$$\int_T dw = \int_R (dw)_T = \int_R d(w_T)$$

و متشابهاً

$$\int_{\partial T} w = \int_{\partial R} w_T$$

لذا قضیه به فرم زیر بیان می‌شود :

$$\int_{T} dw = \int_{\partial T} w$$

۳.۹.۳. قضیهٔ استوکس بر روی یک مجموعهٔ جهت‌دار $X \subset R^n$

فرض کنید که X یک مجموعهٔ جهت‌دار از ردهٔ $C^۲$ با بُعدی n و w یک فرم $(n-۱)$ بُعدی از ردهٔ $C^۱$ باشد. به علاوه فرض بر این است که w دارای تکیه‌گاه (اگر $w = f(x)\, dx_I$ آن‌گاه تکیه‌گاه w همان تکیه‌گاه $f(x)$ است) فشرده باشد، آن‌گاه :

$$\int_{X} dw = \int_{\partial X} w$$

اثبات

فرض کنید که $\{\alpha_i\}_{i=۱}^{k}$ یک افراز واحد از ردهٔ $C^۲$ باشد. آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{k} \alpha_i w = w$ به طوری که α_iها دارای تکیه‌گاه فشرده بر روی یک مجموعهٔ باز V_i از پوشش مجموعهٔ L (تکیه‌گاه w) در X است. با توجه به تعریف مشتقّ فرم دیفرانسیلی داریم :

$$dw = b\left[\sum_{i=۱}^{k} \alpha_i w\right] = \sum_{i=۱}^{k} d(\alpha_i w)$$

بنا به تعریف :

$$\int_{X} dw = \sum_{i=۱}^{k} \int d(\alpha_i w)$$

چون α_i دارای تکیه‌گاه فشرده بر روی یکی از V_i هاست، آنگاه خواهیم داشت :

$$\int_{V_i} d(\alpha_i w) = \int_{V_i \cap \partial X} \alpha_i w$$

در این جا فرض بر این است که w خارج از تکیه گاه مساوی با ۰ باشد. لذا انتگرال dw بر روی X برابر است با مجموعهٔ انتگرال $d(\alpha_i w)$ بر روی V_i و انتگرال $\alpha_i w$ بر روی $V_i \cap \partial X$ محاسبه خواهد شد. بنابراین کافی است که قضیهٔ استوکس را بر روی V_i ثابت کنیم :

در نتیجه

$$\int_{V_i \cap \partial X} \alpha_i w = \int_{\partial X} \alpha_i w \ , \ \int_{V_i} d(\alpha_i w) = \int_X d(\alpha_i w)$$

و حکم قضیهٔ استوکس عبارت است از :

$$\int_x dw = \sum_{i=1}^{k} \int d(\alpha_i w) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial X} \alpha_i w = \int_{\partial X} w$$

اکنون به طور خلاصه توضیحی دربارهٔ قضیهٔ استوکس برای V_i ارائه خواهد شد[1].

خلاصهٔ اثبات

برای هر نقطه‌ای از X که مرز نباشد یک مجموعهٔ باز مانند V وجود دارد به طوری که اگر w دارای تکیه گاه فشرده در V باشد، آن‌گاه قضیهٔ استوکس برای V به جای X ثابت خواهد شد. V را داخل یک مستطیل قرار می‌دهیم. حال اگر قضیهٔ استوکس را برای این مستطیل ثابت کنیم، چون w خارج از تکیه گاه مساوی با ۰ است، لذا حکم قضیه برقرار است.

در اثبات قضیهٔ استوکس از تعریف انتگرال بر روی کرانهٔ یک مستطیل استفاده شده است و از تعریف برای صفر شدن انتگرال برای $i \neq j$ نام برده شده است. در زیر، اثبات این قضیه برای زنجیر و سادک ارائه خواهد شد، گرچه که مستطیل را می‌توان با یک سادک استاندارد جایگزین کرد از زنجیر به جای کرانهٔ مستطیل استفاده نمود. در ضمن w لزومی ندارد که $(n - ۱)$- بُعدی باشد، بلکه از $(k - ۱)$- بُعدی با $k \leq n$ استفاده می‌کنیم که حالت کلی‌تری است.

۳.۹.۴. اثبات قضیهٔ استوکس بر روی یک زنجیر

فرض کنید که w یک فرم $(k - ۱)$- بُعدی از ردهٔ $C^۱$ و Γ زنجیر k- بُعدی از ردهٔ $C^۲$ در یک زیرمجموعهٔ باز $U \subset R^m$ باشد، آن‌گاه :

۱- برای اطّلاعات بیشتر به کتاب Lang صفحات ۵۵۵ به بعد مراجعه کنید.

$$\int_{\Gamma} dw = \int_{\partial\Gamma} w$$

قبل از اثبات این نکته توضیح داده می‌شود که چون $\Gamma = \sum_{i=1}^{r} \Phi_i$ و $\Phi_i = T\sigma_i$ که در آن σ_i یک سادک k- بُعدی و T یک تابع از رده C^1 در تعریف یک زنجیر از ردهٔ C^2 است، بنا به تعریف خواهیم داشت :

$$\int_{\Gamma} dw = \sum_{i=1}^{r} \int_{\Phi_i} dw = \sum_{i=1}^{r} \int_{T\sigma_i} dw = \sum_{i=1}^{r} \int_{\sigma_i} dw_T$$

و

$$\int_{\partial\Gamma} w = \int_{\sum \partial\Phi_i} = \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial\Phi_i} w = \sum_{i=1}^{r} \int_{T\partial\sigma_i} w = \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial\sigma_i} w_T$$

بنابراین کافی است که قضیهٔ استوکس را برای یک فرم $(k-1)$- بُعدی $w_T = \lambda$ و بر روی یک سادک k- بُعدی اثبات کنیم.

اثبات :

اگر $k = 1$، آن‌گاه‌بنابر تعریف سادک σ یک‌بُعدی یک‌بازه و کرانهٔ آن شامل دونقطه ابتدایی و انتهایی است. بنابراین، بنابر تعریف انتگرال w در یک نقطه با در نظر گرفتن علامت داریم :

$$\int_{b} w = f(x) = f(b), \quad \int_{-a} w = f(x) = -f(a) \tag{1}$$

از طرف دیگر چون $k = 1$ پس $w = f(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر $dw = df(x)$ یک فرم یک بُعدی است که انتگرال آن در بازهٔ $[a\ ,\ b]$ بنابر قضیهٔ حساب انتگرال برابر است با $f(b) - f(a)$. در نتیجه با مقایسهٔ تساوی (۱)، حکم قضیه برقرار است.

حال فرض می‌کنیم که $k > 1$ و عدد صحیح $1 \le r \le k$ را در نظر می‌گیریم λ و σ را به صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$$\lambda = f(x)\ dx_1 \Lambda \ldots \Lambda dx_{r-1} \Lambda dx_{r+1} \Lambda \ldots \Lambda dx_k = f(x)\ dx_I\,,$$

$$\sigma = [0\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ldots,\ e_k]\,,$$

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [0, e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_k]$$

$$= [e_1, \dots, e_k] + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j [0, e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_k]$$

$$= (-1)^{r-1}\tau_0 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \tau_i$$

که در آن

$$\tau_i = [0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k],$$

$$\tau_0 = [e_r, e_1, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_k]$$

هر یک از τ_i ها حوزهٔ پارامتری Q^{k-1} را دارند.

با توجه به تعریف یک سادک جهت‌دار داریم :

$$x = \tau_0(u) = e_r + \sum_{i=1}^{k-1} u_i(e_i - e_r)$$

$$= (u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, 1 - (u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}), u_{r+1}, \dots, u_{k-1})$$

در نتیجه :

$$x_j = \begin{cases} u_j & 1 \le j < r \\ 1 - u_1 - u_2 - \dots - u_{k-1} & j = r \\ u_{j-1} & r < j \le k \end{cases}$$

و متشابهاً برای τ_i داریم :

$$x = \tau_i(u) = 0 + \sum_{j=1}^{k-1} u_j e_j = (x_1, \dots, x_n),$$

$$x_j = \begin{cases} u_j & 1 \le j \le r \\ 0 & i = j \\ u_{j-1} & i < j \le k \end{cases}$$

بنابراین ژاکوبین J_{τ_i} مساوی ۱ است اگر $i = 0$ و $i = r$ و در غیر این حالت مساوی با صفر است؛ زیرا برای r و $i \neq 0$ یک سطر ۰ در دترمینان ژاکوبین وجود دارد.

لذا $\int_{\tau_i} \lambda = 0$ اگر r و $i \neq 0$ باشد. اکنون dw را محاسبه می‌کنیم:

$$w = f(x)dx_1 \Lambda ... \Lambda dx_{r-1} \Lambda dx_{r+1} \Lambda ... \Lambda dx_k ,$$

$$dw = \left(\sum_{i=1}^{k} D_i f(x) \right) \Lambda\, dx_1 \Lambda ... \Lambda\, dx_{r-1} \Lambda\, dx_{r+1} \Lambda ... \Lambda\, dx_k$$

$$= D_r f(x)\ dx_r \Lambda dx_1 \Lambda ... \Lambda dx_{r-1} \Lambda dx_{r+1} \Lambda ... \Lambda dx_k$$

$$= (-1)^{r-1}\ D_r f(x) dx_1 \Lambda ... \Lambda dx_k$$

اکنون انتگرال $d\lambda$ را بر روی σ ابتدا نسبت به x_r محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{\sigma} d\lambda = (-1) \int dx_1 \int dx_2 ... \int_{0}^{1-(u_1 + ... + u_{k-1})} D_r f(x) \int dx_{r+1} ... \int dx_k \qquad (1)$$

$$= (-1)^{r-1} \int_{Q^{k-1}} (f(\tau_0(u)) - f(\tau_r(u)) dx_1 \Lambda ... \Lambda dx_{r-1} \Lambda dx_{r+1} \Lambda ... \Lambda dx_k$$

از طرف دیگر انتگرال λ بر روی $\partial\sigma$ به سبب این که ژاکوبین‌های J_{τ_i} به جز در $i = 0$ و $i = r$ مساوی با صفر است به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_{\partial\sigma} \lambda = (-1)^{r-1} \int_{\tau_0} \lambda + (-1)^r \int_{\tau_r} \lambda = (-1)^{r-1} \left[\int_{\tau_0} \lambda - \int_{\tau_r} \lambda \right] \qquad (2)$$

$$= (-1)^{r-1} \int_{Q^{k-1}} (f(\tau_0(u)) - f(\tau_r(u)) dx_1 \Lambda ... \Lambda dx_{r-1} \Lambda dx_{r+1} \Lambda ... \Lambda dx_k$$

مشاهده می‌شود که (۱) = (۲) و حکم قضیه برقرار خواهد شد.

۳.۹.۵. حالتهای خاصّ قضیهٔ استوکس

قضیهٔ استوکس نشان دهندهٔ رابطهٔ بین انتگرال یک فرم دیفرانسیلی w و مشتق dw است. در حالتهای خاص، برای مثال در صفحه یا در فضا این رابطه، قضیهٔ واگرایی - قضیهٔ گرین - قضیهٔ اساسی حساب انتگرال می‌باشد که در این بخش آنها توضیح داده خواهند شد. این حالتهای خاصّ قضیهٔ استوکس در آنالیز برداری مورد بحث قرار می‌گیرد.

الف- فرض کنید که $f = (f_1 , f_2 , f_3)$ یک میدان برداری پیوسته در ناحیه‌ای مانند R در

فضای $R^۳$ یا یک فضای برداری ۳ - بُعدی باشد. برای مثال می‌توان از میدان نیرو در $R^۳$ در فیزیک نام برد که دارای سه مؤلفه است، در حقیقت، میدان‌برداری[1]، میدانی است که به هر نقطهٔ آن یک بردار نسبت داده می‌شود، مثلاً بردار سرعت، حرکت یک جسم در فضا. به هر میدان برداری یک فرم ۱ - بُعدی زیر نسبت داده می‌شود :

$$w_۱ = f_۱dx + f_۲dy + f_۳dz$$

که در آن $f_i = f_i(x, y, z)$ ، ۳ و ۲ و ۱ $= i$. اگر C یک منحنی در $R^۳$ باشد آن‌گاه :

$$\int_C w_۱ = \int_C f_۱dx + f_۲dy + f_۳dz$$

$$= \int_{[a, b]} \left[f_۱(t)x'(t) + f_۲(t)y'(t) + f_۳(t)z'(t)\right] dt,$$

جایی که $f_i(t) = f_i(x(t), y(t), z(t))$ ، ۳ و ۲ و ۱ $= i$ ، همچنین داریم:

$$\int_C f.dr = \int_C f_۱dx + f_۲dy + f_۳dz,$$

لذا انتگرال منحنی‌الخط یا انتگرال فرمهای ۱ - بُعدی بر روی یک منحنی را نتیجه خواهد داد:

$$\int_C w_۱ = \int_C f.dr$$

دقت کنید که در فیزیک این انتگرال، انتگرال کار نامیده می‌شود.

ب- به میدان برداری f یک فرم دوبُعدی $w_۲$ به صورت زیر نسبت داده می‌شود :

$$w_۲ = f_۱\, dy\Lambda dz + f_۲\, dz\Lambda dx + f_۳\, dx\Lambda dy$$

می‌دانیم که انتگرال رویه‌ای به صورت $\int\int_S f.dS$ می‌باشد که در آن S یک سطح در فضای $R^۳$ است. با توجه به این که

$$f.dS = f_۱\, dy\Lambda dz + f_۲\, dz\Lambda dx + f_۳\, dx\Lambda dt = w_۲$$

۱- توجه کنید که یک میدان برداری میدانی است که جهت مسیر حرکت یک جسم را در فضای موردنظر مشخص می‌کند. در حقیقت، یک میدان برداری از بردارهایی تشکیل شده است که بر مسیر، مماس هستند. برای اطلاع بیشتر می‌خواهید به کتابهای نظریه معادلات دیفرانسیل مراجعه کنید.

(علّت تساوی بالا را توضیح دهید). آن‌گاه انتگرال فرم دوبُعدی w_2 بر روی S برابر است با انتگرال رویه‌ای. اگر w_2 از ردهٔ C^1 باشد، آن‌گاه فرم استاندارد dw_2 عبارت است از :

$$dw_2 = \left[\sum_{i=1}^{3} D_i f_1 dx_i\right] \wedge dy \wedge dz + \left[\sum_{i=1}^{3} D_i f_2 dx_i\right] dz \wedge dx$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{3} D_i f_3 dx_i\right] \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \tag{۳}$$

از طرف دیگر داریم :

$$\nabla . f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) \tag{۴}$$

و

$$\int_S \int w_2 = \int_S \int f . ds \tag{۵}$$

اکنون بنا به قضیهٔ واگرایی تساوی زیر برقرار است (برای قضیهٔ واگرایی به کتابهای حسابان مراجعه کنید)

$$\int\int_R \int \nabla . f dv = \int_S \int f . dS \tag{۶}$$

به طوری که R یک ناحیه در فضای R^3 و $\partial R = S$ یعنی این که ناحیهٔ R توسط سطح S بسته می‌شود. قضیهٔ استوکس تساوی زیر را بیان می‌کند :

$$\int\int_R \int dw_2 = \int_{\partial R} \int w_2 = \int\int_S w_2 \tag{۷}$$

حال با توجه به روابط (۳، ۴، ۵، ٦ و ۷) داریم :

$$\int\int_R \int \nabla . f dv = \int\int_R \int dw_2 = \int_S \int w_2 = \int_S \int f . dr.$$

بنابراین، قضیهٔ واگرایی را می‌توان از قضیهٔ استوکس برای یک فرم دوبُعدی نسبت داده شده به

یک میدان برداری نتیجه گرفت.

ج - دو مرتبه به فرم ۱- بُعدی w_1 بر می‌گردیم و مطلب دیگری را برای آنالیز برداری با استفاده از قضیهٔ استوکس نتیجه می‌گیریم. یادآور می‌شویم که:

$$\int_S\int f.ds=\pm\int_{R_{yz}}\int f_1\,dydz\pm\int_{R_{xz}}\int f_2\,dzdx\pm\int_{R_{xy}}\int f_3\,dxdy=\int_S\int f.ndS$$

جایی که n نرمال بر سطح S با جهت مثبت خارج از سطح و R_{xy} ناحیهٔ تصویر شدهٔ رویه بر صفحهٔ xy و R_{xz} ناحیهٔ تصویر شدهٔ رویه بر صفحهٔ xz و R_{yz} ناحیهٔ تصویر شده بر صفحهٔ y_z است.

با فرض این که w_1 یک فرم ۱- بُعدی از ردهٔ C^1 باشد آنگاه داریم:

$$dw_1=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\Lambda dz+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dz\Lambda dx+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\Lambda dy$$

همچنین داریم:

$$\nabla\times f=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

$$=e_1\left[\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right]+e_2\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right]+e_3\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]$$

در نتیجه $(\nabla\times f).dS$ با dw_1 متناظر است. اگر S یک سطح ۲- بُعدی در R^3 باشد، آنگاه ∂S یک منحنی بسته مانند C می‌باشد که مرز است. با استفاده از قضیهٔ استوکس و نتیجهٔ قسمت الف خواهیم داشت:

$$\int_S\int(\nabla\times f).dS=\int_S\int\left[\left[\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right]dy\wedge dz+\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right]\right]$$

$$dz\Lambda dx+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\Lambda dy$$

$$=\int_S\int dw_1=\int_{\partial S}w_1=\oint_S f.dr$$

این نتیجه همان قضیهٔ استوکس در ریاضی عمومی است.

۳.۱۰. فرمهای دیفرانسیلی میدان معادلات مکسول[1]

فرض کنید $E = (E_1 , E_2 , E_3)$ و $H = (H_1 , H_2 , H_3)$ و $D = (D_1 , D_2 , D_3)$ و $B = (B_1 , B_2 , B_3)$ و $J = (J_1 , J_2 , J_3)$ توابعی برداری از ردهٔ C^r و $r \geq 1$ و ρ یک تابع حقیقی باشد، آن‌گاه معادلات اساسی مکسول در نظریهٔ میدان الکترومغناطیس برابر است با :

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{۱}$$

$$\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = J \tag{۲}$$

$$\nabla . B = 0 \tag{۳}$$

$$\nabla . D = \rho \tag{۴}$$

جایی که E شدّت میدان الکتریکی[2]، H شدّت میدان مغناطیسی[3]، D جابه‌جایی الکتریکی[4]، B القای مغناطیسی[5]، J چگالی جریان الکتریکی[6] و ρ چگالی بار[7] همگی توابعی از x , y , z , t (زمان) هستند.

