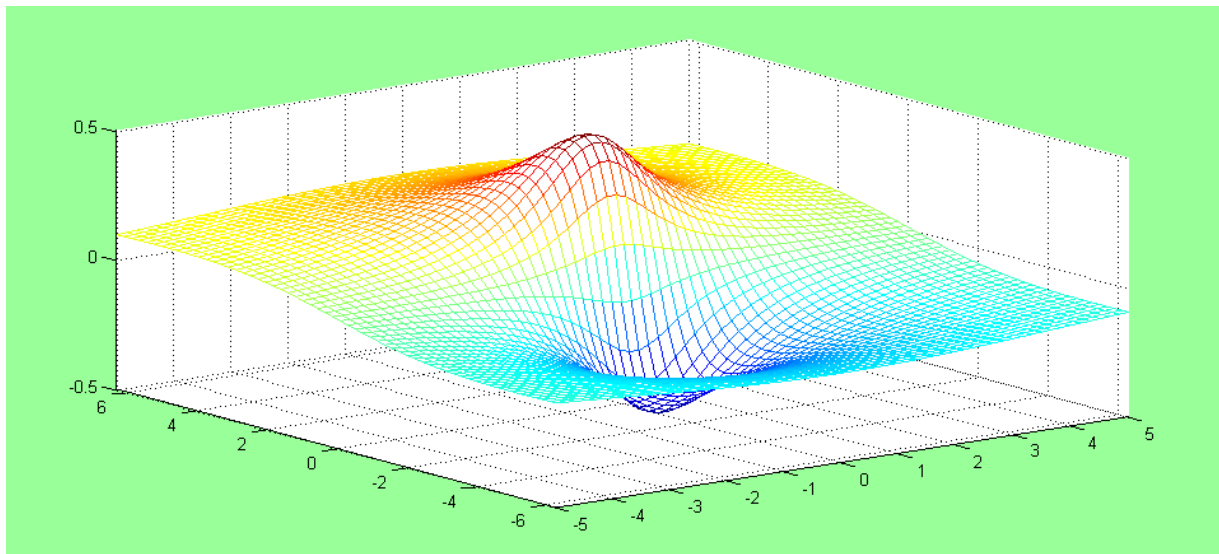


ریاضیات مهندسی



تألیف: دکتر مهدی سیاھی

فهرست مطالب

- ۱- آشنایی با نظریه اعداد مختلط..... ۵
- ۱-۱- خواص اعداد مختلط..... ۵
- ۱-۲- نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی..... ۷
- ۱-۳- محاسبه ریشه n ام عدد مختلط z ۸
- ۱-۴- منحنی‌ها و نواحی در صفحه اعداد مختلط..... ۸
- ۲- توابع مختلط..... ۱۰
- ۲-۱- حد و پیوستگی..... ۱۰
- ۲-۲- مشتق تابع مختلط..... ۱۱
- ۲-۳- توابع تحلیلی..... ۱۲
- ۳- توابع مقدماتی..... ۱۷
- ۳-۱- تابع نمایی..... ۱۷
- ۳-۲- توابع مثلثاتی و هیپر بولیک..... ۱۷
- ۳-۳- تابع لگاریتم..... ۱۹
- ۳-۴- توان‌های عمومی..... ۲۰
- ۳-۵- توابع معکوس مثلثاتی و هیپر بولیک..... ۲۰

- ۴- نگاشت ۲۲
- ۴-۱- نگاشت خطی ۲۲
- ۴-۲- نگاشت توانی ۲۳
- ۴-۳- نگاشت ریشه n ام ۲۴
- ۴-۴- نگاشت کسری ۲۵
- ۴-۵- نگاشت خطی کسری ۲۸
- ۴-۶- نگاشت یا کوفسکی ۲۹
- ۴-۷- نگاشت نمایی ۳۰
- ۴-۸- نگاشت لگاریتمی ۳۱
- ۴-۹- نگاشت سینوس ۳۱
- ۴-۱۰- تبدیلات متوالی ۳۲
- ۵- سری های مختلط ۳۵
- ۵-۱- دنباله ها ۳۵
- ۵-۲- سری ها ۳۶
- ۵-۲-۱- آزمون های همگرایی ۳۷
- ۵-۲-۲- سری های توانی ۳۹
- ۵-۳- روش های محاسبه مانده ۴۸

۶- انتگرال مختلط ۵۲

۶-۱- انتگرال روی خط در صفحه مختلط ۵۳

۶-۲- قضیه انتگرال کوشی ۵۷

۶-۳- قضیه مانده ۶۲

۶-۴- محاسبه برخی از انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال های مختلط ۶۷

۷- آنالیز فوریه ۷۴

۷-۱- سری فوریه ۷۷

۷-۱-۱- سری فوریه مثلثاتی ۷۸

۷-۱-۲- شرایط دیریکله ۷۸

۷-۱-۳- سری فوریه توابع زوج و فرد ۸۲

۷-۱-۴- سری فوریه توابع متقارن نیم موج ۸۳

۷-۱-۵- سری فوریه توابع غیر پر یودیک ۸۴

۷-۱-۶- مشتق گیری و انتگرال گیری از سری فوریه ۸۵

۷-۱-۷- تساوی پارسوال در سری فوریه مثلثاتی ۸۶

۷-۲- انتگرال فوریه ۹۰

۸- معادلات با مشتقات جزئی ۹۵

۱- آشنایی با نظریه اعداد مختلط

وجود معادلاتی مانند $x^2 + 4 = 0$ و ... که هیچ جوابی در مجموعه اعداد حقیقی ندارند باعث شد تا بشر به فکر ایجاد اعداد جدیدی به نام مختلط گردد. اولین کسی که اعداد مختلط را برای این منظور بکار برد ریاضیدان ایتالیایی به نام Girolamo Cardano می باشد. بسیاری از مسائل مهندسی را می توان با نظریه اعداد مختلط حل نمود.

تعریف ۱-۱

عدد مختلط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی x و y است که بصورت زیر تعریف می شود

$$z = \{(x + iy) \mid x, y \in R, i^2 = -1\} \quad (1-1)$$

به x قسمت حقیقی و به y قسمت موهومی عدد مختلط z گفته می شود و بصورت زیر نمایش می دهند

$$\begin{aligned} x &= \text{Re}(z) \\ y &= \text{Im}(z) \end{aligned} \quad (2-1)$$

۱-۱- خواص اعداد مختلط

در مجموعه خواص زیر $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z_3 = x_3 + iy_3$ فرض شده است.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \quad \bullet \text{ تساوی دو عدد مختلط}$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad \bullet \text{ جمع و تفریق دو عدد مختلط}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad \bullet \text{ ضرب دو عدد مختلط}$$

$$\bar{z} = x - iy \quad \bullet \text{ مزدوج عدد مختلط}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \bullet \text{ تقسیم دو عدد مختلط}$$

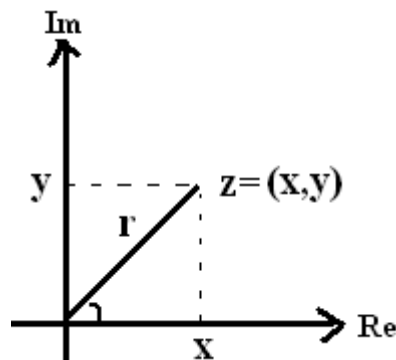
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
• جابجایی عمل جمع
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
• شرکت پذیری عمل جمع
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$
• جابجایی عمل ضرب
- $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
• شرکت پذیری عمل ضرب
- $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
• جمع پذیری عمل ضرب
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
• مزدوج مجموع
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
• مزدوج حاصل ضرب
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
• مزدوج حاصل تقسیم
- $Real(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x$
• قسمت حقیقی عدد مختلط
- $Imaginary(z) = \frac{z - \bar{z}}{2} = y$
• قسمت موهومی عدد مختلط
- $|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
• اندازه عدد مختلط

تمرین (۱-۱) نامساوی های زیر را اثبات کنید.

الف) $Re(z) \leq |z|$ ب) $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ ج) $|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$

۱-۲- نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی

هر عدد مختلط را بر اساس نمایش آن در صفحه اعداد مختلط می توان بصورت قطبی نیز نمایش داد



$$z = x + iy = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta) \quad (3-1)$$

که مابین فرم دکارتی و قطبی نمایش اعداد مختلط، روابط زیر برقرار می باشد.

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad -\pi < \theta < \pi \quad (4-1)$$

در نمایش اعداد مختلط به فرم قطبی عملیات ضرب و تقسیم به سادگی انجام می گیرد بطوری که اگر

z_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ را بصورت $z_i = r_i (\cos \theta_i + i \sin \theta_i)$ تعریف کنیم آنگاه داریم

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)) \quad (5-1)$$

نکته: با استفاده از رابطه بالا به سادگی می توان نتیجه زیر را گرفت که به رابطه دمو آور معروف است

$$\begin{aligned} z^n &= r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \Rightarrow \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (6-1)$$

تمرین (۱-۲) با استفاده از رابطه بالا $\cos(3\theta)$ و $\sin(3\theta)$ را بر حسب $\cos(\theta)$ و $\sin(\theta)$ بدست آورید.

۳-۱- محاسبه ریشه n ام عدد مختلط z

فرض کنید $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ و $W = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ و W ریشه n ام عدد مختلط Z باشد آنگاه داریم.

$$W = z^{\frac{1}{n}} \rightarrow W^n = z \rightarrow R^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow$$

$$R = r^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (Y-1)$$

مثال (۱-۱) ریشه n ام عدد ۱ را بیابید.

$$z^n = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) \Rightarrow z = \sqrt[n]{1} \left(\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

مثال (۲-۱) معادله $z^4 + 2i = 0$ را حل کنید

$$z^4 = -2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi + 2k\pi}{4} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

۴-۱- منحنی‌ها و نواحی در صفحه اعداد مختلط

در صفحه اعداد مختلط فاصله بین دو نقطه Z و a بصورت $|z - a|$ تعریف می‌شود و $|z - a| = \rho$ یک دایره به

مرکز a و شعاع ρ می‌باشد. در صفحه اعداد مختلط ناحیه $|z - a| < \rho$ معرف نقاط درون یک دایره به مرکز a و

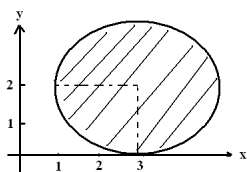
شعاع ρ و ناحیه $|z - a| \leq \rho$ معرف نقاط درون و روی یک دایره به مرکز a و شعاع ρ می‌باشد.

نکته: ناحیه $|z - z_0| + |z - z_1| = R$ بیانگر یک بیضی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد.

نکته: ناحیه $|z - z_0| - |z - z_1| = R$ بیانگر یک هذلولی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد.

نکته: ناحیه $|z - z_0| = |z - z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 می‌باشد.

مثال (۳-۱) شکل هندسی ناحیه $|z - 3 - 2i| \leq 2$ را رسم نمایید.



مثال (۴-۱) اگر $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد آنگاه $z^{\frac{m}{n}}$ را محاسبه کنید.

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}} \right)^m = \left(\sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \right)^m = \sqrt[n]{r^m} \left[\cos \left(\frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right) + i \sin \left(\frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right) \right]$$

مثال (۵-۱) معادله $z^2 - (5+i)z + 8+i = 0$ را حل کنید.

$$z = \frac{5+i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5+i}{2}\right)^2 - 8 - i} = \frac{5+i}{2} \pm \sqrt{-2 + \frac{3}{2}i} = \frac{5+i}{2} \pm (0.5 + 1.5i) = \begin{cases} 3 + 2i \\ 2 - i \end{cases}$$

تمرین های بخش اول

۱-۱ مقدار اصلی آرگومان اعداد زیر را بیابید.

- A) $1+i$ B) $-1+i$ C) $1-i$ D) $-1-i$ E) $-10-i$

۲-۱ تمام مقادیر ریشه های زیر را بیابید و در صفحه مختلط مشخص کنید.

- A) $\sqrt{-5+12i}$ B) $\sqrt[4]{-5+12i}$ C) $\sqrt[4]{-1}$ D) $\sqrt[5]{1+i}$

۳-۱ معادلات زیر را حل کنید.

- A) $z^2 + z + 1 - i = 0$ B) $z^4 - 3(1+2i)z^2 - 8 + 6i = 0$

۴-۱ نواحی زیر را در صفحه اعداد مختلط رسم نمایید.

- A) $|z+2| > 3$ B) $0 < \text{Re}(z) < 3$ C) $|\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{4}$ D) $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1$ E) $\text{Im}(z^2) = 2$

۲- توابع مختلط

تابع مختلط تابعی است که دامنه و برد آن را اعداد مختلط تشکیل می‌دهند و بصورت $W = f(z)$ نمایش داده می‌شود که در حالت کلی $z = x + iy$ و $W = u + iv$ می‌باشد. در واقع تابع مختلط را می‌توان بصورت یک تبدیل (نگاشت) از فضای (x, y) به فضای (u, v) در نظر گرفت. دقت کنید که u و v هر کدام تابعی از x و y می‌باشند یعنی $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$.

۲-۱- حد و پیوستگی

تعریف حد در توابع مختلط شبیه توابع حقیقی بوده و بصورت زیر می‌باشد

تابع $f(z)$ وقتی Z به سمت z_0 میل می‌کند دارای حد l است هرگاه داشته باشیم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l, \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - l| < \delta \quad (1-2)$$

توجه شود که شرط لازم برای وجود حد در توابع دو متغیره این است که در کلیه مسیرها باید مقادیر حد یکسان باشد.

تابع $W = f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته گویند هرگاه $f(z_0)$ تعریف شده و $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ باشد.

تابع $W = f(z)$ را در یک دامنه پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه از آن دامنه پیوسته باشد.

۲-۲- مشتق تابع مختلط

مشتق تابع $f(z)$ در نقطه z_0 بصورت زیر تعریف می شود. مشروط بر آنکه حد زیر وجود داشته باشد.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \Delta z = z - z_0 \quad (2-2)$$

مثال (۱-۲) مشتق تابع $f(z) = \bar{z}$ را بدست آورید.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1 & ; \Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0 \\ -1 & ; \Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}$$

چون در دو مسیر مختلف، دو مقدار متفاوت بدست آمده است لذا تابع $f(z) = \bar{z}$ مشتق پذیر نمی باشد.

مثال (۲-۲) مشتق تابع $f(z) = |z|^2$ را بدست آورید.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)\overline{(z + \Delta z)} - z\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \Delta z\bar{z} + (\Delta z)^2}{\Delta z} = z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + 0 =$$

$$\begin{cases} z + \bar{z} & ; \Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0 \\ -z + \bar{z} & ; \Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}$$

با توجه به مثال قبل مشتق پذیر نمی باشد.

خواص مشتق:

$$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z) \quad (\text{ب}) \quad [f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z) \quad (\text{الف})$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)} \quad (\text{ج})$$

۳-۲- توابع تحلیلی

تابع $f(z)$ را در دامنه D تحلیلی گویند هرگاه $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتق پذیر باشد. تابع $f(z)$ را در نقطه $z = z_0$ تحلیلی گویند هرگاه در یک همسایگی از آن تحلیلی باشد.

قضیه ۱-۲ (کوشی-ریمان)

فرض کنید تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در یک همسایگی از نقطه Z تعریف شده و پیوسته باشد و در خود Z مشتق پذیر باشد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در آن نقطه وجود دارد و در شرایط زیر که به شرایط کوشی-ریمان معروف هستند صدق می کند. (اثبات کنید)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (۳-۲)$$

قضیه ۲-۲ (کوشی-ریمان)

هرگاه دو تابع پیوسته حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ از دو متغیر حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند که در دامنه ای مانند D در معادلات کوشی-ریمان صدق می کنند، آنگاه تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D تحلیلی است.

توجه: بطور کلی به یکی از سه روش زیر می توان مشتق تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را محاسبه نمود.

الف) استفاده از تعریف اصلی مشتق.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (ب)$$

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (ج)$$

مثال (۲-۳) در مورد مشتق‌پذیری تابع $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ نظر دهید.

چون $u_x = 1 \neq v_y = 0$ لذا تابع فوق در هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد.

توجه: اگر تابعی فقط در یک نقطه یا چند نقطه جدا از هم شرایط کوشی-ریمان را برآورده کند آنگاه تابع مذکور در هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد.

مثال (۲-۴) تابع $f(z) = -\operatorname{Re}(z^2) + iz\bar{z}$ در کجا مشتق‌پذیر و تحلیلی است.

با اعمال روابط کوشی ریمان داریم $f(z) = (y^2 - x^2) + i(y^2 + x^2) \Rightarrow$
 $u_x = -2x = v_y = 2y$, $v_x = 2x = -u_y = -2y$ لذا برای برقراری

معادلات کوشی - ریمان باید $y = -x$ باشد. لذا تابع مذکور فقط بر روی خط $y = -x$ مشتق‌پذیر می‌باشد در

حالی که در هیچ کجا حتی بر روی خط مذکور تحلیلی نمی‌باشد چون برای تحلیلی بودن در هر نقطه بایست در

یک همسایگی از آن مشتق‌پذیر باشد.

شرایط کوشی-ریمان در فرم قطبی:

در فرم قطبی تابع $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ بصورت $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ نوشته می‌شود که مابین فرم قطبی و دکارتی رابطه

(۴-۱) برقرار است. داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \cos(\theta) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin(\theta) \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin(\theta) \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\theta) \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

حال اگر در طرفین تساوی ضرایب \sin و \cos را یکسان بگیریم شرایط معادلات کوشی-ریمان در فرم قطبی

بدست می‌آید.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (5-2)$$

مثال (5-2) در مورد تحلیلی بودن تابع $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$ نظر دهید.

تحلیلی است چون روابط $u_x = e^x \cos(y) = v_y$, $v_x = e^x \sin(y) = -u_y$ برقرار است.

تعریف ۱-۲

نقطه تکین نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه تحلیلی نیست ولی حداقل در یک همسایگی از آن تحلیلی می‌باشد.

