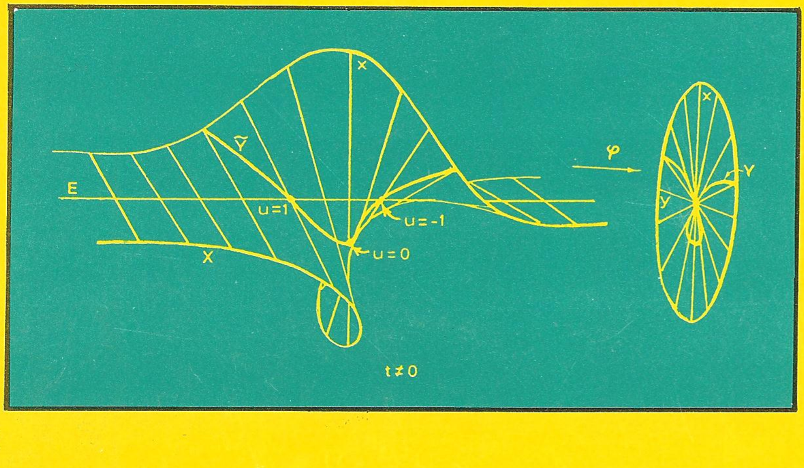
# هندسهٔ جبری مقدماتی

میلز رید

ترجمهٔ رحیم زارع نهندی



# هندسهٔ جبری مقدماتی

میلز رید

ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۹۶

مرکز نشر دانشگاهی
۷۵۰

*Undergraduate Algebraic Geometry*
Miles Reid
Cambridge University Press, 1990

*هندسهٔ جبری مقدماتی*
تألیف میلز رید
ترجمهٔ دکتر رحیم زارع نهندی
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۴
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: TEX-پارسی مرکز نشر دانشگاهی
چاپ و صحافی: دیبا



فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

رید، میلز Reid, Miles
هندسهٔ جبری مقدماتی/ میلز رید؛ ترجمهٔ رحیم زارع نهندی.ـ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴.
پنج، ۱۶۳ ص.: مصور.ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۷۵۰: ریاضی، آمار و کامپیوتر؛ ۹۶)
ISBN 964-01-0750-6
عنوان اصلی: Undergraduate algebraic geometry
واژه‌نامه
۱. حساب هندسی. الف. زارع نهندی، رحیم، ۱۳۲۶ـ ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان
۹ هـ ۹ ر/QA ۵۶۴ ۵۱۶/۳۵
کتابخانهٔ ملی ایران ۷۴ـ۱۱۰۱م

# فهرست

مقدمه مترجم پنج

مقدمه ۱

**بخش صفر. گفتارهای پراکنده** ۲

دلایل مطالعهٔ هندسهٔ جبری، مسألهٔ «زیر مجموعه»، رسته‌های مختلف هندسه، نیاز به جبر تعویضپذیر، تابعهائی که جزئاً تعریف شده‌اند، نکته‌ای از مؤلف، پیشنیازها، ارتباط با سایر درسها، فهرستی از کتابها.

## ۱ بحثی اجمالی درباره خمهای مسطّح

**بخش اول. مقطعهای مخروطی مسطّح** ۱۲

آشنایی کلّی با $\mathbb{P}^2$ و مختصات همگن، رابطه $\mathbb{A}^2$ با $\mathbb{P}^2$، پارامتریسازی، یکریختی مقطع مخروطی هموار در $\mathbb{P}^2$ با $\mathbb{P}^1$. حالتهای آسان قضیه بزو: فصل مشترک یک خم درجهٔ $d$ با یک خط، $d$ نقطه است، فصل مشترک یک خم درجهٔ $d$ با یک مقطع مخروطی، $2d$ نقطه است؛ دستگاه خطی از مقطعهای مخروطی که از نقاط $P_1$، . . . ، $P_n$ می‌گذرند.

**بخش دوم. خمهای درجهٔ سوّم و قانون گروهی** ۳۲

خم $((y^2 = x(x-1)(x-\lambda))$ شکل پارامتری به صورت گویا ندارد. دستگاههای خطی $S_d(P_1, \ldots, P_n)$؛ دسته خمهای درجهٔ سوم مآربر ۸ نقطه «در وضعیت عمومی»؛ قانون گروهی روی خم درجهٔ سوّم؛ شش ضلعی رمزی پاسکال.

**پیوست فصل اول. خمها و گونای آنها** ۵۰

توپولوژی خمهای مسّطح درجهٔ سوّم ناتکین روی $\mathbb{C}$؛ بحث غیررسمی دربارهٔ گونای یک خم؛ توپولوژی، هندسهٔ دیفرانسیل، مختّصه‌های خمینه‌ها، نظریهٔ اعداد، موردل-وِیل-فالتینگز.

## ۲ رستهٔ چندگوناهای آفین

**بخش سوم. چندگوناهای آفین و قضیهٔ صفرهای هیلبرت** ۵۶

حلقه‌های نوتری، قضیّهٔ پایهٔ هیلبرت، تناظرهای V و I، مجموعه‌های جبری تحویلناپذیر، توپولوژی زاریسکی، حکم قضیهٔ صفرهای هیلبرت؛ ابررویهٔ تحویلناپذیر. لم‌نرمالسازی نوتر و اثبات قضیهٔ صفرهای هیلبرت؛ تحویل به ابررویه.

**بخش چهارم. توابع روی چندگوناها** ۷۸

حلقهٔ مختصاتی و نگاشتهای چندجمله‌یی؛ ریختبریها و یکریختیها؛ چندگوناهای آفین. هیأت توابع گویا و نگاشتهای گویا؛ نگاشتهای گویای غالب و ترکیب نگاشتهای گویا؛ مجموعه‌های بازِاستانده، قانون جمع‌روی خم بیضوی یک ریختبری است.

## ۳ کاربردها

**بخش پنجم. چندگوناهای تصویری و هم‌ارزی دوسوگویا** ۹۴

انگیزش: چندگوناهائی وجود دارند که از هر چندگونای آفین اکیداً بزرگترند؛ تناظرهای $V - I$ در حالت همگنی، تصویری در مقابل آفین. مثالها: رویه‌های درجهٔ چهارم، رویهٔ ورونزه. هم‌ارزی دوسوگویا، چندگوناهای گویا؛ هر چندگونا با یک ابررویه به صورت دوسوگویا هم‌ارز است؛ حاصلضربها.

**بخش ششم. فضای مماس، ناتکینی و بعد** ۱۱۲

انگیزش: قضیهٔ تابع ضمنی، چندگوناها و خمینه‌ها. تعریف فضای مماس آفین؛ نقاط ناتکین چگال‌اند. فضای مماس و $m/m^2$، فضای مماس ذاتی است، بعد X برابر است با $\mathrm{tr\ deg}_k k(X)$. رفع تکینگیها با استفاده از «فراگستریها».

**بخش هفتم. بیست‌وهفت خط واقع بر یک رویهٔ درجه سوّم** ۱۲۲

خطهای واقع بر یک رویهٔ درجه سوّم ناتکین S. اثبات وجود یک خط به روش حذفی؛ شکل قطبی. پنج جفت خطّی که خط داده شده‌ای را قطع می‌کنند. S گویا است. پیکربندی کلاسیک ۲۷ خط. هسه‌یی. حالتی که همهٔ خطّها گویا هستند.

**بخش هشتم. توضیحات نهایی** ۱۳۷

تاریخ و جامعه‌شناسی. انتخاب مباحث، توضیحات و تذکّرات اضافی برای اهل نظر. به جای مقدمه؛ قدردانی و ذکر بعضی از اسامی.

واژه‌نامه ۱۵۴

فهرست راهنما ۱۶۰

بسم الله الرحمن الرحیم

## مقدمهٔ مترجم

هندسهٔ جبری در عرصهٔ ریاضیات سدهٔ بیستم از موقعیتی ممتاز برخوردار بوده است ولی چون مطالعهٔ آن اغلب در دوره‌های تحصیلات تکمیلی صورت می‌گرفته نیاز مبرمی به ترجمهٔ کتابهائی دراین شاخه احساس نمی‌شده است. کتاب حاضر ترجمهٔ نخستین اثر از انگلیسی به فارسی دراین زمینه است که منحصراً برای دورهٔ کارشناسی ریاضی تدوین شده است و در سال سوم ریاضی دانشگاه واریک تدریس می‌شود. هندسهٔ جبری دراین دانشگاه، که متخصصان خوبی دراین شاخه دارد، سنتی است قدیمی و مؤلف کتاب، پروفسور میلز رید، یکی از استادان بنام این دانشگاه در هندسهٔ جبری است.

این کتاب منبع مناسبی برای درس هندسهٔ جبری مقدماتی در دورهٔ کارشناسی ریاضی است و می‌تواند به‌عنوان اولین کتاب مورد استفادهٔ علاقه‌مندان این شاخه قرارگیرد. درترجمهٔ این کتاب در انتخاب برابر نهاده‌های اصطلاحات آن به زبان فارسی، تلاش زیادی شده است. مسلماً انتخاب واژه‌های مناسب برای اولین بار کارآسانی نبوده است و مترجم هیچ‌گونه ادعایی مبنی بر انتخاب بهترین واژه‌ها ندارد ولی انتظار دارد که همکاران دانشگاهی و دانشجویان، وی را با پیشنهادهای بهتر خود دراین زمینه، یاری دهند تا پس از بررسی، در چاپ بعدی نظرات آنان مورد استفاده قرار گیرد. در متن انگلیسی کتاب اشتباهاتی وجود داشته که با تأیید مؤلف آن تصحیح شده است.

رحیم زارع نهندی

## مقدمه

کتابهای درسی تازهٔ خوبی در زمینهٔ هندسه جبری در سطوح کارشناسی ارشد و بالاتر وجود دارند، لیکن (تا جائی که من اطلاع دارم)، هیچ یک برای تدریس در دورهٔ کارشناسی تنظیم نشده است. مطالب کتاب حاضر یادداشتهایی هستند از درسی که در دو سال متوالی برای دانشجویان سالهای سوم ریاضی دانشگاه واریک داده شده و هدف این بوده است که کتابی باشد مقدماتی، بی‌احتیاج به پیشنیاز.

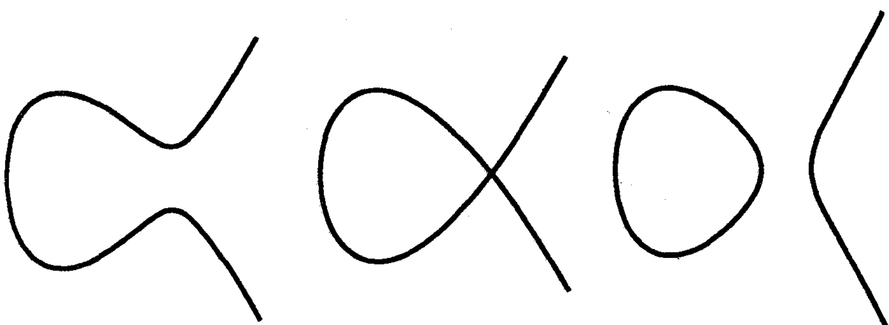
## بخش صفر. گفتارهای پراکنده

این بخش برای آشنایی کلی با موضوع تدوین شده است، و منطقاً قسمتی از درس نیست، لذا می‌توانید آن را به صورتی گذرا مطالعه کنید.

( ۱.۰ )  یک چندگونای $V$، می‌توان گفت، مکانی است هندسی که توسط معادله‌های چند جمله‌یی تعریف می‌شود، یعنی

$$V = \{P \in k^n | f_i(P) = ۰\} \subset k^n,$$

که $k$ یک هیأت و $f_i$ها چند جمله‌ییهایی هستند در $k[X_۱, \ldots, X_n]$؛ به عنوان مثال، خمهای مسطح به صورت $(f(x, y) = ۰) : C$ واقع در $\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{C}^۲$ را در نظر بگیرید.



$y^۲ = (x + ۱)(x^۲ + \epsilon)$ $\qquad$ $y^۲ = (x + ۱)x^۲$ $\qquad$ $y^۲ = (x + ۱)(x^۲ - \epsilon)$

در مطالعهٔ $V$ سئوالهائی در زمینه‌های مختلف ذیل مطرح می‌شوند:

**نظریهٔ اعداد.** برای مثال، اگر $k = \mathbb{Q}$ و $V \subset \mathbb{Q}^n$، چگونه می‌توان گفت $V$ ناتهی است، یا

چگونه می‌توان کلیهٔ نقطه‌های آن را، در صورت وجود، به دست آورد؟ مورد خاصّی هست که از نظر تاریخی نیز اهمیت دارد، و آن، این است که چند جواب برای

$$x^n + y^n = ۱,\ x, y \in \mathbb{Q},\ n \geq ۳$$

وجود دارد؟ سئوالاتی از این قبیل به طور کلی به مسائل دیوفانتوسی معروف‌اند.

**توپولوژی.** هرگاه $k$ همان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد (که غالباً نیز چنین است)، $V$ چه نوع فضای توپولوژیک است؟ برای مثال، مؤلّفه‌های همبند خمهای درجهٔ سوم بالا، به روشنی ناورداهای توپولوژیک هستند.

**نظریهٔ تکینگی.** $V$ در همسایگی $P \in V$ از چه نوع توپولوژی برخوردار است؟ اگر $f: V_۱ \longrightarrow V_۲$ نگاشت منظمی بین دو چندگونا (برای مثال، یک نگاشت چند جمله‌یی $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$) باشد، نگاشت $f$ در همسایگی $P \in V_۱$ چه نوع توپولوژی یا چه نوع هندسه‌ای دارد؟

(۲.۰) دو نگرش ممکن برای مطالعهٔ چند گوناها وجود دارد:

**نگرش خاصّ.** هرگاه چند جمله‌ییهای خاصّی مانند $f_i$ داده شده باشند، با فوت و فن‌های واضحی روی $f_i$، اغلب می‌توان از چند گونای $V$ اطلاع پیدا کرد؛ این روش وقتی بعد $n$ و درجهٔ چند جمله‌ییهای $f_i$ اعداد کوچکی باشند و یا $f_i$ها چند جمله‌ییهای ویژه و خوبی باشند، سرگرم‌کننده است، لیکن مشکلات به تدریج پیچیده‌تر می‌شوند و به سرعت مرحله‌ای فرا می‌رسد که دیگر محاسبات استادانهٔ تنها، نمی‌توانند چیز زیادی دربارهٔ مسأله به ما بگویند.

**نگرش کلّی.** مطالعهٔ ویژگیهای $V$، ما را به مفاهیم اساسی مانند توابع منظم روی $V$، ناتکینی و صفحات مماس، و بعد یک چندگونا هدایت می‌کند: با مفهوم یک بعدی بودن خمهائی نظیر خمهای درجهٔ سوم بالا، از هندسهٔ دکارتی مقدماتی آشنا هستیم، و بلافاصله تصاویر به ما می‌رسانند که تکینگی باید چه معنی داشته باشد.

امّا مسألهٔ اساسی در عرضهٔ یک درس هندسهٔ جبری برای دورهٔ کارشناسی این است که پرداختن مناسب به نگرش کلی، متضمّن آنچنان تعاریف و مقدمات زیادی است که با ذکر آنها دیگر محلّی برای موضوع اصلی باقی نمی‌ماند. لذا لازم است انتخاب اصلح صورت گیرد، و راه حلّ من این است که بخش کوچکی از نظریهٔ عمومی مطالعه و پیوسته به مثالهای خاص ارجاع شود. بنابراین، نوشتهٔ حاضر، تنها قسمتی از یک «کتاب استانده» را تشکیل می‌دهد که می‌تواند هستهٔ اصلی یک رشته درس سه ساله در دورهٔ کارشناسی باشد که کلاً به هندسهٔ جبری اختصاص دارد. از سوی دیگر، امیدوارم در هر بخش کتاب حاضر، تمرینها و مثالهای حل شدهٔ قابل توجهی ارائه شده باشد.

(۳.۰) لطف هندسهٔ جبری این است که در آن فقط از توابع چندجمله‌یی (و توابع گویا) استفاده می‌شود؛ بدین معنی که، اگر $U \subset \mathbb{R}^{۲}$ یک بازهٔ باز باشد، حلقه‌های توابع روی $U$ به شرح ذیل را می‌توان بجا در نظر گرفت:

$C^{۰}(U) =$ همهٔ توابع پیوسته از $U$ در $\mathbb{R}$

$C^{\infty}(U) =$ همهٔ توابع هموار (یعنی، دارای مشتق از هر مرتبه)

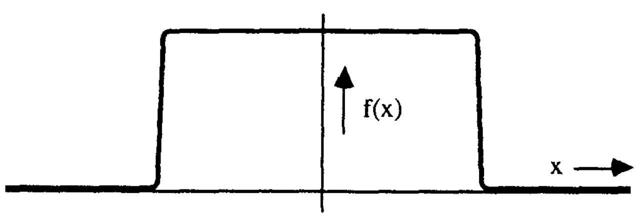
$C^{\omega}(U) =$ همهٔ توابع تحلیلی (یعنی، سریهای توانی همگرا)

$\mathbb{R}[X] =$ حلقهٔ چند جمله‌ییهای یک متغیره به عنوان توابع روی $U$

روشن است که

$$\mathbb{R}[X] \subset C^{\omega}(U) \subset C^{\infty}(U) \subset C^{۰}(U)$$

هر کدام از این حلقه‌های توابع به رسته‌های مهمی در هندسه مربوط می‌شوند: $C^{۰}(U)$ به رستهٔ توپولوژیک، $C^{\infty}(U)$ به رستهٔ دیفرانسیلپذیر (خمینه‌های دیفرانسیلپذیر)، $C^{\omega}(U)$ به هندسهٔ تحلیلی حقیقی، و $\mathbb{R}[X]$ به هندسهٔ جبری. نکتهٔ قابل تأکید این است که هر یک از این علامتهای شمول، شکاف عظیمی را نشان می‌دهد، که به مشخصّهٔ اصلی هندسه در رسته‌های مختلف منجر می‌شود. اگر چه در دبیرستان یا در حسابان سال اوّل دانشگاه، تکیهٔ چندانی به این نکته نمی‌شود، هر نوع اندازهٔ قابل قبول که روی $C^{۰}(U)$ در نظر بگیریم، نشان می‌دهد که اندازهٔ مجموعهٔ توابع مشتقپذیر در مجموعهٔ توابع پیوسته برابر صفر است (لذا، هر تابع پیوسته‌ای که به تصادف انتخاب کنیم، با احتمال واحد در هیچ نقطه‌ای مشتقپذیر نخواهد بود. مثلاً معادلهٔ حرکت براونی از این قبیل است). شکاف بین $C^{\omega}(U)$ و $C^{\infty}(U)$ را به عنوان نمونه، می‌توان با تابع $f(x) = \exp(\frac{-۱}{x^{۲}})$ نشان داد، تابع استانده‌ئی که بینهایت مرتبه مشتقپذیر است، لیکن بسط تیلر آن در نقطهٔ صفر به مقدار $f$ در این نقطه میل نمی‌کند؛ با استفاده از این مطلب، می‌توان یک «تابع تصادم» متعلق به $C^{\infty}$ مانند $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ساخت به طوری که برای $|x| \leq ۰{,}۹$، $f(x) = ۱$ و برای $|x| \geq ۱$، $f(x) = ۰$:




تابع تصادم در $C^{\infty}$

بر عکس، هر تابع تحلیلی روی U را می‌توان (به صورت یک‌سری توانی همگرا)، به یک تابع تحلیلی از یک متغیر مختلط با حوزهٔ تعریف مناسبی در $\mathbb{C}$، بسط داد، بنابراین ( با به کار بردن نتایجی از آنالیز مختلط)، اگر تابع $f \in C^{\infty}(U)$ در یک بازهٔ حقیقی صفر شود، باید متّحد با صفر باشد. این ویژگی نوعی «سختپایی» است که مشخصهٔ توابع تحلیلی در مقایسه با توپولوژی دیفرانسیل است.