اکنون فرمهای دیفرانسیلی زیر را نسبت به این میدانها معرفی می‌کنیم :

$$w_E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$
$$w_H = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz$$
$$w_D = D_1 dy\Lambda dz + D_2 dz\Lambda dx + D_3 dx\Lambda dy ,$$
$$w_B = B_1 dy\Lambda dz + B_2 dz\Lambda dx + B_3 dx\Lambda dy,$$
$$w_y = y_1 dy\Lambda dz + y_2 dz\Lambda dx + y_3 dx\Lambda dy ,$$
$$w_\rho = \rho dx\Lambda dy\Lambda dz$$

---

1. Maxwell's Field Eqnations
2. Electric field intensity
3. Magnetic field intensity
4. Eleetric displacement
5. Magnetic induction
6. Electric current density
7. Charge density

قضیهٔ ۲۵: فرض کنید که :

$$\alpha = w_E \Lambda dt + w_B ,$$
$$\beta = -w_H \Lambda dt + w_D ,$$
$$\gamma = w_J \Lambda dt - w_f$$

آن‌گاه $d\alpha = 0$ روابط (۱) و (۳) و $d\beta + \gamma = 0$ روابط (۲) و (۴) را نتیجه می‌دهد، به علاوه $d\gamma = 0$ رابطهٔ $\nabla_J + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ را خواهد داد.

اثبات: در فرم α به جای w_E و w_B مقدارشان را جایگزین می‌کنیم :

$$\alpha = E_1 dx\Lambda dt + E_2 dy\Lambda dt + E_3 dz\Lambda dt + B_1 dy\Lambda dz + \dots$$
$$B_2 dz\Lambda dx + B_3 dx\Lambda dy$$

بنابراین داریم :

$$d\alpha = d(E_1 dx\Lambda dt) + d(E_2 dy\Lambda dt) + d(E_3 dz\Lambda dt) + d(B_1 dy\Lambda dz)$$
$$+ d(B_2 dz\Lambda dx) + d(B_3 dx\Lambda dy)$$

اکنون تک‌تک جملات $d\alpha$ را محاسبه می‌کنیم :

$$d(E_1 dx\Lambda dt) = d(E_1 dx)\Lambda dt - E_1 dx\Lambda d(dt)$$
$$= dE_1 dx\Lambda dt$$
$$= \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} dx + \frac{\partial E_1}{\partial y} dy + \frac{\partial E_1}{\partial z} dz + \frac{\partial E_1}{\partial t} dt\right)\Lambda dx\Lambda dt$$
$$= \frac{\partial E_1}{\partial y} dy\Lambda dx\Lambda dt + \frac{\partial E_1}{\partial z} dz\Lambda dx\Lambda dt$$

متشابهاً داریم :

$$d(E_2 dy\Lambda dt) = \frac{\partial E_2}{\partial x} dx\Lambda dy\Lambda dt + \frac{\partial E_2}{\partial z} dz\Lambda dy\Lambda dt ,$$
$$d(E_3 dz\Lambda dt) = \frac{\partial E_3}{\partial x} dx\Lambda dz\Lambda dt + \frac{\partial E_3}{\partial y} dy\Lambda dz\Lambda dt ,$$
$$d(B_1 dy\Lambda dz) = \frac{\partial B_1}{\partial x} dx\Lambda dy\Lambda dz + \frac{\partial B_1}{\partial t} dt\Lambda dy\Lambda dz ,$$
$$d(B_2 dz\Lambda dx) = \frac{\partial B_2}{\partial y} dy\Lambda dz\Lambda dx + \frac{\partial B_2}{\partial t} dt\Lambda dz\Lambda dx ,$$

$$d(B_3 dx\wedge dy) = \frac{\partial B_3}{\partial z} dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial B_3}{\partial t} dt\wedge dx\wedge dy\,,$$

با جایگزین کردن این مقادیر در $d\alpha$ خواهیم داشت :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) dy\wedge dz\wedge dt + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) dz\wedge dx\wedge dt$$
$$+ \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial t}\right) dx\wedge dy\wedge dt + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

حال $d\alpha = 0$ نتیجه می‌دهد که ضرایب فرمهای دیفرانسیلی باید مساوی با صفر باشند. زیرا فرم بالا یک فرم استاندارد است. لذا، سه ضریب اول، فرمول (۱) را نتیجه می‌دهد، یعنی این که $\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ و آخرین ضریب مساوی با صفر، رابطهٔ (۳) را نتیجه می‌دهد، یعنی این که $\nabla.B = 0$. بنابراین $d\alpha = 0$ روابط (۱) و (۳) را نتیجه خواهد داد.

متشابهاً مشتق β را محاسبه می‌کنیم :

$$d\beta = -\left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial D_1}{\partial t}\right) dy\wedge dz\wedge dt$$
$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial D_2}{\partial t}\right) dz\wedge dx\wedge dt$$
$$-\left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial D_3}{\partial t}\right) dx\wedge dy\wedge dt$$
$$+\left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

با توجه به تعریف w_r و تعریف γ داریم :

$$\gamma = y_1 dy\wedge dz\wedge dt + J_2 dz\wedge dx\wedge dt + J_3 dx\wedge dy\wedge dt - \rho\, dx\wedge dy\wedge dz$$

آن‌گاه :

$$d\beta + \gamma = -\left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial D_1}{\partial t} - J_1\right) dy\wedge dz\wedge dt$$
$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial D_2}{\partial t} - J_2\right) dz\wedge dx\wedge dt$$
$$-\left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial D_3}{\partial t} - J_3\right) dx\wedge dy\wedge dt$$
$$+\left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} - \frac{\partial D_3}{\partial z} - \rho\right) dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

بنابراین از معادلهٔ $d\beta + \gamma = 0$ نتیجه می‌گیریم که ضرایب فرمهای استاندارد باید مساوی با

صفر باشند. از مساوی قراردادن سه ضریب اول تساوی $J = \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right) - \nabla \times H$ و از آخرین ضریب مساوی با صفر، تساوی $\nabla . D = \rho$ نتیجه گرفته می‌شود. بنابراین $d\beta + \gamma = 0$ روابط (۲) و (۴) را نتیجه می‌دهد. مشابه محاسبات بالا را برای $d\gamma$ انجام می‌دهیم و نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$d\gamma = -dJ_1 \wedge dy \wedge dz \wedge dt + dJ_2 \wedge dz \wedge dx \wedge dt + DJ_3 \wedge dx \wedge dy \wedge dt$$

$$- d\rho \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= \frac{\partial J_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial J_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial J_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \wedge dt$$

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_2}{\partial y} + \frac{\partial J_3}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

از $d\gamma = 0$ نتیجه می‌شود که $\nabla J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ و یا $\nabla J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

تمرینات فصل سوم

۱- اگر $\alpha = xdx - zdy + y^2dz$ و $\beta = -ydx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz + 2dz \wedge dx$ آن‌گاه $\alpha \wedge B$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $\alpha = dx \wedge dy + dy \wedge dz - dz \wedge dw$ و $\beta = xdx \wedge dy + ydz \wedge dw$ آن‌گاه $\alpha \wedge \beta$ را محاسبه کنید.

۳- تساوی زیر را اثبات کنید.

$$dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw = \frac{\partial(x, y, z, w)}{\partial(r, s, t, u)} dr \wedge ds \wedge dt \wedge du,$$

جایی که x و y و z و w توابعی از (r, s, t, u) هستند.

۴- فرض کنید که $w_1 = x^2 y dy \wedge dz - xz dx \wedge dy$، $w_2 = 2xydx + x^2 dy$، $w_3 = -xzdx \wedge dy + 2yzdy \wedge dz + xydz \wedge dx$، dw_i، $i = 1, 2, 3$ را محاسبه کنید.

۵- فرمول لایبنس را برای فرمهای ۰- بُعدی f و g و w فرم ۱- بُعدی که از ردهٔ C^1 هستند ثابت کنید.

$$d(fg) = fdg + gdf,$$

$$d(fw) = df \wedge w + fdw$$

۶- فرض کنید که T یک تبدیل با $y = v$ و $x = u^۲ + v$ و $w = xydx$ یک فرم ۱- بُعدی باشد. درستی تساوی $(dw)_T = d(w_T)$ را بررسی کنید.

۷- فرم ۱- بُعدی w را به دست آورید در صورتی که $dw = (x^۲ + y^۲)dx\Lambda dy$ است.

۸- نشان دهید که فرم ۱- بُعدی $w = ۲zdz + ۲xydx + x^۲dy$ یک فرم کامل است.

۹- فرم ۱- بُعدی زیر بر روی صفحهٔ $R^۲ - \{(۰ و ۰)\}$ تعریف شده است.

$$w = \frac{-y}{x^۲ + y^۲}\, dx + \frac{x}{x^۲ + y^۲}\, dy$$

الف- نشان دهید که w بسته است، اما کامل نیست.

ب- ثابت کنید که انتگرال w بر روی هر منحنی بسته که شامل (۰ و ۰) نیست مساوی با صفر باشد.

$$\oint_C w = ۰$$

۱۰- فرض کنید که $w = xdy\Lambda dz + ydz\Lambda dx + zdx\Lambda dy$ باشد. نشان دهید که حجم یک ناحیهٔ R در فضای $R^۳$ برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\int_{\partial R}\int w$$

۱۱- اگر M ناحیه‌ای در فضای چهاربُعدی با مختصات x , y , z , w باشد، پس کرانه M یعنی ∂M سه‌بُعدی است. نشان دهید که:

$$\int_M \nabla . f dx\Lambda dy\Lambda dz\Lambda dw \int_{\partial M} (f_۱ dy\Lambda dz\Lambda dw + f_۲\, dz\Lambda dw\Lambda dx + f_۳\, dw\Lambda dx\Lambda dy$$

$$+ f_۴\, dx\Lambda dy\Lambda dz)\ ,$$

جایی که $f_i = f_i(x , y , z , w)$، $i = ۱ , ۲ , ۳ , ۴$، توابعی از x , y , z , w هستند.

۱۲- فرض کنید که $A = (A_۱ , A_۲ , A_۳)$ بردار پتانسیل و V پتانسیل اسکالری، توابعی از $x\ t , z , y$ باشند. اگر $\alpha = w_E\Lambda dt + w_B$ و $\lambda = A_۱ dx + A_۲ dy + A_۳ dz - Vdt$ مفروض باشند، نشان دهید که $d\lambda = \alpha$ متناظر با معادلات برداری $B = \nabla \times A$ و $E = \frac{-\partial A}{\partial t}$ است.

۱۳- فرض کنید که توابع f و g بر روی یک بازهٔ باز $U \subset R^n$ هموار باشند. ثابت کنید که:

$df \wedge dg = 0$

۱۴ - مشتق فرمهای زیر را محاسبه کنید:

الف - $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n$؛

ب - $x_2 dx_1 - x_1 dx_2$؛

ج - $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$؛

د - $f(x, y)dx$.

۱۵ - نشان دهید که اگر w و γ فرمهای بسته باشند، آن‌گاه $w \wedge \gamma$ نیز بسته است. به علاوه ثابت کنید که اگر w یک فرم بسته و γ یک فرم کامل باشد، آن‌گاه $w \wedge \gamma$ کامل است.

۱۶ - الف - فرض کنید که تابع f در شرایط قضیهٔ ۷، فصل سوم صدق کند. اگر $A = f'(0)$ و $f_1(x) = A^{-1}f(x)$ پس $f_1'(0) = I$. ثابت کنید که یک همسایگی از 0 وجود دارد که

$$f_1(x) = G_n \circ G_{n-1} o \dots o\, G_1(x),$$

جایی که $G_i(x)$ توابع اوّلیه هستند. در این صورت قضیهٔ ۷ فصل سوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x) = f'(0)G_n \circ G_{n-1} o \dots o\, G_1(x)$$

ب - ثابت کنید که تابع $(x, y) \to (y, x)$ از R^2 به R^2 را نمی‌توان در یک همسایگی از مبدأ برحسب تنها ترکیب دو تابع اوّلیه نوشت. این مطلب نشانگر آن است که در نوشتن تابع $f(x)$ همیشه نمی‌توان توابع ضربه را حذف کرد.

۱۷ - فرض کنید که w یک فرم 0 - بُعدی از ردهٔ C^1 بر روی U باشد. نشان دهید که یک تابع هموار که هرگز بر روی U صفر نمی‌باشد وجود دارد، به طوری که اگر fw یک فرم بسته باشد، آن‌گاه $w \wedge dw = 0$ (چنین تابعی را **عامل انتگرال‌گیری** w نامند).

۱۸ - فرض کنید که $(x, y) \in R^2$ و $F(x, y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y)$

الف - ثابت کنید که $F = G_2 \circ G_1$ به طوری که:

$$G_1(x, y) = (e^x \cos y - 1, y),$$

$$G_2(u, v) = (u, (1 + u)\tan v)$$

توابع اولیه در یک همسایگی از مبدأ هستند.

ب - توابع G و H را به صورت زیر تعریف کنید:

$$G(x, y) = (x, e^x \sin y),$$

$$H(u, v) = (h(u, v), v)$$

تابع $h(u, v)$ را طوری تعریف کنید که در یک همسایگی از مبدأ $F = GoH$ و همچنین ژاکوبین توابع G_1 و G_2 و تابع F را محاسبه نمایید.

۱۹ـ فرض کنید ϕ_i یک تابع حقیقی و پیوسته بر روی R با تکیه‌گاه در $(2^{-i} , 2^{1-i})$ باشد، به طوری که $\int \phi_i = 1$. ثابت کنید که تابع $f(x , y) = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_i(x) - \phi_{i+1}(x))\, \phi_i(y)$ دارای تکیه‌گاه فشرده در R^2 است. همچنین ثابت کنید تابع f به جز در مبدأ پیوسته است و

$$\int dx \int f(x , y)dy = 1 \quad \text{و} \quad \int dy \int f(x , y)dx = 0$$

دقت کنید که f در مبدأ بی‌کران است.

۲۰ـ نشان دهید که یک فرم ۰ـ بُعدی بسته در یک زیرمجموعهٔ باز همبند $U \subset R^n$ باید یک تابع ثابت باشد. از این مطلب نتیجه بگیرید که اگر γ یک فرم کامل ۱ـ بُعدی و $p \in U$ باشد، آن‌گاه یک تابع یکتای مانند g وجود دارد به طوری که $dg = \gamma$ و $g(p) = 0$.

۲۱ـ فرمهای w و γ یک بُعدی از ردهٔ C^1 را بر روی $U = R^2 - \{0\}$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$w = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} , \gamma = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

نشان دهید که w و γ بسته هستند و w کامل است، اما γ کامل نیست.

۲۲ـ فرض کنید که w یک فرم ۲ـ بُعدی بر روی R^3 و f یک تابع از R^2 به R^3 باشد به طوری که:

$$w = xdy\Lambda dz + ydz\Lambda dx + zdx\Lambda dy ,$$

$$f(u , v) = (\sin u \ \cos v , \sin u \ \sin v , \cos u)$$

$f_T(w)$ را محاسبه کنید و $\int_D f_T(w)$ را برای $D = \{(u , v): 0 \leq u \leq 2\pi , 0 \leq v, \leq 2\pi\}$ محاسبه نمایید.

۲۳ـ فرض کنید A متوازی‌الاضلاع در R^2 با رئوس (۱ و ۱) و (۲ و ۳) و (۵ و ۴) و (۴ و ۲) باشد. تابع مستوی T که (۰ و ۰) به (۱ و ۱) و (۰ و ۱) را به (۲ و ۳) و (۱ و ۰) را به (۴ و ۲) انتقال می‌دهد مفروض است.

الف ـ T را تعریف کنید. ب ـ نشان دهید که $J_T = 5$. با توجه به تبدیل T انتگرال $\int_A c^{x-y}\, dxdy$ را محاسبه کنید.

۲۴- فرض کنید که $\sigma = [p_\circ , p_1 ,..., p_k]$ با $k \geq ۲$ یک سادک جهت‌دار مستوی k- بُعدی باشد. با محاسبهٔ مستقیم ثابت کنید که $\partial^۲\sigma = \partial(\partial\sigma) = \circ$. از این قسمت نتیجه بگیرید که به ازای هر زنجیر Γ ، $\partial^۲\Gamma = \partial(\partial\Gamma) = \circ$ (کراندی کرانهٔ هر زنجیر مساوی با صفر است).

راهنمایی: ابتدا مطلب را برای $k = ۲$ و $k = ۳$ ثابت کنید. در حالت کلی اگر $i < j$ ، σ_{ij} سادک $(k - ۲)$-بُعدی باشد که با حذف p_i و p_j در σ به دست می‌آید، نشان دهید که هر σ_{ij} دوبار و با علامت مخالف در $\partial^۲\sigma$ ظاهر می‌شود.

۲۵- سادک ۳- بُعدی مستوی جهت‌دار $\sigma_1 = [\circ , e_1 , e_1 + e_۲ , e_۲ + e_۳]$ را در $R^۳$ در نظر بگیرید.

الف - نشان دهید که σ_1 دارای دترمینان ۱ است، بنابراین σ_1 به طور مثبت جهت‌دار شده است.

ب - فرض کنید که پنج سادک $\sigma_۲$ ، $\sigma_۳$ ، ... ، $\sigma_۶$ ۳- بُعدی جهت‌دار از ۵ جایگشتهای $(i_1 , i_۲ , i_۳)$ از (۳و۲و۱) متمایز از (۳ و ۲ و ۱) باشند. نشان دهید که این سادکها به طور مثبت جهت‌دار می‌شوند.

ج - قرار دهید: $I^۳ = \sigma_1 + ... + \sigma_۶$ (مکعب واحد به طور مثبت جهت‌دار در $R^۳$) نشان دهید که $\partial I^۳$ مجموع از ۱۲ سادک ۲- بُعدی مستوی جهت‌دار است.

د - $x = (x_1 , x_۲ , x_۳)$ را برد σ_1 در نظر بگیرید اگر و تنها اگر $\circ \leq x_۳ \leq x_۲ \leq x_1$. نشان دهید که بردهای سادکهای σ_1 ، ... ، $\sigma_۶$ ناحیهٔ درونی مجزا از یکدیگر دارند به طوری که اجتماع آنها $I^۳$ را می‌پوشاند.

۲۶- شرایطی بیان کنید که تساوی زیر برقرار باشد:

$$\int_{\Phi} f dw = \int_{\partial\Phi} f w - \int_{\Phi} (df)\Lambda w$$

۲۷- فرض کنید که $w = \frac{xdy - ydx}{x^۲ + y^۲}$ یک فرم ۱- بُعدی بر روی $R^۲ - \{\circ\}$ از ردهٔ C^1 باشد. با توجه به تمرین ۲۱، پس $dw = \circ$. به علاوه فرض کنید که منحنی $\gamma(t) = (r\cos t , r\sin t)$ از ردهٔ $C^۲$ با حوزهٔ پارامتری $[\circ , ۲\pi]$ و $r > \circ$ باشد و همچنین Γ را یک منحنی از ردهٔ $C^۲$ در $R^۲ - \{\circ\}$ با حوزهٔ پارامتری $[\circ , ۲\pi]$ با شرط $\Gamma(\circ) = \Gamma(۲\pi)$ در نظر بگیرید به طوری که بازه‌های $[\gamma(t) , \Gamma(t)]$ به ازای هر $t \in [\circ , ۲\pi]$ شامل $\circ$ نمی‌باشد.