مثال (6-2) نقاط تکین تابع $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را بدست آورید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{z} = k\pi \Rightarrow z = \frac{1}{k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

قضیه ۲-۳ (معادلات لاپلاس)

فرض کنید $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در دامنه D تحلیلی باشد آنگاه u و v در D در معادله لاپلاس صدق

کرده و دارای مشتقات جزئی مرتبه دو پیوسته در D می‌باشد. (اثبات کنید)

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

تعریف ۲-۲

هر تابعی که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم باشد و در معادله لاپلاس صدق کند تابع همساز نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۳

اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D تحلیلی باشد آنگاه v را مزدوج همساز u می‌نامند.

برای یافتن مزدوج همساز بصورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $u(x, y)$ معلوم بوده و $v(x, y)$ مجهول باشد

آنگاه از رابطه $u_x = v_y$ ، $v(x, y)$ را بصورت $v(x, y) = \int u_x dy + \varphi(x)$ بدست آورده و از رابطه $v_x = -u_y$ ،

$\varphi(x)$ را تعیین می‌کنیم.

مثال (۷-۲) مزدوج همساز تابع $u(x, y) = \sin x \cosh y$ را بدست آورید.

$$u_x = \cos x \cosh y \rightarrow v(x, y) = \int \cos x \cosh y dy + \varphi(x) = \cos x \sinh y + \varphi(x)$$

$$v_x = -\sin x \sinh y + \varphi'(x) = -u_y = -\sin x \sinh y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = K$$

$$v(x, y) = \cos x \sinh y + K$$

نکته: اگر v مزدوج همساز u و u مزدوج همساز v باشد آنگاه u و v باید توابع ثابتی باشند.

تمرین های بخش دوم

۱-۲ روابط کوشی-ریمان در مورد کدام یک از توابع زیر صادق است.

A) $|z|$ B) \bar{z} C) $\arg(z)$ D) $f(z) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

۲-۲ اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد تحت چه شرایطی $f(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ هم

تحلیلی است.

۳-۲ آیا توابع $u(x, y) = 2x(1 - y)$ و $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ همساز هستند. در صورت مثبت بودن

جواب مزدوج همساز آن‌ها را بیابید.

۴-۲ کلیه توابع تحلیلی بصورت $f(z) = u(x) + iv(y)$ را بیابید. ($f(z) = cz + a$)

۵-۲ آیا تابع $f(z) = x^2 + iy^2$ بر خط $x = y$ تحلیلی است. دلایل منفی بودن جواب علاوه بر صادق بودن

شرایط کوشی-ریمان را توضیح دهید.

۶-۲ اعداد a ، b و c را طوری تعیین کنید که توابع داده شده زیر همساز باشند. آنگاه مزدوج همساز آنها

را بدست آورید. $A) u = e^{2x} \cos(ay)$ $B) \cos bx \sinh y$

۷-۲ در مورد تحلیلی بودن توابع زیر نظر دهید.

$A) z^2 - \bar{z}^2$ $B) z + \frac{1}{z}$ $C) \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$ $D) \frac{i}{z^4}$

۳- توابع مقدماتی**۳-۱- تابع نمایی**

تابع نمایی در آنالیز مختلط بصورت زیر تعریف می شود.

$$f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (۳-۱)$$

این تابع به ازای تمامی مقادیر z تحلیلی و غیر صفر است.

۳-۱-۱- خواص تابع نمایی

$$(e^z)' = e^z \quad (د) \quad e^{z+i2\pi} = e^z, T = i2\pi \quad (ج) \quad |e^z| = e^x, \arg(e^z) = y \quad (ب) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (الف)$$

(د) دامنه تابع نمایی کل صفحه مختلط و برد آن تمام صفحه مختلط به جز مبدا می باشد.

مثال (۳-۱) معادله $e^{2z} + 3ie^z = 0$ را حل کنید.

$$e^z (e^z + 3i) = 0 \Rightarrow e^z = 0 \quad \text{or} \quad e^z + 3i = 0 \Rightarrow$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = -3i = 3 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) \Rightarrow \begin{cases} e^x = 3 \rightarrow x = 1.098 \\ y = 2k\pi \pm \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

۳-۲- توابع مثلثاتی و هیپربولیک

توابع \sin ، \cos ، \sinh و \cosh بصورت زیر تعریف می شوند

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (۳-۲)$$

توابع \sin و \cos متناوب با دوره تناوب 2π و توابع \sinh و \cosh متناوب با دوره تناوب $i2\pi$ می باشند و

تعریف توابع \tan ، \cot ، \sec ، \csc ، \tanh ، \coth و ... همانند توابع حقیقی می باشد. ضمناً تمام فرمول های

توابع مثلثاتی حقیقی برای فرم مختلط آنها برقرار می باشد

$$\begin{aligned}
 (\sin z)' &= \cos z, (\tan z)' = \sec^2 z, \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1, \dots \\
 (\sinh z)' &= \cosh z, (\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z, \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1, \dots
 \end{aligned}
 \tag{۳-۳}$$

مثال (۲-۳) رابطه اویلر ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$) را اثبات کنید.

با استفاده از تعریف \sin و \cos براحتی اثبات می شود

مثال (۳-۳) ثابت کنید که $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ است.

$$\begin{aligned}
 \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} [e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^y] \frac{e^{ix} = \cos x + i \sin x}{e^{-ix} = \cos x - i \sin x} \Rightarrow \\
 &= \frac{1}{2i} [\cos x e^{-y} + i \sin x e^{-y} - \cos x e^y + i \sin x e^y] = \frac{1}{2} [-i \cos x e^{-y} + \sin x e^{-y} + i \cos x e^y + \sin x e^y] \\
 &= \sin x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y
 \end{aligned}$$

با همین استدلال می توان ثابت کرد $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ است. (ثابت کنید)

تمرین (۱-۳) درستی روابط زیر را بررسی کنید.

A) $\sin(iy) = i \sinh y$

B) $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

C) $\cos(iy) = \cosh y$

D) $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

مثال (۳-۴) جواب معادله $\sin z = 0$ را بیابید.

راه اول:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sinh y = 0 \rightarrow y = 0 \\ \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = k\pi$$

راه دوم:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2ix-2y} = e^{-2y} (\cos(2x) + i \sin(2x)) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\begin{cases} e^{-2y} = 1 \rightarrow y = 0 \\ 2x = 0 + 2k\pi \rightarrow x = k\pi \end{cases} \Rightarrow z = x + iy = k\pi$$

۳-۳- تابع لگاریتم

تابع لگاریتمی در آنالیز مختلط بصورت زیر تعریف می شود

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\theta \quad (۳-۴)$$

که $r = |z|$ و $\theta = \arg z = \text{Arg} z \pm 2k\pi$ می باشد. لذا این تابع یک تابع چند مقدار می باشد.

خواص تابع لگاریتم:

- $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$ ، $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
- این تابع غیر از مبدا و قسمت منفی محور x ها در همه جا تحلیلی می باشد.
- تابع مذکور فقط به ازای $r > 0$ & $a < \theta < a + 2\pi$ تک مقدار می باشد.
- هر نقطه بر روی محور حقیقی منفی و مبدا مختصات نقاط تکین تابع لگاریتم می باشند.

۳-۴- توان های عمومی

توان های عمومی عدد مختلط غیر صفر Z بصورت زیر تعریف می شود

$$f(z) = z^C = e^{CLnZ} \quad z \neq 0, C \in \text{complex} \quad (۵-۳)$$

مثال (۵-۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$A) \ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = 0.34 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$B) (1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\ln(1+i)} = e^{(1-i)(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) \right)$$

$$C) \ln z = 3-i \rightarrow z = e^{3-i} = e^3 \cdot e^{-i} = e^3 (\cos 1 - i \sin 1) = 20.08 - 0.35i$$

۳-۵- توابع معکوس مثلثاتی و هیپر بولیک

تابع معکوس مثلثاتی سینوسی بصورت $z = \sin(w)$ یا $w = \sin^{-1}(z)$ تعریف می شود که می توان بر حسب توابع

لگاریتمی و بصورت زیر آن را نوشت.

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0 \Rightarrow e^{i2w} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$e^{iw} = X \Rightarrow X^2 - 2izX - 1 = 0 \Rightarrow X = iz + \sqrt{1 - z^2} = e^{iw} \Rightarrow \quad (۶-۳)$$

$$w = \sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

به طریق مشابه می توان روابط زیر را بدست آورد

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + i\sqrt{1 - z^2}), \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}, \quad \sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) \quad (۷-۳)$$

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

تمرین های بخش سوم

- ۱-۳ قسمت های حقیقی و موهومی هر یک از توابع نمایی زیر را محاسبه کنید.
- A) e^{-2z} B) e^{z^3} C) $e^{-\pi z}$ D) e^{-z^2}
- ۲-۳ تمامی مقادیر z که به ازای آن ها $|e^{-z}| < 1$ است را تعیین کنید.
- ۳-۳ مقدار اصلی i^i را محاسبه کنید.
- ۴-۳ مقدار اصلی $(5-2i)^{3+\pi i}$ را محاسبه کنید.
- ۵-۳ معادلات زیر را حل کنید.
- A) $z^4 - 2i + 6 = 0$ B) $z^{\frac{5}{4}} = i$ C) $\sinh z = i$ D) $\cos z = 2$ E) $e^{2z} + 3ie^z = 0$
- F) $e^{3z} = 3$ G) $\sin z = \cosh 3$ H) $\ln z = -2 - \frac{3}{2}i$ I) $\ln z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$
- ۶-۳ تفاوت تعریف مشتق در حساب مختلط با تعریف مشتق در حساب حقیقی را بیان دارید.
- ۷-۳ تابعی که در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد را تام می گویند. آیا توابع $\sin z$ و $\cos z$ تام هستند.
- ۸-۳ تفاوت عمده e^z با e^x را بیان دارید. و بیان دارید چرا لگاریتم مختلط از لگاریتم طبیعی پیچیده تر است.
- ۹-۳ آیا ممکن است تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد ولی در آن نقطه تحلیلی نباشد.

۴- نگاشت

تابع مختلط $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه نظر هندسی عملکرد این تابع را می‌توان بصورت یک نگاشت از صفحه Z (صفحه (x, y)) به صفحه W (صفحه (u, v)) در نظر گرفت بدین معنا که تحت این تابع مختلط یک نقطه مشخص مانند (x_0, y_0) از صفحه Z به یک نقطه مشخص مانند (u_0, v_0) در صفحه W منتقل می‌شود به چنین رابطه‌ای یک نگاشت گفته می‌شود.

تعریف ۴-۱

نگاشتی که اندازه و جهت زاویه بین دو قوس هموار گذرنده از یک نقطه مشخص را حفظ می‌کند، در آن نقطه هم‌مدیس می‌گویند.

قضیه ۴-۱

اگر $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد و $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد آنگاه تابع $w=f(z)$ در نقطه z_0 هم‌مدیس است.

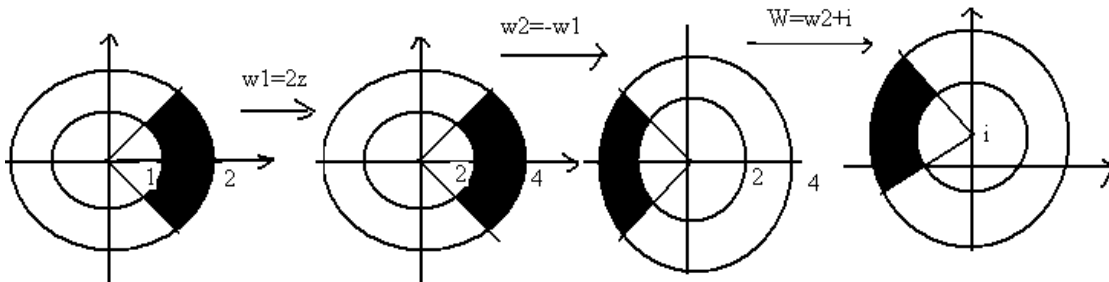
۴-۱-۱- نگاشت خطی

نگاشت $w = az$ را که a یک عدد مختلط دلخواه مخالف صفر است ($a = |a|e^{i\angle a}$) را نگاشت خطی گویند. این نگاشت همه جا تحلیلی و هم‌مدیس می‌باشد. این نگاشت انبساط یا انقباضی با اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\angle a$ در جهت مثلثاتی بر روی تابع انجام می‌دهد.

نگاشت خطی $w = az + b$ که a و b اعداد مختلط دلخواه مخالف صفر هستند علاوه بر انبساط یا انقباضی با اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\angle a$ در جهت مثلثاتی سبب انتقالی به اندازه b می‌شوند.

مثال (۱-۴) نگاشت ناحیه $D = \{z \mid 1 < |z| < 2, -\frac{\pi}{3} < \text{Arg}z < \frac{\pi}{3}\}$ را تحت رابطه $w = -2z + i$ بیابید.

این نگاشت انبساطی به اندازه ۲، دورانی به اندازه π ($-2 = 2e^{i\pi}$) و انتقالی به اندازه i ایجاد می کند.



۲-۴- نگاشت توانی

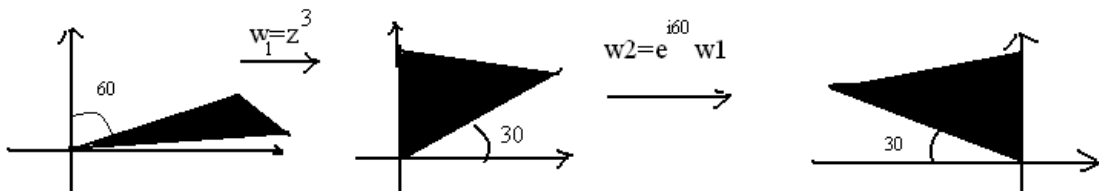
نگاشت $w = z^n$ را نگاشت توانی گویند که n یک عدد طبیعی غیر یک می باشد. این نگاشت در همه جا تحلیلی بوده و غیر از مبدا در تمام صفحه مختلط همدیس می باشد. با فرض $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\varphi}$ داریم.

$$w = z^n \Rightarrow Re^{i\varphi} = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} R = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases} \quad (1-4)$$

از رابطه بالا می توان نتیجه گرفت که این نگاشت فاصله هر نقطه تا مبدا را به توان n رسانده و شعاع حامل نقطه را n برابر می کند.

مثال (۲-۴) نگاشت ناحیه $D = \{z \mid 0 < \text{Arg}z < 30\}$ تحت رابطه $w = e^{i\frac{\pi}{3}} z^3$ را بیابید.

این نگاشت ابتدا زاویه شعاع حامل هر نقطه را ۳ برابر کرده و سپس به اندازه $\frac{\pi}{3}$ دوران می دهد.



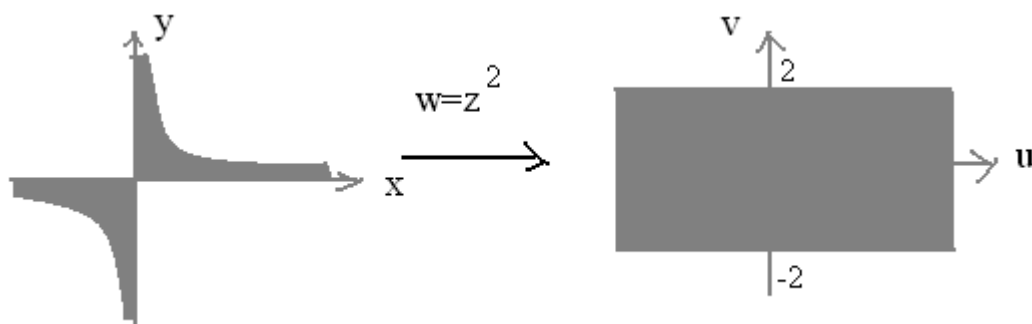
نکته: حالت خاص این نگاشت $w = z^2$ می باشد که در فرم دکارتی بصورت

$w = u + iv = (x^2 - y^2) + i2xy$ نوشته می شود. در این حالت نگاشت هذلولی $x^2 - y^2 = c_1$ ، خط

$u = c_1$ و نگاشت هذلولی $2xy = c_2$ ، خط $v = c_2$ می باشد.

مثال (۳-۴) نگاشت ناحیه $-1 < xy < 1$ را تحت رابطه $w = z^2$ بیابید.

این نگاشت هذلولی $xy=1$ را به خط $v=2$ و هذلولی $xy=-1$ را به خط $v=-2$ تبدیل می کند



۳-۴- نگاشت ریشه nام

نگاشت $w = \sqrt[n]{z}$ را نگاشت ریشه nام گویند. که با فرض $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\varphi}$ داریم.

$$w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow Re^{i\varphi} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} \end{cases} \quad (۲-۴)$$

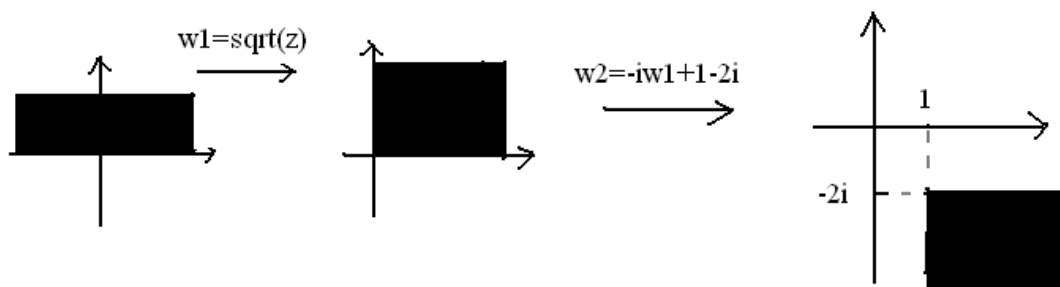
از رابطه بالا می توان نتیجه گرفت که این نگاشت فاصله هر نقطه تا مبدا را به توان $\frac{1}{n}$ رسانده و شعاع حامل

نقطه را بر n تقسیم می کند.

مثال (۳-۴) نگاشت نیم صفحه فوقانی صفحه مختلط را تحت رابطه $w = -i\sqrt{z} + 1 - 2i$ بیابید.