( ۴.۰ ) توابع چند جمله‌یی در مقایسه با توابع بالا بسیار اندک‌اند: حلقهٔ چندجمله‌ییها، $\mathbb{R}[X]$، تنها یک فضای برداری شما را_بعد روی $\mathbb{R}$ است، در حالی که $C^{\omega}(U)$ ناشما را_بعد است. حتی اگر توابع گویای $\mathbb{R}(X)$، یعنی توسیع $\mathbb{R}[X]$ به هیأت کسرهای آن، در نظر گرفته شود، چندان تفاوتی نخواهد کرد. در (۲.۲) مثالی ارائه خواهد شد که مشخصهٔ سختپایی رستهٔ جبری است. این واقعیت که ممکن است، با استفادهٔ تنها از این مجموعهٔ توابع، هندسه‌ای بسازیم، خود نیز بسیار قابل توجه است. بی‌آنکه جای شگفتی باشد، دشواریهائی در تأسیس این نظریه وجود دارند:

**پی‌ریزی از راه جبر تعویضپذیر.** توپولوژی دیفرانسیل را می‌توان به مجموعهٔ آنالیز $\varepsilon - \delta$ که در ریاضیات سالهای اول و دوم دانشگاه تدریس می‌شوند، متکی دانست؛ برای ساختن هندسهٔ جبری و کارکردن فقط با حلقهٔ چندجمله‌ییها، باید به عنوان پیشنیاز، خواص حلقه‌هایی نظیر حلقهٔ چندجمله‌ییهای $k[X_1, \ldots, X_n]$ و ایدآلهای آنها را مطالعه نمود. به عبارت دیگر، در این مورد، به جای آنالیز باید به بسط جبر تعویضپذیر پرداخت. قضیهٔ صفرهای هیلبرت ($\longleftarrow$بخش‌سوم) یک مثال بارزی از یک عبارت جبری است که مستقیماً دارای محتوای شهودی هندسی است (اساساً «ایدآلهای متمایز توابع در $k[X_1, \ldots, X_n]$، معرّف چندگوناهای متمایز V در $k^n$ هستند») که اثبات آن مستلزم انحراف زیاد از موضوع و استفاده از شرایط تناهی در جبر تعویضپذیر است.

**نگاشتهای گویا و توابع گویا.** مشکل دیگری که از کار با چند جمله‌ییها ناشی می‌شود، لزوم معرفی «توابع جزئاً تعریف شده» است؛ زیرا به علّت «سختپایی» که در بالا به آن اشاره شد، خواهیم دید که برای بعضی از چندگوناها (در واقع برای همهٔ چندگوناهای تصویری)، هیچ تابع منظّم ناثابتی وجود ندارد ($\leftarrow$ تمرینهای ۱.۵ و ۲.۵ و توضیح (۱۰.۸)). توابع گویا (یعنی، «توابعی» به صورت $f = g/h$ که g و h چندجمله‌یی هستند) در نقاطی که مخرج کسر صفر می‌شود، تعریف نشده‌اند. با وجود ایراد فراوان، بین هندسهٔ جبری‌دانها این رسم متداول شده است که عبارات «توابع گویا» و «نگاشتهای گویا» را برای توابع و یا نگاشتهائی که فقط جزئاً تعریف شده‌اند، نیز به کار می‌برند. لذا یک نگاشت گویا مانند $f : V_1 - \to V_2$ اساساً یک «نگاشت» نیست؛ و استفاده از «پیکان شکسته» هم برای این منظور، به تدریج متداول می‌شود. به دانشجویانی که این نظر را نمی‌پسندند، توصیه می‌شود، قبل از پرداختن به هندسهٔ جبری، یک دوره درس نظریهٔ رسته‌ها را بگذرانند.

این مشکل [لزوم معرفی توابع جزئاً تعریف شده] به هیچوجه یک مشکل جزئی نیست. حتی نگاشتهای منظم (یعنی ریختبریها، که به معنی واقعی نگاشت هِستند)، باید به صورت نگاشتهای گویائی تعریف شوند که در همهٔ نقاط $P \in V$، منظم‌اند (یعنی، خوشتعریف‌اند، مخرج کسر را می‌توان طوری انتخاب کرد که در نقطهٔ $P$ ناصفر بماند). مشکلی دیگر که با مطلب اخیر ارتباط نزدیک دارد، عرضهٔ یک تعریف ذاتی از یک چندگوناست: در این کتاب (و در کتابهایی مشابه این، تا آنجا که من دیده‌ام)، چندگوناهای آفین $V \subset \mathbb{A}^n$ و چند گوناهای شبه تصویری $V \subset \mathbb{P}^n$ تعریف می‌شوند، لیکن تعریف دقیق «چندگونا» بدون ارجاع به فضای محیطی شامل چندگونا، داده نمی‌شود. قطع‌نظر از جزئیات، یک چندگونا از به هم چسبانیدن چندگوناهای آفین در امتداد یک عده زیر مجموعه‌های بازیکریخت، حاصل می‌شود. امّا به بیان فعلی ما، که در آن خودِیکریختیها، کمابیش به طور صریح، برحسب توابع گویا تعریف شده‌اند، بیان مفهوم «چسبانیدن» سنگین خواهد بود، زبان مناسب برای بیان این مفهوم، نظریهٔ بافه‌هاست که در متون درسی تحصیلات تکمیلی به خوبی عرضه می‌شود.

( ۵.۰ ) از مشکلات روش جبری در هندسه به قدرکافی صحبت شد. گذشته از این توضیحات، تقریباً همهٔ چندگوناهای جبری مهمی که امروزه می‌شناسیم شبه تصویری هستند، ولذا می‌توان براساس آنها، مطالعات جالبی را روی چندگوناها دنبال کرد بی‌آنکه خیلی دلواپس نکات ظریفی در تعریف بود.

امتیاز اصلی هندسهٔ جبری این است که به طور کامل به زبان جبری تعریف می‌شود، و نه تنها روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ بلکه روی هر هیأتی به کار برده می‌شود؛ می‌توانیم هندسه روی هیأتهای با مشخصهٔ $p$ را مطالعه کنیم. نگویید «مشخصهٔ $p$ فقط کلمهٔ دهان پرکنی است و نتیجه‌اش همان هیأتهای متناهی است»؛ در واقع، اولاً بخش قابل توجهی از نظریهٔ گروهها، مثل قسمت عمده‌ای از مبحث ترکیبیات که در علوم کامپیوتر به کار می‌رود، بر هندسه روی هیأتهای متناهی مبتنی است، ثانیاً هیأتهای جالب متعدّدی با مشخصهٔ $p$، غیر از هیأتهای متناهی، وجود دارند. بعلاوه، وقتی عمیقاً نگاه کنیم، حضور هیأتهای متناهی را حتّی هنگام کار روی هیأتهای $\mathbb{Q}$و $\mathbb{C}$ احساس می‌کنیم. در بخش عمدهٔ قضایای مهّم در حسابِ چند گوناها روی $\mathbb{Q}$، از هندسهٔ روی $\mathbb{C}$ یا روی هیأتهای متناهی و بستار جبری آنها، به صورت قابل توجهی استفاده می‌شود.

در اینجا گفتار خود را به پایان می‌بریم، برای اطلاعات بیشتر، می‌توانید بحث غیر رسمی در (۱۵.۲) و بخش هشتم را مطالعه کنید.

( ۶.۰ ) امّا دربارهٔ ساختار این کتاب، فصل اوّل و فصل سوّم با این هدف تنظیم شده‌اند که نشان دهند برخی از مسائل پرارزش را می‌توان با روشهای هندسهٔ جبری مطالعه کرد. فصل دوّم به آشنایی با مفاهیم جبر تعویضپذیر که در(۴.۰) به آن اشاره شد و همچنین معرفیِ چارچوب رسته‌ایِ

هندسهٔ جبری، تخصیص یافته است؛ اگر مطالعهٔ کامل این فصل برای خواننده‌ای اسباب دردسر باشد، می‌تواند از بعضی از برهانها صرفنظر کند و آنها را مسلّم بینگارد، زیرا مطالب استانده هستند، و مؤلّف، به‌عنوان یک هندسهٔ جبری‌دان حرفه‌ای، به بافت هندسهٔ جبری کتاب پای بند است.

بخش هشتم شامل مطالب گوناگونی است که ممکن است مورد علاقه یا قابل استفاده برای دانشجو باشد، ولی با زمینهٔ اصلی کتاب هماهنگی چندانی نداشته باشد: بحث مختصری است در تاریخ و جامعه‌شناسی هندسهٔ جبری جدید، اشاره به ارتباطهای مباحث کتاب با مفاهیم پیشرفته‌تر، توضیحات تکنیکی و غیره.

## پیشنیازهای این درس

**جبر:** صورتهای درجهٔ دوم، ویژگیهای اولیهٔ حلقه‌های تعویضپذیر و ایدآلهای آنها، حوزهٔ ایدآل اصلی، و تجزیهٔ یکتا به عوامل.

**نظریهٔ گالوا:** هیأتها، حلقهٔ چندجمله‌ییها، توسیعهای متناهی، توسیعِ جبری در مقابل توسیعهای متعالی، تفکیک‌پذیری.

**توپولوژی و هندسه:** تعریف فضای توپولوژیک، تعریف فضای $\mathbb{P}^n$ (توضیح این‌که تعریف $\mathbb{P}^n$ مجدداً به طور کامل در کتاب عرضه خواهد شد).

**انتگرال و دیفرانسیل در $\mathbb{R}^n$:** مشتقات جزئی، قضیهٔ تابع ضمنی (که در جای خود به مطلب مورد نیاز در این زمینه اشاره خواهد شد).

**جبر تعویضپذیر:** مطالعهٔ حلقه‌های تعویضپذیر مفیدند لیکن ضروری نیستند.

## درسهایی که درس حاضر با آنها ارتباط پیدا می‌کند

**نظریهٔ توابع مختلط.** خم جبری روی $\mathbb{C}$ خمینهٔ مختلطی است یک بعدی، و توابع منظم روی آن توابعی تمامریخت‌اند، لذا این درس ارتباط نزدیکی با نظریهٔ توابع مختلط دارد. حتی اگر این ارتباط در وهلهٔ اول آشکار نباشد.

**نظریهٔ جبری اعداد.** به عنوان مثال ارتباط با آخرین قضیهٔ فرما.

**نظریهٔ فاجعه.** فاجعه‌ها نقاط تکین‌اند و علی الاصول همواره با توابع چندجمله‌یی داده می‌شوند و تحلیل و بررسی هندسهٔ نقاط تکین، هندسهٔ جبری محض است.

**جبر تعویضپذیر.** هندسهٔ جبری محرّک و رهنمون جبر تعویضپذیر است و جبر تعویضپذیر زیربنای تکنیکی هندسهٔ جبری؛ از این رو، این دو مبحث سبب غنای یکدیگرند.

## تمرینهای بخش صفر.

۱.۰ الف) نشان دهید برای هر مقدار معین از $(y,z)$، $x$ یک ریشهٔ مکرّر معادلهٔ $x^3+xy+z=0$ است، اگر و تنها اگر $x=\frac{-3z}{2y}$ و $4y^3+27z^2=0$؛

ب) معادلهٔ فوق سه‌ریشهٔ متمایز دارد اگر و تنها اگر $4y^3+27z^2<0$؛

ج) نمایشی از رویهٔ $S\subset\mathbb{R}^3$، به معادلهٔ $x^3+xy+z=0$ و تصویر آن بر صفحه $(y,z)$ به دست دهید.

د) حال کتاب یا مقاله‌ای را در نظریهٔ فاجعه‌ها باز و مقایسه کنید.

۲.۰ فرض کنید $f\in\mathbb{R}[X,Y]$ و $C:(f=0)\subset\mathbb{R}^2$؛ گوئیم $P\in C$ یک نقطهٔ تنهاست هرگاه عدد مثبت $\varepsilon$ وجود داشته باشد به طوری که $C\cap B(P,\varepsilon)=P$، که $B(P,\varepsilon)$ گویی است باز به مرکز $P$ و شعاع $\varepsilon$. با یک مثال نشان دهید که $C$ می‌تواند نقاط تنها داشته باشد. ثابت کنید اگر نقطهٔ $P\in C$ یک نقطهٔ تنها باشد، آنگاه تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ در نقطهٔ $P$ دارای ماکسیمم یا مینیمم است، و نتیجه بگیرید که $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطهٔ $P$ صفر است. این حکم نشان می‌دهد که هر نقطهٔ تنها روی یک خم حقیقی، یک نقطهٔ تکین است.

۳.۰ **خمهای درجهٔ سوم:** الف) نمایش خم $y=4x^3+6x^2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن را با خطوط افقی $y=t$، برای مقادیر صحیح $t$ در بازهٔ $t\in[-1,3]$، مشخص کنید.

ب) نمایش خمهای $y^2=4x^3+6x^2-t$ را برای مقادیر فوق از $t$ رسم کنید.

## کتابها

اکثر کتابهای ذیل در سطح بالاتر از دورهٔ کارشناسی هستند و به بعضی از این کتابها، در کتاب حاضر ارجاع شده است.

**و. فولتن**، خمهای جبری، اشپرینگر.[1] (این کتاب نازلترین و خود کفاترین کتاب هندسهٔ جبری در سطح بالاتر از کارشناسی است؛ فصلهای اول تا ششم آن برای یک درس دورهٔ کارشناسی کاملاً مناسب‌اند، هر چند مطالب به صورتی خشک عرضه شده‌اند).

**ای. ر. شافارویچ**، هندسهٔ جبری پایه، اشپرینگر.[2] (کتاب درسی برای دورهٔ کارشناسی ارشد، ولی برای منظور ما، مطالب فصل I و بخش II.1 کاملاً مناسب‌اند.)

**پ. گریفیث و ج. هریس**، اصول هندسه جبری، وایلی.[3] (این کتاب با دیدگاه تحلیلی مختلط

1. W. Fulton, Algebraic curves, Springer.

2. I. R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, Springer.

3. P. Grifiths and J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley.

تدوین شده است).

د. **مامفرد**، هندسهٔ جبری I، چندگوناهای تصویری مختلط، اشپرینگر.[1]

د. **مامفرد**، آشنایی با هندسهٔ جبری، «جزوهٔ دانشگاه هاروارد».[2] (هر چند این کتاب خیلی به‌آسانی قابل خواندن نیست، لیکن بلافاصله نکات اصلی را مطرح می‌سازد؛ بسیاری از هندسهٔ جبری‌دانان نسل من، حرفهٔ خود را با آموختن این جزوه شروع کرده‌اند. اخیراً این جزوه به صورت کتابی توسط اشپرینگر جزو سری «جزوه‌های درسی ریاضی» به شمارهٔ ۱۳۵۸، منتشر شده است، بنابراین دیگر آن کتابچهٔ جلد قرمز قبلی نیست!).

ک. **کندیگ**، هندسهٔ جبری مقدماتی، اشپرینگر.[3] (این کتاب بیشتر به ارتباط بین هندسهٔ جبری و هندسهٔ تحلیلی مختلط می‌پردازد).

ر. **هارتشورن**، هندسهٔ جبری، اشپرینگر.[4] (این کتاب مبنای کارحرفه‌ییهاست و مفاهیم پیشرفتهٔ آن خیلی بیشتر است؛ با اینحال فصل اول آن با رئوس مطالبی روشن برای یک درس دورهٔ کارشناسی مناسب است.)

م. **برگر**،هندسه I و II، اشپرینگر.[5](در زمینهٔ کار ما، بعضی از مطالب جلد IIی آن بالاخص در بخشهای مربوط به صورتهای درجهٔ دوم و ابر رویه‌های درجهٔ دوم سودمندند.)

م. ف. **عطیه**و ی. ج. **مکدانِلد**، مقدمه‌ای بر جبر تعویضپذیر، ادیسن وزلی.[6] (یک کتاب درسی گرانبها).

ا. **کونز**، مقدمه‌ای بر جبر تعویضپذیر و هندسهٔ جبری، بیرکهویزر.[7]

ه. **ماتسومورا**، نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر، کیمبریج.[8] (یک کتاب درسی مفصلتری در جبر تعویضپذیر).

د. **مامفرد**، خمها و ژاکوبین آنها، انتشارات دانشگاه میشیگان.[9] (سخنرانیهای دوره‌یی که خیلی

1. D. Mumford, Algebraic geometry I, Complex projective varieties, Springer.
2. D. Mumford, Introduction to algebraic geometry, Harvard notes.
3. K. Kendig, Elementary algebraic geometry, Springer.
4. R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer.
5. M. Berger, Geometry I and, II, Springer.
6. M. F. Atiyah and I.G.Macdonald, Introduction to commutative algebra, Addison - Wesley.
7. E.Kunz,Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser.
8. H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge.
9. D. Mumford, Curves and their Jacobians, Univ. of Michigan press.

سریع و عمیق به مفاهیم پرداخته است).

ج. ه. کِلِمنز، کتابچه‌ای در خمهای مختلط، پلنوم.[1] (یک سرگرمی دلپذیر).

ا. بریسکورن‌و ه. کْنورِر، خمهای جبری در صفحه، بیرکهویزر.[2]

آ. بو ویل، رویه‌های جبری مختلط، جزوه‌های درسی انجمن ریاضی لندن، کیمبریج.[3]

ی. کولار، ساختار خمینه‌های سه‌بعدی جبری: مقدّمه‌ای بر برنامه موری، بولتن انجمن ریاضی آمریکا شمارهٔ ۱۷(۱۹۸۷)، ۲۱۱ الی ۲۷۳.[4] (یک راهنمای مسافرت به یک حوزهٔ فعّال تحقیقی، که به صورتی جالب ارائه شده است، اکثر مطالب قابل فهم‌اند).

ج. ج. سمپل‌و ل. راث، مقدمه‌ای بر هندسهٔ جبری، آکسفرد.[5] (یک کتاب عالی قدیمی، پر از مطالب یادگرفتنی، لیکن تقریباً تمام آن عاری از دقت ریاضی).