الف - ثابت کنید که:

$$\int_{\Gamma} \gamma = ۲\pi$$

ب - $\Phi(t, u) = (1 - u)\Gamma(t) + u\gamma(t)$. پس Φ یک سطح ۲ - بُعدی در $R^2 - \{0\}$ با حوزهٔ پارامتری $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ است. نشان دهید که $\partial\Phi = \Gamma - \gamma$

ج - قضیهٔ استوکس را به کار برید و نتیجه بگیرید :

$$\int_\Gamma w = \int_\gamma w$$

د - $\Gamma(t) = (a\cos t , b\sin t)$ را که در آن $b > 0$ و $a > 0$ مقادیر ثابت هستند در نظر بگیرید.
ثابت کنید که:

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 2\pi$$

ر - نشـان دهـید کـه در یک مجموعهٔ بـاز محدّب بـا $x \neq 0$ ، $w = d(\arctan \frac{y}{x})$ و یـا $w = d(-\text{aretan} \frac{x}{y})$ با $y \neq 0$ است.

۲۸ - فرض کنید که $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ و D مستطیل $0 \leq v \leq 2\pi$ و $0 \leq u \leq \pi$ باشد. سطح دوبُعدی Φ در R^3 با حوزهٔ پـارامـتری D بـا $x = \sin u \cos v$ و $y = \sin u \sin v$ و $z = \cos u$ مفروض است.

الف - ثابت کنید که $dw = 0$ در $R^3 - \{0\}$ جایی که

$$w = \frac{xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy}{r^3}$$

ب - فرض کنید که $S = \Phi|_E$ جایی که $E \subset D$ ، آن‌گاه ثابت کنید که مساحت S برابر است با

$$\int_S w = \int_E \sin v\, du\, dv = A(s)$$

ج - E را یک مستطیل بسته در D در نظر بگیرید که اضلاع آن با اضلاع D موازی باشد. به علاوه فرض کنید $f \in C^2(D)$, $f > 0$ و Ω یک سطح دوبُعدی با حوزهٔ پارامتری E باشد، بـه طوری که

$$\Omega(u , v) = f(u , v)\Phi(u , v)$$

ثابت کنید که :

$$\int_\Omega w = \int_S w = A(s)$$

راهنمایی : سطح ۳ـ بُعدی Ψ با $\Psi(t , u , v) = (1 - t + t f(u , v)) \Phi(u , v)$ و $1 \leq t \leq 0$ ، (u , v) را در نظر بگیرید.
به ازای v ثابت، تابع $(t , u) \to \Psi(t , u , v)$ یک سطح دوبُعدی خواهد شد. قرار دهید : $\lambda = -\frac{z}{r} \gamma$ که در آن

$$\gamma = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

در این صورت نشان دهید که $w = d\gamma$ در E است.

۲۹ـ n را ثابت بگیرید و $u_k = (x_1^2 + ... + x_k^2)^{1/2}$ و $1 \leq k \leq n$ تعریف کنید. E_k را مجموعهٔ تمام $x \in R^n$ که در آنها $r_k > 0$ ، w_k یک فرم $(k - 1)$ بُعدی در E_k است در نظر بگیرید:

$$w_k = (r_k)^{-k} \sum_{i = 1}^{k} (-1)^{i - 1} x_1 dx_1 \Lambda ... \Lambda dr_{i - 1} \Lambda dx_{i + 1} \Lambda ... \Lambda dx_k$$

دقت کنید که

$$E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n = R^n - \{0\}$$

الف ـ ثابت کنید در E_k ، $dw_k = 0$;

ب ـ با نشان دادن این که $w_k = d(f_k w_{k - 1}) = df_k \Lambda w_{k - 1}$ که در آن

$$g_k(t) = \int_{-1}^{t} (1 - s^2)^{(k - 3)/2} ds \quad (-1 < t < 1) \text{ و } f_k(x) = (-1)^k g_k\left(\frac{x_k}{r_k}\right)$$

ثابت کنید w_k ، به ازای $k = 2 , ... , n$ در $E_{k - 1}$ کامل است.

راهنمایی : f_k در معادلات دیفرانسیل $x(\nabla f_k)(x) = 0$ و $(D_k f_k) = \frac{(-1)^k (r_{k - 1})^{k - 1}}{(r_k)^k}$ صدق می‌کند.

ج ـ آیا w_n در E_n کامل است؟

۳۰ـ فرض کنید که w یک فرم ۱ـ بُعدی در مجموعهٔ باز $E \subset R^n$ باشد به طوری که به ازای هر منحنی بسته σ در E از ردهٔ C^1 داریم :

$$\int_{\gamma} w = 0$$

ثابت کنید که w در E کامل است.

۳۱ـ فرض کنید که E یک حجرهٔ ۳ـ بُعدی باز در R^3 با اضلاعی موازی محورهای مختصات

باشد. به علاوه فرض بر این است که $f_i \in C^1(E)$ ، ۳ و ۲ و ۱ $= i$ و $w = f_1 dy\Lambda dz + f_2 dz\Lambda dx + f_3 dx\Lambda dy$ و $dw = 0$ در E است. $\lambda = g_1 dx + g_2 dy$ در E تعریف می‌کنیم به طوری که

$$g_1(x, y, z) = \int_c^z f_2(x, y, s)\, ds - \int_b^y f_3(x, t, c)\, dt,$$

$$g_2(x, y, z) = -\int_c^z f_1(x, y, s)\, ds, \quad (x, y, z) \in E$$

ثابت کنید که: $d\lambda = w$ در E

۳۲- فرض کنید که $w = x^3 dy$ قضیهٔ استوکس را برای این فرم بر روی یک سطح دوبعدی $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ با حوزهٔ پارامتری $0 \le \theta \le \pi$ و $0 < a \le r \le b$ بررسی کنید.

۳۳- فرض کنید که $E \subset R^3$ یک مجموعهٔ باز باشد و به علاوه توابع g و h را از ردهٔ C^2 بر روی E و $F = g\nabla h$ یک میدان برداری در نظر بگیرید.

الف ـ ثابت کنید:

$$\nabla.F = g\nabla^2 h + (\nabla g).(\nabla h) \tag{1}$$

به طوری که $\nabla^2 h$ لاپلاسین تابع h است، یعنی این که $\nabla^2 h = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}$ ؛

ب ـ هرگاه A یک زیرمجموعهٔ بسته در E با کرانهٔ به طور مثبت جهت‌دار ∂A باشد، آن‌گاه ثابت کنید که :

$$\int_A (g\nabla.h + \nabla g.\nabla h)dv = \int_{\partial A} g\frac{\partial h}{\partial n}\, dA \tag{2}$$

که در آن $\frac{\partial h}{\partial n}$ مشتقّ سویی h در جهت قائم خارج از ∂A با نام مشتقّ قائم h می‌باشد. اگر دو فرمول (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، آن‌گاه از فرمول قضیهٔ گرین نتیجه می‌شود :

$$\int_A (g\nabla^2 h - h\nabla^2 g)dv = \int_{\partial A} \left(g\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial g}{\partial n}\right) dA$$

ج ـ فرض کنید که h در معادلهٔ لاپلاسین صدق کند، یعنی این که $\nabla^2 h = 0$ ، و همچنین $g=1$ لذا ثابت کنید که :

$$\int_{\partial A} \frac{\partial h}{\partial n} dA = \circ$$

۳۴- فرض کنید که δ یک عدد مثبت و کوچکتر از ۱ باشد. همچنین فرض کنید که $b \subset R^{۲}$ مستطیل $-\delta \leq t \leq \delta$ و $\circ \leq \theta \leq \pi$ حوزهٔ پارامتری سطح دوبُعدی Φ در $R^{۳}$ است به طوری که

$$x = (۱ - t \sin \theta)\cos ۲\theta$$

$$y = (۱ - t \sin \theta)\sin ۲\theta$$

$$z = t \cos \theta$$

دقت کنید که $\Phi(\pi, t) = \Phi(\circ, -t)$ به جز در این نقاط، در بقیهٔ نقاط تابع Φ یک تابع ۱-۱ است. سطح دوبُعدی Φ نوار موبیوس است که جهت‌پذیر نمی‌باشد. فرض کنید که :

$$p_{۱} = (\circ, -\delta), p_{۲} = (\pi, -\delta), p_{۳} = (\pi, \delta), p_{۴} = (\circ, \delta), p_{۵} = p_{۱}$$

قرار دهید: $\gamma_i = [p_i , p_{i + ۱}]$ ، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ و $\Gamma_i = \Phi o \gamma_i$.

الف ـ نشان دهید که: $\partial\Phi = \Gamma_{۱} + \Gamma_{۲} + \Gamma_{۳} + \Gamma_{۴}$

ب ـ با فرض این‌که: $a = (۱, \circ, -\delta)$ و $b = (۱, \circ, \delta)$ ، آن‌گاه نشان دهید که :

$$\Phi(p_{۱}) = \Phi(p_{۳}) = a \quad , \quad \Phi(p_{۲}) = \Phi(p_{۴}) = b$$

ج ـ اگر در امتداد $\Gamma_{۱}$ از a- به b برویم و با یک گردش به a برگردیم. آن‌گاه منحنی $\Gamma = \Gamma_{۱} - \Gamma_{۲}$ را می‌توان توسط معادلات زیر با حوزهٔ پارامتری $[\circ, ۲\pi]$ به صورت زیر بیان کرد :

$$x = (۱ + \delta \sin \theta)\cos ۲\theta$$

$$y = (۱ + \delta \sin \theta)\sin ۲\theta$$

$$z = -\delta \cos \theta$$

در این حالت $\Gamma \neq \partial\Phi$. اکنون فرم دوبُعدی بستهٔ $w = \frac{xdy - ydx}{x^{۲} + y^{۲}}$ را در نظر بگیرید. حال با توجه به قضیهٔ استوکس و بسته بودن w ($dw = \circ$) نتیجه می‌شود که : $\int_{\partial\Phi} w = \circ$ نشان دهید که :

$$\int_{\Gamma} w = \varepsilon\pi .$$

در نتیجه، این مطلب با قضیهٔ استوکس تناقض دارد. بنابراین، قضیهٔ استوکس برای یک سطح جهت‌پذیر Φ بیان می‌شود و چون در این‌جا نوار موبیوس است، پس جهت‌پذیر نمی‌باشد.

۳۵ـ فرض کنید که $F = x^2 e_1 + (x^2y - 2xy)e_2 - x^2z\, e_3$. آیا میدان برداری G وجود دارد که $F = \nabla \times G$؟

۳۶ـ ثابت کنید که هرگاه $\nabla \times F = \nabla \times G$ ؛ آن‌گاه نشان دهید که $F = G + \nabla f$ به ازای یک f ی.

۳۷ـ ثابت کنید که :

$$(F.\nabla)F = \frac{1}{2}\nabla(F.F) + (\nabla \times F) \times F$$

۳۸ـ نشان دهید که هرگاه C یک منحنی بستهٔ ساده اطراف ناحیه‌ای باشد که در آن قضیهٔ استوکس برقرار است. آن‌گاه مساحت ناحیهٔ D محدود به C برابر است با

$$A = \int_{\partial D} x\, dy = -\int_{\partial D} y\, dx$$

۳۹ـ اگر منحنی بستهٔ C مرز سطح S و f و g توابعی از ردهٔ C^2 باشد، ثابت کنید که :

الف ـ $\int_C f\nabla g . dS = \int_S (\nabla f \times \nabla g) . dS$

ب ـ $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) . dS = 0$

۴۰ـ قانون فارادی، انتگرال منحنی‌الخط میدان الکتریکی حول حلقهٔ C است که با انتگرال سطح میزان تغییر میدان مغناطیسی روی سطح S با مرز C مساوی می‌باشد. با توجه به این که $\nabla \times E = -\frac{\partial H}{\partial t}$ ، آن‌گاه نشان دهید که قانون فارادی نتیجه‌ای از قضیهٔ استوکس است.

۴۱ـ با استفاده از قضیهٔ استوکس، انتگرال $\nabla \times F$ را با $F = 3ye_1 - xze_2 + yz^2e_3$ روی بخشی از سطح $2z = x^2 + y^2$ زیر صفحهٔ $z = 2$ محاسبه کنید.

۴۲ـ فرم ۱ـ بُعدی $w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ در R^2 مفروض است. انتگرال w را بر روی یک دایره با شعاع واحد محاسبه کنید.

۴۳ـ فرض کنید که $F = xze_1 - yze_2 + ye_3$. الف ـ آیا $\nabla.F = 0$ ؟ ب ـ میدان برداری G را طوری به دست آورید که: $F = \nabla \times G$.

۴۴ـ فرض کنید که میدان برداری F برابر با $F = (x \cos y)e_1 - (\sin y)e_2 + (\sin x)e_3$ باشد،

میدان برداری G را طوری محاسبه کنید که $F = \nabla \times G$.

۴۵ـ حاصل‌ضرب دو فرم w و γ داده شده در زیر را محاسبه کنید.

الف ـ $w = 2xdx + ydy$ $\quad$ $\gamma = x^3dx + y^2dy$؛

ب ـ $w = xdx - ydy$ $\quad$ $\gamma = ydx + xdy$؛

ج ـ $w = xdx + ydy + zdz$, $\gamma = zdx\Lambda dy + xdy\Lambda dz + ydz\Lambda dx$؛

د ـ $w = xydy\Lambda dz + x^2dx\Lambda dy$, $\gamma = dx + dz$؛

ر ـ $w = e^{xyz}\, dx\Lambda dy$, $\gamma = e^{-xyz}\, dz$

۴۶ـ در مسایل زیر dw را محاسبه کنید:

الف ـ $w = x^2y + y^3$

ب ـ $w = y^2 \cos xdy + xydx + dz$؛

ج ـ $w = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\, dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\, dy$

د ـ $w = (x^2 + y^2)dy\Lambda dz$؛

ر ـ $w = xdx\Lambda dy + zdy\Lambda dz + ydz\Lambda dx$

ز ـ $w = xydy + (x + y)^2dx$

۴۷ـ فرض کنید که $V : K \to R^3$ یک میدان برداری باشد به طوری که

$$V(x, y, z) = G(x, y, z)e_1 + H(x, y, z)e_2 + F(x, y, z)e_3$$

به علاوه فرض بر این است که $w = Fdx\,\Lambda dy + Gdy\Lambda dz + Hdz\Lambda dx$ یک فرم ۲ـ بُعدی بر روی K باشد. نشان دهید که $dw = (\mathrm{div}\, V)dx\Lambda\, dy\Lambda\, dz$.

۴۸ـ اگر

$$V = F_1(x, y, z)e_1 + F_2(x, y, z)e_1 + F_3(x, y, z)e_3$$

$$w = F_1\, dy\Lambda dz + F_2\, dz\,\Lambda dx + F_3\, dx\Lambda dy$$

فرم دوبُعدی نسبت به میدان برداری باشد. آن‌گاه:

الف ـ نشان دهید که

$$w(\alpha v_1 + v_2) = \alpha w_{v_1} + w_{v_2}$$

که در آن α یک اسکالر است؛

ب ـ نشان دهید که

$dw = w_{(curl v)}$

۴۹ـ فرض کنید که $w = (x + y)dz + (y + z)dx + (x + y)dy$ فرم ۱ـ بُعدی در R^3 و S قسمت بالایی کره به‌شعاع واحد باشد، یعنی این که S مجموعهٔ (x, y, z) هایی است که $x^2+y^2+z^2=1$ و $z \geq 0$. بنابراین ∂S یک دایرهٔ واحد در صفحهٔ xoy است. با استفاده از قضیهٔ استوکس $\int_{\partial S} w$ را محاسبه کنید.

۵۰ـ فرم ۱ـ بُعدی $w = x^2ydx + ydy$ مفروض است. انتگرال w را بر روی منحنی C که از مرز ناحیهٔ بین منحنیهای $y = x$ و $y = x^3$ و $0 < x < 1$ تشکیل شده است محاسبه کنید.

فصل چهارم

اندازه[1] - انتگرال لبگ[2]

به سبب این که در درس آنالیز حقیقی مربوط به دورهٔ کارشناسی ارشد این مطالب به طور کامل مورد بحث و مطالعه قرار می‌گیرد، در این جا تنها به مقدمه‌ای بسنده می‌کنیم.

در آنالیز ریاضی و ریاضی عمومی تعریف انتگرال ریمانی یک تابع حقیقی را آموخته‌ایم. اگر تابع حقیقی بر روی یک بازه مانند $[a, b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه انتگرال ریمانی این تابع به صورت :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(z_j)(x_j - x_{j-1}) \qquad (1)$$

با $x_{j-1} < z_j < x_j$ به ازای هر j تعریف می‌شود. در حقیقت بازهٔ $[a, b]$ را به تعداد شمار زیر بازه تقسیم می‌کنیم. بنابراین تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر است اگر حد (۱) وجود داشته باشد.

اگر تابع $f(x)$ با مشخصات زیر داده شده باشد :

به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد یک گردایی از تعداد متناهی بازه‌های باز $\{(a_k , b_k): k = 1, ..., r\}$ و یک مجموعهٔ کوچک مانند D از نقاطی که در آن نقاط، تابع f پیوسته نیست و داریم :

$$D \subset \cup_k(a_k , b_k) \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{r} (b_k - a_k) < \varepsilon$$

آن‌گاه آیا می‌توان انتگرال ریمانی برای این نوع تابع تعریف کرد؟ ردهٔ بزرگی از توابع وجود

---

1. Measure
2. Lebesgue

دارد که نه تنها شامل توابع پیوسته، بلکه شامل برخی از توابعی است که دارای تعداد ناشمارا ناپیوستگی است. برای مثال می‌توان از مجموعهٔ کانتور نام برد. [مجموعهٔ کانتور مجموعه‌ای است مانند K که زیرمجموعهٔ $[\circ, 1]$ است به طوری که $K = [\circ, 1] \cap U^c$ ، جایی که U از اتحاد بازه‌های باز تشکیل شده است و هر نقطه از K یک نقطهٔ حدّی K می‌باشد. برای ساختن چنین مجموعه‌ای به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: $K_\circ = [\circ, 1]$ و $K_1, \ldots, K_n$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $K_j = \bigcup_{k=1}^{j} I_{j,k}$ به ازای هر $\circ \le j \le n$ ، جایی که هر $I_{j,k}$ یک مجموعهٔ بسته با طول 3^{-j} و $I_{j,k} \cap I_{j,l} = \phi$ برای $k \neq l$ قرار می‌دهیم: $K = \bigcap_{n=\circ}^{\infty} K_n$ و به ازای هر $x_n \in K$ و n داریم: $|x_n - x| \le 3^{-n}$ و در نتیجه x یک نقطهٔ حدّی K است، برای اطلاعات بیشتر برای مثال می‌توانید به کتابهای Browder و یا Jones یا Douglass مراجعه کنید].