این نگاشت ابتدا ناحیه بالای محور را به ربع اول انتقال داده ($w_1 = \sqrt{z}$) سپس دورانی به اندازه منهای ۹۰

درجه و انتقالی به اندازه $1-2i$ ایجاد می کند



۴-۴- نگاشت کسری

نگاشت $w = \frac{1}{z}$ را نگاشت کسری گویند. این نگاشت در تمام صفحه مختلط به جزء مبدا تحلیل و

همدیس می باشد. که با فرض $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ داریم

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow Re^{i\phi} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{r} \\ \phi = -\theta \end{cases} \quad (۳-۴)$$

این نگاشت نقاط خارج از یک دایره را به نقاط ناصفر درون دایره و نیم دایره درونی بالای محور را به نیم-

دایره بیرونی پایین محور تبدیل می کند



در حالت کلی معادله یک دایره یا خط راست را می توان بصورت زیر نشان داد

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (4-4)$$

حال می خواهیم نگاشت یافته رابطه بالا را تحت رابطه $w = \frac{1}{z}$ بیابیم.

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w} \Rightarrow x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u}{u^2 + v^2} + i \frac{-v}{u^2 + v^2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (5-4)$$

با جایگزاری رابطه بالا در (4-4) به رابطه زیر در صفحه w می رسیم که می تواند خط یا دایره باشد

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \quad (6-4)$$

با استفاده از (4-4) و (6-4) می توان نتایج زیر را گرفت

• در (4-4) اگر $A \neq 0$ و $D \neq 0$ باشد یعنی دایره از مبدا عبور نکند، آنگاه نگاشت آن تحت

رابطه $w = \frac{1}{z}$ دایره ای می شود که از مبدا نمی گذرد.

• در (4-4) اگر $A \neq 0$ و $D = 0$ باشد یعنی دایره از مبدا عبور کند، آنگاه نگاشت آن تحت

رابطه $w = \frac{1}{z}$ خط راستی می شود که از مبدا نمی گذرد.

• در (4-4) اگر $A = 0$ و $D \neq 0$ باشد یعنی خط راستی که از مبدا عبور نکند، آنگاه نگاشت آن

تحت رابطه $w = \frac{1}{z}$ دایره ای می شود که از مبدا می گذرد.

• در (4-4) اگر $A = 0$ و $D = 0$ باشد یعنی خط راستی که از مبدا عبور کند، آنگاه نگاشت آن

تحت رابطه $w = \frac{1}{z}$ خط راستی می شود که از مبدا می گذرد.

مثال (۴-۴) تصویر خط $y = x + \frac{1}{2}$ به وسیله نگاشت $w = \frac{1}{z}$ را بیابید.

طبق مباحث صورت گرفته دایره‌ای با رابطه $(u+1)^2 + (v+1)^2 = 2$ می‌شود.

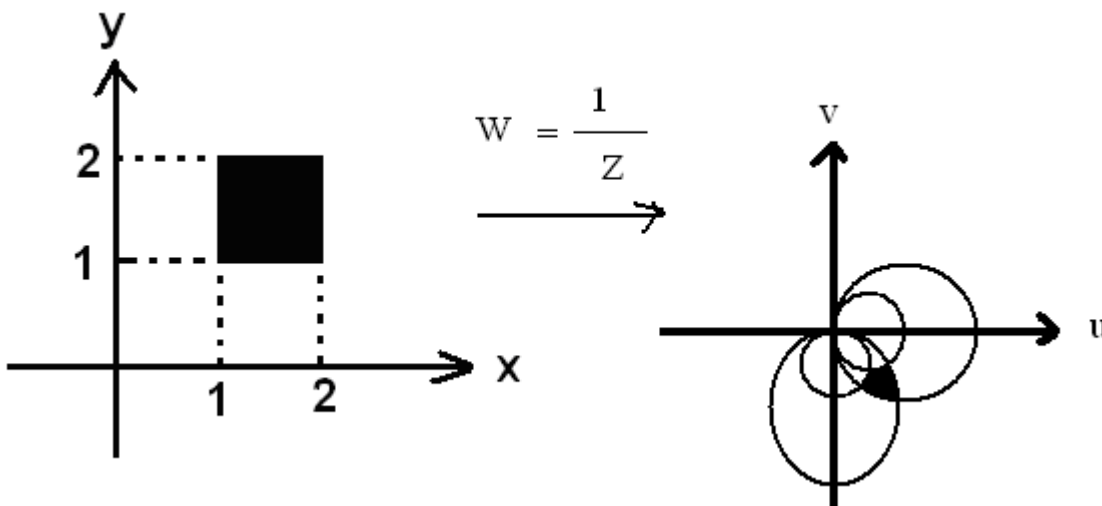
مثال (۵-۴) نگاشت ناحیه $D = \{z \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$ را تحت رابطه $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

نگاشت خط $x=1$ دایره $(u - \frac{1}{2})^2 + (v+0)^2 = \frac{1}{4}$ ، نگاشت خط $x=2$ دایره $(u - \frac{1}{4})^2 + (v+0)^2 = \frac{1}{16}$ ،

نگاشت خط $y=1$ دایره $(u+0)^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ و نگاشت خط $y=2$ دایره $(u+0)^2 + (v - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$

می‌باشد. چون ناحیه داده شده استراک چهار خط مذکور می‌باشد لذا نگاشت آن اشتراک چهار دایره بدست

آمده می‌باشد که بصورت زیر است.



۴-۵- نگاشت خطی کسری

نگاشت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ را نگاشت خطی کسری، تبدیل دو خطی یا تبدیل موبیوس می‌نامند. این نگاشت در همه

جا غیر از نقطه $z = -\frac{d}{c}$ تحلیلی و با فرض $ad - bc \neq 0$ ، در همه جا غیر از نقاط $z = -\frac{d}{c}$ هم‌مدیس می‌باشد.

می‌توان چنین تصور کرد که این نگاشت نقطه $z = -\frac{d}{c}$ را به بینهایت و بینهایت را به نقطه $w = \frac{a}{c}$ تبدیل

می‌کند.

قضیه ۴-۲

تبدیل موبیوس دایر و خط‌های راست صفحه z را بر دایر و خط‌های راست صفحه w می‌نگارد.

قضیه ۴-۳

سه نقطه مجزا و مفروض z_1, z_2, z_3 را همواره می‌توان با یک و تنها یک تبدیل خطی کسری $w=f(z)$ بر روی

سه نقطه مجزای مشخص w_1, w_2, w_3 نگاشت. این نگاشت بطور ضمنی با معادله زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \times \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \times \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad (۷-۴)$$

دقت شود که اگر یکی از مقادیر z_i ها یا w_i ها بینهایت باشد صورت و مخرج شامل بینهایت ری با هم ساده می-

کنیم.

نکته: می‌توان نشان داد که کلی‌ترین تبدیل موبیوس که ناحیه $|z| < 1$ را به ناحیه $|w| < 1$ تبدیل می‌کند بصورت

$$w = e^{ia} \frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}$$

می‌باشد که a عدد حقیقی و $|z_0| < 1$ است.

نکته: می توان نشان داد که کلی ترین تبدیل مویوس که ناحیه $\text{Im}(z) > 0$ را به ناحیه $|w| < 1$ تبدیل می کند بصورت

$$w = e^{ia} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \text{ می باشد که } a \text{ عدد حقیقی و } \text{Im}(z_0) > 0 \text{ است.}$$

مثال (۴-۶) تبدیل خطی کسری که سه نقطه $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 2$ را به ترتیب بر روی سه نقطه

$$w_1 = \infty, w_2 = \frac{1}{4}, w_3 = \frac{3}{8}$$

$$\text{حل: طبق قضیه (۴-۳) } w = \frac{z+1}{2z+4} \text{ خواهد بود.}$$

۴-۶- نگاشت یا کوفسکی

نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$ را نگاشت یا کوفسکی می گویند. این نگاشت در تمام صفحه مختلط به جزء $z=0$ تحلیلی بوده

و در تمام نقاط صفحه مختلط به جزء $z=0, +1, -1$ ، همدیس می باشد. که با فرض $z = re^{i\theta}$ و $w = u + iv$ داریم

$$w = z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\theta) + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\theta) \Rightarrow \begin{cases} u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\theta) \\ v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\theta) \end{cases} \quad (۴-۸)$$

از رابطه بالا به راحتی می توان نتیجه زیر را گرفت

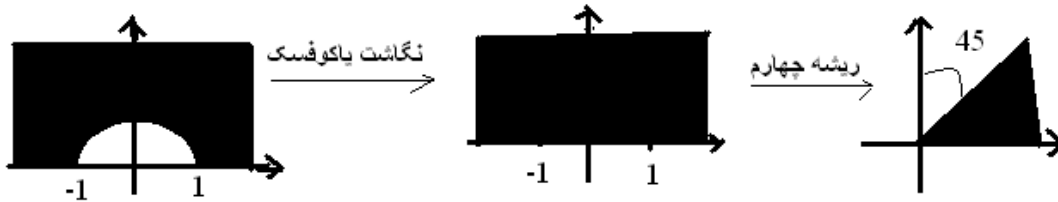
$$\frac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \quad (۴-۹)$$

یعنی نگاشت یا کوفسکی دایره را به بیضی تبدیل می کند.

نکته: در حالت خاص $|z|=1$ ، نتیجه نگاشت یک پاره خط بر روی محور حقیقی مابین منهای دو و مثبت دو

خواهد شد.

مثال (۷-۴) نگاشت ناحیه $D = \{z \mid |z| \geq 1, 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi\}$ را تحت رابطه $w = \sqrt[4]{z + \frac{1}{z}}$ بیابید.



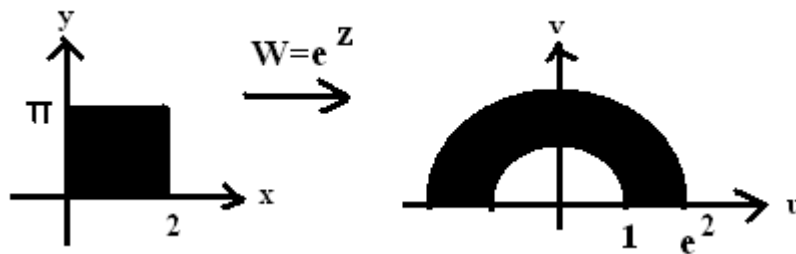
۷-۴- نگاشت نمایی

این نگاشت بصورت $w = e^z$ تعریف می‌شود. و در تمامی صفحه مختلط تحلیلی و هم‌دیس می‌باشد. به فرض

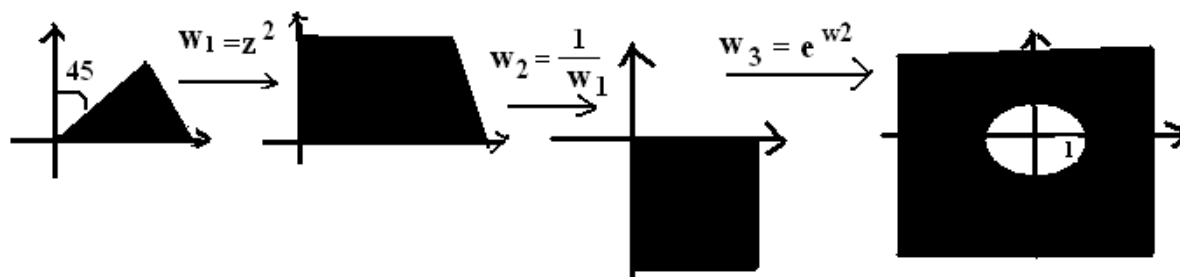
$w = Re^{i\phi}$ و $z = x + iy$ داریم

$$w = e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} R = e^x \\ \phi = y \end{cases} \quad (۱۰-۴)$$

مثال (۸-۴) نگاشت ناحیه $D = \{z \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$ را تحت رابطه $w = e^z$ بیابید.



مثال (۹-۴) تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{z \mid 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ را تحت رابطه $w = e^{\frac{1}{z^2}}$ بیابید.



۴-۸- نگاشت لگاریتمی

این نگاشت بصورت $w = Ln(z)$ تعریف می‌شود. با توجه به چند مقداری بودن تابع $w = Ln(z)$ ، در این حالت فقط مقدار اصلی مدنظر می‌باشد. لذا داریم

$$w = Ln(z) = Lnr + i\theta \Rightarrow \begin{cases} u = Lnr \\ v = \theta \end{cases} \quad (۱۱-۴)$$

نگاشت فوق در تمامی صفحه مختلط غیر از مبدا و Xهای منفی تحلیلی می‌باشد.

۴-۹- نگاشت سینوس

این نگاشت بصورت $w = \sin(z)$ تعریف می‌شود و برای آن داریم

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u + iv \quad (۱۲-۴)$$

نکته: دقت شود که سینوس و کسینوس با آرگومان‌های مختلط دیگر محدودیت بین ۱ و -۱ را ندارد.

نکته: تابع سینوس متناوب بوده لذا در تمامی صفحه یک به یک نیست لذا بایست Xها را محدود انتخاب کرد.

مثال (۴-۱۰) حاصل $|\sin z|^2$ را بیابید.

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

مثال (۴-۱۱) تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \mid \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \pi, \operatorname{Im} z \geq 0 \right\}$ را تحت رابطه $w = -\cos z$ بیابید.

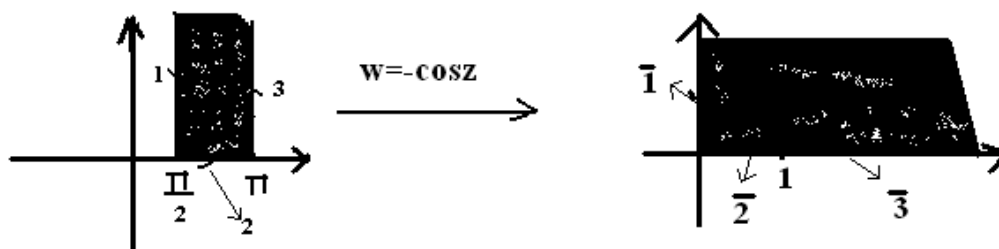
با استفاده از روابط زیر و تقسیم‌بندی ناحیه D به سه مسیر داریم

$$w = -\cos z = -\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y \Rightarrow \begin{cases} u = -\cos x \cosh y \\ v = \sin x \sinh y \end{cases}$$

$$\text{path 1: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y : \infty \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{1}: \begin{cases} u = 0 \\ v = \sinh y : \infty \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{path 2: } \begin{cases} x : \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{2}: \begin{cases} u = -\cos x : 0 \rightarrow 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\text{path 3: } \begin{cases} x = \pi \\ y : 0 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \bar{3}: \begin{cases} u = \cosh y : 1 \rightarrow \infty \\ v = 0 \end{cases}$$



۴-۱۰- تبدیلات متوالی

در حالت کلی اکثر تبدیلات را می‌توان بر حسب تبدیلات دیگر بدست آورد برای مثال

$$w = \cos(z) = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} w_1 = z + \frac{\pi}{2} \\ w_2 = \sin w_1 \end{cases} \quad (۴-۱۲)$$

$$w = \frac{3z-1}{2z+1} = 1.5 - \frac{2.5}{2z+1} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2z+1 \\ w_2 = \frac{1}{w_1} \\ w_3 = -2.5w_2 + 1.5 \end{cases} \quad (13-4)$$

$$w = \tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \xrightarrow{e^{2iz}=t} w = -i \frac{t-1}{t+1} \quad (14-4)$$

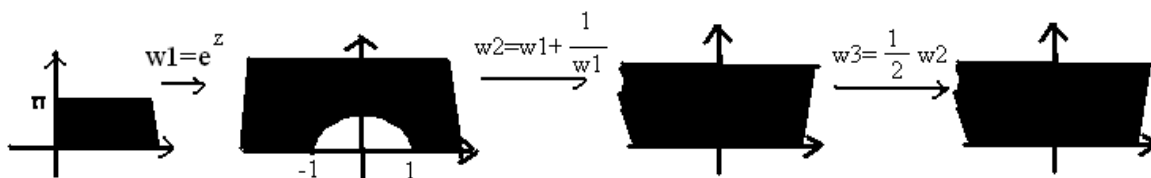
یعنی نگاشت تابع تانژانت به یک نگاشت نمایی و بدنبال آن بک نگاشت موبیوس تبدیل می شود.

به همین صورت می توان برای سایر توابع مثلثاتی و هیپربولیک بر حسب توابع معرفی شده تبدیلات مناسب را بدست آورد.

مثال (۱۲-۴) تبدیل یافته ناحیه $D = \{z \mid 0 \leq \text{Re } z, 0 \leq \text{Im } z \leq \pi\}$ را تحت نگاشت $w = \cosh z$ بیابید.

از آنجایی که $\cosh z = \frac{e^z + \frac{1}{e^z}}{2}$ لذا این نگاشت را بصورت ترکیبی از نگاشت های $w_1 = e^z$

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{w_1} \text{ و } w_3 = \frac{1}{2} w_2 \text{ در نظر می گیریم.}$$



تمرین های بخش چهارم

- ۱-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \{z \mid 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4\}$ را با نگاشت $w = -i3z + 2i - 3$ بیابید.
- ۲-۴ نگاشت ناحیه $D = \left\{z \mid 1 < |z| < 2, 0 \leq \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}\right\}$ را تحت رابطه $w = z^2$ بدست آورید.
- ۳-۴ نگاشت ناحیه $D = \{z \mid x^2 - y^2 < 1, 2xy < 0\}$ را تحت رابطه $w = z^2$ بدست آورید.
- ۴-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{z \mid 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ را با نگاشت $w = -\frac{i}{2}z^4 + 1$ بیابید.
- ۵-۴ تبدیل یافته ناحیه محصور بین دو دایره $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط $w = \frac{1}{z}$ را بدست آورید.
- ۶-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{z \mid |z| < 2, \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ توسط $w = \frac{1}{z}$ را بدست آورید.
- ۷-۴ تبدیل یافته ناحیه محصور بین $|z-1| \leq 1$ و $x+y \geq 1$ توسط $w = \frac{1}{z}$ را بدست آورید.
- ۸-۴ دایره $|z|=a$ از صفحه z تحت نگاشت $w = z + \frac{a^2}{z}$ در صفحه w به چه ناحیه ای تبدیل می شود.
- ۹-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \{z \mid 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 20 \leq \operatorname{Im} z \leq 30\}$ را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.
- ۱۰-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{z \mid \operatorname{Re} z \leq 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.
- ۱۱-۴ نگاشتی بیابید که سه نقطه $z_3 = 1, z_2 = -1, z_1 = \infty$ به راسته نقطه $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = i$ بنگارد.
- ۱۲-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \{z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z, -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ را تحت نگاشت $w = -2\sin\left(\frac{i\pi}{2}z\right) + i$ بیابید.
- ۱۳-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{z \mid \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \pi, 0 \leq \operatorname{Im} z\right\}$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ بیابید.
- ۱۴-۴ تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{z \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} z\right\}$ را تحت نگاشت $w = (1+i)\sin \pi z$ بیابید.