ج. ل. کولیج، رساله‌ای در خمهای مسطح، آکسفرد و دوور.[6]

1. C. H. Clemens, A scrapbook of complex curves, Plenum.

2. E. Brieskorn and H. knörrer, Plane algbraic curves, Birkhäuser.

3. A. Beauville, Complex algebraic surfaces, LMS Lecture Notes, Cambridge.

4. J. Kollár, The structure of algebraic threefolds: An introduction to Mori's program, Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1987), 211-273.

5. J. G. Semple and L. Roth, Introduction to algebraic geometry, Oxford.

6. J. L. Coolidge, Treatise on algebraic plane curves, Oxford and Dover.

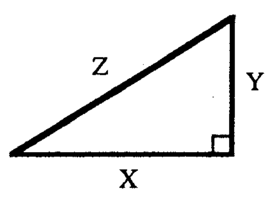
# ۱

# بحثی اجمالی دربارهٔ خمهای مسطّح

## بخش اول. مقطعهای مخروطی مسطّح

این بخش را با مطالعهٔ هندسهٔ مقطعهای مخروطی به‌عنوان انگیزه‌ای برای بیان صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^2$ آغاز می‌کنیم. هندسهٔ تصویری معمولاً در درس هندسهٔ سال دوم کارشناسی مطرح می‌شود. برخی از جنبه‌های برجستهٔ آن را با تکیه بر مختصات همگن یادآوری می‌کنیم، درعین‌حال، هندسهٔ زیرفضاهای خطی و «نسبت ناهمساز» را کاملاً نادیده می‌گیریم. مهمترین هدف خواننده باید درک بیان مفاهیم هندسی (مثلاً، مفهوم نقاط «بینهایت» مربوط به امتداد مجانبهای خمها) برحسب مختصّات باشد. ارتباط دوسویی بین شکل هندسی شهودی (که می‌گوید چه انتظاری باید داشت)، و بیان دقیق آن برحسب مختصّات (که امکان عینیت به شهود ما می‌دهد)، یک جنبهٔ جذاب هندسهٔ جبری است.

**(۱.۱) مثالی از یک خم پارامتری.** قضیهٔ فیثاغورس گویای این حکم است که در نمودار:




$$X^2+Y^2 = Z^2,$$

تساوی $X^2+Y^2=Z^2$ برقرار است. سه‌تاییهای فیثاغورسی (۳،۴،۵) و (۵،۱۲،۱۳) حتّی برای مصریان قدیم شناخته شده بودند. چگونه می‌توان همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ اخیر را به‌دست آورد؟ چون این معادله همگن است، لذا با فرض $x = X/Z$، $y = Y/Z$، دایرهٔ $C$، $C\subset\mathbb{R}^2$،

به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$، حاصل می‌شود، که این معادله به‌آسانی پارامتری می‌شود:

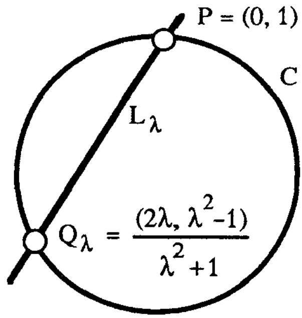
$$x = ۲\lambda/(\lambda^۲ + ۱), y = (\lambda^۲ - ۱)/(\lambda^۲ + ۱), \lambda = x/(۱ - y)$$

که به‌این ترتیب کلیهٔ جوابهای صحیح به‌صورت ذیل به‌دست می‌آیند:

$$X = ۲\ell m, Y = \ell^۲ - m^۲, Z = \ell^۲ + m^۲, \ell, m \in \mathbb{Z}$$

که $\ell$ و $m$ نسبت به هم اوّل‌اند (هرگاه $\ell$ و $m$ هر دو فرد باشند، هر یک از مقادیر بالا را بر ۲ تقسیم می‌کنیم). توجّه کنید که چون معادلهٔ اولیه همگن است، اگر $(X, Y, Z)$ یک جواب معادله باشد، $(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ نیز یک جواب آن است.

شاید با مفهوم پارامتریسازی از هندسهٔ دبیرستانی آشنائی دارید، به هرحال، به آسانی می‌توان دید که جوابهای پارامتری بالا در معادله صدق می‌کنند. ولی، اگر آنها را از قبل نمی‌دانستیم، می‌توانستیم با یک استدلال هندسی آسان، یعنی با نگاشت تصویر خطّی، از یک نقطهٔ داده شده، آنها را به‌دست آوریم:




نقطهٔ $P = (۰, ۱)$ را روی $C$ در نظر بگیرید. برای هر $\lambda \in \mathbb{Q}$ خط $L_\lambda$ که شیب آن $-\frac{۱}{\lambda}$ است و از نقطهٔ $P$ می‌گذرد، $C$ را در نقطهٔ دیگر $Q_\lambda$ قطع می‌کند که مختصات آن معادلات پارامتری موردنظر است. بعدها موارد زیادی از نگاشتهائی را که به کمک تصویر خطّی تعریف می‌شوند، خواهیم دید.

**(۲.۱) مثال مشابه.** $C : (۲X^۲+Y^۲ = ۵Z^۲)$ . با اعمال روش بالا نمایش پارامتری به‌صورت

$$x = ۲\sqrt{۵}\lambda/(۱ + ۲\lambda^۲), y = \sqrt{۵}(۲\lambda^۲ - ۱)/(۱ + ۲\lambda^۲)$$

حاصل می‌شود که معرّف نگاشتی از $\mathbb{R}$ در $C$ است و به ما امکان می‌دهد که کلیّهٔ مشخصات نقاط خم $C$ را که مختصّات آنها در $\mathbb{R}$ هستند بدانیم، و این مثال تفاوت عمده‌ای با مثال قبلی ندارد. حال اگر هیأت $\mathbb{Q}$ مورد نظر باشد، چه پیش می‌آید؟

**قضیه.** هرگاه $a, b, c \in \mathbb{Q}$ در تساوی $2a^2 + b^2 = 5c^2$ صدق کنند، آنگاه $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

**برهان.** از ضرب طرفین تساوی در مخرج مشترک و عاملگیری از عامل مشترک در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که a، b، c اعدادی هستند صحیح که هر سه با هم مضرب ۵ نیستند. اگر $5|a$ و $5|b$ در این صورت $25|5c^2$، لذا $5|c$، که خلاف فرض اخیر است. حال با در نظر گرفتن مقادیر مختلف aوb به پیمانهٔ ۵، به آسانی به تناقض می‌رسیم: چون هر عدد مربّع به پیمانهٔ ۵ برابر ۰،۱ یا ۴ است، لذا $2a^2 + b^2$ برابر ۱ + ۰ یا ۴ + ۰ یا ۰ + ۲ یا ۱ + ۲ یا ۴ + ۲ یا ۰ + ۸ یا ۱ + ۸ و یا ۴ + ۸ به پیمانهٔ ۵ خواهد بود که هیچکدام به‌صورت $5c^2$ نیست. □

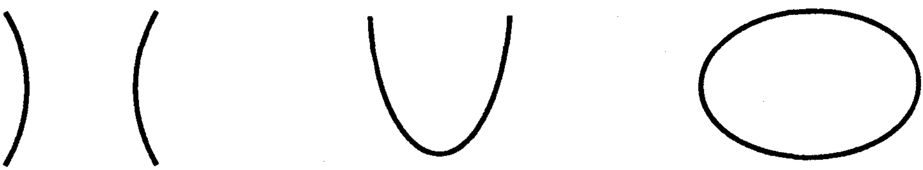
توجه کنید که استدلال کاملاً حسابی است.

**( ۳.۱ ) مقطعهای مخروطی در $\mathbb{R}^2$.** یک مقطع مخروطی در $\mathbb{R}^2$ خم مسطحی است که با یک معادلهٔ درجهٔ دوم داده می‌شود:

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

همهٔ ما رده‌بندی مقطعهای مخروطی ناتباهیده را دیده‌ایم:

(الف) بیضی　　(ب) سهمی　　(ج) هذلولی



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y = mx^2 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بعلاوه چند حالت خاص نیز وجود دارند:

(د) نقطهٔ تنها با معادلهٔ $x^2 + y^2 = 0$؛

(ه،و،ز) مجموعهٔ تهی که می‌تواند با هر یک از معادله‌های ذیل داده شده باشد:

(ه) $x^2 + y^2 = -1$؛ (و) $x^2 = -1$؛ (ز) $0 = 1$؛ این سه معادله با هم تفاوت دارند، اگرچه هر سه معرف یک مکان هندسی در $\mathbb{R}^2$ هستند. مثلاً می‌توان جوابهای مختلط آنها را باهم مقایسه کرد.

(ح) خط $x = 0$؛

(ط) دو خط متمایز $xy = 0$؛

(ی) خطوط موازی $x(x-1) = 0$؛

(ک) «خط دوگانه» $x^2 = 0$؛

برحسب سلیقه خودتان می‌توانید حالت نهائی ذیل را نیز در نظر بگیرید:

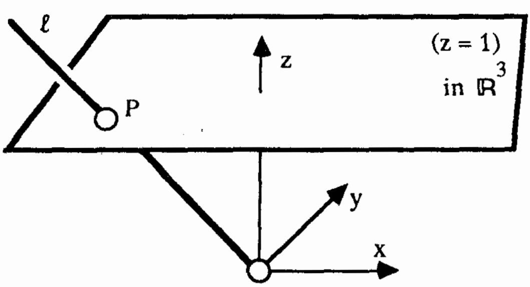
(ل) کلّ صفحه که با معادلهٔ $0 = 0$ داده شده است.

**(۴.۱) صفحهٔ تصویری.** تعریف «غیرمنتظره»:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} &= \{\text{خطوط گذرنده از مبدأ در } \mathbb{R}^3\} \\ &= \{\text{نسبتهای } (X:Y:Z)\} \\ &= (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim, (X,Y,Z) \sim (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z), \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

(خوانندهٔ دقیق به‌آسانی می‌تواند این تعریف را از فضای $\mathbb{R}^3$ برای هر فضای برداری دلخواه روی یک هیأت تعمیم دهد و همچنین به‌جای کار در یک دستگاه مختصّات معین از استدلالهای مستقل از دستگاه مختصات، استفاده کند).

برای نمایش یک نسبت $(X:Y:Z)$ که در آن $Z \neq 0$، می‌توان قرار داد $x = X/Z$، $y = Y/Z$؛ این عمل کار را آسان می‌کند، چون نسبت فوق دقیقاً با دو عدد حقیقی متناظر می‌شود. به‌عبارت دیگر، ردهٔ هم‌ارزی $(X,Y,Z)$ تحت رابطهٔ $\sim$ نماینده یکتائی به‌صورت $(x,y,1)$ دارد که مختصّ سوّم آن برابر ۱ است. متأسفانه گاهی ممکن است $Z$ صفر باشد، لذا انتخاب نماینده ردهٔ هم‌ارزی به شکل بالا همواره مناسب نیست. معنی این بحث این است که $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ شامل رونوشتی از $\mathbb{R}^2$ است. شکل زیر را در نظر بگیرید:




$$\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \qquad , \qquad (x,y) \mapsto (x,y,1)$$

یک خط کلّی در $\mathbb{R}^۳$ که از مبدأ O می‌گذرد روی صفحهٔ $(Z = ۰)$ واقع نیست، لذا این خط صفحهٔ $(Z = ۱)$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، که نماینده‌ای برای آن ردهٔ هم‌ارزی است. خطوط واقع بر صفحهٔ $(Z = ۰)$ هیچگاه صفحهٔ $(Z = ۱)$ را قطع نمی‌کنند، بنابراین این خطوط با نقاط $\mathbb{R}^۲$ متناظر نمی‌شوند، بلکه با امتدادهای مجانبی، یا با دسته خطهای موازی در $\mathbb{R}^۲$ متناظر می‌شوند؛ لذا می‌توان تصور کرد که $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ از $\mathbb{R}^۲$ و یک «نقطهٔ بینهایت» برای هر دسته خط موازی، تشکیل شده است. از این دیدگاه ، وقتی محاسبات در $\mathbb{R}^۲$ صورت می‌گیرد، سعی می‌شود با نوعی استدلال «مجانبی» حدس زده شود که در بینهایت چه پیش می‌آید. سپس (در صورت لزوم)، مطلب برحسب مختصات همگن به اثبات می‌رسد. تعریف صفحهٔ تصویری به‌صورت خطوط واقع در $\mathbb{R}^۳$ از این امتیاز برخوردار است که به همهٔ نقاط $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ با دید واحدی می‌نگرد.

در سراسر هندسه گروههای تبدیلها از اهمیّت اساسی برخوردارند؛ یک ویژگی هندسی وقتی اهمیّت کافی پیدا می‌کند که بر اثر نوع مناسبی از تبدیلها پایا باشد. یک تعویض مختصّات آفین در $\mathbb{R}^۲$ به‌صورت $T(x) = Ax + B$ داده می‌شود، که $x = (x, y) \in \mathbb{R}^۲$، و A ماتریسی $۲ \times ۲$ و وارونپذیر است و B یک بردار انتقال؛ هرگاه ماتریس A متعامد باشد، تبدیل T اقلیدسی است. همان‌گونه که می‌دانیم، هر مقطع مخروطی ناتباهیده را می‌توان با یک تبدیل اقلیدسی به یکی از صورتهای استاندهٔ (الف-ج) مذکور در بالا، درآورد. این تمرین به خواننده واگذار می‌شود که نشان دهد هر مقطع مخروطی را می‌توان با یک تبدیل آفین به یکی از صورتهای (الف-ل) درآورد.

یک تبدیل تصویری از $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ به‌صورت $T(\mathbf{X}) = M\mathbf{X}$ است که M یک ماتریس وارونپذیر $۳ \times ۳$ است. اثر این تبدیل را روی قطعهٔ آفین $\mathbb{R}^۲$ در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ می‌توان به‌آسانی فهمید: به‌عنوان یک نگاشت جزئاً تعریف شدهٔ $\mathbb{R}^۲ - \rightarrow \mathbb{R}^۲$، T یک تبدیل کسری-خطی است به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B\right)/(cx + dy + e)$$

که

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline c\,d & e \end{array}\right]$$

البته برای نقاطی که $cx + dy + e = ۰$، T تعریف نشده است. شاید این موضوع تا حدی غیرشهودی به‌نظر آید، لیکن نمونه‌های آن واقعاً در طبیعت رخ می‌دهد: دو تصویر متفاوت از یک شیئ

(مسطّح)، با یک تبدیل تصویری به‌هم مربوط می‌شوند؛ (برای مثال، $\longleftarrow$ تصاویر [برگر، ۴.۷.۴]). بنابراین یک فارغ‌التحصیل رشتهٔ ریاضی که کار تعبیر تصاویر ماهواره‌ای را به عهده می‌گیرد، مدّت زیادی از وقت خود را صرف محاسبهٔ تبدیلهای تصویری خواهد کرد (چه تصاویر ماهواره‌ای برای مقاصد صلحجویانه باشد و چه بخشی از برنامهٔ وسیع سیاست دفاعی رئیس‌جمهور آمریکا، ریگِن، در ایجاد مشاغل!).

تبدیلهای تصویری تلویحاً در سراسر این کتاب به‌کار برده شده‌اند، که اصولاً اغلب با استفاده از «انتخاب مناسب مختصات» صورت گرفته است.

**( ۵.۱ ) معادلهٔ یک مقطع مخروطی.** چند جمله‌یی درجهٔ دوم ناهمگن

$$q(x,y) = ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f$$

با چندجمله‌یی درجهٔ دوم همگن

$$Q(X,Y,Z) = aX^۲ + bXY + cY^۲ + dXZ + eYZ + fZ^۲$$

متناظر است؛ این تناظر را می‌توان به‌عنوان یک دستورالعمل پذیرفت، و یا می‌توان آن را به‌صورت یک نگاشت دوسوئی $Q \leftrightarrow q$ تصوّر کرد که توسط

$$q(x,y) = Q(X/Z, Y/Z, ۱) \qquad , \qquad x = X/Z, y = Y/Z$$

و بالعکس،

$$Q = Z^۲ q(X/Z, Y/Z)$$

داده شده است. یک مقطع مخروطی $C$، $C \subset \mathbb{P}^۲$، خمی است که توسط $C : (Q(X,Y,Z) = ۰)$ داده می‌شود، که $Q$ یک چندجمله‌یی درجهٔ دوم همگن است؛ توجه داشته باشید که شرط $Q(X,Y,Z) = ۰$ روی ردهٔ هم‌ارزی خوشتعریف است. زیرا برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $Q(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^۲ Q(X,Y,Z)$. به‌عنوان یک تمرین، نشان دهید که خم تصویری $C$ قطعهٔ آفین $\mathbb{R}^۲$ را در مقطع مخروطی آفین $(q = ۰)$ قطع می‌کند.

**«خط بینهایت» و امتدادهای مجانبی.** نقاط $\mathbb{P}^۲$ که در شرط $Z = ۰$ صدق می‌کنند، با نسبتهای $(X : Y : ۰)$ متناظرند. این نقاط تشکیل «خط بینهایت» را می‌دهند که نسخه بدل $\mathbb{P}^۱_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است (زیرا نگاشت $(X : Y) \longmapsto X/Y$ معرّف یک نگاشت دوسوئی از $\mathbb{P}^۱_{\mathbb{R}}$ در $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ است).

طبق تعریف، یک خط $L$ در $\mathbb{P}^2$ به‌صورت $L:(aX+bY+cZ=0)$ داده می‌شود، و

$$L \text{ از نقطه} (X,Y,0) \text{ می‌گذرد} \Leftrightarrow aX+bY=0$$

در مختصات آفین، همین خط به‌صورت $ax+by+c=0$ داده می‌شود، بنابراین کلیهٔ خطوطی که برای آنها نسبت $a:b$ ثابت باشد از نقطهٔ ثابتی در بینهایت می‌گذرند. اصطلاحاً گوئیم «خطوط موازی همدیگر را در بینهایت قطع می‌کنند».

**مثالها.** (الف) هذلولی $(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1)$ در $\mathbb{R}^2$ با خم $C:(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=Z^2)$ در $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ متناظر است. روشن است که این خم خط $(Z=0)$ را در دو نقطهٔ $(a,\pm b,0)$ در $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ قطع می‌کند، که به‌طور طبیعی به مجانبهای هذلولی نظیر می‌شوند.

توجه کنید که در قطعهٔ آفین $(X\neq 0)$ از $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$، مختصات آفین به‌صورت $u=\frac{Y}{X}$، $v=\frac{Z}{X}$ است و در نتیجه معادلهٔ $C$ به‌صورت بیضی $\frac{u^2}{b^2}+v^2=\frac{1}{a^2}$ درمی‌آید. در این مورد تمرین ۱.۷ را که در آن تعبیری هنرمندانه از این مطلب شده است، ببینید.

(ب) سهمی $(y=mx^2)$ در $\mathbb{R}^2$ به خم $C:(YZ=mX^2)$ در $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ نظیر می‌شود که این خم خط $(Z=0)$ را در تنها نقطهٔ $(0:1:0)$ قطع می‌کند. بنابراین در $\mathbb{P}^2$، «دو شاخهٔ سهمی همدیگر را در بینهایت قطع می‌کنند»؛ توجه کنید عبارت اخیر حکمی است با محتوای شهودی (ممکن است احساس شما این را تا حدی غیرموجه بشمارد)، لیکن این نتیجه‌ای نیست که بتوانید آن را تنها با نظاره در $\mathbb{R}^2$ به‌دست آورید، حتی ممکن است دارای معنی نیز نباشد.