لذا ممکن است برای این نوع توابع انتگرالی ریمانی تعریف نشود، یعنی این که اگر f_n یک تابع انتگرال‌پذیر ریمانی به ازای هر n باشد و اگر $f_n(x) \to f(x)$ به ازای هر x ، $a \le x \le b$ این امکان وجود دارد که f دارای انتگرال ریمانی نباشد. برای مثال دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = m/n! \quad \text{یک عدد صحیح } m \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$f_n(x)$ دارای انتگرال ریمانی و f_n به طور نقطه‌ای به تابع $f(x)$ میل می‌کند:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ \circ & \text{اگر } x \text{ اصم باشد} \end{cases}$$

اما $f(x)$ انتگرال ریمانی ندارد. بعداً خواهید دید که چون $f(x)$ تقارب دنباله‌های $f_n(x)$ است، پس $f(x)$ انتگرال‌پذیر (لبگ) می‌باشد. به علاوه جالب است که قادر باشیم انتگرال را بر روی یک بازهٔ ناکراندار محاسبه کنیم. انتگرال لبگ اجازهٔ این توسعه را می‌دهد، نظریهٔ انتگرال لبگ که در بخش ۴.۲ ارائه خواهد شد بر اساس توابع اندازه‌پذیر است، لذا ابتدا اندازه و توابع اندازه‌پذیر را تعریف می‌کنیم.

۴.۱. اندازهٔ لبگ

برای تعریف اندازهٔ لبگ توجه می‌کنیم که طول یک بازه در R ، اندازهٔ لبگ بازه تعریف می‌شود. به علاوه مساحت یک ناحیه در R^2 اندازهٔ ناحیه و اندازهٔ حجم یک ناحیه در R^3 اندازهٔ ناحیهٔ تعریف خواهد شد. در حالت کلّی هر زیرمجموعه در R^n دارای اندازه نیست، اما ردهٔ بزرگی از

زیر مجموعه‌های R^n دارای اندازه هستند. در حالت کلی اگر مجموعه‌ای مانند A دارای اندازه یا اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه آن را به $m(A)$ یا $\mu(A)$ نمایش می‌دهند. ابتدا اندازهٔ چند مجموعه خاص را تعریف می‌کنیم.

۱- **اندازهٔ یک مجموعهٔ خالی** ϕ برابر است با ۰

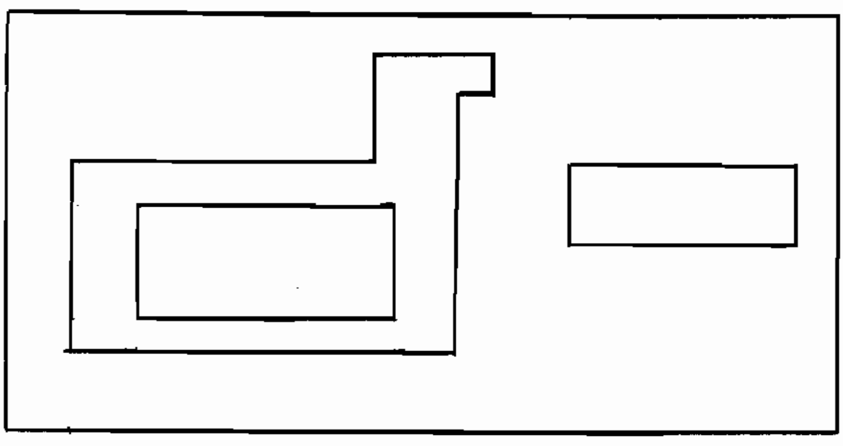
۲- **اندازهٔ یک مستطیل خاص** فرض کنید که I_n یک مستطیل در R^n باشد یعنی این که:

$$\mathrm{I}^n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$
$$= \{x \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n\}$$

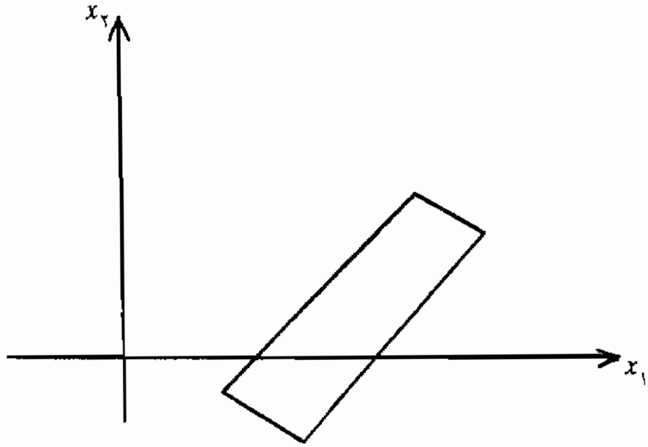
اندازهٔ I^n را برابر حاصل‌ضرب طول بازه‌های $[a_i, b_i]$ تعریف می‌کنیم:

$$m(\mathrm{I}^n) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

۳- **چندضلعی خاص**: یک چندضلعی خاص تشیل شده است از تعداد متناهی مستطیلهایی که دارای اندازهٔ غیرصفر هستند، (یا مستطیلهایی با یالهای غیرصفر) شکل زیر یک مثال از چنین چندضلعی در R^2 است.



توجه کنید که چندضلعی خاص، اضلاع موازی با محور مختصات دارد. بنابراین شکل زیر یک چندضلعی خاص نیست.



همچنین دقت کنید که چندضلعی خاص یک زیرمجموعه فشرده از R^n است؛ زیرا مستطیلهایی انتخاب شده‌اند که بسته و کراندار هستند. بنابراین چندضلعی خاص، بسته و کراندار است. قضیهٔ هانیه-بورل نتیجه می‌دهد که این چندضلعی خاص فشرده است. فرض کنید که P این چندضلعی باشد که از تعداد متناهی مستطیلهای خاص با نقاط درونی مجزا از هم تشکیل شده است :

$$P = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$$

آن‌گاه اندازهٔ این چندضلعی مجموع اندازه‌های مستطیلهای I_i و $1 \leq i \leq N$ تعریف می‌شود.

$$m(p) = \sum_{i=1}^{N} m(I_i)$$

در این جا دقت شود که مستطیلها ممکن است در مرز با هم مشترک باشند امّا مرز مشترک در اندازهٔ چندضلعی تأثیری ندارد.

در این تعریف باید به دو نکته توجه داشت : آیا می‌توان هر چندضلعی خاص را به مستطیلهای مجزّا از هم از نقطه نظر نقاط داخلی، تبدیل کرد یا نه؟ همچنین آیا اندازهٔ چندضلعی به انتخاب مستطیلها بستگی دارد یا نه؟ در حقیقت آیا تعریف اندازهٔ چندضلعی خاص خوش تعریف است؟ برای اثبات این مطالب به کتاب Jones فصل دوم مراجعه کنید.

۴- در این مرحله به تعریف اندازهٔ یک زیرمجموعهٔ دلخواه $A \subset R^n$ می‌پردازیم. ابتدا A را یک مجموعهٔ باز در نظر می‌گیریم. فرض کنید که A یک زیرمجموعه باز ناتهی در R^n

باشد، آن‌گاه اندازهٔ این مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$m(A) = \sup\{m(P) : P \subset A,$ یک چندضلعی خاص $P\}$

چون A یک مجموعهٔ باز است، آن‌گاه چندضلعیهای خاص داخل A وجود دارند. اگر مجموعهٔ A کراندار باشد، آن‌گاه $\circ < m(A) < \infty$ ، امّا اگر A کراندار نباشد پس $m(A) = \infty$. برای مثال اگر $A = R^n$ آن‌گاه $m(R^n) = \infty$.

قبل از این که اندازهٔ یک مجموعهٔ اختیاری تعریف شود، مفهوم دقیقتری از یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر ارائه می‌شود.

۴.۱.۲. تعاریف جبر - متناهیاً جمعی

فرض کنید که $A \in C$ یک مجموعه باشد. گردایه‌ایی C از زیرمجموعه‌های A یک جبر نامیده می‌شود اگر:

الف - $\phi \in C$ ، ب - اگر $B \in C$ ، آن‌گاه : $B^c \in C$ ؛ ج - اگر $B \in C$ و $D \in C$ آن‌گاه $B \cup D \in C$. بنابراین، یک جبر از زیرمجموعه‌های A ، گردایه‌ای ناتهی است که تحت عملگر مکمل و تحت اتحاد بسته است، همچنین چون $B \cap D = (B^c \cup D^c)$ ، آن‌گاه تحت تقاطع نیز بسته است. بنابراین جبرگردایه‌ای از زیرمجموعه‌های A تحت اتحاد از تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های بسته است، یعنی این که اگر $A_1, ..., A_n \in C$ ، آن‌گاه $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \in C$ ، برای مثال گردایه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های A یا $\{\phi, A\}$ در شرایط تعریف جبر صدق می‌کنند.

فرض کنید که m تابعی حقیقی نامنفی با حوزهٔ تعریف جبر C از زیرمجموعه‌های A باشد. m را متناهیاً[1] جمعی یا جمعی نامند اگر $m(B \cup C) = m(B) + m(C)$ جایی که $C \subset A$ و B و $B \cap C = \phi$. بنابراین برای $A_i \subset A$ ، $1 \le i \le n$ داریم : اگر $i \neq j$ و $A_i \cap A_j = \phi$ آن‌گاه

$$m\left[\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

در حقیقت، m تابعی است با حوزهٔ مقادیر در $R^+ \cup \{\circ\}$ و حوزهٔ مقادیر آن شامل ∞ نیز می‌باشد. توجه داشته باشید که اگر $B \subset C$ آن‌گاه زیرمجموعهٔ $C = B \cup (C \cap B^c)$ نیز است و بنابراین داریم :

1. Finitely additive

$$m(\phi) = 0, m(B) \leq m(C) = m(B) + m(C \cap B^c)$$

مثال ۱: فرض کنیدکه A یک مجموعه ناتهی باشد. برای $x \in A$ معینی تابع $\delta_x : p(A) \to R$ ، جایی که $p(A)$ گرادیه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های A است طوری تعریف می‌کنیم که :

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases} \quad , \quad B \in P(A)$$

این تابع مجموعه‌ای را **جرم نقطه واحد**[1] در x نامند. بدیهی است که δ_x جمعی خواهد بود.

مثال ۲: فرض کنید که $A = R$ و S گردایه‌ای از تمام بازه‌های نیم‌باز $(a , b]$ باشد، به طوری که $-\infty \leq a \leq b < \infty$. اگر $a = b$ ، آن‌گاه $b - a = \phi \in S$. توجه کنید که S تحت تقاطع تعداد متناهی از بازه‌ها، بسته است، اما تحت اتحاد تعداد متناهی از بازه‌ها، بسته نمی‌باشد. تابع m را به صورت $m(a, b] = b - a$ تعریف می‌کنیم و دامنه تعریف m را مجموعهٔ T در نظر می‌گیریم که از تمام مجموعه‌های R با مکمل آنها تشکیل شده باشد. بنابراین، مجموعه یک جبر را تعریف می‌کند. به سبب این که T_i ، هر عضو T را می‌توان به صورت اتحادی از بازه‌های مجزّا در S در نظر گرفت، لذا $T_1 = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ با $I_i \cap I_j = \phi$ برای $i \neq j$ بنابراین

$$m(T_1) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i)$$

مثال ۳: مثال ۲ را برای R^n توسعه می‌دهیم. فرض کنید $A = R^n$ و S گرادیه‌ای از تمام مجموعه‌ها به صورت

$$I = \{(x_1 ,..., x_n) \in R^n , a_j < x_j \leq b_j , \quad j = 1, ..., n\}$$

باشد جایی که $-\infty \leq a_j \leq b_j \leq \infty$ و $-\infty$ و T راگردایه‌ای از تمام مجموعه‌ها با مکمل در نظر می‌گیریم که از اتحادی از مجموعه‌های در S به وجود آمده است. بنابراین برای هر عضو T_1 در T تابع m را بر روی T_1 به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$m(I_i) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \qquad \text{بطوریکه} \qquad m(T_1) = \sum_{k} m(I_k)$$

---

1. Unit Point mass

توجه کنید که $m(I_i)$ حجم یک جعبه در R^n را نشان می‌دهد و در حقیقت این همان اندازهٔ یک مستطیل در R^n می‌باشد و T_1 از اتحاد این مستطیلها تشکیل شده است که $I_i \cap I_j = \phi$.

مثال ۴: مثال ۲ را در نظر بگیرید : فرض کنید که g یک تابع حقیقی غیرنزولی بر روی R باشد. مجموعهٔ تابعی m_g را به صورت

$$m_g(S_i) = \sum_{j=1}^{r} m_g(I_j), \quad m_g([a, b]) = g(b) - g(a)$$

تعریف می‌کنیم به شرط آن که $S_i \in S$ از تعداد متناهی I_j های مجزّا از یکدیگر تشکیل شده باشد. تابع m_g یک تابع خوش تعریف و مستقل از طرز تشکیل S_i ها برحسب I_jها است (اثبات این مطلب مانند حالت چندضلعی خاص است). به علاوه به سادگی می‌توان ثابت کرد که m_g جمعی است و $g(x) = m([\circ, x])$ برای $x > \circ$ و $g(x) = -m([x, \circ])$ برای $x \le \circ$ تعریف می‌شود. لذا m یک تابع نامنفی است.

۴.۲.۲. تعریف اندازه‌پذیر

اکنون مفهوم اندازه را برای یک مجموعه تعریف می‌کنیم.

فرض کنید که m یک تابع جمعی باشد که حوزهٔ تعریفش S یک رده از زیرمجموعه‌های یک مجموعه A است و برد آن اعداد حقیقی نامنفی و شامل ∞ می‌باشد. m را جمعی شمارا نامند اگر :

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

و هرگاه دنبالهٔ $\{A_i\}$ از زیرمجموعه‌های دو به دو مجزّا در S تشکیل شده باشد.

اندازهٔ مجموعهٔ A، یک تابع جمعی نامنفی جمعی شمارا m است که دارای حوزهٔ تعریف زیر می‌باشد :

D یک گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های A که دارای خواصّ زیر است :

الف ـ $\phi \in D$ ؛

ب ـ اگر $A_i \in D$ آن‌گاه $A_i^c \in D$ ؛

ج ـ اگر $A_k \in D$ ، $k = 1, 2, \ldots$ ، آن‌گاه $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in D$.

این چنین گردایه‌ای را $\sigma-$ جبر نامند. به عبارت دیگر $\sigma-$ جبر یک جبری است که تحت

اتحاد شمارا بسته است. گردایه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، تشکیل σ− جبر را خواهد داد و همچنین، ϕ با یک مجموعه مانند A تشکیل σ− جبر خواهد داد. اگر A یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه σ− جبر حاصل از زیرمجموعه‌های بسته از A یک جبر را به وجود می‌آورد که به جبر بورل[1] معروف می‌باشد. در مثالهای ۱ و ۲ و ۳، تابع m اندازه را تعریف می‌کند. اگر مجموعهٔ A یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه اندازهٔ A با حوزهٔ جبر بورل را اندازهٔ بورل نامند. در حقیقت، $m(A)$، اندازهٔ A، دارای حوزهٔ تعریف جبر بورل می‌باشد.

قضیهٔ ۱: فرض کنید m یک تابع جمعی متناهیاً[2] جمعی تعریف شده بر روی جبر C باشد. آن‌گاه m جمعی شمارا است اگر و تنها اگر دارای خاصیت زیر باشد: اگر $A_n \in C$ و $A_n \subset A_{n+1}$ به ازای هر n مثبت و صحیح و اگر $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in C$ آن‌گاه:

$$m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

اثبات: فرض کنید که m، جمعی شمارا باشد. اگر قرار دهیم: $B_1 = A_1$ و $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ به ازای هر $n > 1$، مشاهده خواهد شد که: $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ و مجموعه B_k ها دو به دو مجزّا می‌باشند. بنابراین:

$$m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k\right] = m\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

اکنون فرض می‌کنیم که m متناهیاً جمعی است. اگر $\{A_n\}$ یک دنباله از مجموعه‌های دو به دو مجزّا در S باشد، قرار می‌دهیم: $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ آن‌گاه $B_n \subset B_{n+1}$، به ازای هر n، بنابراین، $m(B_n) \to m(B)$ جایی که $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. امّا m متناهیاً جمعی است و $m(B_n) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$، پس $m(B_n) \to \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ و در نتیجه m جمعی شمارا است.

مثال ۵: فرض کنید که A یک زیرمجموعهٔ فشرده دلخواه در R^n باشد، آن‌گاه اندازهٔ A برابر است با $m(A) = \inf\{m(A_i) : A \subset A_i ,$ مجموعه باز در R^n است. $A_i\}$

1. Borel alge

2. Finitely additive

۴.۱.۳. اندازهٔ بیرونی[1]

فرض کنید که A یک مجموعه باشد. اندازهٔ بیرونی بر روی A یک تابع حقیقی نامنفی شامل ∞ است که با m^* نمایش داده می‌شود و حوزهٔ تعریف این تابع از تمام زیرمجموعه‌های A تشکیل شده است. به علاوه تابع m^* دارای سه خاصیت زیر است:

الف - $m^*(\phi) = 0$؛

ب - اگر $B \subset C$، آن‌گاه $m^*(B) \le m^*(C)$؛

ج - برای هر دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های A داریم:

$$m^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

خاصیت ب معمولاً یکنوایی[2] و خاصیت ج زیرجمعی شمارا نامیده می‌شوند. قضیهٔ زیر، روش کلّی برای ساختن اندازهٔ بیرونی را ارائه خواهد داد.

قضیهٔ ۲: فرض کنید که T یک گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های A باشد که دارای خاصیت زیرجمعی شمارا با حوزهٔ تعریف A است. به علاوه فرض کنید که m یک تابع حقیقی نامنفی با حوزهٔ تعریف T باشد. اگر m^* با $m^*(\phi) = 0$ و به ازای هر $B \subset A$ و $B \ne \phi$ بصورت زیر تعرف شود

$$m^*(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) : C_n \in T, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supset B\right\} \tag{*}$$

آن‌گاه m^* یک اندازهٔ بیرونی است.