۵- سری های مختلط

۵-۱- دنباله ها

اگر به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند z_n نسبت داده شود، آنگاه اعداد $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ یک دنباله را تشکیل می دهند که بصورت $\{z_n\}$ نمایش داده می شود. دنباله $\{z_n\}$ را همگرا گویند هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A \quad (۱-۵)$$

A را حد دنباله فوق نامیم که در حالت کلی عددی مختلط می باشد. دنباله ای که همگرا نیست را واگرا می نامند.

قضیه ۱-۵

دنباله $\{z_n\}$ با $z_n = x_n + iy_n$ به $A = X + iY$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله های قسمت های حقیقی $\{x_n\}$ به X و $\{y_n\}$ به Y همگرا باشد.

تعریف ۱-۵

دنباله $\{z_n\}$ را کراندار گوئیم هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد طوری که

$$|z_n| < M, \quad \forall n \in N \quad (۲-۵)$$

اگر دنباله ای کراندار نباشد آن را بیکران می نامیم.

قضیه ۲-۵

هر دنباله همگرا کراندار است لذا هر دنباله بیکران واگراست.

۵-۲- سری ها

اگر $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد آنگاه مجموع زیر را سری نامتناهی یا سری می‌نامیم

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + \dots \quad (3-5)$$

قضیه ۵-۳

اگر $z_n = x_n + iy_n$ باشد. آنگاه سری (۳-۵) را همگرا گویند اگر و فقط اگر سری قسمت‌های حقیقی و

موهومی آن $(\sum_{i=1}^{\infty} x_i, \sum_{i=1}^{\infty} y_i)$ همگرا باشد.

تعریف ۵-۲

سری (۳-۵) را همگرا مطلق می‌نامند هرگاه سری زیر همگرا باشد.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i| = |z_1| + |z_2| + \dots \quad (4-5)$$

توجه: اگر سری (۳-۵) همگرا ولی سری (۴-۵) واگرا باشد آنگاه سری (۳-۵) را همگرای مشروط می‌نامیم.

قضیه ۵-۴

هرگاه سری (۳-۵) همگرا باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ می‌شود.

قضیه ۵-۵

هرگاه سری (۳-۵) همگرای مطلق باشد آنگاه همگرا نیز می‌باشد.

۵-۲-۱- آزمون‌های همگرایی

آزمون‌های همگرایی در مجموعه اعداد مختلط دقیقاً شبیه آزمون‌های همگرایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد.

قضیه ۵-۶ (آزمون مقایسه)

اگر به ازای سری مفروض $z_1 + z_2 + \dots$ بتوان سری همگرای $b_1 + b_2 + \dots$ که جملات آن حقیقی نامنفی هستند طوری یافت که به ازای هر n متعلق به اعداد طبیعی داشته باشیم

$$|z_n| < b_n \quad (5-5)$$

آنگاه سری مفروض مطلقاً همگرا خواهد بود.

قضیه ۵-۷ (آزمون نسبت)

اگر برای سری مختلط $z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ (برای تمامی n های طبیعی) داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L \quad (6-5)$$

آنگاه

الف) سری مطلقاً همگرا است اگر $L < 1$.

ب) سری واگراست اگر $L > 1$.

ج) به ازای $L = 1$ این آزمون همگرایی و یا واگرایی را نتیجه نمی‌دهد.

قضیه ۵-۸ (آزمون ریشه)

اگر برای سری مختلط $z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ (برای تمامی n های طبیعی) داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L \quad (7-5)$$

آنگاه

الف) سری مطلقاً همگرا است اگر $L < 1$.

ب) سری واگراست اگر $L > 1$.

ج) به ازای $L = 1$ این آزمون همگرایی و یا واگرایی را نتیجه نمی دهد.

مثال (۱-۵) در مورد همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} + 3} (4-i)^n$ نظر دهید.

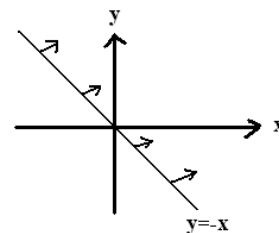
حل: با استفاده از آزمون ریشه داریم $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{2^{2n} + 3} (4-i)^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|4-i|}{\sqrt{4^n + 3}} = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1 \right)$ لذا سری فوق واگرا است.

مثال (۲-۵) در مورد همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100 + 200i)^n}{n!}$ نظر دهید.

حل: سری فوق همگرا است زیرا داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|100 + 200i|^{n+1} n!}{|100 + 200i|^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|100 + 200i|}{n+1} \rightarrow 0$

مثال (۳-۵) ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+1} \right)^n$ را بیابید.

حل: با اعمال آزمون ریشه داریم



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{z-i}{z+1} \right|^n} = \left| \frac{z-i}{z+1} \right| < 1 \Rightarrow |z-i| < |z+1| \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Rightarrow$$

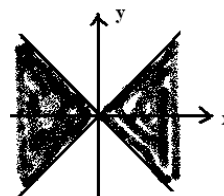
$$-y < x \text{ or } y > -x$$

مثال (۴-۵) ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz^2}$ را بیابید

حل: با اعمال آزمون ریشه داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|e^{-nz^2}|} = |e^{-z^2}| < 1 \Rightarrow |e^{y^2-x^2+i2xy}| = |e^{y^2-x^2}| \cdot |e^{i2xy}| = |e^{y^2-x^2}| = e^{y^2-x^2} < 1 = e^0$$

$$y^2 - x^2 < 0 \Rightarrow y^2 < x^2 \Rightarrow |y| < |x|$$



۵-۲-۲- سری های توانی

اگر جمله های یک سری متغیر باشد (تابعی از متغیر z) آنگاه سری را سری تابع می نامند. سری توانی مهمترین

سری تابع است که بر حسب توان های $z - z_0$ نمایش داده می شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (۸-۵)$$

اگر $z_0 = 0$ باشد حالت خاص سری توانی (سری مک لورن) بدست می آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (۹-۵)$$

قضیه ۹-۵ (همگرایی سری توانی)

اگر سری توانی (۸-۵) در نقطه $z = z_1 \neq z_0$ همگرا باشد آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله اش از z_0 ،

کمتر از z_1 باشد ($|z - z_0| < |z_1 - z_0|$) مطلقاً همگرا می باشد. و اگر سری توانی (۸-۵) در نقطه $z = z_2 \neq z_0$

واگرا باشد آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله اش از z_0 ، بیشتر از z_2 باشد ($|z - z_0| \geq |z_2 - z_0|$) واگرا می-باشد.

قضیه ۵-۱۰ (شعاع همگرایی سری توانی)

فرض کنید دنباله $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ یا $\sqrt[n]{a_n}$ که در آن $n=1,2,\dots$ همگرا بوده و حد آن L باشد. در این صورت

الف) اگر $L=0$ باشد آنگاه سری توانی (۵-۸) به ازای هر z همگرا بوده و شعاع همگرایی آن بینهایت است.

ب) اگر $L \neq 0$ ($L > 0$) باشد آنگاه طبق رابطه کوشی-آدامار شعاع همگرایی سری توانی (۵-۸) $R = \frac{1}{L}$

بوده و سری برای تمامی مقادیر z که در $|z - z_0| < R$ صدق می کنند همگرا و برای تمامی مقادیر z که در

$|z - z_0| > R$ صدق می کنند واگرا می باشد. در این صورت R را شعاع همگرایی، دایره $|z - z_0| = R$ را دایره

همگرایی و قرص $|z - z_0| < R$ را قرص همگرایی می نامند.

قضیه ۵-۱۱

سری توانی زیر را که از مشتق جمله به جمله از سری توانی (۵-۸) حاصل شده است، سری مشتق سری توانی

می نامند که شعاع همگرایی آن با شعاع همگرایی سری توانی اصلی برابر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \dots \quad (10-5)$$

قضیه ۵-۱۲

سری توانی زیر را که از انتگرال جمله به جمله از سری توانی (۵-۸) حاصل شده است دارای شعاع همگرایی

برابر با شعاع همگرایی سری توانی اصلی می باشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} = a_0(z - z_0) + \frac{a_1}{2}(z - z_0)^2 + \dots \quad (11-5)$$

قضیه ۵-۱۳

هر سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ در داخل دایره همگرایی خود، تابعی تحلیلی را نمایش می‌دهد. مشتقات این تابع با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری اصلی بدست می‌آید لذا دارای شعاع همگرایی برابر با سری اصلی می‌باشد.

مثال (۵-۵) مرکز همگرایی و دایره همگرایی سری‌های توانی زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3z - 2i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(z - \frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}, \quad \left|z - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} (z + \pi i)^n \Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)!(n!)^3}{((n+1)!)^3 (3n)!} = 27 \Rightarrow R = \frac{1}{27}, \quad |z + \pi i| < \frac{1}{27}$$

قضیه ۵-۱۴ (سری تیلور)

فرض کنید $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی بوده و $z = z_0$ نقطه‌ای در D باشد در این صورت یک و تنها یک سری توانی به مرکز z_0 وجود دارد که $f(z)$ را نشان می‌دهد. این سری را سری تیلور نامیده و بصورت زیر نمایش می‌دهند.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12-5)$$

در سری تیلور اگر $z_0 = 0$ قرار دهیم بسط مک‌لورن حاصل می‌گردد. در زیر بسط مک‌لورن بعضی از توابع مقدماتی مهم آمده است. این بسط‌ها را براحتی با (۵-۱۲) بدست می‌آید. و بهتر است به خاطر سپرده شوند.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad (13-5)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty \quad (14-5)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad |z| < \infty \quad (15-5)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad |z| < \infty \quad (16-5)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad |z| < \infty \quad (17-5)$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad |z| < \infty \quad (18-5)$$

مثال (5-6) سری مک‌لوران توابع زیر را بدست آورید.

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad , \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \ln(1+z) = \int \frac{dz}{1+z} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad , \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad , \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \tan^{-1}(z) = \int \frac{dz}{1+z^2} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad , \quad |z| < 1$$

مثال (5-7) بسط تیلور تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ را حول $z=1$ بنویسید.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad , \quad |z-1| < 1$$

مثال (۸-۵) بسط تیلور تابع $f(z) = \frac{2}{3-4z}$ را حول $z=2$ بنویسید.

$$f(z) = \frac{2}{3-4z} = 2 \times \frac{1}{3-4(z-2)-8} = 2 \times \frac{1}{-5-4(z-2)} = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{1+\left(\frac{4}{5}(z-2)\right)} =$$

$$-\frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{5}\right)^n (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2 \times 4^n}{5^{n+1}}\right) (z-2)^n, \quad |z-2| < \frac{5}{4}$$

قضیه ۵-۱۵

سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ با $R>0$ در هر قرص دایره‌ای $|z-z_0| < r$ با $r < R$ همگرای یکنواخت است.

تعریف ۵-۲

اگر تابع $f(z)$ در D تحلیلی باشد نقطه z_0 متعلق به D را صفر تابع $f(z)$ گویند اگر $f(z_0) = 0$ باشد.

تعریف ۵-۲

فرض کنید z_0 یک صفر تابع $f(z)$ باشد، کوچکترین عدد صحیح n را که $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ باشد را مرتبه صفر $f(z)$

می‌نامیم.

مثال (۹-۵) مرتبه صفر $f(z) = z^2$ در $z=0$ را بیابید.

دارای مرتبه دو می‌باشد چون $f''(0) = 2 \neq 0$ است.

تعریف ۵-۳

نقطه $z = z_0$ را نقطه تکین گویند هرگاه تابع $f(z)$ در آن نقطه تحلیلی نباشد. اما در همسایگی آن نقطه تابع تحلیلی

است نقاط تکین را می‌توان به دو دسته تکین تنها و تکین غیر تنها (انباشته) تقسیم‌بندی نمود. نقطه $z = z_0$ را نقطه

تکین تنها گویند هرگاه دارای یک همسایگی بدون تکین‌های دیگر از $f(z)$ باشد. در برخی مواقع ملاحظه

می گردد که تابع دارای بینهایت نقطه تکین است که همگی در حال نزدیک شدن یا انباشته شدن بر روی یکی از نقاط تکین می باشند، چنین نقطه تکینی را اصطلاحاً تکین غیر تنها (انباشته) می گویند.

تعریف ۴-۵

نقطه تکین تنها z_0 را یک قطب مرتبه m می نامند هرگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ حاصل حد $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ می نامند. موجود و مخالف صفر کند و در غیر این صورت نقطه تکین تنها z_0 را تکین اساسی تابع $f(z)$ می نامند.

مثال (۱۰-۵) نقاط تکین و نوع آن ها را تعیین کنید.

الف) تابع $f(z) = \frac{1 - e^{z^3}}{z^7}$ در $z=0$ دارای تکین تنها از نوع قطب مرتبه ۴ می باشد چون

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^4 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{z^3}}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-3z^2 e^{z^3}}{3z^2} = -1 \neq 0$$

ب) تابع $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ دارای نقاط تکین $z = \frac{1}{k\pi} = \pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots$ و $z=0$ است چون در تمامی این

نقاط تابع تحلیلی نمی باشد. نقطه $z=0$ تکین غیر تنها است چون سایر نقاط تکین تنها

$$z = \frac{1}{k\pi} = \pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots$$
 به سمت انباشته شدن بر $z=0$ حرکت می کنند.

ج) تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ در $z=0$ دارای تکین تنها از نوع تکین اساسی است چون هیچ \lim ای یافت

نمی شود که حاصل $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m e^{\frac{1}{z}}$ را موجود و غیر صفر کند.

د) تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z=0$ دارای نقطه تکین برداشتنی است چون می توان تابع $f(z)$ را در $z=0$ طوری تعریف

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$$

کرد که تابع در آن نقطه تحلیلی گردد برای این منظور بایست $f(z)$ را بصورت

تعریف کرد.

اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد در آن نقطه بسط تیلور نخواهد داشت. اما چنانچه نقطه مذکور تکین تنها باشد

می توان برای تابع حول نقطه مذکور بسطی به نام بسط لوران را نوشت. که دارای ویژگی های زیر است.

• بالاترین توان منفی $(z - z_0)$ اگر موجود باشد، مرتبه قطب z_0 را مشخص می کند و اگر بالاترین توان

منفی موجود نباشد به این معنی است که z_0 تکین اساسی تابع $f(z)$ است.

• ضریب جمله $\frac{1}{z - z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ اگر موجود باشد (b_1) مانده تابع $f(z)$ در $z = z_0$ نامیده می -

شود

قضیه ۵-۱۶ (قضیه لوران)

اگر تابع $f(z)$ روی دو دایره متحدالمركز C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد آنگاه تابع $f(z)$ را

می توان با سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \dots \quad (19-5)$$

نمایش داد که ضرایب سری را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (۲۰-۵)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z) dz$$

که C مسیر بسته دلخواهی است که در طوق مابین دو دایره C_1 و C_2 قرار دارد و دایره داخلی را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور می‌زند.

برای محاسبه سری لوران معمولاً از (۲۰-۵) استفاده نمی‌شود برای آشنایی با این امر به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال (۱۱-۵) سری لوران تابع $f(z) = (z+3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ را حول $z=-2$ بدست آورده و مانده را مشخص کنید

حل: با استفاده از بسط سینوس داریم

$$f(z) = (z+3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = (z+2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1} = 1 + \frac{1}{z+2} + \frac{-1}{3!(z+2)^2} + \dots$$

لذا مقدار مانده تابع حول $z=-2$ مقدار $b_1 = 1$ می‌باشد.

مثال (۱۲-۵) سری لوران تابع $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ را به مرکز صفر بیابید و مانده را مشخص کنید.

حل: با استفاده از بسط تابع نمایی داریم

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

مقدار مانده $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ می‌باشد.

مثال (۵-۱۳) سری لوران تابع $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ را به مرکز صفر بیابید و مانده را مشخص کنید.

حل: با استفاده از بسط مکملورن تابع نمایی و تابع $\frac{1}{1-z}$ داریم.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \times e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = (1+z+z^2+z^3+\dots)(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots) \\ &= (1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots) + \frac{(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots)}{z} + \dots \end{aligned}$$

مقدار مانده $(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots)$ می باشد.

مثال (۵-۱۴) بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را حول $z=2$ بدست آورید.

با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی داریم

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{0.5}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{0.5}{z-2} = \frac{0.5}{2+(z-2)} + \frac{-1}{1+(z-2)} + \frac{0.5}{z-2}$$

$$0.25 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n + 0.5(z-2)^{-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z-2}{2} \right| < 1 \\ |z-2| < 1 \end{array} \Rightarrow 0 < |z-2| < 1 \right.$$

توجه: در صورتی که سری لوران یک تابع خواسته شده باشد. بهتر است شرط همگرایی سری نیز نوشته شود در

مثال قبل فقط در ناحیه همگرایی بدست آمده سری همگرا می شود. اگر در صورت سؤال شرط همگرایی قید

شده باشد بایست مسأله را به گونه ای بازنویسی نمود که قید خواسته شده حاصل گردد.