**(۱.۶) رده‌بندی مقطعهای مخروطی در $\mathbb{P}^2$.** فرض کنید $k$ هیأتی است دلخواه با مشخصه‌ای مخالف ۲، دو قضیه از جبر خطیِ صورتهای درجهٔ دوم را یادآوری می‌کنیم:

**قضیه(الف).** یک نگاشت دوسوئی طبیعی به‌صورت ذیل وجود دارد

$$\left\{\begin{matrix}\text{صورتهای دوخطی}\\ \text{متقارن روی } k^3\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{دوسوئی}} \left\{\begin{matrix}\text{صورتهای درجه‌دوّم}\\ k^3\to k\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{چندجمله‌ییهای}\\ \text{همگن درجه‌دوّم}\end{matrix}\right\}$$

که توسط دستور:

$$aX^2+2bXY+cY^2+2dXZ+2eYZ+fZ^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{bmatrix}$$

داده شده است.

یک صورت درجهٔ دوّم را ناتباهیده گوییم اگر صورت دوخطی متناظر آن ناتباهیده باشد، یعنی ماتریس فوق وارونپذیر باشد.

**قضیه(ب).** فرض کنید $V$ یک فضای برداری روی $k$ و $Q : V \to k$ یک صورت درجهٔدوم باشد؛ پایه‌ای از $V$ وجود دارد به‌طوری که $Q$ نسبت به این پایه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q = \varepsilon_۱ x_۱^۲ + \varepsilon_۲ x_۲^۲ + \cdots + \varepsilon_n x_n^۲ \ , \ \varepsilon_i \in k$$

(شاید یادآوری این نکته بی‌فایده نباشد که قضیهٔ فوق با استفاده از قضیه متعامدسازی گرام‌ـاشمیت ثابت می‌شود). روشن است که برای $\lambda \in k \backslash \{۰\}$، جایگزینی $x_i \longmapsto \lambda x_i$، $\varepsilon_i$ را به $\lambda^{-۲}\varepsilon_i$ بدل می‌کند.

**فرع.** در یک دستگاه مختصات مناسب، هر مقطع مخروطی در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ به یکی از صورتهای ذیل است:

(الف) مقطع مخروطی ناتباهیده $C : (X^۲ + Y^۲ - Z^۲ = ۰)$؛

(ب) مجموعهٔ تهی، که با معادلهٔ $(X^۲ + Y^۲ + Z^۲ = ۰)$ داده شده است؛

(ج) دو خط متمایز، که با معادلهٔ $(X^۲ - Y^۲ = ۰)$ داده می‌شود؛

(د) نقطه تنهای $(۰ : ۰ : ۱)$ که معادله‌اش $(X^۲ + Y^۲ = ۰)$ است؛

(ه) خط دوگانه با معادلهٔ $(X^۲ = ۰)$.

(مختاریم که کل $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ با معادلهٔ $(۰ = ۰)$ را نیز به‌عنوان حالت دیگر اختیار کنیم).

**برهان.** هر عدد حقیقی $\varepsilon$، اگر ناصفر باشد، خود یا قرینه‌اش توان دوم عددی است، لذا کافی است در قضیهٔ بالا $\varepsilon_i$ها را صفر یا $\pm ۱$ بگیریم. بعلاوه چون ما فقط به مکان هندسی $(Q = ۰)$ توجه داریم، می‌توانیم تمام $Q$ را در $-۱$ ضرب کنیم. با این ملاحظات به‌آسانی به فهرست بالا می‌رسیم. □

دو نکته دربارهٔ فرع بالا قابل بیان است: اول اینکه فهرست بالا از فهرست (۳.۱) خیلی کوتاهتر است؛ برای مثال، سه حالت ناتباهیده (بیضی، سهمی، هذلولی) در (۳.۱) با (الف) در فهرست اخیر متناظر می‌شوند. همچنین دو خط متقاطع و دو خط موازی در حالت تصویری تمایزی از هم ندارند. دوم این‌که استخراج این فهرست با استفاده از اصول کلّی جبری، خیلی ساده‌تر است.

**( ۷.۱ ) پارامتریسازی یک مقطع مخروطی.** فرض کنید $C$ یک مقطع مخروطی ناتباهیده و ناتهی در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ است. به‌موجب فرع مذکور در (۶.۱)، اگر مختصات جدید را به‌صورت $(X + Z : Y : Z - X)$، اختیارکنیم خم $C$ با خم $(XZ = Y^۲)$ به‌طور تصویری هم‌ارز خواهد

بود؛ این خمی است که به‌صورت ذیل پارامتری می‌شود.

$$\Phi : \mathbb{P}^{1}_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{C} \subset \mathbb{P}^{2}_{\mathbf{R}}$$
$$(U : V) \longmapsto (U^{2} : UV : V^{2})$$

تذکر۱. نگاشت وارون $\Phi$ یعنی، $\Psi : \mathbf{C} \to \mathbb{P}^{1}_{\mathbf{R}}$، به‌صورت $(X : Y : Z) \longmapsto (X : Y) = (Y : Z)$ داده می‌شود که نسبت $(X : Y)$ برای حالت $X \neq 0$ و نسبت $(Y : Z)$ برای حالت $Z \neq 0$ تعریف شده است. با تعریفهائی که بعداً خواهند آمد $\Phi$ و $\Psi$ یکریختیهای وارون یکدیگر روی چندگوناها هستند.

**تذکر۲.** در بخشهای ۱ و ۲ مقطعهای مخروطی ناتباهیدهٔ ناتهی به‌طور ضمنی با خم $(XZ = Y^{2})$ هم‌ارز تصویری گرفته شده‌اند؛ که البته فرض بر این است که مشخصهٔ هیأت موردنظر مخالف ۲ است، که این موضوع در مثال ۵.۱ توضیح داده شده است. (خواننده‌ای که به حالت مشخصهٔ ۲ علاقمند باشد، می‌تواند مطلب بالا را به‌عنوان تعریف مقطع مخروطی ناتباهیده تلقی کند).

**(۸.۱) صورت همگن دومتغیره.** فرض کنید $F(U, V)$ یک چندجمله‌یی همگن درجهٔ $d$ از $U$ و $V$ باشد که ضرایب آن متعلق به هیأت $k$ است؛ (با پیروی از سنت معمول، واژهٔ صورت را برای «چندجمله‌یی همگن» به‌کار خواهیم برد):

$$F(U, V) = a_d U^d + a_{d-1} U^{d-1} V + \cdots + a_i U^i V^{d-i} + \cdots + a_0 V^d$$

به $F$ یک چندجمله‌یی ناهمگن یک متغیره به شکل ذیل نظیر می‌شود:

$$f(u) = a_d u^d + a_{d-1} u^{d-1} + \cdots + a_i u^i + \cdots + a_0$$

روشن است که برای هر $\alpha \in k$، داریم

$$f(\alpha) = 0 \iff (u - \alpha) | f(u) \iff (U - \alpha V) | F(U, V) \iff F(\alpha, 1) = 0$$

لذا صفرهای $f$ با صفرهای $F$ روی $\mathbb{P}^1$، دور از نقطهٔ $(1 : 0)$، یعنی «نقطهٔ $\alpha = \infty$» متناظر می‌شوند. وقتی می‌گوییم $F$ یک صفر در بینهایت دارد یعنی چه؟

$$F(1, 0) = 0 \iff a_d = 0 \iff \deg f < d$$

حال چندگانگی یک صفر $F$ روی $\mathbb{P}^1$ را تعریف می‌کنیم که برابر است با

(الف) چندگانگی f در $\alpha \in k$، برای $(\alpha : ۱) \in \mathbb{P}^۱$؛

یا (ب) $d - \deg(f)$ اگر این صفر $(۰ : ۱)$ باشد.

با این ترتیب چندگانگی صفر F در نقطهٔ $(\alpha : ۱)$ بزرگترین توان $(U - \alpha V)$ است که F را می‌شمارد، و در نقطهٔ $(۰ : ۱)$ بزرگترین توان V است که F را می‌شمارد.

**قضیه.** هرگاه $F(U, V)$ یک صورت ناصفر درجهٔ d برحسب U و V باشد، F حداکثر d صفر در $\mathbb{P}^۱$ دارد؛ بعلاوه اگر k جبری‌ـبسته باشد، F دقیقاً d صفر در $\mathbb{P}^۱$ دارد به شرط آن‌که این صفرها با چندگانگی تعریف شده در بالا شمرده شوند.

**برهان.** فرض کنید $m_\infty$ چندگانگی صفر F در نقطهٔ $(۰ : ۱)$ باشد، پس طبق تعریف، درجهٔ چندجمله‌یی ناهمگن f وابسته به F، برابر $d - m_\infty$ خواهد بود، و لذا این قضیه به قضیهٔ معروف در مورد تعداد ریشه‌های چندجمله‌یی یک متغیرهٔ f که حداکثر برابر درجهٔ f است، بدل می‌شود. □

باید توجه داشت که وقتی k هیأت جبری‌ـبسته است، F به‌صورت $\Pi\lambda_i^{m_i}$ از صورتهای خطی $\lambda_i = (a_i U + b_i V)$ تجزیه می‌شود، و وقتی چنین عمل شود نقطهٔ $(۰ : ۱)$ با صورت $V = \lambda_\infty$ متناظر می‌شود و از این جهت همان وضعیت مشابه سایر نقاط را پیدا می‌کند.

**( ۹.۱ ) حالتهای سادهٔ قضیهٔ بزو.** قضیهٔ بزو بیان این مطلب است که اگر $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ دو خم مسطّح از درجه‌های m و n باشند، تعداد نقاط تلاقی $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ برابر mn است، به‌شرط این‌که (الف) هیأت k جبری‌ـبسته باشد؛ (ب) تعداد نقاط تلاقی، با رعایت چندگانگی شمرده شوند؛ (ج) محاسبه در $\mathbb{P}^۲$ انجام گیرد تا بتوان تعداد درست نقاط تلاقی «در بینهایت» را به‌حساب آورد. برای برهان مستقیم این قضیه [ ←فولتن، ص ۱۱۲]. در این بخش به بررسی این قضیه در حالتی که یکی از خمها یک خط و یا یک مقطع مخروطی باشد، می‌پردازیم.

**قضیه.** فرض کنید L خطی در $\mathbb{P}^۲_k$ (یا بترتیب $\mathbf{C}$ یک مقطع مخروطی ناتباهیده در $\mathbb{P}^۲_k$) است و خم $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}^۲_k$ توسط $G_d(X, Y, Z) = ۰$ تعریف شده است که G یک صورت درجهٔ d برحسب X، Y و Z است. هرگاه $L \not\subset \mathbf{D}$ (بترتیب، $\mathbf{C} \not\subset \mathbf{D}$)؛ آنگاه

$$\operatorname{Card}\{L \cap \mathbf{D}\} \le d \qquad (\text{بترتیب } \operatorname{Card}\{\mathbf{C} \cap \mathbf{D}\} \le ۲d)$$

در واقع تعریفی طبیعی از چندگَانگی نقاط تلاقی وجود دارد به‌طوری که نامساوی بالا برای «تعداد نقاط، با احتساب چندگانگی» نیز صادق است، و اگر k جبری‌ـبسته باشد حالت تساوی آن برقرار است.

**برهان.** خط $L \subset \mathbb{P}^2_k$ با معادلهٔ $\lambda = 0$ داده می‌شود که $\lambda$ یک صورت خطی است؛ برای سادگی محاسبات، مناسبتر است که خط L را به‌صورت پارامتری به شکل

$$X = a(U, V), Y = b(U, V), Z = c(U, V)$$

بگیریم که a و b و c صورتهای خطی برحسب U و V هستند. برای مثال اگر $\lambda = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$، و $\gamma \neq 0$، آنگاه L به‌شکل ذیل خواهد بود

$$X = U, Y = V, Z = -(\alpha/\gamma)U - (\beta/\gamma)V$$

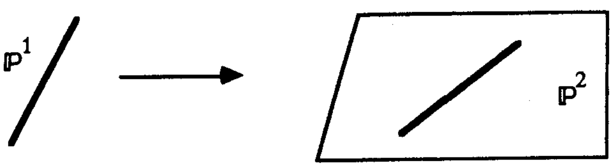
و نیز، همان‌گونه که در (۷.۱) توضیح داده شد، نمایش پارامتری یک مقطع مخروطی ناتباهیده به شکل

$$X = a(U, V), Y = b(U, V), Z = c(U, V)$$

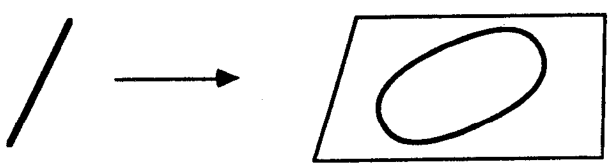
خواهد بود که a و b و c صورتهای درجهٔدوم برحسب U و V هستند. زیرا C یک تبدیل تصویری از خم $(XZ = Y^2)$ است که به شکل $(X, Y, Z) = (U^2, UV, V^2)$ پارامتری شده و بنابراین توسط

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} U^2 \\ UV \\ V^2 \end{bmatrix}$$

داده شده است که M یک ماتریس ۳ × ۳ وارونپذیر است.




خط پارامتری شده



مقطع مخروطی پارامتری شده

با این ترتیب نقاط تلاقی L (بترتیب C) با D با محاسبهٔ مقادیر نسبت (U : V) از تساوی

$$F(U, V) = G_d\,(a(U, V), b(U, V), c(U, V)) = 0$$

به‌دست می‌آید. لیکن F یک صورت درجهٔ d (بترتیب درجهٔ ۲d) برحسب U و V است، لذا اثبات قضیه از (۸.۱) نتیجه می‌شود. □

**(۱۰.۱) فرع.** اگر $P_۱, \cdots, P_۵ \in \mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ نقاط متمایزی باشند که هیچ چهارتای آنها همخط نباشند، آنگاه حداکثر یک مقطع مخروطی وجود دارد که از نقاط $P_۱$، ...، $P_۵$ می‌گذرد.

**برهان.** برخلاف، فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو مقطع مخروطی متمایز باشند به‌طوری که

$$\{P_۱, \cdots, P_۵\} \subset C_۱ \cap C_۲$$

$C_۱$ ناتهی است، لذا اگر ناتباهیده باشد، طبق (۷.۱) از لحاظ تصویری با خم پارامتری

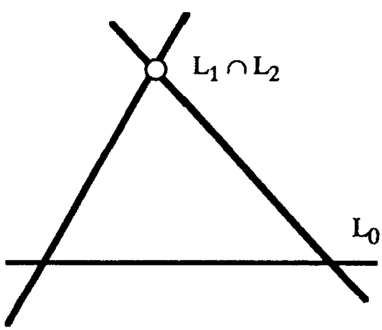
$$C_۱ = \{(U^۲ : UV : V^۲) | (U : V) \in \mathbb{P}^۱\}$$

هم‌ارز خواهد شد؛ بنابر (۹.۱)، $C_۱ \subset C_۲$. امّا اگر $Q_۲$ معادلهٔ $C_۲$ باشد، برای هر $(U : V) \in \mathbb{P}^۱$، داریم $Q_۲(U^۲, UV, V^۲) = ۰$. یک محاسبه ساده (⟵ تمرین ۶.۱) نشان می‌دهد که در این صورت $Q_۲$ مضربی است از $(XZ - Y^۲)$، که این نتیجه با فرض $C_۱ \neq C_۲$ متناقض است.

حال فرض کنید که $C_۱$ تباهیده است؛ مجدداً بنابر (۶.۱)، $C_۱$ اجتماع دو خط متمایز است و یا یک خط (دوگانه)، و به‌آسانی دیده می‌شود که

$$C_۱ = L_۰ \cup L_۱ \quad , \quad C_۲ = L_۰ \cup L_۲$$

که $L_۱$ و $L_۲$ خطوطی هستند متمایز. پس $C_۱ \cap C_۲ = L_۰ \cup (L_۱ \cap L_۲)$.




بنابراین چهار نقطه از پنج نقطه $P_۱$، ...، $P_۵$ بر خط $L_۰$ واقع‌اند که باز یک تناقض است. □

**(۱۱.۱) فضای همهٔ مقطعهای مخروطی.** فرض می‌کنیم

$$S_۲ = \{\mathbb{R}^۳ \text{ صورتهای درجهٔدوم روی}\} = \{۳ \times ۳ \text{ ماتریسهای متقارن}\} \cong \mathbb{R}^۶$$

برای $Q \in S_۲$، فرض کنیم $Q = aX^۲ + ۲bXY + \cdots + f\ Z^۲$، در این صورت برای $P_\circ = (X_\circ : Y_\circ : Z_\circ) \in \mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$، رابطهٔ $P_\circ \in C : (Q = \circ)$ را در نظر می‌گیریم. این رابطه به‌صورت زیر است

$$Q(X_\circ, Y_\circ, Z_\circ) = aX_\circ^۲ + ۲bX_\circ Y_\circ + \cdots + fZ_\circ^۲ = \circ$$

که برای هر نقطه ثابت $P_\circ$، معادله‌ای است خطی برحسب a،b،$\cdots$، f. بنابراین

$$S_۲(P_\circ) = \{Q \in S_۲ | Q(P_\circ) = \circ\} \cong \mathbb{R}^۵ \subset S_۲ = \mathbb{R}^۶$$

یعنی $S_۲(P_\circ)$ یک ابرصفحه پنج‌بعدی است. برای نقاط $P_۱$،$\cdots$، $P_n$ در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$، به‌طور مشابه چنین تعریف می‌کنیم

$$S_۲(P_۱, \cdots, P_n) = \{Q \in S_۲ | Q(P_i) = \circ, i = ۱, \cdots, n\}$$

که در این‌صورت n معادله خطی بین ۶ ضریب a، b، $\cdots$، f از Q به‌دست می‌آید. بدین ترتیب قضیهٔ ذیل حاصل می‌شود:

**قضیه.** $\dim S_۲(P_۱, \cdots, P_n) \geq ۶ - n$.

همچنین می‌توان انتظار داشت که تساوی وقتی برقرار باشد که نقاط $P_۱$،$\cdots$، $P_n$ "در وضعیتهای به‌قدرِ کافی عمومی" باشند. دقیقتر بگوییم:

**فرع.** اگر $n \leq ۵$، و هیچ چهار نقطه از نقاط $P_۱$،$\cdots$، $P_n$ همخط نباشند، آنگاه

$$\dim S_۲(P_۱, \cdots, P_n) = ۶ - n$$

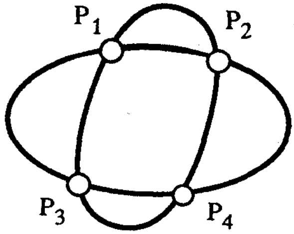
برهان. به‌موجب فرع ۱۰.۱ اگر $n = ۵$، آنگاه $\dim S_۲(P_۱, \cdots, P_۵) \leq ۱$، که اثبات فرع را می‌دهد. اگر $n \leq ۴$، نقاط $P_{n+۱}$،$\cdots$، $P_۵$ را به‌قسمی به نقاط داده شده اضافه می‌کنیم که شرط اولیه، یعنی همخط نبودن هیچ چهار نقطه، حفظ شود. گذشتن مقطع مخروطی از هر نقطه، حداکثر یک شرط خطی بین ضرایب ایجاد می‌کند، لذا خواهیم داشت

$$۱ = \dim S_۲(P_۱, \cdots, P_۵) \geq \dim S_۲(P_۱, \cdots, P_n) - (۵ - n)$$

□

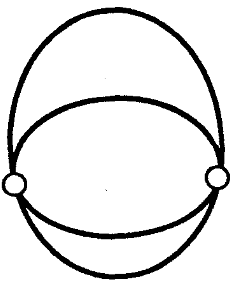
توجه داشته باشید که اگر شش نقطه $P_۱, \cdots, P_۶ \in \mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ داده شده باشند، ممکن است این نقاط بر یک مقطع مخروطی واقع باشند و یا روی هیچ مقطع مخروطی قرار نگیرند.