اثبات: فرضیّات قضیه، تضمین کنندهٔ این است که مجموعهٔ سمت راست بالا خالی نیست. خواصّ الف و ب، از تعریف واضح است؛ لذا تنها به اثبات خاصیت ج می‌پردازیم، یعنی خاصیت زیرجمعی شمارا باید ثابت شود. برای اثبات، فرض می‌کنیم که A_n زیرمجموعهٔ A به ازای هر n مثبت و صحیح باشد. فرض کنید که $\varepsilon > 0$. برای هر n، عضو T را ممکن است به صورت زیر انتخاب نماییم:

$$C_{n,k} \in T, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n,k},$$

1. Quter measare	2. Monotonicity

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{n,k}) \le m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

اکنون با توجه به فرض (*) نتیجه می‌شود که :

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \left[\sum_{n,k} m(C_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(C_{n,k})\right]$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n} \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

بنابراین :

$$m^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

که چون $\varepsilon > 0$ ، خاصیت ج اثبات شده است.

مثال ۶: یکی از مهمترین مثالها ساختن اندازهٔ بیرونی لبک بر روی R^n است. فرض کنید که S یک رده از تمام بازه‌های باز $\{x\in R^n : a_i < x_i < b_i\}$ باشد، آن‌گاه می‌دانیم که این رده از بازه‌های همان مستطیل I^n در R^n خواهد بود که اندازهٔ آن برابر است با

$$m(I^n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که این اندازه با اندازهٔ بیرونی I^n برابر است؛ بدیهی است که : $m^*(I^n) \le m(I^n)$ اکنون فرض کنید که $\alpha > 0$ و $m(I^n) > \alpha$. بنابراین می‌توان یک مستطیل کراندار و بسته $J^n \subset I^n$ به دست آورد که $m(J^n) > \alpha$. دنباله $\{C_n\}$ از مستطیلهای باز در نظر می‌گیریم که اتحاد آنها شامل I^n باشد. همچنین با توجه به قضیهٔ هانیه، بورل وجود دارد n ای به طوری که $J^n \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ آن‌گاه

$$m(J^n) \le \sum_{i=1}^{n} m(C_i)$$

و در نتیجه :

$$m(J) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i)$$

بنابراین،

$$\alpha < m(J^n) \leq m^*(I^n)$$

چون α اختیاری است، بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $m^*(I^n) \leq m^*(I^n)$ و یا $m^*(I^n) = m(I^n)$.

مثال ۷: (مهم) یک مجموعهٔ S را **مجموعه بورل** نامند اگر اتحادی شمارا از تقاطع مجموعه‌های باز و تقاطع شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. مجموعهٔ کراندار بورل (مجموعهٔ - B) را **مجموعهٔ اندازه‌پذیر بورل** نامند. هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر بورل یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر **لبگ** است.

قبل از اثبات یادآوری می‌کنیم که به طور خلاصه یک مجموعهٔ A را **اندازه‌پذیر لبگ** نامند، اگر اندازهٔ بیرونی و اندازهٔ درونی مجموعهٔ A با هم برابر باشند.

تعریف اندازهٔ درونی مجموعهٔ A

این اندازه را با $m_*(A)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$m_*(A) = \sup\{m(F)$: یک مجموعهٔ فشرده است $F \subset A\}$

متشابهاً تعریف $m^*(A)$ به طور خلاصه به صورت زیر است:

$m^*(A) = \inf\{m(G)$: یک مجموعه باز است $G \subset A\}$

حال اگر $m^*(A) = m_*(A)$، آنگاه A را اندازه‌پذیر لبگ نامند.

اکنون به اثبات مثال ۷ می‌پردازیم: برای اثبات مثال ۷ باید ثابت کنید که تعریف اندازهٔ درونی و بیرونی هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر بورل با هم برابرند. برای اثبات این مطلب از خواصّ اندازهٔ درونی و بیرونی برای مجموعه‌های $A \subset B$ و تقاطع آنها استفاده می‌شود. برای مثال اگر $A \subset B$ پس $m_*(A) \leq m_*(B)$. به دلیل این که محاسبات طولانی است در این جا از ذکر آن خودداری می‌کنیم. (خواننده و دانشجویان محترم را به کتاب Pandey صفحه ۱۸ ارجاع می‌دهم).

۴.۱.۴. ساختن اندازه

در این بخش با استفاده از اندازهٔ درونی تعریف شده در بخش ۴.۱.۳، اندازهٔ یک مجموعه را می‌سازیم:

تعریف

فرض کنید که A یک مجموعه و m^* اندازهٔ بیرونی مجموعهٔ A باشد. زیرمجموعهٔ E از A را m^* – اندازه‌پذیر نامند، اگر به ازای هر زیرمجموعه $X \subset A$ داشته باشیم:

$$m^*(A) = m^*(X \cap E) + m^*(X \cap E^c)$$

به عبارت دیگر یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر بیرونی یا m^*- اندازه‌پذیر به دو قطعه تقسیم می‌شود که بر روی هر کدام m^* جمعی است. و همواره رابطهٔ زیر برقرار است :

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

قضیهٔ ۳: اگر m^* اندازهٔ بیرونی مجموعهٔ X و M گردایه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های m^* - اندازه‌پذیر از X باشد، آن‌گاه M یک σ- جبر و تحدید m^* بر روی M یک اندازه برای X است.

اثبات : ابتدا نشان خواهیم داد که M یک جبر است. بدیهی است که $\phi \in M$ و اگر $E \in M$، آن‌گاه $E^c \in M$. فرض کنید که $E \in M$ و $F \in M$ آن‌گاه به ازای هر $A \subset X$ داریم :

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{۱}$$

و همچنین

$$m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap E^c \cap F^c)$$

اکنون این تساوی را در (۱) جایگزین می‌کنیم و خواهیم داشت :

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap E^c \cap F^c)$$

حال با توجه به خاصیت زیرجمعی m^* و قانون دومورگان رابطه زیر برقرار است :

$$m^*(A) \geq m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F)) + m^*(A \cap E^c \cap F^c)$$
$$\geq m^*(A \cap E \cup F) + m^*(A \cap (E \cup F)^c)$$

بنابراین ثابت شد که $E \cup F$ یک مجموعهٔ m^* - اندازه‌پذیر می‌باشد. در نتیجه M یک جبر است. در مرحلهٔ بعدی ثابت کنیم که برای هر $E_1, ..., E_n \in M$ با $E_i \cap E_j = \phi$ هرگاه $i \neq j$ و هر $A \subset X$، داریم :

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) \tag{۲}$$

برای اثبات (۲)، از فرض استقرا استفاده می‌کنیم. هرگاه $n = 1$، آن‌گاه بنا بر تعریف M

رابطهٔ (۲) برقرار است. حال فرض می‌کنیم که (۲) برای n برقرار باشد؛ آن را برای $n + ۱$ ثابت خواهیم کرد. فرض کنید که $F = \bigcup_{j=۱}^{n} E_j$ آن‌گاه F یک مجموعهٔ m^* ـ اندازه‌پذیر است زیرا M یک جبر می‌باشد. قرار می‌دهیم :

$$A' = A \cap \left(\bigcup_{k=۱}^{n+۱} E_k\right)$$

حال رابطهٔ (۱) را برای A' به کار می‌بریم و با توجه به این که F یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است، مشاهده خواهیم کرد که $A' \cap F^c = A \cap E_{n+۱}$ و در نتیجه رابطهٔ (۲) برای $n + ۱$ برقرار است. اگر $A = X$ در نظر بگیریم، آن‌گاه متناهیاً جمعی m^* بر روی M نتیجه می‌شود.

در مرحلهٔ آخر فرض می‌کنیم که $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های m^* ـ اندازه‌پذیر دو به دو و مجزّا باشد. قرار می‌دهیم : $F_n = \bigcup_{k=۱}^{n} E_k$ و $F = \bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n$. آن‌گاه به ازای هر $A \subset X$ داریم :

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F^c) \\ &\geq \sum_{k=۱}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap F^c) \qquad \text{(توسط رابطهٔ ۲)} \end{aligned}$$

اگر $F \in M$ ، آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{k=۱}^{\infty} (A \cap E_k) + m^*(A \cap F^c) \\ &\geq m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c) \end{aligned}$$

بنابراین جبر M که تحت اتحاد مجزّا شمارا بسته است، باید تحت تعداد اختیاری اتحاد شمارا نیز بسته باشد. در نتیجه ثابت شد که M یک σ ـ جبر است که اثبات قضیه را به پایان می‌رساند.

۴.۱.۵. تعریف مجموعه اندازه‌پذیر لبگ

فرض کنید که m^* اندازهٔ بیرونی لبگ بر روی R^n باشد. یک مجموعه m^* ـ اندازه‌پذیر را اندازه‌پذیر لبگ نامند. σـ جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ با M نمایش داده می‌شود. m^* بر روی M را اندازه لبگ نامند و با m نمایش می‌دهند.

مجموعه‌های اندازه‌پذیر در R^n گرچه که در بالا تا حدودی یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر تعریف شده است، اما در این بخش از زیرمجموعه‌های R^n بحث خواهد شد که حالت خاص

می‌باشد.

تعریف

فرض کنید که $A \subset R^n$ و مجموعهٔ $\bar{L}$ از مجموعه‌هایی تشکیل شده که دارای اندازهٔ بیرونی و درونی مساوی می‌باشند. مجموعهٔ A را اندازه‌پذیر یا اندازه‌پذیر لبگ نامند.

اگر به ازای هر $X \in \bar{L}$ داشته باشیم: $A \cap X \in \bar{L}$. در این حالت اندازهٔ A برابر است با

$m(A) = \sup\{m(A \cap X): X \in \bar{L}\}$

یک رده از زیرمجموعه‌های مانند $A \subset R^n$ را که اندازه‌پذیر باشند با L نمایش می‌دهند. بنابراین

$$A \in L \iff A \cap X \in \bar{L} \quad , \quad \forall X \in \bar{L}$$

قضیهٔ ۴: فرض کنید $A \subset R^n$ و $m^*(A) < \infty$ آن‌گاه، $A \in \bar{L}$ اگر و تنها اگر $A \in L$ برای اثبات به کتاب Jones مراجعه کنید.

۴.۱.۶. برخی از خواص اندازهٔ لبگ بر روی R^n

الف ـ $A \in L \Rightarrow A^c \in L$؛

ب ـ اتحاد شمارا و تقاطع شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر خود، اندازه‌پذیر هستند؛

ج ـ اگر مجموعه‌های A_1 و A_2 و ... اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

حال اگر $A_j \cap A_i = \phi$ برای $i \neq j$، آن‌گاه

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

اگر $A_k \in L$ و $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$، آنگاه $A \cap X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap X$ جایی که $X \in \bar{L}$.

برای بقیهٔ خواص می‌توانید به کتابهای تألیف شده دربارهٔ اندازه مراجعه کنید برای مثال Jones و Pandey.

مثال ۸: فرض کنید که $A \subset [a, b]$ و $A^c = [a, b] - A$ آن‌گاه

$$m_*(A) = b - a - m^*A^c$$

در نتیجه :

$$= m^*[a, b] - m^*(A^c) \geq 0$$

و یا :

$$m^*(A^c) \leq m^*[a, b],$$

یا :

$$m_*(A) \geq 0$$

مثال ۹ : فرض کنید که $A \subset [a, b]$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ باشد، پس $m_*(A) = m^*(A)$. اکنون ثابت می‌کنیم که A^c نیز اندازه‌پذیر است : چون A اندازه‌پذیر است، لذا داریم :

$$m^*(A) = m_*(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad b - a - m^*(A^c) = m^*(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad b - a - m^*(A^c) = m^*(A^{cc})$$

$$\Leftrightarrow \quad m_*(A^c) = m^*(A^c)$$

$\Leftrightarrow$ A^c اندازه‌پذیر لبگ می‌باشد

مثال ۱۰ : اگر اندازهٔ بیرونی یک مجموعه ۰ باشد، آن‌گاه A اندازه‌پذیر لبگ است.

اثبات : با توجه به تعریف اندازهٔ بیرونی و درونی داریم (به مثال ۷ مراجعه کنید) :

$$m_*(A) \leq m^*(A)$$

به سبب این‌که $m^*(A) = 0$ (بنا بر فرض)، آن‌گاه $m_*(A) \leq 0$ و چون اندازه نامنفی است بنابراین $m_*(A) = 0$ و در نتیجه $m_*(A) = m^*(A)$ و A اندازه‌پذیر می‌باشد.

مثال ۱۱ : فرض کنید که $A \subset B$ و A و B مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشند. آن‌گاه $-A + B$ نیز اندازه‌پذیر است و

$$m(-A + B) = -m(A) + m(B),$$

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$$

اثبات : چون A و B اندازه‌پذیر هستند، پس B^c نیز اندازه‌پذیر است، لذا داریم :

$A \cap B^c$ اندازه‌پذیر است

$\Rightarrow \quad -A + B$ اندازه‌پذیر است

از طرف دیگر داریم : $B = (B - A) \cup A \qquad B = (B - A) \cup A$

$$\Rightarrow \quad m^*(B) = m^*(-A + B) + m^*(A)$$

همچنین می‌توان A را به صورت زیر نوشت :

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad m(A) = m(A - B) + m(A \cap B) \qquad (۱)$$

به علاوه داریم :

$$A \cup B = (A - B) \cup B,$$

$$m(A \cup B) = m(A - B) + m(B),$$

$$m(A - B) = m(A \cup B) - m(B).$$

اکنون این تساوی را در (۱) جایگزین می‌کنیم :

$$m(A) = m(A \cup B) - m(B) + m(A \cap B)$$

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$$

۴.۱.۷. مجموعهٔ اندازه‌پذیر

در این بخش این سؤال را مورد بررسی قرار می‌دهیم که آیا هر زیرمجموعه از R^n اندازه‌پذیر است؟ جواب این سؤال منفی است و ذیلاً دربارهٔ آن توضیح داده خواهد شد.

قضیهٔ ۵: یک مجموعهٔ $E \subset R^n$ وجود دارد که اندازه‌پذیر نیست.

اثبات : مجموعهٔ Q^n از نقاط $x \in R^n$ را در نظر می‌گیریم به طوری که مختصات x اعداد گویا باشند. به ازای هر $x \in R^n$ تبدیل $x + Q^n$ را در نظر بگیرید. البته که $y \in x + Q^n$ اگر و تنها اگر $y - x \in Q^n$. فرض کنید که $x' \in R^n$ و x، آن‌گاه تساوی $x + Q^n = x' + Q^n$ برقرار است و یا این که $(x + Q^n) \cap (x' + Q^n) = \phi$. بنابراین هر نقطهٔ R^n متعلّق به یکی از مجموعه‌های $x + Q^n$ است (دقت کنید که انتخاب x یکتا نیست). این مطلب بدین معناست که R^n توسط مجموعه‌های $x + Q^n$ پوشش دارد. در نتیجه یک مجموعهٔ $E \subset R^n$ وجود دارد به طوری که هر عضو R^n به یکی و تنها یکی از مجموعه‌های $x + Q^n$ متعلّق است. برای $x \in E$ داریم :

$$R^n = \bigcup_{x \in E} (x + Q^n) \qquad \text{(اتحّاد مجزّا)}$$

از طرف دیگر می‌توان چنین بیان کرد که برای هر $x \in R^n$ یک $y \in E$ یکتا و $z \in Q^n$ یکتا وجود دارند به طوری که $x = y + z$. بنابراین اگر $Q^n = \{r_1, r_2, \dots\}$، آن‌گاه :

$$R^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + E) \qquad \text{(اتحّاد مجزّا)}$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که $m^*(E) > 0$؛ در غیر این صورت اگر $m^*(E) = 0$ که $m(E) = 0$ را می‌دهد، در نتیجه $m(R^n) = 0$ خواهد شد.

از طرف دیگر $m_*(E) = 0$ زیرا فرض کنید که K یک مجموعهٔ فشردهٔ (بسته) اختیاری باشد که $K \subset E$. قرار می‌دهیم $D = B(0, 1) \cap Q^n$. بنابراین D یک مجموعهٔ کراندار شمارای نامتناهی است. بنابر انتخاب E، آن‌گاه $\bigcup_{r \in D} (r + k)$ یک اتحّاد مجزّا و شمارای نامتناهی می‌باشد. چون این اتحاد در $D + K$ قرار دارد و هر دو D و K کراندار هستند، پس این اتحاد دارای اندازهٔ متناهی است. با استفاده از جمعی شمارای m خواهیم داشت :

$$\infty > m\left[\bigcup_{r \in D} (r + k)\right]$$

$$= \sum_{r \in D} m(r + k)$$

$$= \sum_{r \in D} m(k)$$

این سری آخر، یک سری نامتناهی است و $m(K) = 0$ چون K اختیاری انتخاب شده، پس $m_*(E) = 0$ بنابراین، $m_*(E) = 0$ در نتیجه : $E \notin L$.

این قضیه، نشانگر آن است که مجموعه‌های دیگری که اندازه‌ناپذیر هستند وجود دارند.

زیرقضیهٔ ۵: اگر $A \subset R^n$ اندازه‌پذیر و $m(A) > 0$ باشد، آن‌گاه یک زیرمجموعهٔ $B \subset A$ وجود دارد به طوری که B اندازه‌پذیر نیست.

اثبات : با استفاده از نماد در اثبات قضیهٔ ۵ داریم :

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + E) \cap A$$

به سبب این که $m(A) > 0$ و m جمعی شمارا است، آنگاه نتیجه می‌شود که یکی از مجموعه‌های $A \cap (r_k + E)$ دارای اندازهٔ بیرونی ۰ نمی‌باشد. بنابراین داریم: $B = (r_k + E) \cap A$ با $m^*(B) > 0$. از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ ۵ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
m_*(B) &= m_*((r_k + B) \cap A) \\
&\le m_*(r_k + E) \\
&= m_*(E) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

بنابراین: $B \notin L$.

۴.۲. انتگرال لبگ در R^n

در این بخش نظریهٔ کلی انتگرال لبگ در R^n بر روی یک مجموعهٔ اختیاری اندازه‌پذیر توضیح داده می‌شود. ضمناً سعی شده با ارائه مثالهای متعدد به درک بهتر مطلب کمک شود. قبل از نظریهٔ کلی انتگرال لبگ حالتهای خاصّ تعریف انتگرال لبگ و توابع اندازه‌پذیر را شرح می‌دهم.