مثال (۵-۱۵) سری لوران مثال قبل را در ناحیه $1 < |z-2| < 2$ حول $z=2$ بدست آورید.

$$1 < |z-2| < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{|z-2|} < 1 \Rightarrow f(z) = \frac{0.5}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{0.5}{z-2} = \frac{0.25}{1 + \left(\frac{z-2}{2}\right)} + \frac{-1}{(z-2)+1} + \frac{0.5}{z-2}$$

$$f(z) = \frac{0.25}{1 + \left(\frac{z-2}{2}\right)} + \frac{\frac{-1}{(z-2)}}{1 + \left(\frac{1}{z-2}\right)} + \frac{0.5}{z-2} = 0.25 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n + \frac{-1}{(z-2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-2}\right)^n + \frac{0.5}{z-2}$$

$$f(z) = 0.25 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-2}\right)^{n+1} + \frac{0.5}{z-2} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z-2}{2}\right| < 1 \\ \left|\frac{1}{z-2}\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < |z-2| < 2$$

۵-۳- روش‌های محاسبه مانده

اگر چه یک راه حل همیشگی برای یافتن مانده تابع در نقطه تکین z_0 استفاده از سری لوران می‌باشد اما چنانچه

z_0 یک نقطه تکین تنها از نوع قطب باشد می‌توان با روش‌های زیر و به سادگی مانده را تعیین نمود.

الف) اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد آنگاه مانده $f(z)$ در z_0 را می‌توان بصورت زیر حساب کرد

$$\text{Residual}(f(z))|_{z_0} = \text{Res}(f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (۲۱-۵)$$

ب) اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد و $P(z_0) \neq 0$ باشد داریم

$$\text{Res}(f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \quad (۲۲-۵)$$

ج) اگر z_0 یک قطب مرتبه m تابع $f(z)$ باشد داریم

$$\text{Res}(f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\} \quad (۲۳-۵)$$

مثال (۵-۱۶) مانده تابع $f(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ را در نقطه تکین $z=2i$ بدست آورید.

حل: چون نقطه $z=2i$ یک قطب ساده است لذا برای محاسبه مانده می توان از الف یا ب استفاده کرد.

$$\operatorname{Res}(f(2i)) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{2z+3}{(z-1)(z+2i)(z-2i)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z+3}{(z-1)(z+2i)} = \frac{4i+3}{(2i-1)(4i)} \quad (\text{الف})$$

$$\operatorname{Res}(f(2i)) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z+3}{((z-1)(z^2+4))'} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z+3}{(z^2+4)+2z(z-1)} = \frac{4i+3}{(2i-1)(4i)} \quad (\text{ب})$$

مثال (۵-۱۷) مانده تابع $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ را در $z=0$ بدست آورید.

چون $\cos(0) = 1 \neq 0$ است لذا $\operatorname{Res}(f(0)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{(\sin(z))'}$ است.

مثال (۵-۱۸) مانده تابع $f(z) = \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}$ را در $z = -\frac{1}{2}$ بدست آورید.

نقطه تکین $z = -\frac{1}{2}$ قطب مرتبه ۴ است لذا

$$\operatorname{Res}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d^3}{dz^3} \left[\left(z + \frac{1}{2}\right)^4 \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4} \right] = \frac{1}{3 \times 2^4} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{d^3}{dz^3} (\sin 3z) = \frac{-9}{32} \cos\left(-\frac{3}{2}\right)$$

نکته: اگر z_0 نقطه تکین تابع $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد بطوری که $Q(z_0) = Q'(z_0) = 0$ و $Q''(z_0) \neq 0$ و

$P(z_0) \neq 0$ باشد آنگاه برای محاسبه مانده تابع $f(z)$ در z_0 می توان از رابطه زیر استفاده نمود.

$$\operatorname{Res}(f(z_0)) = \frac{2P'(z_0)}{Q''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{P(z_0)Q'''(z_0)}{(Q''(z_0))^2} \quad (۵-۲۴)$$

مثال (۱۹-۵) مانده تابع $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ را در $z=0$ بدست آورید.

$$Q(z) = ze^z - z \Rightarrow Q'(z) = e^z + ze^z - 1 \Rightarrow Q''(z) = 2e^z + ze^z \Rightarrow Q'''(z) = 3e^z + ze^z$$

$$P(z) = 1 \Rightarrow P'(z) = 0, Q'(0) = 1, Q''(0) = 2, Q'''(0) = 3$$

$$\text{Res}(f(0)) = \frac{2 \times 0}{2} - \frac{2 \times 1 \times 3}{3 \times 2^2} = -\frac{1}{2}$$

مثال (۲۰-۵) مانده تابع $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}$ را در نقاط تکین آن تعیین کنید.

$$z = 1 \Rightarrow \text{Res}(f(1)) = \sin 1$$

$$z = 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-1} \times \sin \frac{1}{z} = (-1 - z - z^2 + \dots) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} \dots \right) \Rightarrow \text{Res}(f(0)) = (-1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots)$$

$$\text{Res}(f(0)) = -\sin 1$$

تمرین های بخش پنجم

۱-۵ مرکز و شعاع همگرایی هر یک از سری های توانی زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-3i)^n \quad (\text{ج}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (5z-6)^n \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^n} \quad (\text{الف})$$

۲-۵ سری مکلاورن توابع زیر و شعاع همگرایی آنها را تعیین کنید.

$$\frac{2z^2 + 15z + 34}{(z+4)^2(z-2)} \quad (\text{ج}) \quad \sin(2z^2) \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{1-z^5} \quad (\text{الف})$$

۳-۵ بسط لوران تابع $f(z) = \frac{3z-2}{z-\frac{1}{2}}$ را در نواحی زیر بدست آورید

$$\left| z - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{4} \quad (\text{ج}) \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (\text{ب}) \quad |z| < \frac{1}{2} \quad (\text{الف})$$

۴-۵ بسط لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ را در ناحیه $|z-1| > 2$ بدست آورید.

۵-۵ سری لوران تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi}$ را حول $z = \pi$ بنویسید. $(\sin(z) = \sin((z - \pi) + \pi) = -\sin(z - \pi))$

۶-۵ نقاط تکین و نوع آنها را در توابع زیر مشخص کنید.

A) $ze^{\frac{1}{z}}$ B) $\frac{1 - e^{2z}}{z^4}$ C) $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ D) $\frac{\sin z}{(z-3)^4}$ E) $\frac{\sin z}{z}$ F) $\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$

۷-۵ مقدار مانده هر یک از توابع زیر را در نقاط تکین آنها بدست آورید.

ب) $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$

الف) $f(z) = (z-1)^5 \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$

د) $f(z) = \frac{z^2}{(3z-2)^3}$

ج) $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{z^2 + 1}$

و) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$

ه) $f(z) = \frac{2z^2 + 3z}{(z-1)(z^2 + 9)}$

ک) $f(z) = \frac{\cosh z}{z^4 - 1}$

ز) $f(z) = \cot z$

م) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$

ل) $f(z) = \sec z$

ح) $f(z) = \frac{z^4}{z^2 - iz + 2}$

ن) $f(z) = \frac{2}{(z^2 - 1)^2}$

۶- انتگرال مختلط

یکی از مباحث جالب و قابل توجه در مطالعه فضای مختلط، انتگرال‌های مختلط می‌باشد. انتگرال‌های مختلط با توجه به وجود قضایای مربوط به آن به سادگی قابل حل بوده و کاربرد فراوانی دارند. علاوه بر این از انتگرال‌های مختلط می‌توان برای محاسبه بعضی از انتگرال‌های حقیقی و مثلثاتی استفاده نمود. انواع انتگرال‌های مختلطی که در این بخش معرفی می‌گردد به شرح زیر می‌باشد.

الف) انتگرال‌های مختلط به فرم $\int_C f(z) dz$ (یک کانتور باز است) که در دو حالت زیر مورد بررسی قرار می‌-

گیرند

- $f(z)$ تحلیلی است که در این صورت انتگرال به مسیر بستگی ندارد.
 - $f(z)$ تحلیلی نیست که در این صورت انتگرال را به زیر مسیری بر حسب x, y, r, θ یا t تقسیم نموده و همانند انتگرال‌های حقیقی با آن برخورد می‌کنیم.
- ب) انتگرال‌های مختلط به فرم $\oint_C f(z)$ که به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند.
- $f(z)$ در داخل و روی کانتور C تحلیلی می‌باشد که در این صورت طبق قضیه کوشی-گورسا که متعاقباً بیان می‌گردد حاصل انتگرال صفر می‌شود.
 - تابع $f(z)$ در تعدادی نقاط محدود در C تحلیلی نمی‌باشد که با قضیه مانده حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.
- ج) انتگرال‌های حقیقی یا مثلثاتی خاصی که می‌توان حاصل آن‌ها را با انتگرال‌های مختلط جایگزین محاسبه نمود.

۱-۶- انتگرال روی خط در صفحه مختلط

در انتگرال روی خط مختلط، در طول یک منحنی مانند C در صفحه مختلط انتگرال گیری صورت می گیرد. منحنی C را که بر آن انتگرال گیری انجام می گیرد مسیر انتگرال گیری می نامند.

هر مسیر انتگرال گیری را می توان بصورت

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (1-6)$$

نمایش داد که در آن t یک پارامتر حقیقی است.

تعریف ۱-۶

منحنی C را هموار گویند هرگاه در هر نقطه دارای مشتقی پیوسته و غیر صفر باشد.

تعریف ۲-۶

منحنی C را تکه ای هموار گویند هرگاه از تعداد متناهی منحنی هموار که از انتها به هم وصل شده باشند، تشکیل شده باشد.

تعریف ۳-۶

مسیر بسته ساده مسیری است که خود را قطع نکند و بر خودش مماس نیز نباشد.

تعریف ۴-۶

ناحیه D را همبند ساده گویند اگر هر مسیر بسته ساده در D فقط شامل نقاط D باشد. بطور کلی ناحیه داخلی یک منحنی بسته ساده مانند دایره، مربع یا ... همبند ساده است.

تعریف ۵-۶

ناحیه ای که همبند ساده نباشد را همبند چند گانه می گویند

قضیه ۶-۱ (انتگرال گیری با استفاده از مسیر)

هرگاه C یک مسیر تکه ای هموار باشد که با $z=z(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، نمایش داده شده باشد و $f(z)$ یک تابع پیوسته بر C باشد آنگاه داریم.

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad (۶-۲)$$

سه خاصیت اساسی انتگرال روی خط

• انتگرال گیری یک اپراتور خطی است یعنی

$$\int_C [af_1(z) + bf_2(z)] dz = a \int_C f_1(z) dz + b \int_C f_2(z) dz$$

• اگر C را به دو زیرمسیر C_1 و C_2 تبدیل کنیم داریم

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

• اگر جهت انتگرال گیری را عوض کنیم حاصل انتگرال در یک منها ضرب می شود.

• اگر L طول منحنی مسیر C و M عدد حقیقی باشد که در هر نقطه از C ، $|f(z)| \leq M$ باشد آنگاه

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \text{ می باشد.}$$

مثال (۶-۱) حاصل انتگرال $\int_C (z^2 + \bar{z}) dz$ را روی کانتور باز C که بصورت $y = x^2$ ، $0 \leq x \leq 2$ تعریف شده

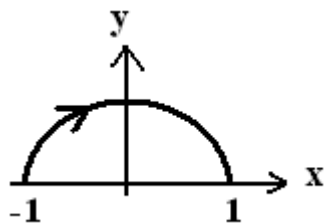
است را محاسبه کنید.

حل:

$$\int_C (z^2 + \bar{z}) dz = \int_C ((x+iy)^2 + (x-iy)) d(x+iy) \stackrel{y=x^2}{=} \int_0^2 ((x+ix^2)^2 + (x-ix^2)) d(x+ix^2) = \int_0^2 f(x) dx + i \int_0^2 g(x) dx$$

که به راحتی همانند انتگرال های حقیقی قابل حل می باشد.

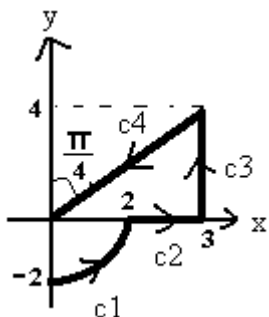
مثال (۶-۲) حاصل انتگرال $\int_C (z^2 + z\bar{z})dz$ را روی مسیر زیر محاسبه کنید.



با توجه به مسیر داریم $\begin{cases} z = e^{i\theta} & \pi > \theta > 0 \\ dz = ie^{i\theta} \end{cases}$ لذا داریم

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})dz = \int_{\pi}^0 (e^{i2\theta} + 1)(ie^{i\theta})d\theta = \int_{\pi}^0 (ie^{i3\theta} + ie^{i\theta})d\theta = \frac{1}{3}e^{i3\theta} + e^{i\theta} \Big|_{\pi}^0 = \frac{8}{3}$$

مثال (۶-۳) حاصل انتگرال $\int_C (z^2 + z)dz$ را روی مسیر داده شده بیابید.



$$z = \begin{cases} C_1: z = 2e^{i\theta} \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \rightarrow dz = 2ie^{i\theta} d\theta \\ C_2: z = x, \quad 2 < x < 3 \quad \rightarrow dz = dx \\ C_3: z = 3 + iy, \quad 0 < y < 4 \quad \rightarrow dz = idy \\ C_4: z = re^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 5 > r > 0 \quad \rightarrow dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr \end{cases}$$

با توجه به مسیر داریم

لذا داریم

$$\int_C (z^2 + z)dz = \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 (4e^{i2\theta} + 2e^{i\theta})(2ie^{i\theta})d\theta + \int_2^3 (x^2 + x)dx + \int_0^4 ((3 + iy)^2 + 3 + iy)(idy) + \int_5^0 \left(r^2 e^{i\frac{\pi}{2}} + re^{i\frac{\pi}{4}} \right) e^{i\frac{\pi}{4}} dr = 2 - \frac{8}{3}i$$

که به راحتی و همانند انتگرال‌های حقیقی محاسبه می‌شود.

قضیه ۶-۲ (انتگرال گیری نامعین توابع تحلیلی)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه انتگرال نامعینی از $f(z)$ در دامنه D وجود دارد، یعنی تابع

تحلیلی مانند $F(z)$ وجود دارد طوری که $F'(z) = f(z)$ است. و برای هر مسیر C در D که دو نقطه z_0 و z_1 را

بهم وصل می کند داریم

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (3-6)$$

نکته: اگر $f(z)$ تام باشد می توان به جای D صفحه مختلط را بکار برد.

نکته: اگر $f(z)$ در دامنه خود تحلیلی باشد آنگاه انتگرال روی خط آن مستقل از مسیر بوده و فقط به نقاط ابتدایی

و انتهایی مسیر بستگی دارد.

مثال (۶-۵) حاصل انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$A) \int_{8+\pi}^{8-3\pi} e^{\frac{z}{2}} dz = 2e^{\frac{z}{2}} \Big|_{8+\pi}^{8-3\pi} = 2e^4 \left[e^{-i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}} \right] = 0$$

$$B) \int_{-i\pi}^{i\pi} \cos z dz = \sin z \Big|_{-i\pi}^{i\pi} = 2 \sin(i\pi) = 2i \sinh(\pi) = 23.097i$$

مثال (۶-۷) با اعمال قضیه (۶-۲) مثال (۶-۳) را دوباره حل کنید.

چون تابع $f(z)$ تحلیلی است لذا انتگرال آن مستقل از مسیر بوده و به مسیر بستگی ندارد

$$\int_C (z^2 + z) dz = \int_{-2i}^0 (z^2 + z) dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \Big|_{-2i}^0 = 2 - \frac{8}{3}i$$

۶-۲- قضیه انتگرال کوشی

قضیه ۶-۳ (قضیه انتگرال کوشی یا قضیه کوشی - گورسا)

هر گاه $f(z)$ در دامنه کراندار همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر مسیر بسته ساده C واقع در D داریم

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (۶-۴)$$

مثال (۶-۶) برای هر مسیر بسته ساده حاصل $\oint_C e^z dz = \oint_C \cos z dz = \oint_C \sin z dz = \oint_C z^n dz = 0$ صفر می شود.مثال (۶-۷) حاصل انتگرال های $\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$ و $\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz$ که n متعلق به اعداد طبیعی است را

بدست آورید.

با توجه به تحلیلی بودن تابع $(z-z_0)^n$ در $|z-z_0|=R$ و طبق قضیه کوشی-گورسا حاصل انتگرال صفر است.با توجه به تحلیلی نبودن تابع $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ در $|z-z_0|=R$ داریم.

$$\Delta z = z_0 + Re^{i\theta} \quad 0 < \theta < 2\pi \Rightarrow dz = i Re^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n e^{in\theta}} i R e^{i\theta} d\theta = (iR^{1-n}) \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ i2\pi & n = 1 \end{cases}$$

مثال (۶-۸) حاصل انتگرال $\oint_{|z-1-2i|=1} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ را بدست آورید.

با توجه به تحلیلی بودن تابع در ناحیه انتگرال گیری جواب انتگرال صفر می شود.

مثال (۶-۹) حاصل انتگرال $\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \left(\cos z + \frac{1}{z^2(z-1)} \right) dz$ را بدست آورید.

با توجه به تحلیلی بودن تابع در ناحیه انتگرال گیری جواب انتگرال صفر می شود.

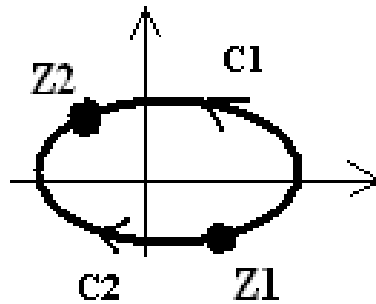
قضیه ۴-۶ (مستقل از مسیر)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه انتگرال $f(z)$ در D مستقل از مسیر است.