**( ۱۲.۱ ) فصل مشترک دو مقطع مخروطی.** همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، معمولاً دو مقطع مخروطی همدیگر را در ۴ نقطه قطع می‌کنند:

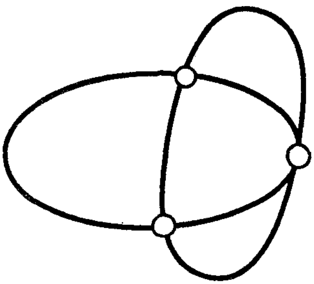



بالعکس بنابر فرع ۱۱.۱، اگر چهار نقطهٔ $P_1, \cdots, P_4 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ داده شده باشند، تحت شرایط مناسب، $S_2(P_1, \cdots, P_4)$ یک فضای برداری دوبعدی است، لذا با انتخاب پایه‌ای مانند $Q_1$، $Q_2$ برای آن، دو مقطع مخروطی $C_1$ و $C_2$ به‌دست می‌آید به‌قسمی که $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \cdots, P_4\}$.

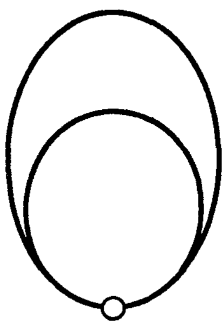
صورتهای ممکن متعددی از تقاطع چندگانهٔ دو مقطع مخروطی ناتکین وجود دارند:



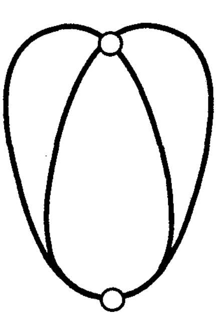
$2P + 2Q$



$2P_1 + P_2 + P_3$



$4P$



$3P + Q$

برای ملاحظهٔ معادله‌های مناسب متناظر این اشکال، ⟵ تمرین ۹.۱.

## ( ۱۳.۱ ) مقطعهای مخروطی تباهیده در یک دسته مقطع مخروطی .

**تعریف.** یک دسته مقطع مخروطی خانواده‌ای است به‌صورت

$$\mathbf{C}_{(\lambda,\mu)} : (\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0)$$

که $Q_1$ و $Q_2$ دو صورت درجهٔ دوم هستند و هر عضو آن خمی است مسطح که به‌طور خطی به پارامترهای $(\lambda, \mu)$ بستگی دارد و می‌توان نسبت $(\lambda : \mu)$ را به‌عنوان نقطه‌ای در $\mathbb{P}^1$ تصور نمود.

با توجه به مثالها، انتظار می‌رود که برای مقادیر خاص $(\lambda : \mu)$، مقطع مخروطی $\mathbf{C}_{(\lambda,\mu)}$ تباهیده باشد. زیرا اگر برای صورت درجهٔ دوم Q، دترمینان ماتریس متقارن $3 \times 3$ی مربوط به Q را با $\det(Q)$ نمایش دهیم، روشن است که

$$\mathbf{C}_{(\lambda,\mu)} \text{تباهیده است} \iff \det(\lambda Q_1 + \mu Q_2) = 0$$

اگر $Q_1$ و $Q_2$ را به‌صورت ماتریسهای متقارن بنویسیم، این شرط به‌صورت ذیل بیان می‌شود:

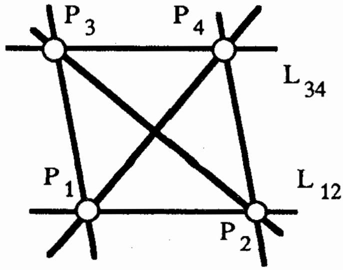
$$F(\lambda, \mu) = \det\left|\lambda \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}\right| = 0$$

حال توجه می‌کنیم که $F(\lambda, \mu)$ یک صورت درجهٔ سوم همگن برحسب $\lambda$ و $\mu$ است. بالاخص می‌توان (۸.۱) را در مورد F به‌کار برد تا قضیه ذیل حاصل شود:

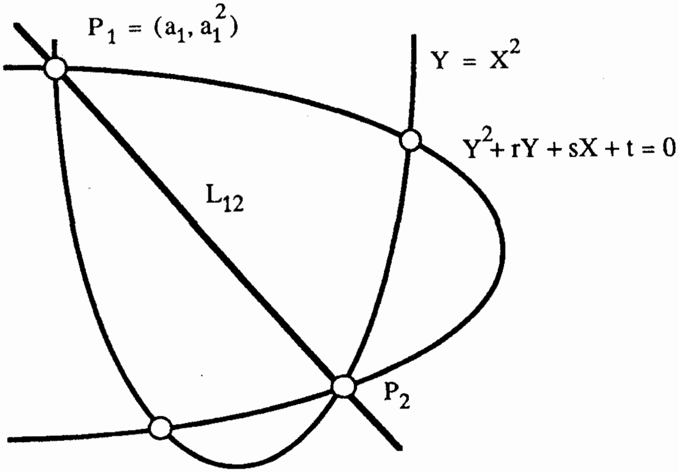
**قضیه.** فرض کنید $\mathbf{C}_{(\lambda,\mu)}$ یک دسته مقطع مخروطی شامل لااقل یک مقطع مخروطی ناتباهیده در $\mathbb{P}^2_k$ باشد (تا چندجمله‌یی $F(\lambda, \mu)$ متحد با صفر نباشد). در این‌صورت این دسته مقطع مخروطی حداکثر شامل سه‌مقطع مخروطی تباهیده است. اگر $k = \mathbb{R}$، آنگاه دسته مقطع مخروطی حداقل شامل یک مقطع مخروطی تباهیده خواهد بود.

**برهان.** هر معادلهٔ درجهٔ سوم حداکثر سه ریشه دارد که تعداد آنها روی هیأت $\mathbb{R}$، حداقل یک است. □

**( ۱۴.۱ ) مثال نمونه.** فرض کنید $P_1$، $\cdots$، $P_4$ چهار نقطه در $\mathbb{P}^2_k$ باشند که هیچ سه نقطه از آنها همخط نیستند، در این‌صورت دسته مقطع مخروطی $\mathbf{C}_{(\lambda,\mu)}$ که از نقاط $P_1$، $\ldots$ ، $P_4$ می‌گذرد سه عضو تباهیده دارد که عبارت‌اند از $L_{12} + L_{34}$، $L_{13} + L_{24}$ و $L_{14} + L_{23}$، که در اینجا $L_{ij}$ خط گذرنده از نقاط $P_i$ و $P_j$ فرض شده است:




حال فرض کنید یک دسته مقطع مخروطی توسط $Q_۱ = Y^۲ + rY + sX + t$ و $Q_۲ = Y - X^۲$ تولید شده است و می‌خواهیم $P_۱$، . . . ، $P_۴$، نقاط تلاقی این دو مقطع مخروطی را به‌دست آوریم.




این کار را می‌توان به‌ترتیب زیر انجام داد: (۱) سه نسبت $(\lambda : \mu)$ را که به‌ازای آنها $C_{(\lambda,\mu)}$ مقطعهای مخروطی تباهیده باشند، به‌دست می‌آوریم. بااستفاده از آنچه در بالا گفته شد، این بدین معنی است که باید سه‌ریشهٔ چندجمله‌یی درجهٔسوم $F(\lambda, \mu)$ را پیدا کنیم:

$$F(\lambda,\mu) = \det\left|\lambda\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & s/۲ \\ ۰ & ۱ & r/۲ \\ s/۲ & r/۲ & t \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}\right|$$
$$= -\frac{۱}{۴}\left(s^۲\lambda^۳ + (۴t - r^۲)\lambda^۲\mu - ۲r\lambda\mu^۲ - \mu^۳\right)$$

(۲) دو مقطع مخروطی تباهیده را به جفتهای خطوط تفکیک می‌کنیم (که این عمل شامل حل دو معادلهٔ درجهٔدوم است). (۳) چهار نقطه $P_i$ همان نقاط تلاقی این خطوط هستند.

در نظریهٔ گالوا این روش یک تعبیر هندسی برای تبدیل معادلهٔ کلی درجهٔ چهارم دارد (به‌عنوان مثال ← کتاب جبر، واندر واردن، فصل ۸، بخش ۶۴): فرض کنید $k$ یک هیأت و $f(X) = X^4 + rX^2 + sX + t \in k[X]$ یک چندجمله‌یی درجه ۴ باشد. در این‌صورت سهمیهای $C_1$ و $C_2$ همدیگر را در چهار نقطه $i = 1, \ldots, 4$ ،$P_i = (a_i, a_i^2)$ قطع می‌کنند به‌طوری که $a_i$ها چهار ریشه $f$ هستند.

معادلهٔ خط $L_{ij} = P_iP_j$ به‌صورت ذیل خواهد بود:

$$L_{ij} : (Y = (a_i + a_j)X - a_ia_j)$$

و مقطع مخروطی تحویلپذیر $L_{12} + L_{34}$ معادلهٔ ذیل را خواهد داشت:

$$Y^2 + (a_1a_2 + a_3a_4)Y + (a_1 + a_2)(a_3 + a_4)X^2 + sX + t = 0$$

و یا $Q_1 - (a_1 + a_2)(a_3 + a_4)Q_2 = 0$. بنابراین سه مقدار $\mu/\lambda$ که به‌ازای آنها مقطع مخروطی $\lambda Q_1 + \mu Q_2$ به‌صورت دو خط متمایز درمی‌آید، عبارت‌اند از

$$-(a_1 + a_2)(a_3 + a_4), -(a_1 + a_3)(a_2 + a_4), -(a_1 + a_4)(a_2 + a_3)$$

معادلهٔ درجه‌سومی که ریشه‌هایش سه مقدار بالا هستند، معادلهٔ درجه‌سوم کمکی مربوط به معادلهٔ درجه‌چهارم خوانده می‌شود؛ که بااستفاده از نظریهٔ توابع متقارن مقدماتی، قابل محاسبه است؛ این روش تاحدی طولانی است. از سوی دیگر، روش هندسی مذکور در بالا، راه زیبایی برای به‌دست آوردن معادلهٔ درجه‌سوم کمکی به‌دست می‌دهد که تنها به محاسبهٔ یک دترمینان سه در سه منجر می‌شود.

راه‌حل اخیر از کتاب [م. برگر، ۱۰.۴.۱۶و۱.۱۱.۴.۱۶] اخذ شده است.

## تمرینهای بخش اول.

۱.۱ مقطع مخروطی $C : (x^2 + y^2 = 5)$ را به‌کمک خط متغیری که از نقطهٔ $(2,1)$ رسم می‌شود، به‌صورت پارامتری درآورید و از آنجا جوابهای گویای $x^2 + y^2 = 5$ را به‌دست آورید.

۲.۱ فرض کنید $p$ عددی است اول؛ با بحث در مقادیر مختلف $p$، شرطی لازم و کافی برای وجود جوابهای گویا در معادلهٔ $x^2 + y^2 = p$ را حدس بزنید و این حدس خود را ثابت کنید (در این مورد یک راهنمایی در تمرین ۹.۱ در زیر داده شده است که شرط می‌بندم شما خودتان نتوانید آن را پیدا کنید!).

۳.۱ حکم (۳.۱) را که: بااستفاده از تبدیل آفین می‌توان هر مقطع مخروطی در $\mathbb{R}^2$ را به‌صورت یکی از اشکال استاندهٔ (الف-ل) درآورد، اثبات کنید (راهنمایی: بااستفاده از یک نگاشت خطی $x \to Ax$، قسمت درجه‌دوم معادله مقطع مخروطی یعنی $ax^2 + bxy + cy^2$ را به یکی از صورتهای $\pm x^2 \pm y^2$ یا $\pm x^2$ و یا $0$ تبدیل کنید، سپس معادلهٔ مقطع مخروطی را به‌صورت مربع کامل برحسب $x$ و $y$ درآورید و تاجایی که ممکن است خود را از شرّ جمله‌های خطی خلاص کنید).

۴.۱ یک مقایسه دقیق بین مقطعهای مخروطی آفین در (۳.۱) و مقطعهای تصویری در (۶.۱) به‌عمل بیاورید.

۵.۱ فرض کنید $k$ یک هیأت با مشخصه‌ای مخالف ۲ باشد و $V$ یک فضای برداری به بعد ۳ روی هیأت $k$. اگر $Q : V \to k$ یک صورت درجهٔ دوم ناتباهیده روی $V$ باشد، نشان دهید اگر $0 \neq e_1 \in V$ در تساوی $Q(e_1) = 0$ صدق کند، آنگاه $V$ دارای یک پایهٔ $e_1$، $e_2$، $e_3$ است به‌طوری که $Q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1x_3 + ax_2^2$. (راهنمایی: از نگاشت دو خطی متقارن $\varphi$ وابسته به $Q$ استفاده کنید؛ چون $\varphi$ ناتباهیده است، برداری مانند $e_3$ وجود دارد به‌طوری که $\varphi(e_1, e_3) = 1$. حال بردار $e_2$ی مناسبی پیدا کنید.)

نتیجه بگیرید که هر مقطع مخروطی ناتهی ناتباهیده در $\mathbb{P}^2_k$ به‌طور تصویری با خم $(XZ = Y^2)$ هم‌ارز است.

۶.۱ فرض کنید هیأت $k$ حداقل شامل چهار عنصر است و خم $C \subset \mathbb{P}^2_k$ توسط $(XZ = Y^2)$ داده شده است؛ ثابت کنید که اگر $Q(X, Y, Z)$ صورت درجهٔ دومی که روی $C$ صفر می‌شود، باشد آنگاه $Q = \lambda(XZ - Y^2)$. (راهنمایی: اگر واقعاً نتوانید این مسئله را شخصاً حل کنید، با استدلال برهان لم ۵.۲ مقایسه کنید.)

۷.۱ در فضای $\mathbb{R}^3$، دو صفحهٔ $A : (Z = 1)$ و $B : (X = 1)$ را در نظر بگیرید؛ خطی که از مبدأ می‌گذرد و صفحه $A$ را در نقطهٔ $(x, y, 1)$ قطع می‌کند، صفحه $B$ را در نقطه $(1, \frac{y}{x}, \frac{1}{x})$ قطع خواهد کرد. نگاشت $\varphi : A \dashrightarrow B$ را به‌صورت $(x, y) \longmapsto (y' = \frac{y}{x}, z' = \frac{1}{x})$ تعریف می‌کنیم؛ نگارهٔ هریک از مجموعه‌های ذیل را بر اثر $\varphi$ پیدا کنید:

(الف) خط $ax = y + b$؛ دسته‌خطهای موازی $ax = y + b$ ($a$ ثابت، $b$ متغیر)؛

(ب) دایره‌های $(x - 1)^2 + y^2 = c$ با متغیر $c$ (سه حالت $c > 1$، $c = 1$ و $c < 1$ را

متمایز کنید).

مسأله را به این‌صورت تصور کنید که هنرمندی در مبدأ $\circ \in \mathbb{R}^{۳}$ نشسته و تصویر منظری شکلهای صفحهٔ $(Z = ۱)$ را بر صفحهٔ $(X = ۱)$ به‌دست می‌آورد. توضیح دهید که برای نقاطی از دو صفحه که $\varphi$ و $\varphi^{-۱}$ تعریف نشده‌اند، چه وضعی پیش می‌آید.

**۸.۱** فرض کنید $P_۱, \ldots, P_۴$ نقاط متمایزی از $\mathbb{P}^{۲}$ باشند که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند. ثابت کنید که دستگاه مختصات یکتایی وجود دارد که در آن این چهار نقطه به‌صورت $(\circ : \circ : ۱)$، $(\circ : ۱ : \circ)$، $(۱ : \circ : \circ)$، $(۱ : ۱ : ۱)$ درمی‌آیند. اگر $P_۵ = (a : b : c)$ نقطه دیگری باشد، همه مقطعهای مخروطی را که از پنج نقطهٔ $P_۱, \ldots, P_۵$ می‌گذرند، مشخص کنید. با استفاده از این مطلب برهان دیگری برای فرع ۱۰.۱ و قضیه ۱۱.۱ پیدا کنید.

**۹.۱** در (۱۲.۱) فهرستی از راههای ممکنی که دو مقطع مخروطی همدیگر را تلاقی می‌کنند، ارائه شده است. با نوشتن معادلات در هر حالت، نشان دهید هر یک از این امکانها واقعاً پیش می‌آید. مقطعهای مخروطی تکین در دسته‌های متناظر را پیدا کنید. (راهنمایی: استفاده از تقارن و انتخاب دستگاه مختصات مناسب، راه را به‌طور قابل ملاحظه‌ای هموار می‌کند).

**راهنمایی برای ۲.۱:** در نظریه مقدماتی اعداد دیده‌ایم که همنهشتی $x^{۲} \equiv -۱$ (پیمانهٔ $p$) جواب دارد اگر و تنها اگر $p = ۲$ یا $p \equiv ۱$ (پیمانهٔ ۴).