۴.۲.۱. توابع اندازه‌پذیر

فرض کنید X یک مجموعه و M یک σ- جبر از زیرمجموعه‌های X و m اندازه‌ای با حوزهٔ M باشد. $\overline{R}$ را توسعهٔ اعداد حقیقی R در نظر می‌گیریم، در حقیقت، $\overline{R} = [-\infty, \infty]$ و روابط زیر برای $\overline{R}$ در نظر گرفته می‌شود:

الف ـ $\pm\infty + t = \pm\infty$ به ازای هر $t \in R$؛

ب ـ $+\infty + (+\infty) = +\infty$ و $-\infty + (-\infty) = -\infty$؛

ج ـ به ازای هر $t > 0$، داریم: $t(\pm\infty) = \pm\infty$ و به ازای هر $t < 0$، $t(\pm\infty) = \mp\infty$؛

د ـ $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. اما $+\infty + (-\infty)$ تعریف نشده است.

این توسعهٔ اعداد حقیقی به ما کمک می‌کند برخی از انتگرالها را محاسبه کنیم که در حالت ریمانی محاسبه نخواهند شد، در مثالهایی که ارائه خواهد شد به این مطلب هم پرداخته می‌شود.

تعریف

فرض کنید $f : X \to \overline{R}$ را M ـ توابع اندازه‌پذیر یا توابع اندازه‌پذیر گوییم اگر:

الف ـ $f^{-1}(+\infty)\in M$ و $f^{-1}(-\infty)\in M$؛

ب ـ به ازای هر بازهٔ باز $U \subset R$ داریم: $f^{-1}(U)\in M$

قضیهٔ ۶: برای هر تابع $f : X \to \bar{R}$ روابط زیر معادل هستند.

الف ـ f تابع Mـ اندازه‌پذیر است؛

ب ـ به ازای هر t حقیقی $\{x : f(x) \geq t\}\in M$ و $\{x : f(x) < t\}$؛

ج ـ اگر B یک مجموعه بورل در R باشد و یا این که $B = \{+\infty\}$ و یا $B = \{-\infty\}$؛ آن‌گاه $f^{-1}\{B\}\in M$.

اثبات: بنابر تعریف تابع اندازه‌پذیر، آن‌گاه الف نتیجه می‌دهد ب را زیرا:

$$\{x : f(x) > t\} = f^{-1}\{+\infty\} \cup f^{-1}(t, +\infty)$$

همچنین اگر $\{x : f(x) > t\} \in M$، آن‌گاه‌نتیجه‌می‌شود که $\{x : f(x) \leq t\}\in M$ زیرا داریم:

$$\{x : f(x) > t\}^c = \{x : f(x) \leq t\}$$

و چون $\{x : f(x) > t\}\in M$، پس مکمّل آن نیز متعلّق به M است. حال ثابت می‌کنیم که ب قسمت ج را نتیجه خواهد داد. برای اثبات فرض می‌کنیم که $\{x : f(x) \geq t\}\in M$ به سبب این که

$$f^{-1}\{-\infty\}, f^{-1}\{+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq n\}$$

برابر است با مکمل $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq -n\}$، آن‌گاه مشاهده می‌شود که $f^{-1}\{-\infty\}$ و $f^{-1}\{+\infty\}$ به M متعلق می‌باشند. اکنون F یک خانواده از زیرمجموعه‌های مانند G از R را در نظر می‌گیریم که $f^{-1}(G)\in M$. بدیهی است که F یک σـ جبر است. چون ب برقرار است آن‌گاه F شامل هر بازهٔ $[t, +\infty)$ در R است؛ در نتیجه F شامل هر مجموعه بورل است که رابطهٔ ج را برقرار می‌کند.

قضیهٔ ۷: اگر f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $|f|$ و f^{2} نیز اندازه‌پذیر خواهند بود. اگر f و g اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه $f + g$ و $f.g$ نیز اندازه‌پذیر هستند. اگر f_n برای $n = 1, 2, \ldots$ اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $\sup f_n$ و $\inf f_n$ و $\limsup f_b$ و $\liminf f_n$ نیز اندازه‌پذیر خواهند بود.

اثبات : با استفاده از قضیهٔ ٦ و تساویهای زیر، قضیه اثبات می‌شود :

۱) $\{x : |f(x)| < t\} = \{x : f(x)\in(-t, t)\};$

۲) $\{x : f^{2}(x) < t\} = \{x : f(x)\in(-\sqrt{t}, \sqrt{t}),\ \forall t \geq 0\};$

۳) $\{x : (f + g)(x) < t\} = \bigcup_{q\in Q} \{x: f(x) < t - q,\ g(x) < q\};$

۴) $fg = \frac{1}{4}(f + g)^{2} - (f - g)^{2};$

۵) $\{x : \sup_n f_n(x) > t\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) > t\};$

٦) $\{x : \inf_n f_n(x) < t\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) < t\};$

۷) $\limsup f_n = \inf_n \sup_{m\geq n} f_m,\ \liminf f_n = \sup_n \inf_{m\geq n} f_m$

همچنین دقت کنید که اگر f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه f^+ و f^- نیز اندازه‌پذیر هستند. برای مثال $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$. حال چون f و $|f|$ اندازه‌پذیر هستند، پس f^+ اندازه‌پذیر است. متشابهاً برای f^- اثبات می‌شود. (توضیح : اگر $f : A \to [-\infty, \infty]$ مفروض باشد، آن‌گاه f^+ و f^- برابرند با

$f^- = \max(-f(x), 0),\ f^+ = \max(f(x), 0)$)

بنابراین، می‌توان ثابت کرد که: $f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-$.

مثال ۱۲ : فرض کنید که تابع ثابت $f(x) = c$ بر روی یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر تعریف شده باشد، آن‌گاه f اندازه‌پذیر است.

حل :

باید ثابت شود که مجموعهٔ $\{x\in E : f(x) > t\}$ به ازای هر t اندازه‌پذیر است. برای اثبات سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم :

الف ـ $t = c$ در این حالت مجموعهٔ $\{x\in E : f(x) > c\} = \phi$ که اندازه‌پذیر است.

ب ـ $t > c$ در این حالت مجموعهٔ $\{x\in E : f(x) > t\} = \phi$ که اندازه‌پذیر است.

ج ـ $t < c$ در این حالت مجموعهٔ $\{x\in E : f(x) > t\}$ که بنا بر فرض E اندازه‌پذیر است.

مثال ۱۳ : فرض کنید که f بر روی یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر E یک تابع اندازه‌پذیر باشد. اگر $A\subset E$ جایی که A مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه f بر روی A اندازه‌پذیر است.

حل :

دقت کنید که برای هر $t\in R$ داریم :

$\{x\in A : f(x) > t\} = \{x\in E : f(x) > t\} \cap A$

چون دو مجموعهٔ E و A اندازه‌پذیر هستند و همچنین مجموعهٔ $\{x\in E : f(x) > t\}$ اندازه‌پذیر است، پس تقاطع این دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر نیز اندازه‌پذیر می‌باشد.

۴.۲.۲. تعاریف تابع مشخصه - تابع ساده

یک تابع را بر روی یک زیرمجموعهٔ $A \subset X$ **تابع مشخّصه**[1] نامند اگر به صورت زیر تعریف شود :

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad x\in A \\ 0 & \text{اگر} \quad x\notin A \end{cases}$$

تابع حقیقی f را بر روی یک مجموعهٔ A یک **تابع ساده**[2] نامند اگر مجموعهٔ مقادیر تابع، متناهی باشد. به سادگی مشاهده می‌شود که هر تابع ساده را می‌توان برحسب تابع مشخصه نوشت اگر فرض شود a_1 ,..., a_n مقادیر مجزّا از یکدیگر تابع ساده $f(x)$ باشند. آن‌گاه قرار می‌دهیم : $A_i = \{x : f(x) = a_i\}$، بنابراین داریم :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

این چنین بیانی برای تابع ساده را نمایش متعارف تابع می‌نامند. بدیهی است که f اندازه‌پذیر است، اگر و تنها اگر به ازای هر i ، A_i اندازه‌پذیر باشند.

قضیهٔ ۸ : اگر تابع f یک تابع نامنفی اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه وجود دارد یک دنباله $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر سادهٔ نامنفی به‌طوری‌که به‌ازای تمام $n\in N$ و تمام $x\in A$ ، $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ و همچنین به ازای تمام $x\in A$ ، $\lim f_n(x) = f(x)$.

اثبات : فرض کنید که

1. Characteresitic function 2. Simple function

$$B_n = \{x : f(x) > n\}, \quad A_{n,k} = \{x : (k-1)2^{-n} < f(x) \le k2^{-n}\}$$

آن‌گاه دنباله $\{f_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n\,\chi_{B_n}$$

که در شرایط حکم قضیه صدق می‌کند.

زیرقضیهٔ ۸: اگر f یک تابع اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه دنباله‌ای از توابع سادهٔ اندازه‌پذیر وجود دارد که همگرای نقطه‌ای به f است. اگر f کراندار باشد، آن‌گاه وجود دارد دنباله‌ای از توابع ساده که همگرایی یکنواخت است.

توضیح : فرض کنید که $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر تعریف شده بر روی یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد. همچنین فرض بر این است که f یک تابع اندازه‌پذیر تعریف شده بر روی E باشد. آن‌گاه دنبالهٔ $\{f_n\}$ را **همگرا نقطه‌ای** به f نامند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $N(\varepsilon, x)$ به طوری که

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n \ge N \qquad x \in E$$

آن‌گاه $\{f_n\}$ به f میل می‌کند در هر نقطه $x \in E$.

دنبالهٔ $\{f_n\}$ را **همگرایی یکنواخت** به f گویند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $N(\varepsilon)$ (وابسته به ε است و مستقل از x است. در حالت اول N به ε و x بستگی داشت) به طوری که

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N \quad , \quad \forall x \in E$$

آن‌گاه دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر روی E به f به طور یکنواخت میل می‌کند.

واضح است که همگرایی یکنواخت، همگرایی نقطه‌ای را نتیجه می‌دهد.

اثبات زیرقضیهٔ ۸

قضیهٔ ۸ را برای توابع f^+ و f^- به کار می‌گیریم. توجه کنید اگر f که در قضیهٔ ۸ صدق می‌کند کراندار باشد، آن‌گاه ساختن توابع ساده f_n به نامساوی $f(x) - f_n(x) \le 2^{-n}$ برای تمام $n \ge \sup f$ منجر می‌شود، پس همگرایی یکنواخت خواهد بود.

قضیهٔ ۹ : هر تابع مشخّصه تعریف شده بر روی یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر، یک تابع اندازه‌پذیر است.

اثبات : فرض کنید که E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر و χ_A یک تابع مشخّصه بر روی یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E مانند A باشد. آن‌گاه مجموعهٔ زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$\{x \in E : \chi_A(x) > a\} = E_1$$

آن‌گاه یا $E_1 = \phi$ که اندازه‌پذیر است، یا $E_1 = A$ که اندازه‌پذیر است، و یا $E_1 = E$ که اندازه‌پذیر می‌باشد.

۴.۳. انتگرال لبگ توابع خاص

در این بخش انتگرال لبگ برای توابع سادهٔ نامنفی و تابع مشخّصه توضیح داده می‌شود. در حقیقت، با توابع سادهٔ نامنفی شروع می‌کنیم و مطلب را تا توابع اندازه‌پذیر توسعه داده، قضایا و خواصّ مربوط به این انتگرال توابع خاص بیان خواهد شد.

۴.۳.۱. تعریف انتگرال لبگ توابع ساده

فرض کنید که f یک تابع نامنفی سادهٔ اندازه‌پذیر باشد. تابع f رامی توان به صورت نمایش متعارف $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ نوشت. انتگرال لبگ این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\int f\,dm = \sum_{i=1}^{n} c_i\, m(A_i) \tag{۱}$$

اگر $A \in M$ (یادآوری : M مجموعه‌ای است از زیرمجموعه‌های X که تشکیل σ - جبر را می‌دهند و $A \subset X$)، آن‌گاه انتگرال لبگ f را بر روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\int_A f\,dm = \int \chi_A f\,dm \tag{۲}$$

دقت کنید که در این تعریف از توسعهٔ دستگاه حقیقی استفاده می‌شود، مثلاً $0(\pm\infty) = 0$

قضیهٔ ۱۰ : انتگرال تعریف شده (۱) و (۲) دارای خواصّ زیر است :

۱) $\int f\,dm$ خوش تعریف است

۲) $0 \le \int f\,dm \le \infty$

۳) اگر $0 \le c < \infty$ یک عدد ثابت باشد، آن‌گاه

$$\int cf dm = c\int f dm$$

۴) اگر f و g توابعی نامنفی و ساده و اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه

$$\int (f+g)\,dm = \int f d_m + \int g d_m$$

۵) اگر $f \le g$ آن‌گاه $\int f\,dm \le \int g\,dm$.

۶) تابع $g : A \to \int_A f\,dm$ بر روی M اندازه‌پذیر است.

اثبات: توسط تعریف (۱) مشاهده می‌شود $0 \le \int f\,dm \le \infty$ و $\int fdm = 0$ اگر و تنها اگر $m(A_i) = 0$ به ازای هر i با $c_i \neq 0$، یعنی این‌که اگر و تنها اگر $f = 0$ در حالی که $\int fdm < \infty$ اگر و تنها اگر $m(A_i) < \infty$ به ازای هر i به طوری که $c_i \neq 0$.

فرض کنید که

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_i \chi_{B_i} \quad , \quad f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$$

نمایشهای متعارف توابع f و g باشند. در این صورت

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} B_j = X = \overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$$

به طوری که A_i، $1 \le i \le m$ و B_j و $1 \le j \le n$ مجزّا از یکدیگرند. آن‌گاه بنابر تعریف (۱) داریم:

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{m} a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} m(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i m(A_i \cap B_j)$$

حال فرض می‌کنیم که $f \le g$. اگر $m(A_i \cap B_j) \neq 0$، آن‌گاه $A_i \cap B_j \neq \phi$ پس وجود دارد: $x \in A_i \cap B_j$، به طوری که

$$a_i = f(x) \le (g(x) = b_j)$$

و در نتیجه داریم:

$$a_i\, m(A_i \cap B_j) \leq b_j\, m(A_i \cap B_j) \qquad (*)$$

اگر $m(A_i \cap B_j) = 0$، آن‌گاه نامساوی (*) برقرار است. بنابراین برای تمام i و j نامساوی ۵ صحیح است.

اکنون رابطهٔ ۴ را اثبات می‌کنیم، رابطهٔ ۳ خیلی بدیهی است، فرض کنید که $\{c_1, \ldots, c_r\}$ مقادیر مجزّای تابع $f + g$ باشد. آن‌گاه بنابر تعریف، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}
\int (f+g) &= \sum_{k=1}^{r} c_k m(\{f+g=c_k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} C_k m\left[\bigcup_{a_i+b_j=c_k} A_i \cap B_j\right] \\
&= \sum_{k=1}^{r} C_k \sum_{c_k} m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i,j} (a_i+b_j)\, m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\, m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_j\, m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i\, m(A_i) + \sum_{j=1}^{n} b_j\, m(B_j) \\
&= \int f\,dm + \int g\,dm
\end{aligned}$$

۴.۴. انتگرال لبگ تابع حقیقی

اکنون تعریف انتگرال لبگ را برای یک تابع حقیقی توسعه می‌دهیم.

تعریف

فرض کنید که f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، آن‌گاه انتگرال f به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\int f\,dm = \sup\left\{ \int g\,dm : \text{یک تابع ساده اندازه‌پذیر است } g \right\}$$

مانند قبل اگر $A \in M$، آن‌گاه $\int_A f dm = \int f\chi_A dm$ تعریف می‌شود. به وضوح پیداست که $\infty \geq \int fdm \geq 0$ و اگر $f \leq g$ آن‌گاه $\int fdm \leq \int gdm$.

قضیهٔ ۱۱: فرض کنید که $f \geq 0$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد. آن‌گاه

الف ـ $\int fdm = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$

ب ـ تابع مجموعه‌ای[1] ϕ بر روی M را توسط $\phi(A) = \int_A fdm$ تعریف می‌کنیم. آن‌گاه ϕ بر روی M اندازه‌پذیر است.

اثبات

الف ـ اگر هر جا $f = 0$ آن‌گاه بنابر تعریف ۴.۴.۱ باید $g = 0$ هرگاه $0 \leq g \leq f$، پس $\int fdm = 0$.
برعکس فرض بر این است: $\int fdm = 0$ قرار می‌دهیم: $E = \{x : f(x) \geq 0\}$. بنابراین، $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ جایی که $E_n = \{x : f(x) \geq 1/n\}$. فرض کنید که $g_n = (1/n)\chi_{E_n}$ آن‌گاه g_n یک تابع سادهٔ اندازه‌پذیر با $0 \leq g_n \leq f$ است. بنابراین: $\int g_n dm = \frac{1}{n} m(E_n) \leq (\int fdm = 0)$ در نتیجه: $m(E_n) = 0$ به ازای هر n و لذا $m(E) = 0$.

ب ـ فرض کنید L مجموعه‌ای از تمام توابع سادهٔ اندازه‌پذیر مانند g با $0 \leq g \leq f$ باشد. به ازای هر $g \in L$ تابع مجموعه‌ای $\phi_g(A) = \int_A g\, dm$ را تعریف می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ ۱۰ هر یک از توابع ϕ_g، اندازه‌پذیر است. قرار می‌دهیم $\phi = \sup\{\phi_g : g \in L\}$؛ مشاهده خواهد شد که اگر $g \leq h$ پس $\phi_g \leq \phi_h$ وهمچنین به‌ازای هر $g, h \in L$، داریم: $\max\{g, h\} \in L$. بنابراین $\{\phi_g : g \in L\}$ گردایه‌ای از توابع اندازه‌پذیر است، آن‌گاه ϕ بر روی M اندازه‌پذیر می‌باشد. [برای اثبات این مطلب به قضیهٔ ۹.۱۳ صفحهٔ ۲۰۷ کتاب Browder مراجعه کنید].

قضیهٔ ۱۲: فرض کنید که $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر با $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ به ازای هر n باشد، آن‌گاه:

$$\int \lim_{n \to \infty} f_n\, dm = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, dm$$

1. Set function

اثبات: بنابر قضیهٔ ۷ $f = \sup f_n$ اندازه‌پذیر است، پس، $\int fdm$ تعریف شده است. به سبب این که $f_n < f_{n+1}$ لذا $\int f_n\, dm \le \int f_{n+1}\, dm$. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm$ در $\bar{R}$ (توسعهٔ دستگاه R) وجود دارد. اگر $\lim_{n\to\infty} f_n \to f$، پس با توجه به فرض قضیه $f_n \le f$ به ازای هر n و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dn \le \int f\, dm$ اکنون توجه می‌کنیم که g یک تابع سادهٔ اندازه‌پذیر با $\circ \le g \le f$ می‌باشد.