فرض کنید $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد و مسیر C زیر یک مسیر بسته در D باشد آنگاه طبق قضیه کوشی-گورسا

داریم

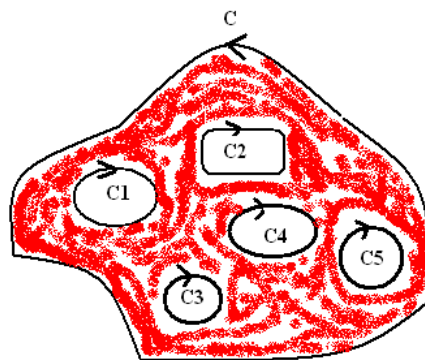
$$\oint_C f(z) dz = 0 = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz \Rightarrow \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad (۵-۶)$$



قضیه ۵-۶ (قضیه برای دامنه‌های همبند چندگانه)

اگر تابع $f(z)$ بر روی کانتورهای C, C_1, C_2, \dots و نقاط هاشورخورده در شکل زیر تحلیلی باشد آنگاه داریم

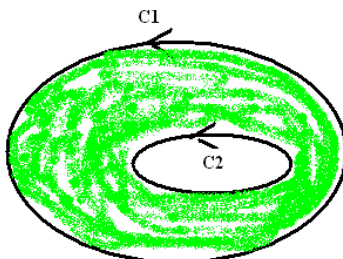
$$\int_{C+C_1+C_2+\dots} f(z) dz = 0 \quad (۶-۶)$$



نتیجه قضیه ۶-۵

اگر $f(z)$ بر روی C_1, C_2 و ناحیه هاشورخورده مابین آنها تحلیلی باشد داریم

$$\int_{C_1-C_2} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (7-6)$$



قضیه ۶-۷ (فرمول انتگرال کوشی)

فرض کنید $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر z_0 و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 را

در بر بگیرد، داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i2\pi f(z_0) \quad (8-6)$$

قضیه ۶-۸ (مشتقات یک تابع تحلیلی)

فرض کنید $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد آنگاه $f(z)$ در D از هر مرتبه‌ای دارای مشتق است که همه این

مشتقات نیز در D تحلیلی هستند. مشتقات تابع $f(z)$ در نقطه‌ای مانند z_0 از D عبارتند از

$$\begin{cases} f'(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \\ f''(z_0) = \frac{2!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = i2\pi \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (9-6)$$

مثال (۶-۱۰) حاصل انتگرال $\oint_{|z-\pi|=3} \frac{\cos(z)}{z-\pi} dz$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم.

$$\oint_{|z-\pi|=3} \frac{\cos(z)}{z-\pi} dz = i2\pi \cos \pi = -i2\pi$$

مثال (۶-۱۱) حاصل انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz$ را بدست آورید

حل: با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz = i2\pi e^0 = i2\pi$$

مثال (۶-۱۲) حاصل انتگرال $\oint_C \frac{3z+1}{z^3-z^2} dz$ را به ازای دو مسیر $|z| = \frac{1}{2}$ و $|z| = 2$ بدست آورید

حل:

برای مسیر $|z| = \frac{1}{2}$ داریم

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{3z+1}{z-1}\right)}{z^2} dz = \frac{i2\pi}{1!} \left(\frac{3z+1}{z-1}\right)' \Bigg|_{z=0} = -i8\pi$$

برای مسیر $|z| = 2$ داریم $\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz = - \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2} - 4 \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} + 4 \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} = 0 - 4(i2\pi) + 4(i2\pi) = 0$

مثال (۶-۱۳) حاصل انتگرال $\oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{\text{Ln}(1+z^2)}{(2z-i)^2} dz$ را بدست آورید

حل: تابع $\text{Ln}(1+z^2)$ درون و روی مسیر تحلیلی است (در $z=i$ تحلیلی نیست که بیرون مسیر است)

$$\oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{\text{Ln}(1+z^2)}{(2z-i)^2} dz = \oint_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{\left(\frac{1}{4} \text{Ln}(1+z^2)\right)}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^2} dz = \frac{i2\pi}{1!} \left(\frac{1}{4} \text{Ln}(1+z^2)\right)' \Bigg|_{z=\frac{i}{2}} = -\frac{2\pi}{3}$$

سری اول تمرین های بخش ششم

۱- انتگرال مختلط $\int_C f(z) dz$ را در حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $f(z) = \text{Re}(z)$ و C دایره واحد در جهت خلاف عقربه ساعت.

ب) $f(z) = \text{Im}(z^2)$ و C کران مربعی به رئوس $0, i, 1, -1$ و در جهت خلاف عقربه ساعت.

ج) $f(z) = |z|$ و C یک پاره خط از $-i$ تا i .

د) $f(z) = |z|$ و C دایره واحد واقع در سمت چپ محور موهومی که $-i$ را به i وصل می کند.

ه) $f(z) = |z|$ و C دایره واحد واقع در سمت راست محور موهومی که $-i$ را به i وصل می کند.

و) جواب قسمت های (ج)، (د) و (ه) را با هم مقایسه و تفسیر کنید.

۲- حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

A) $\oint_{|z-i\frac{\pi}{2}|=1} \frac{dz}{\sinh z}$

B) $\oint_{|z-5|=3} \frac{\text{Ln} z}{(z-4)^3} dz$

C) $\oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^2+1}$

D) $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1}$

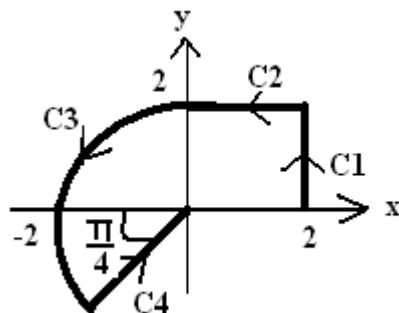
E) $\int_i^{2i} (z^2-1)^3 dz$

F) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3} dz$

G) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\tan z}{z^2-1} dz$

H) $\oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-3i)^2} dz$

۳- حاصل انتگرال $\int_C (z^2 + 2\bar{z}) dz$ و $\int_C (z + z\bar{z}) dz$ و $\int_C (z^2 + \sin z) dz$ را در طول مسیر زیر بدست آورید.



۶-۳- قضیه مانده

تا اینجا می توان انتگرال توابع تحلیلی را روی منحنی های بسته C وقتی $f(z)$ فقط یک نقطه تکین در داخل C دارد را محاسبه کرد. با معرفی قضیه مانده می توان برای حالتی که $f(z)$ چندین نقطه تکین در C دارد نیز انتگرال گیری را انجام داد.

قضیه ۶-۹ (قضیه مانده)

فرض کنید $f(z)$ تابعی باشد که در داخل و روی مسیر بسته C به جز تعدادی نقطه تکین محدود z_1, \dots, z_k تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = i2\pi \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f(z_j)) = i2\pi [\operatorname{Res}(f(z_1)) + \operatorname{Res}(f(z_2)) + \dots + \operatorname{Res}(f(z_k))] \quad (۶-۱۰)$$

که انتگرال گیری روی C و در جهت عکس عقربه های ساعت صورت می گیرد.

مثال (۶-۱۴) انتگرال $\oint_{|z-1|=1} ze^{\frac{1}{z-1}} dz$ را محاسبه کنید.

حل: در داخل مسیر انتگرال گیری تابع دارای نقطه تکین $z=1$ می باشد لذا داریم

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}} = (z-1+1)\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots\right) \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z=1)) = \frac{1}{2!} - 1 = \frac{-1}{2}$$

$$\oint_{|z-1|=1} ze^{\frac{1}{z-1}} dz = i2\pi \operatorname{Res}(f(z=1)) = -i\pi$$

مثال (۱۵-۶) انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{1}{1-\cos z} dz$ را محاسبه کنید.

حل: برای یافتن نقاط تکین مخرج تابع را مساوی صفر می کنیم. $1-\cos z = 0 \Rightarrow \cos z = 1 \Rightarrow z = 0 \pm 2k\pi$

که فقط $z=0$ در ناحیه انتگرال گیری می افتد. برای تعیین مرتبه قطب $z=0$ را محاسبه و کوچکترین

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^m}{1-\cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^m}{2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{z^m}{2\left(\frac{z}{2}\right)^2} = 2$$

مقدار m ای که حد فوق را محدود می کند را پیدا می کنیم.

بنابراین مرتبه قطب $z=0$ دو می باشد، داریم

$$\text{Res}(f(z=0)) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{1-\cos z} \right) = 0 \Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{dz}{1-\cos z} = i2\pi \text{Res} f(0) = 0$$

مثال (۱۶-۶) انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{3z}{3z-1} dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع دارای نقطه تکین $z = \frac{1}{3}$ (قطب ساده) در ناحیه انتگرال گیری می باشد. داریم

$$\text{Res}\left(f(z = \frac{1}{3})\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3z}{(3z-1)'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \oint_{|z|=1} \frac{3z}{3z-1} dz = i2\pi\left(\frac{1}{3}\right) = i\frac{2\pi}{3}$$

مثال (۱۷-۶) انتگرال $\oint_{|z|=2} \tan z dz$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم که بصورت $z = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ است. در ناحیه انتگرال گیری دو

نقطه تکین $z = \pm \frac{\pi}{2}$ داریم لذا

$$\begin{cases} \text{Res} f(z = \frac{\pi}{2}) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{(\cos z)'} = -1 \\ \text{Res} f(z = -\frac{\pi}{2}) = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{(\cos z)'} = -1 \end{cases} \Rightarrow \oint_{|z|=2} \tan z dz = i2\pi \left(\text{Res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -i4\pi$$

مثال (۶-۱۸) انتگرال $\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^4} dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $f(z)$ دارای قطب مرتبه ۳ در $z=0$ می باشد لذا

$$\operatorname{Res} f(z=0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\sin z}{z} \right) = \frac{-1}{6} \quad \text{or} \quad \operatorname{Res} f(z=0) = \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^4} \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \frac{-1}{6}$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^4} dz = i2\pi \left(\frac{-1}{6} \right) = -i \frac{\pi}{3}$$

مثال (۶-۱۹) انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $f(z)$ دارای دو نقطه تکین صفر و منهای یک در ناحیه انتگرال گیری می باشد که در مثال (۵-۲۰) مانده

این تابع به ازای این دو نقطه محاسبه گردید لذا داریم

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = i2\pi [\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)] = i2\pi [\sin 1 - \sin 1] = 0$$

مثال (۶-۲۰) انتگرال $\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right) e^{\frac{1}{z}} dz$ را محاسبه کنید.

حل: این تابع دارای نقطه تکینی در صفر می باشد برای محاسبه مانده بصورت زیر عمل کنیم

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z} \right) e^{\frac{1}{z}} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \right) \Rightarrow \operatorname{Res} f(z=0) = \left(\frac{1}{2!} + 1 \right) = \frac{3}{2}$$

$$\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right) e^{\frac{1}{z}} dz = i2\pi \left(\frac{3}{2} \right) = i3\pi$$

نکته: اگر $f(z)$ تابعی زوج باشد لذا در بسط آن تابع حول $z=0$ فقط توان‌های زوج z ظاهر می‌گردد لذا مانده چنین تابعی در $z=0$ قطعاً صفر می‌شود.

مثال (۶-۲۱) انتگرال $\oint_{|z|=4} \frac{\cot z}{z^3} dz$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا نقاط تکین را بدست می‌آوریم. ($z^3 \sin z = 0 \rightarrow z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$) که $z=0$ یک قطب مرتبه ۴ (چرا؟) و $z = \pm\pi$ در ناحیه انتگرال‌گیری می‌افتد. چون تابع $f(z)$ تابعی زوج است لذا حاصل مانده در $z=0$ صفر می‌شود برای بدست آوردن مانده در $z = \pm\pi$ داریم.

$$\operatorname{Res} f(\pi) = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\cos z}{(z^3 \sin z)'} = \frac{1}{\pi^3}, \quad \operatorname{Res} f(-\pi) = \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{\cos z}{(z^3 \sin z)'} = -\frac{1}{\pi^3} \Rightarrow \oint_{|z|=4} \frac{\cot z}{z^3} dz = 0$$

نکته: توابع \bar{z} ، $\operatorname{Im} z$ ، $\operatorname{Re} z$ و $|z|$ در هیچ کجا تحلیلی نمی‌باشند بنابراین اگر چنین عباراتی در تابع زیر علامت

انتگرال ظاهر شوند نمی‌توان از قضیه مانده استفاده نمود ولی در مواردی که انتگرال‌گیری بر روی مسیر $|z|=a$

انجام می‌گیرد، می‌توان با استفاده از روابط زیر این عبارات را حذف نمود.

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = a \\ \bar{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{a^2}{z} \\ \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z + \frac{a^2}{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z - \frac{a^2}{z}}{2i} \end{array} \right. \quad (11-6)$$

مثال (۶-۲۲) انتگرال $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\bar{z}-3i} dz$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از (۶-۱۱) داریم.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{\bar{z}-3i} dz = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{4-\frac{z}{z}-3i} dz = \oint_{|z|=2} \frac{ze^z}{4-3iz} dz = i2\pi \left(\operatorname{Res} f\left(\frac{4}{3i}\right) \right) = i2\pi \left(\frac{ze^z}{(4-3iz)'} \Big|_{z=\frac{4}{3i}} \right) = i2\pi \left(\frac{4}{9} e^{\frac{4}{3i}} \right)$$

مثال (۶-۲۳) انتگرال $\oint_{|z|=1} \left(\frac{z}{|z|} + \sin z \right) d\bar{z}$ را محاسبه کنید.

حل: با جایگزینی $|z|=1$ و $d\bar{z} = d\left(\frac{z\bar{z}}{z}\right) = d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{z^2} dz$ در انتگرال داریم

$$\oint_{|z|=1} \left(\frac{z}{|z|} + \sin z \right) d\bar{z} = \oint_{|z|=1} (z + \sin z) \left(\frac{-1}{z^2} \right) dz = \oint_{|z|=1} \left(\frac{-1}{z} - \frac{\sin z}{z^2} \right) dz = i2\pi(-1-1) = -i4\pi$$

سری دوم تمرین‌های بخش ششم

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

A) $\oint_{|z-2-i|=2} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ B) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)} dz$ C) $\oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$ D) $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z^2+4)(z-4)} dz$

E) $\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)} dz$ F) $\oint_{|z+\pi|=1} \frac{z^2}{\sinh z} dz$ G) $\oint_{|z-1|=1} (2z^2+z-6) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$

H) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{1}{z}}{1-z} dz$ I) $\oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2-3iz} dz$ J) $\oint_{|z|=1} \frac{\tan \pi z}{z^3} dz$ K) $\oint_{|z|=1} \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2} dz$

۴-۶- محاسبه برخی از انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط

انتگرال‌های حقیقی که می‌توان حاصل آن‌ها را با انتگرال‌های مختلط محاسبه کرد را می‌توان به چهار دسته زیر

تقسیم‌بندی نمود

الف) برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad (۱۲-۶)$$

پس از اعمال تغییرات بالا داریم

$$\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} f(z) dz \quad (۱۳-۶)$$

مثال (۲۴-۶) حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin \theta}$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از (۱۲-۶) داریم

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{z + z^{-1}}{2i}} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{2\sqrt{2}iz - z^2 + 1}$$

نقاط تکین $f(z)$ عبارتند از: $(z = \frac{-2\sqrt{2}i \pm \sqrt{-8+4}}{-2} = i(\sqrt{2} \pm 1))$ که هر دو

نقطه تکین قطب مرتبه اول هستند که فقط قطب $i(\sqrt{2} - 1)$ در دایره واحد قرار دارد لذا داریم

$$\operatorname{Res} f = \left. \frac{2}{(-z^2 + 2\sqrt{2}iz + 1)} \right|_{z=i(\sqrt{2}-1)} = -i \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin \theta} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{2\sqrt{2}iz - z^2 + 1} = i2\pi(-i) = 2\pi$$

ب) برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای بر حسب x هستند

که درجه $Q(x)$ حداقل دو درجه از درجه $P(x)$ بزرگ‌تر است و $Q(x)$ صفر حقیقی ندارد بصورت زیر عمل می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{\text{Im } z > 0} \frac{P(z)}{Q(z)} = i2\pi \sum_{j=1}^k \text{Res} \left(\frac{P}{Q} (\text{Im } z_j > 0) \right) \quad (14-6)$$

یعنی برای محاسبه انتگرال فوق کفایت مجموع مانده‌های تابع $\frac{P(z)}{Q(z)}$ را در نقاط تکین بالای محور حقیقی آن

محاسبه و در $i2\pi$ ضرب کنیم.

مثال (۶-۲۵) حاصل انتگرال $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ را بدست آورید.

حل: نقاط تکین تابع فوق $i, -i, 2i, -2i$ هستند که باید مانده را به ازای i و $2i$ محاسبه کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Res} \left(\frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right) = \frac{2z^2}{((z^2+1)(z^2+4))'} \Big|_{z=i} = \frac{-1}{6i} \\ \text{Res} \left(\frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right) = \frac{2z^2}{((z^2+1)(z^2+4))'} \Big|_{z=2i} = \frac{7}{12i} \end{array} \right. \Rightarrow I = i2\pi \left(\frac{-1}{6i} + \frac{7}{12i} \right)$$

(ج) برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$

شرایط مطرح شده در (ب) را داشته باشند کافی است ابتدا حاصل انتگرال مختلط زیر را برای نقاط تکین بالای محور حقیقی حساب کنیم.

$$\int_{\text{Im } z > 0} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \quad (15-6)$$

حال می‌توان نشان داد

$$\int_{\text{Im } z > 0} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx \quad (16-6)$$

مثال (۶-۲۶) حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx$ را بدست آورید.

حل: تابع فوق دارای دو نقطه تکین i و $-i$ بوده که بایست برای نقطه تکین i مقدار مانده تابع $\frac{e^{i2z}}{z^2+1}$ را حساب

کنیم. $\left(\text{Res} \left(\frac{e^{2z}}{z^2+1} \right) = \frac{e^{i2z}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-2}}{2i} \right)$ حال با استفاده از (۶-۱۶) داریم

$$\int_{\text{Im } z > 0} \frac{e^{i2z}}{z^2+1} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+1} dx = i2\pi \left(\frac{e^{-2}}{2i} \right) = \frac{\pi}{e^2} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+1} dx = 0$$

(۵) برای محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو

چند جمله‌ای بر حسب x بوده که درجه $Q(x)$ لااقل یک درجه از درجه $P(x)$ بزرگ‌تر باشد و تمام ریشه‌های $Q(x)$

ریشه‌های مرتبه اولی باشند که بر صفرهای توابع $\sin(ax)$ یا $\cos(ax)$ منطبق باشد داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) = i2\pi \times A \quad (۱۷-۶)$$

که A برابر است با

$$\left[\text{مجموع مانده‌های تابع } \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \text{ در نقاط تکین حقیقی} \right] + \frac{1}{2} \left[\text{مجموع مانده‌های تابع } \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \text{ در نقاط تکین بالای محور موهومی} \right]$$

مثال (۶-۲۷) حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$ را بدست آورید.