**۱۰.۱** (دترمینان سیلوستر). فرض کنید $k$ یک هیأت جبری‌ـبسته باشد و صورتهای درجهٔ‌دوم و درجهٔ‌سوم برحسب $U$ و $V$ مشابه (۸.۱) به شکلهای ذیل داده شده باشند:

$$q(U, V) = a_{\circ} U^{۲} + a_{۱} UV + a_{۲} V^{۲}$$

$$c(U, V) = b_{\circ} U^{۳} + b_{۱} U^{۲} V + b_{۲} UV^{۲} + b_{۳} V^{۳}$$

ثابت کنید $q$ و $c$ دارای ریشهٔ مشترک $(\eta : \tau) \in \mathbb{P}^{۱}$ هستند اگر و تنها اگر

$$\det \begin{vmatrix} a_{\circ} & a_{۱} & a_{۲} & \circ & \circ \\ \circ & a_{\circ} & a_{۱} & a_{۲} & \circ \\ \circ & \circ & a_{\circ} & a_{۱} & a_{۲} \\ b_{\circ} & b_{۱} & b_{۲} & b_{۳} & \circ \\ \circ & b_{\circ} & b_{۱} & b_{۲} & b_{۳} \end{vmatrix} = \circ$$

(راهنمایی: نشان دهید که اگر $q$ و $c$ دارای ریشهٔ مشترک باشند، ۵ عنصر

$$U^{۲}q, UVq, V^{۲}q, Uc, Vc$$

نمی‌توانند فضای برداری پنج‌بعدی صورتهای درجهٔ‌چهارم را پدید آورند، بنابراین وابستهٔ خطی‌اند. بالعکس با استفاده از تجزیهٔ یکتا در حلقهٔ چندجمله‌یی $k[U, V]$، دربارهٔ روابطی به‌شکل $Aq = Bc$ که $A$ و $B$ صورتهایی برحسب $U$ و $V$ بترتیب از درجه‌های ۲ و ۱ هستند، نتیجه‌ای بگیرید.)

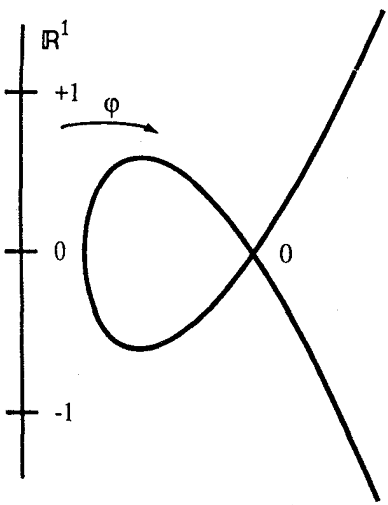
۱۱.۱ نتیجهٔ تمرین ۱۰.۱ را برای دو صورت درجهٔ $m$ و $n$ برحسب $U$ و $V$ تعمیم دهید.

## بخش دوم. خمهای درجهٔ سوّم و قانون گروهی

**( ۱.۲ ) مثالهایی از خمهای مسطّح درجهٔ سومی که نمایش پارامتری دارند.** بعضی از خمهای مسطّح درجهٔ سوم، عیناً مثل مقطعهای مخروطی نمایش پارامتری دارند:

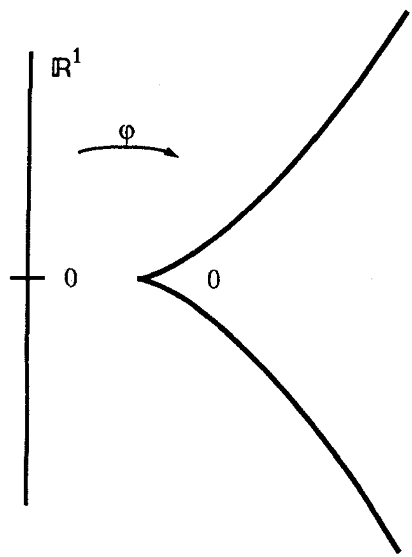
**خم درجهٔ سوم گرهی.** خم $\mathbf{C} : (y^2 = x^3 + x^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ نگارهٔ نگاشت $\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ است که به شکل $t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ داده می‌شود (بیازمایید تا ببینید!).

**خم درجهٔ سوم تیزه‌یی.** خم $\mathbf{C} : (y^2 = x^3) \subset \mathbb{R}^2$ نگارهٔ نگاشت $\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ است که به‌شکل $t \longmapsto (t^2, t^3)$ تعریف می‌شود:




خم درجهٔ سوم گرهی

$y^2 = x^3 + x^2$




خم درجهٔ سوم تیزه‌یی

$y^2 = x^3$

خمهای درجه‌سومی که نمایش پارامتری دارند

دربارهٔ نقطه‌های تکین خم نگاره و نگاشت $\varphi$ تأمل کنید. این‌گونه مثالها بارها در این درس تکرار خواهند شد، لذا بجاست زمانی را برای بررسی معادلات مربوطه تخصیص دهید. ضمناً ← تمرینهای ۱.۲ و ۲.۲.

**( ۲.۲ ) خم $(y^۲ = x(x-۱)(x-\lambda))$ نمایش پارامتری گویا ندارد.**

خمهائی که نمایش پارامتری دارند ویژگیهای خوبی دارند؛ برای مثال، اگر در پی مسائل دیوفانتوسی هستید، می‌توانید امیدوار باشید که قاعده‌ای به‌دست آورید، (مثل (۱.۱))، که کلیهٔ نقاط با مختصات گویا را معین کند. نمایش پارامتری (۱.۱) به‌صورت $x = f(t)$ و $y = g(t)$ بیان شده بود که f و g توابعی گویا یعنی خارج‌قسمت دو چندجمله‌یی بودند.

**قضیه.** فرض می‌کنیم k هیأتی است با مشخصه‌ای مخالف ۲، و $\lambda \in k$، $\lambda \neq ۰, ۱$ و فرض می‌کنیم $f, g \in k(t)$ توابعی باشند گویا به‌طوری که

$$f^۲ = g(g-۱)(g-\lambda) \qquad (*)$$

در این‌صورت $f, g \in k$.

حکم بالا هم‌ارز است با این که بگوییم هیچ تابع غیرثابت

$$\mathbb{R}^۱ -\to \mathbf{C} : (y^۲ = x(x-۱)(x-\lambda))$$

که توسط توابع گویا داده شده باشد، وجود ندارد. این موضوع نشان‌دهندهٔ ویژگی سختپایی خیلی قوی چندگوناهای جبری است.

برهان این قضیه برهانی است حسابی در هیأت $k(t)$، که با استفاده از این واقعیت که $k(t)$ هیأت کسرهای حوزهٔ تجزیهٔ یکتای $k[t]$ است، انجام می‌گیرد. برهان خیلی طولانی است، لذا یا خود را برای مطالعهٔ دقیق آن آماده و یا فعلاً از آن صرفنظر کنید (و مطلب را از ۴.۲ دنبال نمایید). در تمرین ۱۲.۲، مثال کاملاً مشابهی از برهان حسابی عدم وجود در $\mathbb{Q}$ داده شده است.

**برهان.** با توجه به‌این که $k[t]$ حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست، می‌توان نوشت

$f = \frac{r}{s}$ که $r, s \in k[t]$ نسبت به‌هم اول‌اند،

$g = \frac{p}{q}$ که $p, q \in k[t]$ نسبت به‌هم اول‌اند.

از حذف مخرجها، رابطهٔ $(*)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$r^۲q^۳ = s^۲p(p-q)(p-\lambda q)$$

چون r و s نسبت به‌هم اول‌اند، عامل $s^۲$ در طرف راست، باید $q^۳$ را بشمارد. به‌همین ترتیب، چون p و q نسبت به‌هم اول‌اند، عامل $q^۳$ در طرف چپ، باید $s^۲$ را بشمارد. بنابراین، $s^۲|q^۳$ و $q^۳|s^۲$ و

لذا

$$s^۲ = aq^۳ \quad , \quad a \in k$$

($a$ واحدی است در $k[t]$ و لذا $a \in k$).

پس $aq = (\frac{s}{q})^۲$ یک مربع کامل در $k[t]$ است. همچنین،

$$r^۲ = ap(p-q)(p-\lambda q)$$

لذا باتوجه به ویژگی تجزیه به عوامل اول، ثابتهای غیرصفری مانند $b, c, d \in k$ وجود دارند به‌طوری که

$$bp, c(p-q), d(p-\lambda q)$$

همگی در $k[t]$ مربع کامل‌اند. اگر نشان دهیم که $p$، $q$ مقادیری ثابت هستند، بنابر آنچه گفته شد، $r$ و $s$ نیز مقادیر ثابتی خواهند بود، لذا قضیه اثبات خواهد شد. برای اثبات ثابت‌بودن مقادیر $p$ و $q$، فرض کنید $K$ بستار جبری هیأت $k$ است؛ پس $p, q \in K[t]$ در شرایط لم ذیل صدق می‌کنند. □

**( ۳.۲ ) لم.** فرض کنید $K$ یک هیأت جبری‌ـبسته و $p, q \in K[t]$ نسبت به‌هم اول باشند. هرگاه چهار ترکیب خطی متمایز از $p$ و $q$ (یعنی $\lambda p + \mu q$ به‌ازای چهار نسبت متمایز $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^۱_K$) در $K[t]$ مربع کامل باشند، آنگاه $p, q \in K$.

**برهان.** (روش «نزول نامتناهی» فرما). با قراردادن

$$p' = ap + bq$$
$$q' = cp + dq$$

به‌جای $p$ و $q$ که $a, b, c, d \in K$ و $ad - bc \neq ۰$، فرض و حکم لم تغییر نمی‌کند. لذا می‌توان فرض کرد که چهار مربع داده‌شده عبارت‌اند از

$$p, p-q, p-\lambda q, q$$

در این‌صورت $p = u^۲$، $q = v^۲$ به‌طوری که $u, v \in K[t]$ نسبت به‌هم اول‌اند، بعلاوه

$$\max\{\text{درجهٔ } u \text{ و درجهٔ } v\} < \max\{\text{درجهٔ } p \text{ و درجهٔ } q\}$$

حال برخلاف، فرض می‌کنیم $\max\{\text{درجهٔ } p \text{ و درجهٔ } q\} > 0$ و مقدار آن به‌ازای همهٔ p و qهائی که در مفروضات لم صدق می‌کنند، مینیمال باشد. پس هم

$$p - q = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$$

و هم

$$p - \lambda q = u^2 - \lambda v^2 = (u - \mu v)(u + \mu v)$$

(که $\mu = \sqrt{\lambda}$)، در $K[t]$ مربع کامل هستند، لذا باتوجه به اینکه u و v نسبت به‌هم اول‌اند، نتیجه می‌گیریم که $u-v$، $u+v$، $u-\mu v$، $u+\mu v$ مربع کامل‌اند که با فرض مینیمال بودن $\max\{\text{درجه } p \text{ و درجه } q\}$ مغایر است. □

**( ۴.۲ ) دستگاههای خطی.** فرض کنید

$$S_d = \{\text{صورتهای درجه } d \text{ برحسب} X،Y،Z\}$$

(یادآوری می‌کنیم که یک صورت، همان یک چندجمله‌یی همگن است). هر عنصر $F \in S_d$ به‌نحو یکتایی به‌شکل

$$F = \Sigma a_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

نوشته می‌شود که $a_{ijk} \in k$، و مجموعیابی روی اندیسهای i، j، k با $i,j,k \geq 0$ و $i+j+k = d$، انجام می‌گیرد. البته معنی این مطلب این است که $S_d$ یک فضای برداری روی k خواهد بود با پایهٔ:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z^d & & \\ & Z^{d-1}X & & Z^{d-1}Y & \\ & \cdots & & \cdots & \\ X^{d-1}Z & X^{d-2}YZ & \cdots & Y^{d-1}Z & \\ X^d & X^{d-1}Y & X^{d-2}Y^2 & \cdots & Y^d \end{array}$$

بالاخص $\dim S_d = \binom{d+2}{2}$. برای $P_1, \cdots, P_n \in \mathbb{P}^2$، قرار می‌دهیم

$$S_d(P_1, \cdots, P_n) = \{F \in S_d | F(P_i) = 0, i = 1, \cdots, n\} \subset S_d$$

هریک از شرطهای $F(P_i) = 0$، (یا به‌عبارت دقیقتر $F(X_i, Y_i, Z_i) = 0$ که $P_i = (X_i : Y_i : Z_i)$)، یک شرط خطی روی F است. بنابراین $S_d(P_1, \cdots, P_n)$ فضائی است برداری که بعد آن حداقل برابر $\binom{d+2}{2} - n$ است.

**(۵.۲) لم.** فرض کنید k یک هیأت نامتناهی است و $F \in S_d$.

(الف) خط $L \subset \mathbb{P}^۲_k$ را در نظر می‌گیریم؛ اگر روی L داشته باشیم $F \equiv ۰$، آنگاه F در $k[X, Y, Z]$ بر معادله L بخشپذیر است. یعنی $F = H \cdot F'$ که H معادله L است و $F' \in S_{d-۱}$.

(ب) فرض کنید $C \subset \mathbb{P}^۲_k$ یک مقطع مخروطی ناتهی و ناتباهیده است، اگر روی C اتحاد $F \equiv ۰$ برقرار باشد، آنگاه در $k[X, Y, Z]$، F بر معادله C بخشپذیر است. یعنی $F = Q \cdot F'$ که Q معادلهٔ C است و $F' \in S_{d-۲}$.

اگر فکر می‌کنید حکم این لم روشن است، به احساس شما تبریک می‌گویم. در واقع شما حالت خاصی از قضیه صفرهای هیلبرت را حدس زده‌اید. می‌توانید خودتان برهانی بر این لم بیابید و مطلب را از (۶.۲) دنبال کنید.

**برهان.** (الف) با تغییر متغیر می‌توان فرض کرد، $H = X$. پس برای هر $F \in S_d$ نمایش یکتایی به‌شکل $F = X \cdot F'_{d-۱} + G(Y, Z)$ موجود است: کافی است همه تکجمله‌یی‌هایی راکه شامل X هستند در جمعوند اول بنویسیم، آنچه باقی می‌ماند باید یک چندجمله‌یی فقط برحسب Y و Z باشد. اما

$$F \equiv ۰, \text{روی} L \iff G \equiv ۰, \text{روی} L \iff G(Y, Z) = ۰$$

استنتاج سمت راست باتوجه به (۸.۱) صادق است: اگر $G(Y, Z) \neq ۰$، آنگاه G در $\mathbb{P}^۱_k$ حداکثر d صفر دارد، درحالی که k نامتناهی و در نتیجه $\mathbb{P}^۱_k$ نامتناهی است.

(ب) با تغییر متغیر، $Q = XZ - Y^۲$. حال ثابت می‌کنیم که هر $F \in S_d$ را می‌توان با عبارت یکتایی به‌شکل $F = Q \cdot F'_{d-۲} + A(X, Z) + Y \cdot B(X, Z)$ نوشت: در F هرجا $Y^۲$ داریم، به‌جای آن $(XZ - Q)$ را قرار می‌دهیم تا جایی که درجهٔ باقیمانده نسبت به Y حداکثر ۱ باشد، و بنابراین به شکل $A(X, Y) + YB(X, Z)$ خواهد بود. حال مشابه (۷.۱)، C مقطع مخروطی پارامتری شده‌ای است به‌صورت $X = U^۲$، $Y = UV$ و $Z = V^۲$. بنابراین

$$F \equiv ۰, \text{روی} C \iff A(U^۲, V^۲) + UVB(U^۲, V^۲) \equiv ۰, \text{روی} C$$

$$\iff A(U^۲, V^۲) + UVB(U^۲, V^۲) = ۰ \in k[U, V] \iff A(X, Z) = B(X, Z) = ۰$$

که در اینجا تساوی آخر با در نظرگرفتن جمله‌های درجه زوج و فرد به‌طور جداگانه در $A(U^۲, V^۲) + UVB(U^۲, V^۲)$ به‌دست می‌آید. □

تمرین ۲.۲ موارد مشابهی از صورتهای «صریح» قضیهٔ صفرهای هیلبرت را به‌دست می‌دهد.

**فرع.** خط $L : (H = \circ) \subset \mathbb{P}^{۲}_k$ (بترتیب مقطع مخروطی ناتباهیدهٔ $(C : (Q = \circ) \subset \mathbb{P}^{۲}_k$) را در نظر می‌گیریم؛ فرض کنید نقاط $P_{۱}, \cdots , P_n \in \mathbb{P}^{۲}_k$ داده شده‌اند، و برای مقدار معینی از d، $S_d(P_{۱}, \cdots , P_n)$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت

(الف) اگر $P_{۱}, \cdots , P_a \in L$ و $P_{a+۱}, \cdots , P_n \not\in L$ و $a > d$، آنگاه

$$S_d(P_{۱}, \cdots , P_n) = H \cdot S_{d-۱}(P_{a+۱}, \cdots , P_n)$$

(ب) اگر $P_{۱}, \cdots , P_a \in C$ و $P_{a+۱}, \cdots , P_n \not\in C$ و $a > ۲d$، آنگاه

$$S_d(P_{۱}, \cdots , P_n) = Q \cdot S_{d-۲}(P_{a+۱}, \cdots , P_n)$$

**برهان.** (الف) اگر F یک چندجمله‌یی همگن از درجهٔ d باشد و خم $D : (F = \circ)$ خط L را در نقاط $P_{۱}$،$\cdots$، $P_a$ قطع کند و $a > d$، آنگاه مطابق (۹.۱)، باید $L \subset D$، بنابراین براساس لم قبلی $F = H \cdot F'$؛ حال باتوجه به اینکه $P_{a+۱}, \cdots , P_n \not\in L$، روشن است که $F' \in S_{d-۱}(P_{a+۱}, \cdots , P_n)$.

(ب) روش اثبات دقیقاً مشابه قسمت (الف) است. □

**( ۶.۲ ) قضیه.** فرض کنید k یک هیأت نامتناهی و $P_{۱}, \cdots , P_{۸} \in \mathbb{P}^{۲}_k$ نقاط متمایزی باشند که هیچ چهار نقطه از آنها همخط نیستند و هیچ هفت نقطه از آنها بر یک مقطع مخروطی ناتباهیده قرار ندارند؛ در این‌صورت

$$\dim S_{۳}(P_{۱}, \cdots , P_{۸}) = ۲$$

**برهان.** برای اختصار، مجموعه نقاطی را که روی یک مقطع مخروطی ناتباهیده قرار می‌گیرند، «همقطع مخروطی» گوییم. اثبات قضیه را به حالتهای مختلف ذیل تقسیم می‌کنیم.

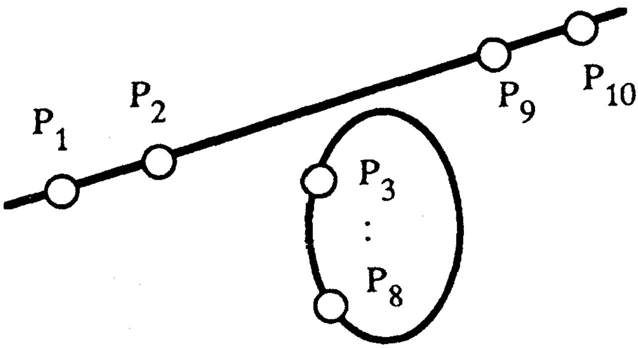
**حالت اصلی.** هیچ سه نقطه همخط و هیچ شش نقطه همقطع مخروطی نیستند. این حالت «وضعیت عمومی» قضیه است.