فرض کنید که $A_n = \{x \in X : f_n(x) \ge (۱ - \varepsilon)g(x)\}$ برای یک $\circ < \varepsilon < ۱$ معین، آن‌گاه $A_n \subset A_{n+۱}$ برای تمام n ها. نظر به این که دنبالهٔ $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ یکنواخت صعودی است و همچنین $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n = X$ و $\lim_{n\to\infty} f_n = \sup f_n \ge g$، آن‌گاه

$$\int f_n\, dm \ge \int_{A_n} f_n\, dm \ge (۱-\varepsilon)\int_{A_n} g\, dm$$

با توجه به این که تابع $E \to \int_E g\, dm$ (بنابر قضیهٔ ۱۰) اندازه‌پذیر است، پس بنابر قضیهٔ ۱ داریم: $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm \ge (۱ - \varepsilon) \int g\, dm$ به ازای هر $\varepsilon > \circ$؛ این نتیجه می‌دهد که: $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm \ge \int g\, dm$، چون g یک تابع نامنفی ساده با $g \le f$ اختیاری است. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \int f_n dm \ge fdm$، در نتیجه ثابت کردیم که $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm \ge \int f\, dm$ و $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm \le \int f\, dm$ لذا باید داشته باشیم:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm$$

قضیهٔ ۱۳: اگر $f \ge \circ$ و $g \ge \circ$ توابع اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه

$$\int (f+g)\, dm = \int f\, dm + \int g\, dm$$

اثبات: از قضیهٔ ۱۰ استفاده می‌کنیم و توجّه داریم اگر که f_n ساده به f و g_n ساده به g میل می‌کند. آن‌گاه $f_n + g_n$ ساده هستند و به $f + g$ میل خواهند کرد. به سبب این که

$$\int (f_n + g_n)\, dm = \int f_n\, dm + \int g\, dm$$

و با توجّه به قضیهٔ ۱۲ حکم قضیه ثابت شده است.

قضیه ۱۴ : (قضیهٔ Fatou). اگر $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع نامنفی اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\int \lim_{n \to \infty} \inf f_n \, dm \le \lim_{n \to \infty} \inf \int f_n \, dm$$

اثبات: فرض کنید که $g_n = \inf_{m \ge n} f_m$ ، آن‌گاه هر یک از g_n یک تابع نامنفی اندازه‌پذیر است. برای هر n ، پس: $g_n \le g_{n+1}$ و $\lim g_n = \lim \inf f_n$ و بنابر قضیهٔ ۱۲

$$\int \lim_{n \to \infty} \inf f_n \, dm = \int \lim_{n \to \infty} g_n \, dm = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, dm$$

ازطرف دیگربرای‌هر $m \ge n$ داریم $g_n \le f_m$ پس داریم: $g_n \le f_m$ و $\int g_n \, dm \le \int f_m \, dm$ و در نتیجه :

$$\int g_n \, dm \le \inf_{m \ge n} \int f_m \, dm$$

و

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n \, dm \le \lim_{n \to \infty} \inf \int f_n \, dm$$

۴.۴.۱. تعریف انتگرال لبگ تابع $f : R^n \to [-\infty, +\infty]$

فرض کنید که f یک تابع اندازه‌پذیر باشد، پس $f = f^+ - f^-$ انتگرال لبگ f به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\int f \, dm = \int f^+ \, dm - \int f^- \, dm \tag{1}$$

اگر حدّاقل یکی از انتگرالهای سمت راست متناهی باشد، f را **انتگرال‌پذیر** نامند و می‌نویسند : $f \in L(m)$ اگر $\int f^+ \, dm < \infty$ و $\int f^- \, dm < +\infty$ ، بنابراین، $\int f \, dm$ یک عدد حقیقی است (برای تعریف f^+ و f^- به قضیهٔ ۷ مراجعه کنید).

قضیهٔ ۱۵ : فرض کنید که f یک تابع اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $\int |f| \, dm < +\infty$. به علاوه اگر f انتگرال‌پذیر و g یک تابع اندازه‌پذیر با $|g| \le |f|$ باشد، آن‌گاه g نیز انتگرال‌پذیر است.

اثبات: نظر به این که $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ - f^-$ با استفاده از قضیهٔ ۱۳ داریم $f \in L(m)$ اگر و تنها اگر $|f| \in L(m)$. برای قسمت دوم دقت کنید که $g, f \in L(m)$ یک تابع اندازه‌پذیر است، پس $|g| \in L(m)$ و در نتیجه $g \in L(m)$.

قضیهٔ ۱۶ : توابع انتگرال‌پذیر لبگ تشکیل یک فضای برداری می‌دهند. همچنین انتگرال‌گیری یک عملگر خطی بر روی $L(m)$ می‌باشد، یعنی این‌که اگر $f, g \in L(m)$ و $c \in R$ آن‌گاه $cf \in L(m)$ و $f + g \in L(m)$ به علاوه داریم :

$$\int (f+g)\,dm = \int f\,dm + \int g\,dm$$

و

$$\int (cf)\,dm = c \int f\,dm$$

اثبات: به سادگی مشاهده می‌شود که بنابر خاصیت خطی بودن انتگرال و قضیهٔ ۱۳ و این حقیقت که $|f+g| \le |f| + |g|$ حکم قضیه اثبات خواهد شد (به عنوان تمرین). یکی از قضایای مهم که به قضیهٔ «همگرایی لبگ» معروف می‌باشد، قضیهٔ زیر است :

قضیه ۱۷ : فرض کنید که $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر باشد به طوری که $f_n \to f$ همچنان که $n \to \infty$ و به ازای هر n ، $|f_n| \le g$ جایی که g یک تابع انتگرال‌پذیر لبگ است. آن‌گاه f انتگرال‌پذیر و

$$\int f\,dm = \lim_{n \to \infty} \int f_n\,dm$$

اثبات: چون $|f| \le g$ و g انتگرال‌پذیر است و لذا بنابر قضیهٔ ۱۵ تابع f نیز انتگرال‌پذیر خواهد بود. بنابر فرض قضیه، $|f_n| \le g$ پس $g \pm f_n \ge 0$ به ازای هر n . اکنون قضیهٔ ۱۴ را اعمال می‌کنیم :

$$\int g\,dm + \int f\,dm \le \int (g+f)\,dm \le \liminf \int (g+f_n)\,dm$$

$$\le \int g\,dm + \liminf \int f_n\,dm$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که :

$$\int f\, dm \leq \liminf \int f_n\, dm \qquad (1)$$

متشابهاً می‌توانیم این نتیجه را برای $g - f_n$ بگیریم، یعنی این که :

$$\int (-f)\, dm \leq \left[\liminf \int (-f_n)\, dm\right.$$

$$= \liminf \left[-\int f_n\, dm\right]$$

$$\left[= -\limsup \int f_n\, dm\right]$$

با ضرب طرفین این نامساوی در ۱ـ خواهیم داشت :

$$\limsup \int f_n\, dm \leq \int f\, dm \qquad (2)$$

روابط (۱) و (۲) به نامساوی زیر منجر می‌شود :

$$\limsup \int f_n\, dm \leq \int f\, dm \leq \liminf \int f_n\, dm$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\int f_n\, dm$ وجود داشته و برابر است با $\int f\, dm$.

۴.۴.۲. بررسی تفاوت بین انتگرال ریمانی و لبگ

ریمان روشی برای اندازهٔ مساحت بین یک بازه $[a, b]$ بر روی R و منحنی $y = f(x)$ معرفی کرد که توسط تابع کراندار f که بر روی تمام $[a, b]$ تعریف شده بود، تعیین می‌شد. این نظریه به «انتگرال ریمانی» معروف و بسیار مفید است امّا کافی نیست. انتگرال ریمانی برای تابعی برقرار است که به ازای تمام نقاط بازه تعریف شده باشد. به علاوه یک تابع، وقتی دارای انتگرال ریمانی است که هر جا قطعه‌قطعه پیوسته و کراندار باشد.

هنری لبگ (۱۹۰۲) مفهوم کلی‌تری از انتگرال را که به اندازه‌پذیری بستگی دارد ارائه داد. این نوع انتگرال‌گیری، ردهٔ بزرگتری از توابع را شامل می‌شود که انتگرال ریمانی را می‌پوشاند (به مثال ۳ مراجعه کنید). همچنین در مفهوم انتگرال لبگ نیازی به این نیست که تابع برای تمام نقاط فاصله تعریف شود. در حالت انتگرال لبگ یک تابع باید اندازه‌پذیر باشد و بر روی یک زیرمجموعهٔ

اندازه‌پذیر از $[a,b]$ تعریف شود و به کراندار بودن نیازی نیست. در این رابطه، قضیهٔ زیر ارائه می‌شود :

قضیه ۱۸. ***الف*** - اگر f تابعی پیوسته بر روی $[a\ ,\ b]$ باشد، آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f\,dm$$

ب - یک تابع حقیقی کراندار بر روی $[a\ ,\ b]$ انتگرال ریمانی‌پذیری است اگر و تنها اگر در هر نقطه از فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد. در این حالت انتگرال لبگ و ریمانی با هم برابرند برای اثبات به کتاب Browder مراجعه کنید.

۴.۴.۳. مثالهای انتگرال لبگ

۱- تابع $f(x)$ به صورت زیر مفروض است :

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که این تابع بر روی $[0\ و\ 1]$ دارای انتگرال لبگ است.

حل :

فرض کنید که n یک عدد حقیقی باشد. تابع زیر را تعریف می‌کنیم :

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & \text{اگر} \quad 0 \le f(x) \le n \\ n & \text{اگر} \quad f(x) > n \end{cases}$$

دراین‌صورت $[f(x)]_n = x^{-1/3}$ ،اگر $\frac{1}{n^3} \le x \le 1$ و مساوی با n است، اگر $0 < x < n^{1/3}$ آن‌گاه :

$$\int_0^1 [f]_n = \int_0^{1/n^3} n\,dx + \int_{1/n^3}^1 x^{-1/3}\,dx$$

$$= n\,[x]_0^{1/n^3} + \left[\frac{x^{-1/3+1}}{1-1/3}\right]_{\frac{1}{n^3}}^1$$

بنابراین :

$$\int_0^1 [f]_n = n\left(\frac{1}{n^3} - 0\right) + \frac{3}{2}\left[x^{2/3}\right]_{1/n^3}^{1}$$

$$= \frac{۱}{n^۲} + \frac{۳}{۲}\left(۱-\frac{۱}{n^۲}\right) = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲n^۲}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\int_۰^۱ [f]_n = \frac{۳}{۲}$$

۲ـ نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ برای $۰ \leq x \leq ۱$ و $f(۰) = ۱۹$ دارای انتگرال لبگ بر روی بازهٔ [۱ و ۰] نمی‌باشد.

حل :

فرض کنید که n یک عدد حقیقی باشد؛ تابع زیر را تعریف می‌کنیم :

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x) & \text{اگر} \quad ۰ \leq f(x) \leq n \\ n & \text{اگر} \quad f(x) > n \end{cases}$$

بنابراین $[f(x)]_n = \frac{۱}{x}$ اگر $\frac{۱}{n} \leq x \leq ۱$ و $[f(x)]_n = n$ اگر $۰ < x < \frac{۱}{n}$ و $[f(۰)]_n = ۱۹$ اکنون انتگرال تابع را محاسبه می‌کنیم :

$$\int_۰^۱ [f]_n = \int_۰^{۱/n} n\,dx + \int_{۱/n}^۱ \frac{۱}{x}$$

$$= n\,[x]_۰^{۱/n} + [\mathrm{Ln}\,x]_{۱/n}^۱$$

$$= ۱ - \mathrm{Ln}\frac{۱}{n} = ۱ + \mathrm{Ln}\,n$$

چون $۱ + \mathrm{Ln}\,n$ دارای حد نیست هنگامی که $n \to \infty$، پس انتگرال بالا موجود نیست.

۳ـ (مهم) ثابت کنید که هر تابع انتگرال‌پذیر ریمانی بر روی $E = [a , b]$ انتگرال‌پذیر لبگ نیز است، امّا عکس آن صادق نیست.

اثبات: مجموعهٔ E را به تعداد متناهی زیر بازه‌های مجزّا تقسیم می‌کنیم و این گردایه‌ای را بـه $\bar{E}$ نمایش می‌دهیم. همچنین E را به تعداد متناهی زیرمجموعه‌های مجزّا و اندازه‌پذیر تقسیم می‌نماییم که گردایه‌ای آن را به E^* نمایش می‌دهیم. بنابراین، $\bar{E} \subseteq E^*$. اکنون انتگرال ریمانی تابع $f(x)$ را برروی $[a , b]$ محاسبه می‌کنیم [دقت کنید که R را برای انتگرال ریمانی و L را برای انتگرال لبگ

به کار خواهیم برد).

$$R\int_a^{\bar{b}} f = glb\{S(f,I_i):I_i \in \bar{E}\} \quad (\text{مساحت} = S)$$

$$\geq glb\{S(f,I_i) : I_i \in E^*\} = L\int_a^{\bar{b}} f \tag{۱}$$

از طرف دیگر داریم :

$$R\int_{\bar{a}}^{b} f = l.u.b\{S(f,I_i) : I_i \in E\}$$

$$\leq l.u.b\{S(f,I_i): I_i \in E^*\} = L\int_{\bar{a}}^{b} f \tag{۲}$$

چون تابع f دارای انتگرال ریمانی است، لذا تساوی زیر برقرار است :

$$R\int_{\bar{a}}^{b} f = R\int_a^{\bar{b}} f = R\int_a^b f$$

$$\Rightarrow R\int_a^b f = L\int_a^{\bar{b}} f = L\int_{\bar{a}}^{b} f = L\int_a^b f$$

این تساوی آخری با استفاده از روابط (۱) و (۲) نتیجه شده است.

برعکس : اکنون ثابت می‌کنیم که هر انتگرال لبگ برروی یک‌بازهٔ $[a\ ,\ b]$ ممکن‌است دارای انتگرال ریمانی بر روی همین بازه نباشد. برای اثبات این مطلب به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

تابع $f(x)$ را بر روی بازهٔ [۱ و ۰] به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x\in[۰\ ,\ ۱] \ \text{اعداد گویای بازه} \\ ۰ & \text{اگر} \quad x\in[۰,\ ۱] \ \text{اعداد اصم} \end{cases}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که تابع f دارای انتگرال لبگ است. قرار می‌دهیم :

$E_۱ = \{x\in[۰,\ ۱] :$ گویا است $x\}$ و

$E_۲ = \{x\in[۰\ ,\ ۱] :$ اصم است $x\}$

بنابراین $\{E_1 , E_2\}$ یک افراز واحد اندازه‌پذیر بازه [۱ و ۰] است. در این حالت برای یک $\varepsilon > 0$ اختیاری داریم :

$$S(f , I_i) = 1 + 0 = 1 ,$$
$$s(f , I_i) = 1 + 0 = 1 ,$$
$$\Rightarrow \quad S(f , I_i) - s(f , I_i) = 0 < \varepsilon$$

نظر به این که شرط لازم و کافی برای این که تابع f بر روی $[a , b]$ دارای انتگرال لبگ باشد این است که وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ به طوری که :

$$S(f , I_i) - s(f, I_i) < \varepsilon$$

(برای اثبات به کتاب Pandey صفحه ۱۱۵ مراجعه کنید) در نتیجه، تابع f دارای انتگرال لبگ است.و

$$L\int_0^1 f = 1$$

اکنون ثابت می‌کنیم که f دارای انتگرال ریمانی نمی‌باشد. در این حالت دقت می‌کنیم که برای هر افراز بازهٔ $[a , b]$ که اندازه‌پذیر باشد، خواهیم داشت: $M_i = 1$ و $m_i = 0$ برای

$$S(f , I_i) = 1 \quad , \quad s(f , I_i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2 ,..., n$$

لذا :

$$R\overline{\int_0^1} f = 1 \neq R\underline{\int_0^1} f = 0$$

در نتیجه، تابع f دارای انتگرال ریمانی در بازهٔ [۱ و ۰] نیست.

۴ـ ثابت کنید که تابع $\frac{\sin x}{x}$ بر روی $[0 , \infty)$ انتگرال‌پذیر نیست (انتگرال لبگ ندارد).

حل :

اگر ثابت کنیم $\int f = \infty$ آن‌گاه f انتگرال‌پذیر نیست. اکنون ثابت می‌کنیم که انتگرال این تابع برابر است با ∞ :

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

تغییر متغیّر $x = y + (i - 1)\pi$ را در نظر می‌گیریم :

$$x = y + (i - 1)\pi \quad \Rightarrow \quad dx = dy ,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin (y+(i-1)\pi)|}{y+(i-1)\pi} dy$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin y|}{i\pi} dy$$

این نامساوی بدین دلیل نوشته که $y - \pi \leq 0$ (زیرا حدود y بین ۰ و π است) در نتیجه $i\pi + (y - \pi) \leq i\pi$ و بنابراین :

$$\frac{1}{i\pi + (y-\pi)} \geq \frac{1}{i\pi}$$

لذا داریم :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin y|}{i\pi} dy$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\pi} \int_{0}^{\pi} |\sin y|\, dy$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\pi} \int_{0}^{\pi} \sin y\, dy$$ (زیرا سینوس در این بازه مثبت است)

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\pi} [-\cos y]_{0}^{1}$$

$$\geq \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i\pi} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right]$$

اکنون اگر $n \to \infty$، خواهیم داشت :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \geq \infty$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \infty$$

تبصره مهم: دقت کنید که تابع $\frac{\sin x}{x}$ در بازهٔ (∞ و ۰] دارای انتگرال است زیرا با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌شود (انتگرال سمت راست).

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = L\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{p=0} = \left(\int_{p}^{\infty}\frac{1}{p^{2}+1}\,dp\right)_{p=0}$$

$$= \left|\arctan p\right|_{p=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

مطلب مهم این است که در مثال ۳ ثابت کردیم که هر تابع که دارای انتگرال ریمانی باشد، پس دارای انتگرال لبگ است. در حالی که مثال ۴ نقض این ادّعاست. باید توجه کنید این انتگرال ناسره است و در مورد مثال ۳، بازهٔ $[a, b]$ یک بازهٔ بسته است و باید شامل ∞ نباشد (کراندار باشد).

۵ـ انتگرال زیر را برای $\alpha > 1$ محاسبه کنید و نشان دهید که:

$$I = \int_{0}^{1}\frac{x\sin x}{1+(nx)^{\alpha}}\,dx = 0(n^{-1})$$

حل:

واضح است که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx\sin x}{1+(nx)^{\alpha}} = 0$$

اکنون دنبالهٔ $f_n(x) = \dfrac{nx \sin x}{1 + (nx)^{\alpha}}$ را برای $n = 1, 2, \ldots$ در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود که

$$\left|\frac{nx\sin x}{1+(nx)^{\alpha}}\right| \le 1$$

و یا این که

$$\left|\frac{x\sin x}{1+(nx)^{\alpha}}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{nx\sin x}{1+(nx)^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n}$$

حال با استفاده از قضیهٔ ۱۷ داریم:

$$\int_{0}^{1} f_n\,dx \le \int_{0}^{1}\frac{1}{n}\,dx$$

$$\le \frac{1}{n} \quad , \quad \forall n$$

بنابراین انتگرال I از مرتبهٔ $\frac{1}{n}$ می‌باشد.