حل: نقاط تکین تابع $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ عبارتند از $z=0, i, -i$ که بایست برای نقاط تکین $z=0$ و $z=i$ مانده را حساب

$$\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right) = \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{[z(z^2+1)]}\right)_{z=0} = 1, \quad \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{[z(z^2+1)]}\right)_{z=i} = -\frac{1}{2e} \quad \text{کنیم.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = i2\pi \left\{ \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2}(1) \right\} = i\pi \left(1 - \frac{1}{e} \right) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

نکته: در مواردی که تابع حقیقی زیر انتگرال گیری زوج باشد آنگاه مقدار انتگرال از منهای بینهایت تا مثبت

بینهایت دو برابر مقدار انتگرال از صفر تا مثبت بینهایت می‌گردد.

مثال (۶-۲۸) انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ را محاسبه کنید.

حل: نقاط تکین تابع بصورت $z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$ بوده که دو نقطه $z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ در بالای

محور بوده که بایست مانده را برای آن بدست آوریم، ضمناً تابع مذکور زوج بوده که از نکته گفته شده برای

حل استفاده می کنیم.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}\right) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}\right) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$

$$\int_{\operatorname{Im} z > 0} \frac{dz}{z^4+1} = i2\pi\left(\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\left[i2\pi\left(\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right)\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

مثال (۶-۲۹) انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ دارای دو قطب مرتبه دو در نقاط i و $-i$ می باشد. برای محاسبه مانده در i داریم

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \right] = \frac{-i}{2e}$$

$$\int_{\operatorname{Im} z > 0} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = i2\pi\left(\frac{-i}{2e}\right) = \frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2} dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2} dx = 0$$

مثال (۳۰-۶) انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را محاسبه کنید.

حل: تابع $\frac{e^{iz}}{z}$ یک قطب ساده در $z=0$ دارد.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = \left.\frac{e^{iz}}{z'}\right|_{z=0} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = i2\pi \left\{0 + \frac{1}{2}(1)\right\} = i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

مثال (۳۱-۶) حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$ را بدست آورید.

حل:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z^{-3}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz = i2\pi \left(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{12}$$

مثال (۳۲-۶) مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx$ را بدست آورید.

حل: چون تابع زوج بوده و شرایط الف را دارد داریم.

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_{\operatorname{Im} z > 0} \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4} dz = \frac{1}{2} \int_{\operatorname{Im} z > 0} \frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)} dz$$

حال باید مانده تابع $\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}$ را در نقاط تکین بالای محور حقیقی ($z=2i, i$) را محاسبه کنیم.

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}\right) &= \left.\frac{2z^2-1}{[(z^2+4)(z^2+1)]'}\right|_{z=i} = \frac{-3}{6i} \\ \operatorname{Res}\left(\frac{2z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}\right) &= \left.\frac{2z^2-1}{[(z^2+4)(z^2+1)]'}\right|_{z=2i} = \frac{9}{12i} \end{aligned} \right. \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{1}{2} \times i2\pi \left(\frac{-3}{6i} + \frac{9}{12i} \right) = \frac{\pi}{4}$$

سری سوم تمرین های بخش ششم

حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

$$A) \int_0^{2\pi} \frac{1+4\cos\theta}{17-8\cos\theta} d\theta \quad B) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta \quad C) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{13-12\cos 2\theta} d\theta \quad D) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi+\cos\theta} d\theta$$

$$E) \int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \quad F) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx \quad G) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx \quad H) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{16+x^4} dx$$

$$I) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} dx \quad J) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9} dx \quad K) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx \quad L) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+4} dx$$

$$M) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{8-x^3} dx \quad N) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+2)} dx \quad O) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x-x^5} dx \quad Q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{x^2-1} dx$$

۷- آنالیز فوریه

یکی از روش‌های اساسی پردازش یک شکل موج یا یک تابع ریاضی استفاده از توابع یا دنباله‌های متعامد می‌باشد. بوسیله نمایش یک تابع پریودیک بر حسب مجموعه ای از توابع متعامد می‌توان بجای تحلیل‌های پیچیده، از توابعی که قابلیت مشابهی دارند ولی دارای تحلیل‌های ساده‌تری است استفاده نمود. یکی از این مجموعه‌های متعامد مهم مجموعه سینوس‌ها و کسینوس‌ها یا مجموعه توابع نمایی می‌باشد. نمایش یک شکل موج پریودی بر حسب این مجموعه‌ها را به یاد ژان بابتیست فوریه فیزیکدان فرانسوی (۱۷۶۸-۱۸۳۰) سری فوریه می‌نامند که کاربرد زیادی در حل مسائل مهندسی دارد. فوریه از بررسی مسائل انتقال حرارت و گرما دریافت که توابع متناوب را می‌توان با مجموعه ای نامتناهی از توابع سینوسی و کسینوسی که ارتباط هماهنگ دارند نمایش داد.

تعریف ۷-۱

شکل موج متناوب: شکل موجی است که پس از مدت زمانی مشخص دوباره تکرار شود ($f(t+T) = f(t)$).

در اینصورت T را دوره تناوب تابع یا سیگنال $f(t)$ می‌نامند

تعریف ۷-۲

تابع $f(t)$ را تابعی زوج می‌نامند هرگاه $f(t) = f(-t)$ در اینصورت داریم $\int_{-a}^{+a} f(t) dt = 2 \int_0^{+a} f(t) dt$

و تابع $f(t)$ را تابعی فرد می‌نامند هرگاه $f(t) = -f(-t)$ در اینصورت داریم $\int_{-a}^{+a} f(t) dt = 0$

در این صورت اگر توابع $f(t)$ و $g(t)$ هر دو فرد و یا هر دو زوج باشند آنگاه تابع $f(t) \times g(t)$ تابعی زوج می باشد. و اگر یکی از توابع زوج و دیگری فرد باشد آنگاه حاصلضرب آنها تابعی فرد می باشد.

نکته: بهتر است فرد یا زوج بودن اشکال متناوب را از روی شکل موج آنها بررسی کرد زیرا در بعضی مواقع ضابطه تابع گمراه کننده می باشد.

تعریف ۳-۷

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در فاصله (a,b) متعامد گوئیم هرگاه $\int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = 0$ باشد علامت بار به مفهوم مزدوج

تابع بکار رفته است. در صورت حقیقی بودن توابع شرط متعامد بودن دو تابع بصورت $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$ است.

مثال (۱-۷) آیا دو تابع $f(x) = \sin(x)$ و $g(x) = \cos(x)$ در فاصله $0 < x < \pi$ متعامدند؟

حل: بله چون $\int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = 0$ می باشد.

تعریف ۴-۷

مجموعه تابع $\varphi_i(x) \Big|_{i=1}^m$ را در فاصله $a < x < b$ متعامد گوئیم هرگاه $\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$ باشد.

تعریف ۵-۷

مجموعه تابع $\varphi_i(x) \Big|_{i=1}^m$ را در فاصله $a < x < b$ متعامد یکه گوئیم هرگاه $\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ \neq 1 & i = j \end{cases}$

باشد.

مثال (۲-۷) مجموعه $\{\cos(nx)\}_{n=0}^m$ در فاصله $0 < x < \pi$ متعامد است؟

حل: چون $\int_0^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$ و $\int_0^{\pi} \cos^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}$ است لذا متعامد می باشد.

مثال (۷-۳) آیا مجموعه توابع نمایی $f(x) = \left\{ e^{jn\frac{2\pi}{T}x} \right\}_{n=1}^m$ متناوب است؟ متعامد چگونه؟

حل: متناوب با دوره تناوب T است زیرا $f(x+T) = e^{jn\frac{2\pi}{T}(x+T)} = e^{jn\frac{2\pi}{T}x} \cdot e^{jn2\pi} = e^{jn\frac{2\pi}{T}x} = f(x)$

$$\int_0^T e^{jn\frac{2\pi}{T}x} \cdot e^{-jm\frac{2\pi}{T}x} dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ = T & n = m \end{cases} \quad \text{متعامد است زیرا}$$

سری اول تمرین های بخش هفتم

۱. نشان دهید چند جمله ای های $p_0(x) = 1$ ، $p_1(x) = x$ ، $p_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$ و $p_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$ در

فاصله $(-1, 1)$ برهم عمود می باشند.

۲. بررسی کنید که آیا دو تابع $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ و $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ برهم عمود هستند.

۳. دوره تناوب توابع زیر را بیابید

$$f(x) = 2\cos(10x+1) - \sin(4x-1)$$

$$g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$h(x) = |\sin(x)|$$

۷-۱- سری فوریه

سری فوریه یک تابع در واقع بسط آن بصورت مجموعه‌ای از توابع متعامد می‌باشد یعنی اگر مجموعه توابع

یک مجموعه متعامد یک در فاصله $a < x < b$ باشد آنگاه تحت شرایطی می‌توان تابع $f(x)$ را بر

حسب آن‌ها نوشت یعنی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (1-7)$$

که در رابطه بالا c_n ضرایب سری فوریه نامیده می‌شود.

در حالت کلی و با توجه به انتخاب $\varphi_n(x)$ حالات خاص زیر ایجاد می‌گردد.

الف) اگر $\varphi_n(x)$ بصورت مجموعه‌ای از توابع \sin یا \cos انتخاب گردد آنگاه سری فوریه ایجاد شده را سری

فوریه مثلثاتی می‌نامند.

ب) اگر $\varphi_n(x)$ بصورت مجموعه‌ای از توابع نمایی انتخاب گردد آنگاه به بسط حاصل، سری فوریه نمایی گفته

می‌شود.

محاسبه ضرایب سری فوریه: برای محاسبه ضرایب c_n طرفین رابطه (۱-۷) را در $\varphi_m(x)$ ضرب نموده و در فاصله

$a < x < b$ از آن انتگرال می‌گیریم

$$\int_a^b \varphi_m(x) f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx \quad (2-7)$$

با توجه به متعامد یک بودن $\varphi_n(x)$ ، انتگرال بالا فقط به ازای $n=m$ مقدار دارد و در غیر اینصورت دارای مقدار

صفر می‌باشد لذا داریم

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \quad (3-7)$$

۷-۱-۱- سری فوریه مثلثاتی

سری فوریه مثلثاتی یک تابع متناوب با دوره تناوب T نمایشی از آن بصورت مجموع بینهایت جمله از مجموع توابع متعامد $\{1, \cos(\omega_0 x), \cos(2\omega_0 x), \dots, \sin(\omega_0 x), \sin(2\omega_0 x), \dots\}$ می باشد که بصورت زیر نمایش داده می شود.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (۴-۷)$$

که ضرایب a_0 ، a_n و b_n با توجه به فرمول کلی (۷-۳) و بصورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} f(x) dx \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx \end{cases} \quad (۵-۷)$$

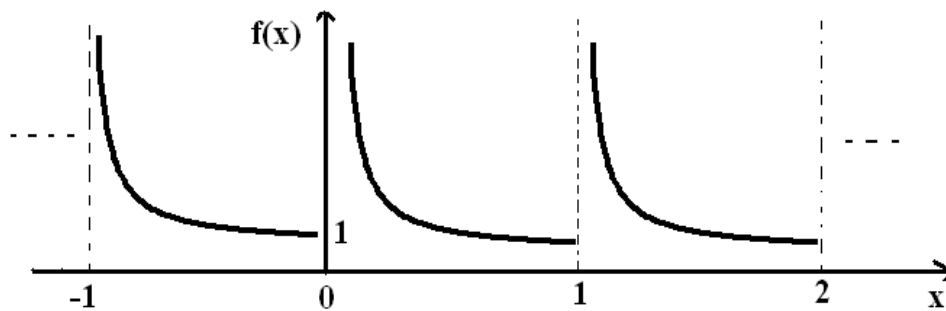
$\frac{a_0}{2}$ را مؤلفه dc سیگنال $f(x)$ گویند که متوسط تابع در یک دوره تناوب می باشد.

۷-۱-۲- شرایط دیریکله

شرایط دیریکله شرایط کافی برای همگرایی سری فوریه متناظر با یک تابع می باشد که عبارتند از:

شرط اول دیریکله: تابع $f(x)$ در دوره تناوب خود مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی $\int_{\langle T \rangle} |f(x)| dx < \infty$

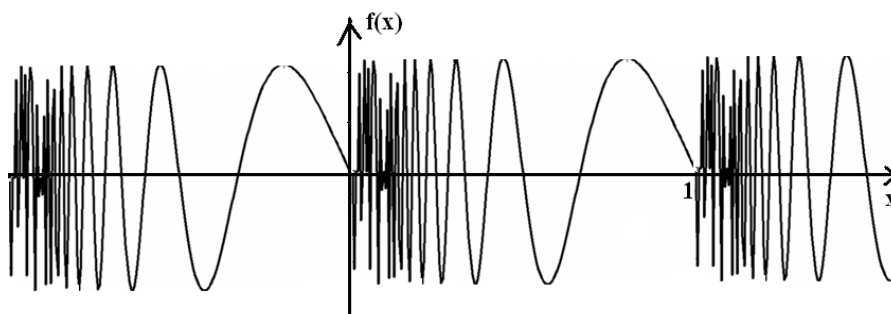
برای مثال تابع $\left\{ f(x) = \frac{1}{x} \quad 0 < x \leq 1 \right\}$ (شکل (۷-۱)) شرط اول دیریکله را برآورده نمی کند.



شکل (۱-۷): تابع $f(x)$ رسم شده شرط اول دیریکله را برآورده نمی کند

شرط دوم دیریکله: تابع $f(x)$ در دوره تناوب خود دارای تعداد محدودی اکسترمم باشد. برای مثال تابع

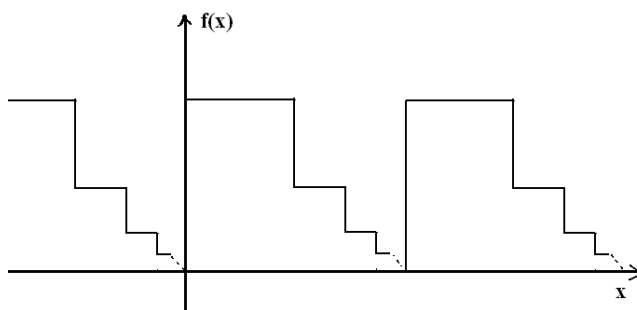
$$\left\{ f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \quad 0 < x \leq 1 \right\} \text{ (شکل (۲-۷)) شرط دوم دیریکله را برآورده نمی کند.}$$



شکل (۲-۷): تابع $f(x)$ رسم شده شرط دوم دیریکله را برآورده نمی کند

شرط سوم دیریکله: تابع $f(x)$ دارای تعداد معینی ناپیوستگی در دوره تناوب خود باشد. در شکل (۳-۷) تابعی که

چنین شرطی را برآورده نمی کند ترسیم شده است.



شکل (۳-۷): تابع $f(x)$ رسم شده شرط سوم دیریکله را برآورده نمی کند

باید توجه نمود که شرایط فوق شرایط کافی می‌باشند و لازم نیستند. بنابراین اگر $f(x)$ این شرایط را برآورده سازد می‌توان آن را با سری فوریه بیان کرد ولی اگر شرایط را برآورده نکند باز هم ممکن است بتوان آن را برحسب سری فوریه نمایش داد

قضیه ۱-۷

هرگاه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب T در فاصله تناوب خود پیوسته تکه‌ای بوده و در هر نقطه از فاصله مزبور مشتق چپ و راست داشته باشد آنگاه سری فوریه تابع $f(x)$ همگرا است. مجموع آن در هر نقطه، به جز نقطه x_0 که در آن تابع $f(x)$ ناپیوسته است برابر $f(x)$ بوده و در نقطه x_0 مجموع سری برابر میانگین حدهای چپ و راست $f(x)$ در این نقطه می‌باشد.

$$\text{مثال (۴-۷) سری فوریه موج مربعی } T=2 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \quad \text{رابدست آورید.}$$

حل:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 1 \cdot dx = 1, \quad a_n = \frac{2}{2} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_0^1 = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ is odd} \end{cases} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right] \sin(n\pi x)$$

بر اساس قضیه (۱-۷) مقدار سری در نقاط پیوسته به $f(x)$ میل می‌کند و در نقاط ناپیوسته به میانگین حد چپ و راست $f(x)$ در آن نقاط میل می‌کند.

تمرین (۷-۱) به ازای مقادیر مختلف $n=1, n=3, n=19, n=79$ سری فوری بدست آمده در مثال (۷-۴) را با نرم افزار MATLAB رسم نموده و تفسیر نمایید.

تمرین (۷-۲) با توجه به تمرین قبل در مورد درستی پدیده گیبس تحقیق نمایید؟

مثال (۷-۵) الف) بسط سری فوری تابع $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 2$ با $T=2$ را بدست آورید.