فرض کنید $\dim S_{۳}(P_{۱}, \cdots , P_{۸}) \geq ۳$، و فرض کنید $P_{۹}$ و $P_{۱۰}$ نقاط متمایزی بر خط $L = P_{۱}P_{۲}$ باشند. پس

$$\dim S_{۳}(P_{۱}, \cdots , P_{۱۰}) \geq \dim S_{۳}(P_{۱}, \cdots , P_{۸}) - ۲ \geq ۱$$

بنابراین صورت غیرصفری مانند $\circ \neq F \in S_{۳}(P_{۱}, \cdots , P_{۱۰})$ وجود دارد. طبق فرع (۵.۲)؛ $F = H \cdot Q$، که $Q \in S_{۲}(P_{۳}, \cdots , P_{۸})$ که به یک تناقض منجر می‌شود، زیرا اگر Q ناتباهیده

باشد، شش نقطهٔ $P_۳$، ...، $P_۸$ همقطع مخروطی خواهند بود در حالی‌که اگر $Q$ اجتماع دو خط متمایز و یا یک خط دوگانه باشد، حداقل سه نقطه از این هشت نقطه همخط خواهند بود که هر دو حالت خلاف فرض است.




**اولین حالت تباهیده.** فرض کنید نقاط $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ همخط هستند و بر خط $L : (H = ۰)$ قرار دارند. نقطهٔ چهارمی مانند $P_۹$ بر $L$ در نظر می‌گیریم. طبق فرع ۵.۲،

$$S_۳(P_۱, \cdots , P_۹) = H \cdot S_۲(P_۴, \cdots , P_۸)$$

همچنین باتوجه به اینکه هیچ چهار نقطه از نقاط $P_۴$، ...، $P_۸$ همخط نیستند، طبق فرع ۱۱.۱، $\dim S_۲(P_۴, \cdots , P_۸) = ۱$ و از آنجا $\dim S_۳(P_۱, \cdots , P_۹) = ۱$، که نتیجه می‌شود، $\dim S_۳(P_۱, \cdots , P_۸) \leq ۲$.

**دومین حالت تباهیده.** فرض کنید شش نقطه $P_۱$، ...، $P_۶$ بر یک مقطع مخروطی ناتباهیدهٔ $C : (Q = ۰)$ قرار دارند، نقطه $P_۹$ را بر $C$، متمایز از نقاط $P_۱$، ...، $P_۶$ اختیار می‌کنیم. باز طبق فرع ۵.۲ داریم:

$$S_۳(P_۱, \cdots , P_۹) = Q \cdot S_۱(P_۷, P_۸)$$

خط $L = P_۷P_۸$ خطی است منحصر به‌فرد، بنابراین $S_۳(P_۱, \cdots , P_۹)$ یک فضای برداری است با بعد ۱، که توسط $QL$ تولید شده است و از آنجا $\dim S_۳(P_۱, \cdots , P_۸) \leq ۲$. □

**( ۷.۲ ) فرع.** فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو خم درجهٔ سوم باشند که فصل مشترک آنها متشکل از نه نقطه متمایز باشد، یعنی $C_۱ \cap C_۲ = \{P_۱, \cdots , P_۹\}$. در این‌صورت هر خم درجهٔ سوم $D$ که از هشت نقطهٔ $P_۱$، ...، $P_۸$ بگذرد، از $P_۹$ نیز می‌گذرد.

**برهان.** اگر چهار نقطه از نقاط $P_1$، $\cdots$، $P_8$ بر خط L واقع شوند، هر یک از خمهای $C_1$ و $C_2$ خط L را لااقل در چهار نقطه قطع می‌کنند و لذا شامل خط L خواهند بود که خلاف فرض ما دربارهٔ $C_1 \cap C_2$ است. دقیقاً به‌همین دلیل، هیچ هفت نقطه از نقاط بالا نمی‌توانند همقطع مخروطی باشند. بنابراین مفروضات (۶.۲) برقرارند، و لذا نتیجه می‌شود که

$$\dim S_3(P_1, \cdots, P_8) = 2$$

یعنی $F_1$ و $F_2$، معادله‌های $C_1$ و $C_2$، تشکیل یک پایه برای فضای $S_3(P_1, \cdots, P_8)$ می‌دهند، و لذا D توسط $G = 0$ تعریف می‌شود که $G = \lambda F_1 + \mu F_2$. اما چون $F_1$ و $F_2$ در $P_9$ صفر می‌شوند، G نیز در $P_9$ صفر خواهد شد. □

**( ۸.۲ ) قانون گروهی روی یک خم درجهٔ سوم مسطح.** فرض کنید $k \subseteq \mathbb{C}$ یک زیرهیأت $\mathbb{C}$ باشد، و $F \in k[X, Y, Z]$ یک صورت درجهٔ سوم باشد که معرف خم مسطح (ناتهی) $C : (F = 0) \subset \mathbb{P}^2_k$ است. فرض می‌کنیم F در دو شرط ذیل صدق می‌کند:

(الف) F تحویلناپذیر است (بنابراین C شامل یک خط و یا یک مقطع مخروطی نیست)؛

(ب) برای هر نقطهٔ $P \in C$، خط یکتای $L \subset \mathbb{P}^2_k$ وجود دارد که P یک ریشهٔ چندگانهٔ $F|_L$ است.

توجه کنید که از لحاظ هندسی، شرط (ب) بیان ناتکینی خم C و مماس بودن خط مفروض L بر C در نقطه P، یعنی $L = T_P C$، است (⟵ تمرین ۳.۲). این مطلب انگیزهٔ تعریف کلی ناتکینی و فضای مماس بر یک چندگونا در بخش ششم خواهد بود.

نقطهٔ ثابت O را روی C انتخاب و ساختمان ذیل را بنا می‌کنیم:

**ساختمان.** (الف) برای $A \in C$، فرض می‌کنیم $\overline{A}$ سومین نقطهٔ تلاقی C با خط OA باشد؛

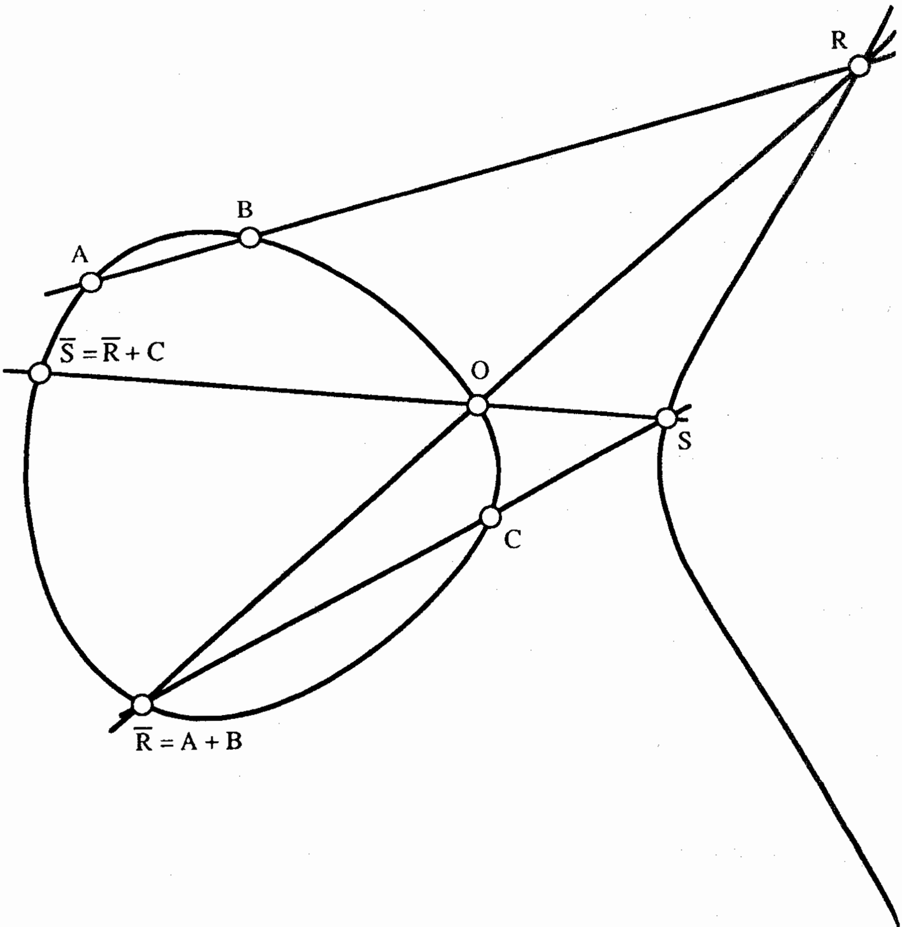
(ب) برای $A, B \in C$ سومین نقطهٔ تلاقی AB با C را R می‌گیریم؛ و $A + B$ را با $A + B = \overline{R}$ تعریف می‌کنیم (⟵ شکل صفحه بعد).

**قضیه.** ساختمان بالا معرف یک قانون گروهی آبلی روی C است که عنصر صفر (عنصر خنثای) آن نقطهٔ O است.

**برهان.** اثبات شرکتپذیری قسمت دشوار قضیه است: ابتدا قسمتهای ساده را از پیش پا برمی‌داریم:

(۱) باید نشان دهیم که اعمال جمع دو نقطه و پیدا کردن عکس یک نقطه خوشتعریف‌اند. اگر دو نقطهٔ P، Q داده شده باشند، یا $P \neq Q$، که در این‌صورت خط $L = PQ \subset \mathbb{P}^2_k$ به‌طور یکتا

معین می‌شود، و یا $P = Q$، که در این حالت طبق فرض (ب) خط یکتای $L \subset \mathbb{P}^2_k$ وجود دارد به‌طوری که $P$ ریشهٔ چندگانهٔ $F|_L$ است؛ در هر دو حال $F|_L$ یک صورت درجهٔ سوم دومتغیره است که دو ریشهٔ آن در هیأت $k$ داده شده‌اند، بنابراین به حاصلضرب سه عامل خطی تجزیه می‌شود، لذا بدون استثناء، سومین نقطه تلاقی یعنی $R$ معلوم می‌شود و مختصات آن در $k$ واقع است. توجه کنید که هریک از حالتهای $P = Q$، $P = R$، $Q = R$ و یا $P = Q = R$ امکانپذیر است؛ این حالتها از لحاظ جبری متناظر با ریشهٔ چندگانه داشتن $F|_L$، و از لحاظ هندسی متناظر با دارابودن خط مماس و نقطه‌های عطف هستند.




خم درجهٔ سوم و قانون گروهی آن

(۲) تحقیق عضو خنثابودن نقطه مفروض O سرراست است: چون O، A، $\overline{A}$ همخط‌اند، برای به‌دست‌آوردن $O + A$، خط $L = OA$ خم را در نقطهٔ $\overline{A}$ قطع می‌کند، همان خط $L = O\overline{A}$ خم را در A قطع می‌کند که حاصلِ $O + A$ است.

(۳) شاید بهتر باشد بررسی تساوی $A + B = B + A$ به‌عهدهٔ خواننده واگذار شود.

(۴) برای یافتن عکس یک نقطه، ابتدا $\overline{O}$ را مطابق (الف) در ساختمان بالا، به‌دست می‌آوریم: فرض می‌کنیم L خطی باشد که $F|_L$ در نقطهٔ O ریشهٔ چندگانه داشته باشد، $\overline{O}$ را سومین نقطهٔ تلاقی خط L با C می‌گیریم؛ حال به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که برای هر A، سومین نقطهٔ تلاقی خط $\overline{O}A$ با خم C، عکس A را به‌دست می‌دهد. □

( ۹.۲ ) حال شرکتپذیری را برای نقاط «به‌قدرکافی کلی» اثبات می‌کنیم: فرض می‌کنیم A، B، C سه نقطه بر C هستند؛ در ساختمان $\overline{S} = (A + B) + C$ از چهار خط استفاده می‌شود (⟵ شکل فوق)،

$$L_1 : ABR, \quad L_2 : RO\overline{R}, \quad L_3 : \overline{R}CS, \quad L_4 : SO\overline{S}$$

از طرفی، برای به‌دست‌آوردن $\overline{T} = (B + C) + A$، چهار خط ذیل به‌کار می‌رود

$$M_1 : BCQ, \quad M_2 : QO\overline{Q}, \quad M_3 : A\overline{Q}T, \quad M_4 : TO\overline{T}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\overline{S} = \overline{T}$، و روشن است که کافی است ثابت کنیم $S = T$؛ برای اثبات این موضوع، دو خم درجهٔ سوم ذیل را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{D}_1 = L_1 + M_2 + L_3, \quad \mathbf{D}_2 = M_1 + L_2 + M_3$$

پس به‌موجب نحوهٔ ساختمان،

$$\mathbf{C} \cap \mathbf{D}_1 = \{A, B, C, O, R, \overline{R}, Q, \overline{Q}, S\}$$

و

$$\mathbf{C} \cap \mathbf{D}_2 = \{A_1, B, C, O, R, \overline{R}, Q, \overline{Q}, T\}$$

اما به‌شرط این‌که نه نقطهٔ A، B، C، O، R، $\overline{R}$، Q، $\overline{Q}$، S همه از هم متمایز باشند، دو خم درجه سوم C و $\mathbf{D}_1$ در شرایط فرع ۷.۲ صدق می‌کنند، لذا $\mathbf{D}_2$ باید از نقطهٔ S بگذرد، و این مطلب تنها وقتی امکانپذیر است که $S = T$.

روشهای چندی برای تکمیل این برهان وجود دارد. کاملترین روش شامل بررسی دقیق نقاط تلاقی دو خم با رعایت نقاط تلاقی چندگانهٔ (اختصاراً، برحسب «ایدآلهای تقاطع») آنهاست، و حکم متناظر با فرع ۷.۲، لم ماکس نوتر است (⟵ کتاب [فولتن، ص۱۲۰ و ص۱۲۴]).

(۱۰.۲) یک شق برهان را که از «پیوستگی» با استفاده از $k \subseteq \mathbb{C}$ نتیجه می‌شود به‌طور اجمال بیان می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{C}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ «مختلط‌شده» خم $\mathbf{C}$ است، یعنی $\mathbf{C}_{\mathbb{C}}$ مجموعهٔ نسبتهای $(X : Y : Z)$ از اعداد مختلط است که همه در یک معادلهٔ $F(X, Y, Z)$ صدق می‌کنند. اگر قانون شرکتپذیری برای کلیهٔ نقاط $A, B, C \in \mathbf{C}_{\mathbb{C}}$ برقرار باشد، روشن است که برای همهٔ نقاط $\mathbf{C}$ نیز برقرار خواهد بود. بنابراین می‌توان فرض کرد $k = \mathbb{C}$.

خوانندگان علاقه‌مند به‌آسانی می‌توانند برهانهایی برای اثبات دو حکم زیر پیدا کنند.

لم. (الف) تابع $A + B$ یک تابع پیوسته از $A$ و $B$ است؛

(ب) برای هر سه نقطهٔ $A, B, C \in \mathbf{C}$، نقاط $A', B', C' \in \mathbf{C}$ وجود دارند که به‌اندازهٔ دلخواه به $A$ و $B$ و $C$ نزدیک و چنان هستند که نه نقطه $A'$، $B'$، $C'$، $O$، $R$، $\overline{R}$، $Q$، $\overline{Q}$ و $S$ که از آنها به‌دست می‌آیند، همگی متمایزند.

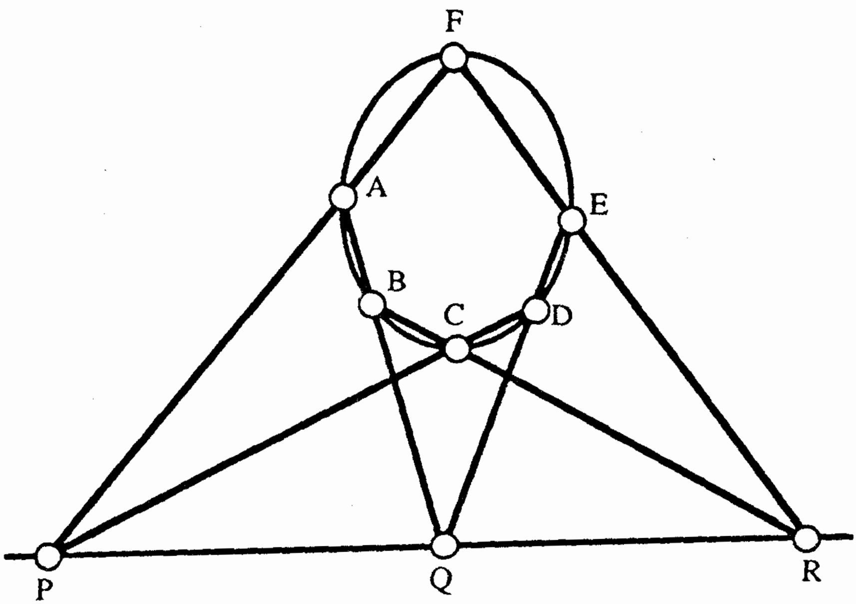
قانون جمع، یک نگاشت $\varphi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ است که توسط $(A, B) \longmapsto A + B$ داده شده است. بنابر (الف)، $\varphi$ پیوسته است، لذا دو نگاشت زیر نیز پیوسته‌اند:

$$f = \varphi \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{\mathbf{C}}),\ g = \varphi \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{C}} \times \varphi) : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

که $f$ به‌صورت $(A, B, C) \longmapsto (A + B) + C$ و $g$ به‌صورت $(A, B, C) \longmapsto A + (B + C)$ تعریف شده است. همچنین به‌موجب (ب) زیرمجموعهٔ $U \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ متشکل از سه‌تاییهای $(A, B, C)$ که برای آنها نه نقطهٔ متناظر در ساختمان متمایزند، چگال است؛ باتوجه به برهان بالا، $f$ و $g$ در $U$ بر هم منطبق‌اند، و چون پیوسته هستند، در همه‌جا منطبق خواهند بود.□

تذکر. بحث پیوستگی به‌صورتی که در بالا ذکر شد به توپولوژی $\mathbb{C}$ ارتباط پیدا می‌کند و لذا یک روش جبری محض نیست. در واقع نگاشت $\varphi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک ریختبری روی چندگوناهاست، چنان‌که بعداً ثابت خواهد شد ($\longrightarrow$ (۱۴.۴))، بقیه برهان نیز می‌تواند به‌شکل ذیل به‌صورت جبری محض بیان شود: زیرمجموعهٔ $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ که برای آن نه نقطهٔ موردنظر متمایزند، یک مجموعهٔ باز و چگال در توپولوژی زاریسکی است و دو ریختبری که روی یک زیرمجموعهٔ چگال برهم منطبق باشند، در کلیهٔ نقاط برهم منطبق خواهند بود. (امیدوارم این توضیح نقش مفیدی در روشن‌شدن بقیهٔ مطالب کتاب داشته باشد، به‌هرحال اگر این توضیح را گیج‌کننده می‌یابید، موقتاً می‌توانید آن را نادیده بگیرید.)