۶ـ نشان دهید که:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}x^{1/n}}=1$$

حل :

از قضیهٔ ۱۷ استفاده می‌کنیم و بنابر دوجمله‌ای خیام نیوتن داریم :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=1+x+\frac{n(n-1)}{n^{2}}\frac{x^{2}}{2}+\dots$$

از طرف دیگر داریم :

$$\lim_{n\to\infty}x^{1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}x^{1/n}\left(1+x+\frac{n(n-1)}{n^{2}}\frac{x^{2}}{2!}+\dots\right)$$

$$=x^{\circ}\left(1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\dots\right)$$

$$=e^{x},$$

و در نتیجه :

$$\lim_{n\to\infty}x^{-1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}=e^{-x},$$

قضیهٔ ۱۷ این اجازه را می‌دهد که تساوی زیر برقرار شود :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{\infty}x^{-1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx=\int_{\circ}^{\infty}e^{-x}\,dx=1$$

۷ـ نشان دهید که :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{\infty}\frac{n^{2}xe^{-n^{2}x^{2}}}{1+x^{2}}dx=\begin{cases}\circ & \text{اگر}\quad a>\circ\\ \neq\circ & \text{اگر}\quad a=\circ\end{cases}$$

حل :

اگر $a>\circ$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $u=nx$ و انتگرال به صورت زیر در خواهد آمد :

$$f_n(x)=\frac{n^{2}x\,e^{-n^{2}x^{2}}}{1+x^{2}}=\frac{nu\,e^{-u^{2}}}{1+u^{2}/n^{2}}\quad,\qquad du=n\,dx$$

$$\int_{a}^{\infty}f_n(x)\,dx=\int_{na}^{\infty}\frac{ue^{-u^{2}}}{1+u^{2}/n^{2}}du=\int_{\circ}^{\infty}\chi_{(na,\infty)}\frac{ue^{-u^{2}}}{1+u^{2}/n^{2}}\,du$$

از طرف دیگر :

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{(na,\infty)}\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}=0$$

اکنون قضیهٔ ۱۷ مطلب را برای $a > 0$ اثبات می‌کند زیرا انتگرال ۰ مساوی با ۰ است.

حالت $a = 0$

$$\int_0^\infty \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx > \int_0^1 \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx$$

$$>\frac{1}{2}\int_0^1 n^2e^{-n^2x^2}dx \quad , \quad x=1$$

$$\left| > -\frac{1}{4}e^{-n^2x^2}\right|_0^1$$

$$> \frac{1}{4}$$

۸ـ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x}\mathrm{Ln}\frac{1}{x} = 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$$

حل:

روش چنین است که بسط سری $\frac{1}{1-x}$ برای $0 < x < 1$ می‌نویسیم و از تساوی $f(x) = \Sigma f_n(x)$ و $\int f(x)dx = \Sigma \int f_n(x)dx$ استفاده می‌کنیم. اگر $f_n(x)$ها هم‌علامت باشند، آن‌گاه از قضیهٔ ۱۷ و در غیر این صورت از $\Sigma \int |f_n(x)|dx$ استفاده خواهد شد:

$$\frac{x^{1/3}}{1-x}\mathrm{Ln}\frac{1}{x} = x^{1/3}\mathrm{Ln}\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad , \quad 0<x<1$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x}\mathrm{Ln}\frac{1}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n.x^{1/3}\mathrm{Ln}\frac{1}{x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{n+\frac{1}{3}}\mathrm{Ln}\frac{1}{x}dx$$

اکنون برای حلّ انتگرال بالا از روش جزء به جزء استفاده خواهیم کرد و در نتیجه، تساوی مطلوب نتیجه می‌شود.

۹ - ثابت کنید که :

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\sin t}{e^t - x} dt = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{x^{n-\text{۱}}}{n^{\text{۲}} + \text{۱}} \ , \quad -\text{۱} \leq x \leq \text{۱}$$

حل :

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\sin t}{e^t - x} dt = \sum_{n=\cdot}^{\infty} x^n \int_{\cdot}^{\infty} e^{-(n+\text{۱})t} \sin t \, dt$$

$$= \sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{x^n}{\text{۱} + (n+\text{۱})^{\text{۲}}}$$

در حلّ این مثال از بسط $\frac{\text{۱}}{e^t - x}$ استفاده شده است، یعنی این که داریم :

$$\frac{\sin t}{e^t - x} = \sin t (e^{-t} + x e^{-\text{۲}t} + x^{\text{۲}} e^{-\text{۳}t} + \ldots)$$

$$= \sum_{n=\cdot}^{N} \sin t \, x^n e^{-(n+\text{۱})t}$$

از طرف دیگر داریم :

$$\left| \sum_{n=\cdot}^{N} \sin t x^n e^{-(n+\text{۱})t} \right| \leq t e^{-t} \frac{\text{۱} - x^{N+\text{۱}} e^{-(N+\text{۱})t}}{\text{۱} - x e^t}$$

$$\leq \frac{\text{۲}t}{e^t - x}$$

سپس قضیهٔ ۱۷ به کار گرفته شده است.

۱۰ - نشان دهید که :

$$\int_{\cdot}^{\text{۱}} \sin x \, \mathrm{Ln}\, x \, dx = \sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{(\text{۲}n+\text{۲})(\text{۲}n+\text{۲})!}$$

حل : داریم :

$$\sin x \, \mathrm{Ln} x = \sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^n x^{\text{۲}n+\text{۱}}}{(\text{۲}n+\text{۱})!} \mathrm{Ln} x$$

و

$$= \sum_{n=\cdot}^{\infty} f_n(x)$$

$$\int_{\cdot}^{\text{۱}} f_n(x) dx = \frac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{(\text{۲}n+\text{۲})(\text{۲}n+\text{۲})!}$$

برای حلّ این انتگرال روش جزء به جزء و دستگاه توسعه یافتهٔ R استفاده شده است (دقت کنید که $\circ \times \infty = \circ$ در نظر گرفته‌ایم).

۱۱ - ثابت کنید که تابع زیر دارای انتگرال لبگ نمی‌باشد.

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{۲}\sin\frac{۱}{x^{۲}}\right], \quad x\in[\circ, ۱]$$
$$= ۲x\sin\frac{۱}{x^{۲}} - \frac{۲}{x}\cos\frac{۱}{x^{۲}}$$

حل :

قرارمی‌دهیم: $f(x)=f_۱(x)-f_۲(x)$، جایی که $f_۱(x) = ۲x\sin\frac{۱}{x^{۲}}$ و $f_۲(x) = \frac{۲}{x}\cos\frac{۱}{x^{۲}}$ مشاهده می‌شود که تابع $f_۱(x)$ بر روی [۱ و ۰] کراندار پیوسته است و در نتیجه تابع $f_۱(x)$ دارای انتگرال لبگ است، زیرا این تابع دارای انتگرال ریمانی می‌باشد. کافی است ثابت کنیم تابع $f_۲(x)$ دارای انتگرال لبگ نیست. برای این منظور داریم :

$$\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{x}\left|\cos\frac{۱}{x^{۲}}\right|dx = \infty$$

زیرا : قرار می‌دهیم $a_n = \left[\left(۲n+\frac{۱}{۳}\right)\pi\right]^{-۱/۲}$ و $b_n = \left[\left(۲n-\frac{۱}{۳}\right)\pi\right]^{-۱/۲}$ بنابراین

$$a_n^{۲} \le x^{۲} \le b_n^{۲}$$
$$\Rightarrow a_n^{-۲} \ge x^{-۲} \ge b_n^{۲}$$
$$\Rightarrow \left(۲n+\frac{۱}{۳}\right)\pi \ge \frac{۱}{x^{۲}}$$
$$\Rightarrow \cos\left(۲n+\frac{۱}{۳}\right)\pi \le \cos\frac{۱}{x^{۲}}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \cos\frac{۱}{x^{۲}}$$

لذا :

$$\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{x}\left|\cos\frac{۱}{x^{۲}}\right|dx \ge \sum_{n=۱}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}\frac{۱}{x}\times\frac{۱}{۲}dx$$
$$\ge \sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{۲}\operatorname{Ln}x\right]_{a_n}^{b_n}$$
$$\ge \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴}\operatorname{Ln}\frac{b_n^{۲}}{a_n^{۲}}$$

$$\geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{6n+1}{6n-1} = \infty \right)$$

در نتیجه تابع $f_2(x)$ انتگرال‌پذیر لبگ نمی‌باشد.

فرض کنید که X یک مجموعهٔ ناتهی و $A = 2^X$ و $x_0 \in X$ باشد. $m(A) = \chi_A(x_0)$ تعریف می‌کنیم. این اندازه به اندازهٔ دیراک (Dirac) در x_0 معروف می‌باشد و معمولاً به δ_{x_0} نمایش می‌دهند.

بنابراین $\delta_{x_0}(A) = 1$ اگر $x_0 \in A$ و $\delta_{x_0}(A) = 0$ اگر $x_0 \notin A$ اندازه δ_{x_0} غالباً **تابع دلتای دیراک** نامیده می‌شود.

تمرینات فصل چهارم

۱ - اگر m یک تابع مجموعه‌ای حقیقی متناهیاً جمعی بر روی M باشد، آن‌گاه

$$m(E \cup F) = m(E) - m(E \cap F)$$

آیا می‌توان فرمولی برای $m(E \cup F \cup G)$ یا برای یک اتحّاد متناهی و اختیاری نوشت؟

۲ - نشان دهید که اگر m یک اندازه با حوزهٔ M و $E_n \in M$ به ازای هر n مثبت و صحیح باشد، آن‌گاه نشان دهید که :

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

به عبارت دیگر، جمعی شمارا، زیر جمعی شمارا را نتیجه می‌دهد.

۳ - نشان دهید که اگر m یک اندازه با حوزهٔ M و $E_n \in M$ با $E_{n+1} \subset E_n$ به ازای هر n باشد، و اگر $m(E_1) < \infty$، آن‌گاه :

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$$

به علاوه نشان دهید که این نتیجه برقرار نخواهد بود، هرگاه شرط $m(E_1) < \infty$ حذف شود.

۴ - به ازای هر دنباله از زیرمجموعه‌های E_n از یک مجموعه X، داریم :

$$\operatorname{lin\ inf} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$$

فرض کنید که m یک اندازه با حوزهٔ M باشد. نشان دهید که به ازای هر دنباله $\{E_n\}$ از

مجموعه‌های متعلّق به M ، خواهیم داشت :

$$m(\lim \inf E_n) \leq \lim \inf m(E_n)$$

۵- برای هر دنباله از زیرمجموعه‌های E_n از یک مجموعهٔ X ، رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم :

$$\lim \sup E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$$

یعنی این که به عنوان یک مجموعه از نقاطی که به E_n متعلّق هستند (برای تعداد نامتناهی n). فرض کنید که m یک اندازه با حوزهٔ M باشد. نشان دهید که اگر دنباله $\{E_n\}$ از مجموعه‌های در M به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$ باشد، آن‌گاه $m(\lim \sup E_n) = 0$.

۶- یک عدد حقیقی x را عدد لیویل نامند اگر به ازای هر عدد صحیح مثبت $n > 2$ وجود داشته باشد اعداد صحیح p_k و q_k با $q_k \to \infty$ به طوری که

$$0 < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^n}$$

ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد لیویل دارای اندازهٔ لبگ ۰ است.

۷- نشان دهید که وجود دارد : $E \subset [0, 1]$ به طوری که

$$m^*(E) = m^*([0, 1] \setminus E) = 1$$

۸- نشان دهید که به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد یک زیرمجموعهٔ باز G از R به طوری که $m^*(G) < \varepsilon$.

۹- فرض کنید که m یک اندازهٔ تعریف شده بر روی σ - جبر از مجموعه‌های بورل از یک فضای متریکی X باشد، به طوری که $m(X) = 1$ و $m(\{x\}) = 0$ به ازای هر $x \in X$. نشان دهید که به ازای هر $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ وجود دارد یک همسایگی باز U از x با $m(U) < \varepsilon$.

۱۰- اگر A یک جبر متناهی باشد (یعنی این که شامل تنها یک تعداد متناهی از مجموعه‌ها است) آن‌گاه A یک σ - جبر خواهد بود.

۱۱- مثالی ارائه دهید که اتحّاد دو σ - جبر در یک مجموعهٔ X خود یک جبر نیست.

۱۲- نشان دهید که اگر اتحاد هر دو σ - جبر در X یک جبر باشد، آن‌گاه یک σ - جبر خواهد بود.

۱۳- فرض کنید که $f \geq 0$ و اندازه‌پذیر باشد. ثابت کنید که $\int f dm = 0$ اگر و تنها اگر $\{x: f(x) > 0\} = \phi$.

۱۴- فرض کنید که $f \geq 0$ اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید که $\int f\, dm < \infty$ اگر

. $\{x: f(x) = \infty\} = \phi$

۱۵- نشان دهید که قضیهٔ Fatou نتیجه می‌دهد که برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر A_k داریم :

$m(\liminf A_k) \le \liminf m(A_k)$

به‌علاوه‌مثالی در R ارائه دهیدکه‌دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر A_k است به طوری که :

$\liminf A_k = \phi \quad , \quad \lim m(A_k) = 1 \quad , \quad A_k \subset [0, 1]$

۱۶- فرض کنید که $f \in L(R^n)$ باشد. تابع $f_n(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر} \quad |f(x)| \le n \quad , \quad |x| \le n \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ثابت کنید که :

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, dm = \int f \, dm$$

۱۷- فرض کنید که $f \in L(R^n)$ باشد. ثابت کنید که :

$$\lim_{n \to \infty} \int f(x) e^{-|x|^2/n} \, dx = \int f(x) \, dx$$

۱۸- فرض کنید که A_i ، ... $i = 1, 2,$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشند. فرض کنید که $n \in N$ و E_n یک مجموعه تعریف شده به صورت زیر باشد :

حدّاقل به یکی از مجموعه‌های $\quad x \in E_n \iff x \in A_i$

نشان دهید که

$$n \, m(E_n) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

۱۹- اگر f اندازه‌پذیر و هر جا $f = 0$ نشان دهید که $f \in L$ و $\int f \, dm = 0$

۲۰- فرض کنید که $m(E) = 0$ ؛ ثابت کنید هر تابع تعریف شده بر روی E اندازه‌پذیر است و $\int_E f \, dm = 0$ برای تمام f ها.

۲۱- اگر $f: X \to [-\infty, \infty]$، ثابت کنید که $f \in L$ اگر و تنها اگر $f(x_0) \in R$ در این حالت $\int f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$.

۲۲- ثابت کنید که انتگرال‌پذیری یک تابع اندازه‌پذیر، انتگرال‌پذیری $|f(x)|$ را نتیجه می‌دهد.

۲۳ـ اگر $\alpha > 0$، ثابت کنید که برای $x \leq n$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$$

۲۴ـ نشان دهید که شرط $\{x: f(x) > a\}$ اندازه‌پذیری برای تمام $a\in R$ برقرار است اگر و تنها اگر این شرط برای تمام a های گویا برقرار باشد.

۲۵ـ ثابت کنید که fg اندازه‌پذیر است اگر f و g اندازه‌پذیر باشند.

۲۶ـ برای a گویا نشان دهید که:

$$\{x : f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{b\ \text{گویا}} (\{x: f(x) > b\} \cap \{x: g(x) > a - b\})$$

۲۷ـ اگر:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0<x<1 \\ 5 & x=0 \\ 7 & x=1 \end{cases}$$

ثابت کنید که $f(x)$ بر روی $[0, 1]$ اندازه‌پذیر است.

۲۸ـ اگر f یک تابع اندازه‌پذیر حقیقی و g یک تابع پیوسته بر روی $(-\infty, \infty)$ باشد، نشان دهید که ترکیب این دو تابع نیز اندازه‌پذیر است.

۲۹ـ نشان دهید که تابع مشخصهٔ یک مجموعهٔ E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد.

۳۰ـ ثابت کنید که: الف ـ اگر $f(x)$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f(x)$ اندازه‌پذیر است.

ب ـ اگر هر جا به جز در یک مجموعه با اندازهٔ صفر $f(x) = g(x)$ باشد، آن‌گاه $g(x)$ نیز اندازه‌پذیر می‌باشد.

منابع

1) R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu (1988); *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications,* Second Edition, Applied Mathematics Sciences 75, Springer - Verlag.

2) T. M. Apostol (1957); *Mathematical Analyesis, A Modern Approach to Advanced Calculus,* Addison, Wesly Pub. Co.

3) W. M. Boothby (1986); *An Introduction To Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry,* Academic Press, Inc.

4) A. Browder (1996); *Mathematical Analysis* An Introduction, Springer - Verlag.

5) D. R. J. Chillingwarth (1976), *Differential Topology With A View to Applications* Pitman Pub.

6) G. de Barra (1981); *Measure Theory and Integration,* John Wiley and Sons.

7) J. Dieudonne (1969); *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press.

8) S. A. Douglass (1996); *Introduction to Mathematical Analysis,* Addison - Wesley Higher Mathematic.

9) B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsgted (1964); *Counterexamples in Analysis,* Holden - Day, INC.

10) V. Guillemin and A. Pollack (1974); *Differential Topology* Prentice - Hall, Inc.

11) H. P. Hsu (1969); *Vector Analysis,* Simon and Schuseter, New York.

12) F. Jones (1993); *L-besgue Integration and Euclidean Space,* Jones and Bart lett Pub.

13) Lang (1995); *Real and Functional Analysis* Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer - Verlag.

14) E. H. Lreb, and M. Loss (1997); *Analysis,* Graduate Studies in Mathematics Volume 14, American Mathematical Society.

15) J. E. Marsden (1974); *Elementary Classical Analysis,* W. H. Freeman - Co.

16) J. E. Marsden And A. J. Tromba, Second Edition, *Vector Calculus.*

ترجمه دکتر عالم زاده و محمدی داودی - ۱۳۷۰. ناشر - مؤسسه نشر علوم نوین.

17) T. Pandey And P. Pandey (1997); *Measure Theory* CBS Pub.

18) W. Rudin (1976); *Principles of Mathematical Analysis Third Edition.*

راهنمای موضوعی

FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 301

Mathematical Analysis With Applications

(With 350 exercises and Examples)

by

Dr. Z. Afsharnejad

FERDOWSI UNIVERSITY PRESS

2001