ب) مقدار سری را در نقاط $x = \pi, 2\pi$ را بدست آورید.

$$\text{ج) به کمک سری بدست آمده ثابت کنید: } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

حل:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx) dx = -\frac{4\pi}{n}, \quad f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right)$$

مقدار سری در نقطه پیوسته $x = \pi$ برابر با مقدار تابع $f(\pi) = \pi^2$ می باشد

$$\text{مقدار سری در نقطه ناپیوسته } x = 2\pi \text{ برابر با مقدار } \frac{f(2\pi^+) + f(2\pi^-)}{2} = \frac{(2\pi)^2 + (0)^2}{2} = 2\pi^2 \text{ است}$$

$$\text{for } x=0 \Rightarrow \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(n \times 0) - \frac{4\pi}{n} \sin(n \times 0) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

تمرین (۷-۳) سری فوری توابع زیر را بدست آورید؟

$$\text{الف) } f(x) = \sin(x), \quad 0 < x < \pi, \quad T = \pi$$

$$\text{ب) } f(x) = x, \quad -2 < x < 2, \quad T = 4$$

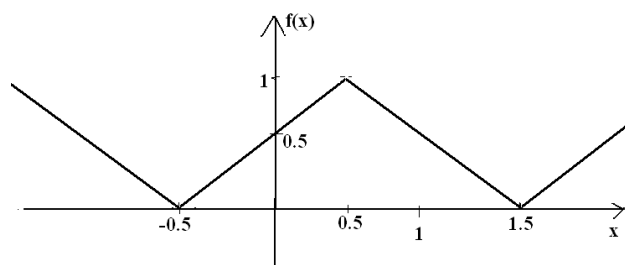
۷-۱-۳- سری فوریه توابع زوج و فرد

اگر $f(x)$ تابع زوجی باشد آنگاه ضرایب b_n سری فوریه آن صفر می‌باشد $b_n = \frac{2}{T} \int \underbrace{f(x) \times \sin(n\omega_0 x)}_{\text{odd function}} dx = 0$

اگر $f(x)$ تابع فردی باشد آنگاه ضرایب a_n سری فوریه آن صفر می‌باشد $a_n = \frac{2}{T} \int \underbrace{f(x) \times \cos(n\omega_0 x)}_{\text{odd function}} dx = 0$

نکته: بعضی از توابع نه زوج و نه فرد هستند اما می‌توان با انتقال آن‌ها را بصورت توابع زوج و یا فرد نوشت و ضرایب فوریه را ساده تر محاسبه نمود.

مثال (۷-۵) ضرایب سری فوریه شکل زیر را بدست آورید.



حل: ابتدا تابع $g(x)$ را بصورت $g(x) = f(x+0.5)$ تعریف می‌کنیم که تابعی زوج می‌باشد لذا ضرایب b_n آن

صفر بوده و داریم: $a_0 = 1$ ، $a_n = \frac{2 \times 2}{2} \int_0^1 (1-x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi))$

داریم

و از رابطه $f(x) = g(x-0.5)$ می‌توان سری فوریه $f(x)$ را $g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \cos(n\pi x)$

براحتی بدست آورد

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \cos(n\pi(x - .05)) =$$

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi x)}_{\equiv 0} + \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(n\pi)$$

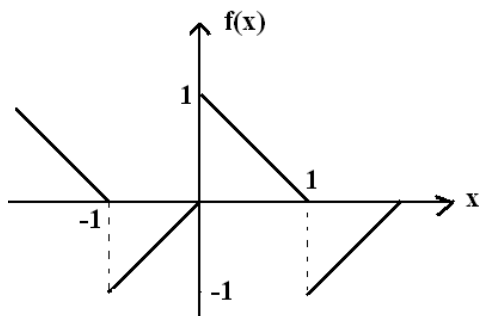
۷-۱-۴- سری فوریه توابع متقارن نیم موج

تابع $f(x)$ را متقارن نیم موج گویند هرگاه $f(x + \frac{T}{2}) = -f(x)$ باشد در اینصورت ضرایب a_n و b_n برای n های

زوج صفر می باشند (اثبات کنید) و اگر $f(x + \frac{T}{2}) = f(x)$ باشد در اینصورت ضرایب a_n و b_n برای n های

فرد صفر می باشند. (اثبات کنید).

مثال (۷-۶) ضرایب سری فوریه شکل زیر را بدست آورید؟



حل:

$$\omega_0 = \pi, \quad a_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \left[\int_{-1}^0 x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 (1-x) \cos(n\pi x) dx \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi^2} & n \text{ is odd} \\ 0 & n \text{ is even} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{2} \left[\int_{-1}^0 x \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx \right] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n \text{ is odd} \\ 0 & n \text{ is even} \end{cases}$$

نکته: برای محاسبه انتگرال‌هایی بصورت زیر که در آنها $p(x)$ چند جمله ای بر حسب x می‌باشد می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود.

$$\int p(x)f(x)dx = p(x)F_1(x) - p'(x)F_2(x) + \dots (-1)^m p^{(m)}(x)F_{m+1}(x) \quad \text{where} \quad (6-7)$$

$$F_{m+1}(x) = \int F_m(x)dx, \quad f(x) = F_0(x)$$

۷-۱-۵- سری فوریه توابع غیرپریودیک

اگر $f(x)$ یک شکل موج غیر متناوب باشد که در فاصله $(0, a)$ مخالف صفر و در خارج آن مساوی صفر باشد آنگاه به روش‌های مختلف می‌توان برای آن سری فوریه نوشت

الف) متناوب کردن $f(x)$ بصورت تابعی زوج با استفاده از تابع کمکی $g(x)$ (بسط نیم دامنه کسینوسی)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < a \\ f(-x) & -a < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x), & -\infty < x < \infty \\ f(x) = g(x), & 0 < x < a \end{cases} \quad (7-7)$$

ب) متناوب کردن $f(x)$ بصورت تابعی فرد با استفاده از تابع کمکی $g(x)$ (بسط نیم دامنه سینوسی)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < a \\ -f(-x) & -a < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x), & -\infty < x < \infty \\ f(x) = g(x), & 0 < x < a \end{cases} \quad (8-7)$$

ج) متناوب کردن $f(x)$ بصورت تابعی با دوره تناوب $T=a$ که تابعی نه فرد و نه زوج می‌باشد.

د) متناوب کردن $f(x)$ با تابعی بصورت متقارن نیم موج

$$g\left(x + \frac{T}{2}\right) = -g(x), \quad T = 2a, \quad g(x) = f(x), \quad 0 < x < a \quad (9-7)$$

$$\text{تمرین (۴-۷) بسط نیم دامنه سینوسی تابع } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x < 2 \end{cases} \text{ را بدست آورید.}$$

تمرین (۵-۷) به نظر شما کدام یک از روش‌های گفته شده برای بسط دادن تابع $f(x)$ مناسب‌تر است.

۶-۱-۷- مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

فرض کنید $f(x)$ با $T=2L$ در فاصله $(-L, L)$ تعریف شده و دارای بسط سری فوریه به فرم زیر باشد

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) \quad (۱۰-۷)$$

الف) با استفاده از انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم

$$\int f(x) dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \{a_n \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) - b_n \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right)\} + K \quad (۱۱-۷)$$

دقت شود که بخاطر وجود عبارت $\frac{a_0}{2} x$ ، عبارت سمت راست معادله بالا توصیف سری فوریه $\int f(x) dx$

نمی‌باشد ولی با فرض معلوم بودن سری فوریه تابع $f(x)$ می‌توان به راحتی سری فوریه تابع $\int f(x) dx - \frac{a_0}{2} x$

بصورت زیر محاسبه نمود.

$$\int f(x) dx - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \{a_n \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) - b_n \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right)\} + K \quad (۱۲-۷)$$

ب) چنانچه $f(L) = f(-L)$ باشد با مشتق‌گیری از سری فوریه تابع $f(x)$ داریم

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \{-a_n \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) + b_n \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right)\} \quad (۱۳-۷)$$

لذا به راحتی می‌توان سری فوریه تابع $f'(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال (۷-۷) تابع $f(x) = x^2$ ، $-\pi < x < \pi$ دارای سری فوریه به فرم زیر می‌باشد

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad -\pi < x < \pi$$

سری فوریه تابع $x^3 - \pi^2 x$ را در فاصله مذکور بیابید.

حل: با استفاده از خاصیت انتگرال گیری داریم.

$$\int x^2 dx - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \left\{ a_n \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) - b_n \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) \right\} + K$$

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} \sin(nx) + K \Rightarrow x^3 - \pi^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx) + 0$$

چون تابع مذکور فرد است لذا مقدار K صفر می‌باشد.

تمرین (۶-۷) سری فوریه تابع $f(x) = \frac{x}{2}$ در فاصله $-\pi < x < \pi$ بصورت $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

می‌باشد. سری فوریه تابع $g(x) = x^2$ را در بازه مورد نظر بدست آورید. ثابت K را نیز محاسبه کنید.

۷-۱-۷- تساوی پارسوال در سری فوریه مثلثاتی

فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب در فاصله $(-L, L)$ و دارای سری فوریه بصورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) \quad (۱۴-۷)$$

با ضرب $f(x)$ در دو طرف تساوی و انتگرال گیری از آن به نتیجه زیر می‌رسیم که به تساوی پارسوال معروف می‌-

باشد

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad , \quad L = \frac{T}{2} \quad (۱۵-۷)$$

مثال (۷-۸) اگر بسط سری فوریه کسینوسی $f(x)=\sin(x)$ در بازه $0 \leq x \leq \pi$ بصورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos(n\pi)}{n^2 - 1} \right) \cos(nx)$$

آنگاه مقدار سری $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots$ را بدست آورید؟

حل: در این مثال $L = \pi$, $\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$, $b_n = 0$ و

$$a_n = \left(\left(\frac{-2}{\pi} \right) \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^2 - 1} \right) = \begin{cases} \left(\frac{-2}{\pi} \right) \frac{2}{(n-1)^2 (n+1)^2} & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

داریم.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(x)^2 dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi} \right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{16}{\pi^2} \right) \left(\frac{1}{(2k-1)^2 (2k+1)^2} \right) \Rightarrow$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^2 (2k+1)^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

سری دوم تمرین های بخش هفتم

۱. سری فوریه تابع $f(x) = x^3$ را در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ بدست آورید.
 ۲. تابع $f(x) = x$ را در فاصله $0 < x < 2$ در نظر بگیرید. برای این تابع بسطی بنویسید که ویژگی های زیر را داشته باشد. الف) فقط جملات کسینوسی داشته باشد. ب) ضرایب فوریه آن برای n های زوج صفر گردد. ج) جملات سینوسی و کسینوسی داشته باشد
 ۳. حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ را از روی بسط فوریه تابع متناوب $f(x) = e^{-x}$ در بازه $(-\pi, \pi)$ بدست آورید.
 ۴. در نمایش سری فوریه تابع $f(t) = \sin^2(t) \cos(2t)$ با دوره تناوب $T = 2\pi$ مقادیر a_0 ، a_2 و a_4 را بدست آورید.
 ۵. سری فوریه تابع $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \end{cases}$ را بدست آورید.
 ۶. بسط فوریه تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله $-1 < x < 1$ بدست آورید.
 ۷. بسط فوریه تابع $f(t) = \cos^2(t)$ را در بازه $(0, \pi)$ بدست آورید.
 ۸. بسط نیم دامنه کسینوسی تابع $f(t) = 1 - \frac{t}{2}$ را در بازه $(0, 2)$ بدست آورید.
 ۹. بسط فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} +\sin(x) & 0 < x < 2\pi \\ -\sin(x) & -2\pi < x < 0 \end{cases}$ چگونه است
- الف) زوج کسینوسی ب) فرد کسینوسی ج) زوج سینوسی د) زوج کسینوسی

$$10. \text{ بسط فوريه تابع } f(x) = \begin{cases} -t-3 & -3 < t < -2 \\ -1 & -2 < t < -1 \\ t & -1 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 3-t & 2 < t < 3 \end{cases} \text{ چگونه است}$$

الف) زوج کسینوسی ب) فرد کسینوسی ج) زوج سینوسی د) فرد سینوسی

11. اگر بسط نیم دامنه کسینوسی تابع $f(x)=x$ در بازه $(0, \pi)$ بصورت

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right)$$

باشد آنگاه بسط به سری فوريه

سینوسی تابع $g(x) = x(\pi - x) \frac{\pi}{8}$ در همان بازه را بدست آورید.

$$12. \text{ سری فوريه تابع } f(t) = \begin{cases} 2 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 3 \end{cases} \text{ را بدست آورید.}$$

۲-۷- انتگرال فوریه

سری فوریه ابزار پر قدرتی برای حل مسائل گوناگونی که شامل توابع متناوب است، می‌باشد. نظر به اینکه حل تعداد زیادی از مسائل عملی به توابع نامتناوب مربوط می‌شود لذا بجاست که مطالب ارائه شده در مورد سری‌های فوریه را طوری تعمیم داد که توابع نامتناوب را نیز در بر بگیرد. تابع نامتناوب $y=f(x)$ تعریف شده بر اعداد حقیقی دارای سری فوریه نمی‌باشد ولی اگر تابع متناوب $y = f_L(x)$ با دوره تناوب L را بررسی نموده و L را به سمت بینهایت میل دهیم آنگاه اگرچه تابع حاصل متناوب نیست ولی می‌توان بسط آن را بصورت حد سری فوریه تابع $y = f_L(x)$ وقتی L به سمت بینهایت میل می‌کند، نمایش داد. نمایش بدست آمده را انتگرال فوریه می‌گویند که ابزار پر قدرتی برای بررسی توابع نامتناوب می‌باشد.

قضیه ۲-۷ (قضیه انتگرال فوریه)

فرض کنید تابع $f(x)$ در هر فاصله متناهی قطعه‌ای پیوسته و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ موجود باشد. آنگاه تابع $f(x)$ را می‌توان با انتگرال فوریه (۷-۱۶) نمایش داد که در نقاط پیوسته مقدار انتگرال فوریه با مقدار تابع یکسان بوده و در نقاط ناپیوستگی مقدار انتگرال فوریه با میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در آن نقطه برابر می‌باشد

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)] d\omega \quad (16-7)$$

که در آن

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad (17-7)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \quad (18-7)$$

از روابط بالا به سادگی می توان نتایج زیر را بدست آورد

• اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد آنگاه $B(\omega) = 0$ و $A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$ می باشد.

• اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد آنگاه $A(\omega) = 0$ و $B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ می باشد.

$$\text{مثال (7-9) انتگرال فوریه تابع } f(x) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & 0 < x < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \text{ را بدست آورید.}$$

حل: با توجه به فرد بودن تابع داریم

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\pi}{2} \sin(\omega x) dx = \frac{-1}{\omega} \cos(\omega x) \Big|_0^1 = \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega} \Rightarrow$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1 - \cos(\omega)}{\omega} \right) \sin(\omega x) d\omega$$

نکته: انتگرال های زیر به انتگرال های لاپلاس معروف هستند که می توان در حل سؤالات تستی از آنها کمک

گرفت

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{k}{k^2 + \omega^2} \right) \cos(\omega x) d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad x \& k > 0 \quad (19-7)$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\omega}{k^2 + \omega^2} \right) \sin(\omega x) d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad x \& k > 0 \quad (20-7)$$

مثال (۷-۱۰) انتگرال فوریه تابع $f(x) = e^{-x}$ برای $x > 0$ و با شرط $f(x) = f(-x)$ را بدست آورید.

حل: با توجه به زوج بودن تابع و بر اساس رابطه (۷-۱۹) ($k=1$) برابر با $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \cos(\omega x) d\omega$ است.

مثال (۷-۱۱) با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x) = f(-x) = e^{-2x}$, $x > 0$ حاصل انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4+\omega^2} \cos(2\omega) d\omega$$
 را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۷-۱۹) و قرار دادن $k=2$ و $x=2$ نتیجه انتگرال برابر با $\frac{\pi}{4} e^{-4}$ می شود.

مثال (۷-۱۲) در صورتیکه $f(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ c & \alpha < x < \beta \\ 0 & x > \beta \end{cases}$ و مقادیر $\alpha < 0$, $\beta > 0$ و C اعداد ثابتی باشند و

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda$$
 باشد آنگاه مقادیر α , β و C را بدست آورید.

حل: با توجه به فرم انتگرالی داده شده برای تابع $f(x)$ می توان زوج بودن این تابع را نتیجه گرفت لذا $\beta = -\alpha$.

حال با استفاده از این شرط انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را می نویسیم.

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega, \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \Rightarrow$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} c \times \cos(\omega x) dx = \frac{2c}{\pi\omega} \sin(\omega x) \Big|_0^{\beta} = \frac{2c}{\pi\omega} \sin(\beta\omega) \Rightarrow$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2c}{\pi\omega} \sin(\beta\omega) \cos(\omega x) d\omega \equiv \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda \Rightarrow$$

$$\beta = 1, \quad \alpha = -1, \quad c = \frac{\pi}{2}$$

مثال (۷-۱۳) در معادله انتگرالی $\int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ تابع $f(\omega)$ را بیابید.

حل: با توجه به شکل کسینوسی انتگرال فوریه داده شده می توان به زوج بودن حاصل انتگرال پی برد لذا داریم

$$f(\omega) = A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-x) \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi \omega^2} (1 - \cos(\omega))$$

مثال (۷-۱۴) فرض کنید $f(x) = \int_0^{\infty} P(\omega) \sin(\omega x) d\omega$ و $xf(x) = \int_0^{\infty} Q(\omega) \cos(\omega x) d\omega$ باشد. رابطه مابین

$$Q(\omega) \text{ و } \frac{d}{d\omega} P(\omega) \text{ را بدست آورید.}$$

حل: با استفاده از روابط انتگرال فوریه داریم

$$P(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \Rightarrow \frac{d}{d\omega} P(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \cos(\omega x) dx = Q(\omega)$$

مثال (۷-۱۵) با فرض $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cos(\omega x) d\omega$ مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^5)}{x} dx$ را محاسبه

کنید.

حل: تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته بوده لذا مقدار آن با مقدار بدست آمده از انتگرال فوریه برابر می باشد. لذا

داریم:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \text{ for } \omega = x^5 \Rightarrow d\omega = 5x^4 dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\overbrace{\sin(x^5)}^{\omega}}{\underbrace{x^5}_{\omega}} \times \underbrace{5x^4 dx}_{d\omega} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^5)}{x} dx = \frac{\pi}{10}$$

سری سوم تمرین های بخش هفتم

۱. با استفاده از معادله انتگرالی $\int_0^{\infty} P(\omega) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 3 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$ را محاسبه کنید.

۲. مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2} \sin(3\omega) d\omega$ را بدست آورید.

۳. انتگرال فوریه تابع $f(x) = e^{-x}u(x)$ را بدست آورید.

۴. انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; |x| < a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases}$ را بدست آورید.

۵. با استفاده از نمایش انتگرال فوریه درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 \\ \pi e^{-x} & ; x > 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1 - \omega^2} \cos(\omega x) d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos(x) & ; |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۶. مقدار انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^2} dx$ را بدست آورید.