**(۱۱.۲) قضیه پاسکال** (شش‌ضلعی رمزی). نمودار ذیل




متشکل از یک شش‌ضلعی ABCDEF در $\mathbb{P}^2_k$ است که امتدادهای اضلاع مقابل آن همدیگر را در نقاط P و Q و R قطع کرده‌اند. فرض کنید نه نقطه و شش خط مطرح‌شده در نمودار، متمایز باشند؛ در این‌صورت

$$PQR \text{ همخط‌اند} \iff ABCDEF \text{ همقطع مخروطی هستند}$$

این قضیه معروف یک کاربرد نسبتاً مشابه فرع (۷.۲) است، و تنها به‌عنوان تنوع داده شده است؛ روشهای اثبات دیگری نیز وجود دارند، که کافی است به کتابهای درسی در هندسه مثلاً، کتاب [برگر، ۱۰.۲.۱۶ و ۳.۸.۱۶ـ۵] مراجعه کنید.

**برهان.** در نمودار بالا، سه خط

$$L_1 : PAF, \qquad L_2 : QDE, \qquad L_3 : RBC$$

و سه خط

$$M_1 : PCD, \qquad M_2 : QAB, \qquad M_3 : REF$$

را در نظر بگیرید؛ فرض کنید $\mathbf{C}_۱ = \mathrm{L}_۱ + \mathrm{L}_۲ + \mathrm{L}_۳$ و $\mathbf{C}_۲ = \mathrm{M}_۱ + \mathrm{M}_۲ + \mathrm{M}_۳$. حال می‌توان از (۷.۲) استفاده کرد، زیرا روشن است که $\mathbf{C}_۱$ و $\mathbf{C}_۲$ دو خم درجهٔ سوم هستند به‌طوری که

$$\mathbf{C}_۱ \cap \mathbf{C}_۲ = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}$$

فرض کنید PQR همخط‌اند، قرار دهید $\mathrm{L} = \mathrm{PQR}$؛ فرض کنید $\Gamma$ مقطع مخروطی ماربر ABCDE باشد (که وجود و یکتائی آن در قضیه ۱۱.۱ ثابت شده است). در این‌صورت طبق نحوهٔ ساختمان، $\Gamma + \mathrm{L}$ خم درجهٔ سومی است که از ۸ نقطهٔ A، B، C، D، E، P، Q و R می‌گذرد، لذا بنابر (۷.۲)، باید شامل نقطه F نیز باشد؛ طبق فرض $\mathrm{F} \notin \mathrm{L}$، بنابراین لزوماً $\mathrm{F} \in \Gamma$، که همقطع مخروطی‌بودن شش نقطه را ثابت می‌کند.

حال به‌عکس، فرض کنید A، B، C، D، E و F بر مقطع مخروطی $\Gamma$ واقع‌اند. فرض کنید $\mathrm{L} = \mathrm{PQ}$؛ در این‌صورت $\Gamma + \mathrm{L}$ خم درجهٔ سومی است که از نقاط A، B، C، D، E، F، P و Q می‌گذرد، لذا بنابر (۷.۲) باید از نقطه R نیز بگذرد. اما، R نمی‌تواند روی مقطع مخروطی $\Gamma$ واقع شود (زیرا در غیر این‌صورت $\Gamma$ به یک زوج‌خط بدل خواهد شد و بعضی از شش خط نمودار باید بر هم منطبق شوند)، لذا $\mathrm{R} \in \mathrm{L}$، یعنی PQR همخط‌اند. □

**(۱۲.۲) نقطه عطف، شکل نرمال.** هر خم درجهٔ سوم در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$ یا $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{C}}$ را می‌توان به‌شکل نرمال

$$\mathbf{C} : \mathrm{Y}^۲\mathrm{Z} = \mathrm{X}^۳ + \mathrm{aXZ}^۲ + \mathrm{bZ}^۳ \qquad (**)$$

نوشت که شکل آفین آن

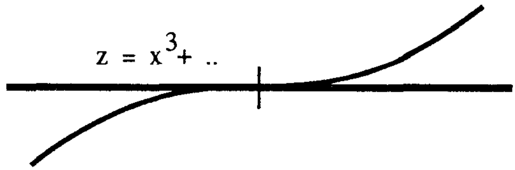
$$\mathrm{y}^۲ = \mathrm{x}^۳ + \mathrm{ax} + \mathrm{b}$$

خواهد بود.

حال خم $\mathbf{C}$ی بالا را در نظر می‌گیریم؛ $\mathbf{C}$ در چه نقاطی خط بینهایت $\mathrm{L} : (\mathrm{Z} = ۰)$ را قطع می‌کند؟ جواب ساده است، کافی است در چندجمله‌یی $\mathrm{F} = -\mathrm{Y}^۲\mathrm{Z} + \mathrm{X}^۳ + \mathrm{aXZ}^۲ + \mathrm{bZ}^۳$ قرار دهیم $\mathrm{Z} = ۰$، تا $\mathrm{F}|_\mathrm{L} = \mathrm{X}^۳$ حاصل شود؛ این نتیجه حاکی از این است که $\mathrm{F}|_\mathrm{L}$ یک صفر سه‌گانه در نقطهٔ $\mathrm{P} = (۰ : ۱ : ۰)$ دارد. برای اینکه تعبیر هندسی آن را ببینیم، قرار می‌دهیم $\mathrm{Y} = ۱$، تا معادلات آفین خم در مختصات $(\mathrm{x}, \mathrm{z})$ را در حول نقطهٔ $(۰ : ۱ : ۰)$ به دست آوریم:

$$\mathrm{z} = \mathrm{x}^۳ + \mathrm{axz}^۲ + \mathrm{bz}^۳$$

این خم را می‌توان با دقتی از درجهٔ بالا، با خم $z = x^3$ تقریب زد:




این رفتار با بیان این‌که خم $C$ در نقطه $(0 : 1 : 0)$ دارای یک نقطهٔ عطف است، توصیف می‌شود. به‌طور کلی، یک نقطهٔ عطف $P$ بر یک خم $C$ نقطه‌ای است که برای آن خطی مانند $L \subset \mathbb{P}^2_k$ یافت می‌شود به‌قسمی که $F|_L$ در نقطهٔ $P$ ریشه‌ای با چندگانگی حداقل برابر ۳ داشته باشد ($\longleftarrow$ تمرین ۹.۲، در واقع باتوجه به (۸.۲.ب)، الزاماً $L = T_P C$، و بنابر(۹.۱) چندگانگی در نقطهٔ $P$ دقیقاً برابر ۳ است). تعبیر این موضوع برحسب مشتق و مشتق دوم چندجمله‌یی معرف خم، به‌آسانی صورت می‌گیرد: برای مثال، اگر معادلهٔ معرف خم، $y = f(x)$ باشد، شرط این‌که $P$ یک نقطهٔ عطف باشد، این است که تساوی $\frac{d^2f}{dx^2}(P) = 0$ برقرار باشد؛ و این نقطه به نقطه‌ای از نمودار خم نظیر می‌شود که در آن نقطه، جهت تقعر خم عوض می‌شود یعنی در یک طرف این نقطه تقعر به سمت پایین و در طرف دیگر به سمت بالاست. برای اینکه یک خم مسطح، نقطهٔ عطفی داشته باشد، یک ملاک کلی برحسب «هِسِیه‌یی» خم وجود دارد، به‌عنوان مثال، $\longleftarrow$ کتاب [فولتن، ص۱۱۶] و یا تمرین ۷.۳ـ(ج).

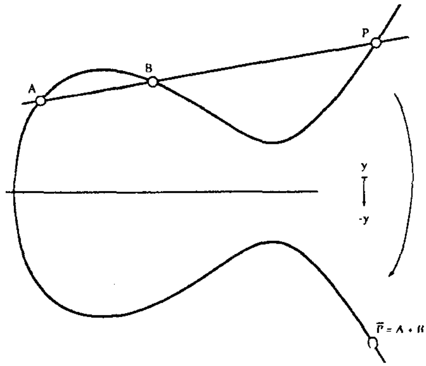
می‌توان نشان داد که به‌عکس اگر یک خم درجهٔ سوم مسطح یک نقطه عطف داشته باشد، می‌توان معادله آن را به‌شکل نرمال (**) درآورد. ($\longleftarrow$ تمرین ۱۰.۲).

**( ۱۳.۲ ) شکل ساده‌شدهٔ قانون گروهی.** شکل نرمال (**) برای تعبیر قانون گروهی بسیار مناسب است: نقطهٔ عطف $O = (0 : 1 : 0)$ را به‌عنوان عنصر بی‌اثر در نظر بگیرید. در این‌صورت قانون گروهی به دلایل ذیل به‌شکل خیلی جالبی درمی‌آید:

(الف) $C = \{O\} \cup (y^2 = x^3 + ax + b$ به‌معادلهٔ $C_0$ (خم آفین؛ لذا منطقی است $C$ را یک خم آفین تلقی کنیم و به‌ندرت به تک‌نقطهٔ $O$ در بینهایت، که صفر قانون گروهی است، مراجعه کنیم.

(ب) خطوط مار بر نقطهٔ $O$، که اجزای اصلی در قسمت (الف) ساختمان قانون گروهی در (۸.۲) به‌شمار می‌آیند، از لحاظ تصویری با $X = \lambda Z$ داده شده‌اند، و از لحاظ آفینی با $x = \lambda$؛ هر چنین خطی خم $C$ را در نقطه‌های $(\lambda, \pm\sqrt{(\lambda^3 + a\lambda + b)})$ و نقطهٔ بینهایت قطع می‌کند. بنابراین اگر $(x, y)$ مختصات نقطهٔ $P$ باشد، مختصات نقطهٔ $\overline{P}$ که در (۸.۲ـ(۱)) ساخته شد، $(x, -y)$

خواهد بود؛ لذا نگاشت $\overline{P} \longmapsto P$، تقارن طبیعی $(x, y) \longmapsto (x, -y)$ از خم $C_۰$ است:




(ج) عنصر عکس قانون گروهی (۹.۲ـ(۴)) که برحسب $\overline{O}$ بیان شده است، سومین نقطهٔ تلاقی خط یکتای $L$ با خم $C$ است به‌طوری که $F|_L$ دارای ریشهٔ چندگانه در نقطه $O$ است؛ ولی در مورد مسألهٔما، خط $L$ خط بینهایت $L : (Z = ۰)$ است، و $L \cap C = ۳O$، بنابراین $\overline{O} = O$ و عکس قانون گروهی به‌شکل سادهٔ $-P = \overline{P}$ درمی‌آید.

حال می‌توان قانون گروهی قضیه ۸.۲ را به‌شکل بسیار سادهٔ ذیل بیان کرد:

**قضیه.** فرض کنید $C$ یک خم درجهٔ سوم با شکل نرمال (**) باشد، در این‌صورت یک قانون یکتای گروهی روی $C$ وجود دارد به‌طوری که $O = (۰ : ۱ : ۰)$ عنصر بی‌اثر آن است و عکس هر نقطه با $(x, y) \longmapsto (x, -y)$ داده می‌شود، و برای هر سه‌نقطهٔ $P$ و $Q$ و $R$ روی $C$، داریم:

$$P + Q + R = O \iff \text{همخط‌اند} \; P, Q, R$$

## تمرینهای بخش دوم.

**۱.۲** فرض کنید $C : (y^۲ = x^۳ + x^۲) \subset \mathbb{R}^۲$. نشان دهید خط متغیر ماربر $(۰, ۰)$ خم $C$ را در یک نقطهٔ دیگر قطع می‌کند، و نمایش پارامتری $C$ را که در (۱.۲) داده شده، نتیجه بگیرید. همین کار را در مورد $(y^۲ = x^۳)$ و $(x^۳ = y^۳ - y^۴)$ انجام دهید.

**۲.۲** فرض کنید $\varphi : \mathbb{R}^۱ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ نگاشتی باشد که توسط $t \longmapsto (t^۲, t^۳)$ تعریف شده است، مستقیماً ثابت کنید که هر چندجمله‌یی $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ که روی نگارهٔ $C = \varphi(\mathbb{R}^۱)$ صفر شود، بر چندجمله‌یی $Y^۲ - X^۳$ بخشپذیر است. (راهنمایی: از روش لم ۵.۲ استفاده کنید). معین کنید که

کدام ویژگی هیأت $k$ تضمین می‌کند که نتیجه اخیر در مورد نگاشت $\varphi : k \to k^{2}$ که با همین فرمول تعریف شده، برقرار باشد.

همین کار را در مورد $t \longmapsto (t^{2} - 1, t^{3} - t)$ انجام دهید.

**۳.۲** خم $C : (f = 0) \subset k^{2}$ و نقطهٔ $P = (a, b) \in C$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$. ثابت کنید خط $L : (\frac{\partial f}{\partial x}(P)(X - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(Y - b) = 0)$ خط مماس بر $C$ در نقطهٔ $P$ است، به این معنی که $L$ تنها خطی در $k^{2}$ است به‌طوری که $F|_{L}$ یک ریشهٔ چندگانه در $P$ دارد (این مطلب در (۱.۶) به تفصیل بررسی شده است).

**۴.۲** خم $C : (y^{2} = x^{3} + 4x)$ را با قانون گروهی ساده‌شدهٔ (۱۳.۲) در نظر بگیرید. نشان دهید که خط مماس بر خم $C$ در نقطهٔ $P = (2, 4)$ از نقطهٔ $(0, 0)$ می‌گذرد و نتیجه بگیرید که $P$ یک نقطهٔ مرتبهٔ ۴ در قانون گروهی $C$ است.

**۵.۲** فرض کنید $C : (y^{2} = x^{3} + ax + b) \subset \mathbb{R}^{2}$ ناتکین باشد. همهٔ نقاط $C$ را که در قانون گروهی، از مرتبهٔ ۲ هستند، پیدا و گروهی را که این مجموعه نقاط تشکیل می‌دهند مشخص کنید (دو حالت را باید برای بررسی در نظر بگیرید).

حال از لحاظ هندسی بیان کنید که چگونه می‌توانید نقاط مرتبهٔ ۴ روی $C$ را پیدا کنید.

**۶.۲** خم $C : (y^{2} = x^{3} + ax + b) \subset \mathbb{R}^{2}$ را در نظر بگیرید؛ یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید که قسمتی از خم $C$ را رسم و قانون گروهی روی $C$ را محاسبه کند. به‌این معنی که وقتی مختصات دو نقطهٔ $A$ و $B$ به کامپیوتر داده می‌شود، کامپیوتر خطوط موردنظر را رسم نماید و مختصات $A + B$ را به‌ما بدهد. (از متغیرهای حقیقی استفاده کنید).

**۷.۲** فرض کنید $C : (y^{2} = x^{3} + ax + b) \subset k^{2}$؛ اگر $A = (x_{1}, y_{1})$، $B = (x_{2}, y_{2})$، مختصات $A + B$ را به‌شکل تابع گویایی از $x_{1}$، $y_{1}$، $x_{2}$ و $y_{2}$ به‌دست آورید. (راهنمایی: اگر $F(X)$ یک چندجمله‌یی درجهٔ سوم باشد و دو ریشه از آن بر شما معلوم باشد، ریشهٔ سوم آن را می‌توانید فقط با ملاحظهٔ یکی از ضرایب آن به‌دست آورید. البته این مسأله دارای جواب یکتا نیست. زیرا بیانهای درست متعددی برای توابع گویا وجود دارند. ضمناً یک جواب نیز در (۱۴.۴) داده شده است).

**۸.۲** با نوشتن معادلهٔ خط مماس بر خم $C$ در نقطهٔ $A$، فرمولی برای $2A$ در قانون گروهی روی $C$ پیدا کنید و نشان دهید این فرمول حد فرمول مناسبی برای $A + B$ است وقتی که $B$ به‌سمت $A$ میل کند. (راهنمایی: از تمرین ۷.۲ استفاده و درصورت لزوم به (۱۴.۴) مراجعه کنید.)

**۹.۲** فرض کنید $x$ و $z$ مختصات در $k^{2}$ باشد و $f \in k[x, z]$؛ $f$ را به‌شکل ذیل می‌نویسیم:

$$f = a + bx + cz + dx^{2} + exz + fz^{2} + \cdots$$

شرایطی را برحسب a و b و c و ... بنویسید تا

(۱) $P = (0, 0)$ روی خم $C : (f = 0)$ واقع باشد؛

(۲) خط $(z = 0)$ خط مماس بر $C$ در نقطهٔ $P$ باشد؛

(۳) $P$ یک نقطهٔ عطف $C$ و خط $(z = 0)$ خط مماس بر $C$ در این نقطه باشد. (بیاد بیاورید که بنابر (۱۲.۲) نقطهٔ $P \in C$ یک نقطهٔ عطف است اگر خط مماس $L$ بر $C$ در این نقطه تعریف شده باشد و $f|_L$ در نقطهٔ $P$ ریشه‌ای با چندگانگی حداقل ۳ داشته باشد.)

**۱۰.۲** فرض کنید $C \subset \mathbb{P}^2_k$ خم درجهٔ سوم مسطحی است که $P \in C$ نقطهٔ عطف آن است؛ نشان دهید با تعویض متغیر مناسبی در $\mathbb{P}^2_k$ می‌توان معادلهٔ $C$ را به‌شکل نرمال یعنی به صورت $(Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bXZ^2 + cZ^3)$ درآورد. (راهنمایی: مختصات را طوری بگیرید که $P$ به‌شکل $(0 : 1 : 0)$ درآید و خط مماس در نقطهٔ عطف، خط $(Z = 0)$ باشد؛ سپس بااستفاده از تمرین قبل در مختصات موضعی $(x, z)$، نشان دهید جمله‌ای که در آن $Y$ از درجهٔ دوم است به‌صورت $Y^2Z$ بوده، بقیهٔ جملات نسبت به $Y$ خطی هستند. حال با «کامل‌کردن مربع» می‌توان جملهٔ خطی نسبت به $Y$ را حذف کرد.)

**۱۱.۲** (قانون گروهی روی خم درجهٔ سوم تیزه‌ای.) خم $C : (z = x^3) \subset k^2$ را در نظر می‌گیریم؛ $C$ نگارهٔ نگاشت دوسویی $\varphi : k \to C$ است که به‌شکل $t \longmapsto (t, t^3)$ تعریف می‌شود، لذا $C$ وارث یک قانون گروهی از گروه جمعی $k$ است. ثابت کنید که این قانون تنها قانون گروهی روی $C$ است که $(0, 0)$ عنصر بی‌اثر آن بوده و برای هر $P$، $Q$، $R$ روی $C$ داریم

$$P + Q + R = 0 \iff \text{همخط‌اند } P, Q, R$$

(راهنمایی: ممکن است استفاده از اتحاد

$$\det\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

مفید باشد.)

در اصطلاحات تصویری، خم $C$ همان دوست قدیمی ما $(Y^2Z = X^3)$ است که یک تیزه در مبدأ دارد و یک نقطهٔ عطف در $(0 : 1 : 0)$، و نکتهٔ مهم مسأله این است که ساختمان معمولی یک قانون گروهی روی متمم نقطهٔ تکین به‌دست می‌دهد.

**۱۲.۲** (منسوب به لئوناردو پیسانو، معروف به فیبوناتچی، ۱۲۲۰ میلادی). ثابت کنید برای $u, v \in \mathbb{Z}$،

$$u^2 - v^2 \text{ و } u^2 + v^2 \text{ مربع کامل‌بودن} \Longrightarrow v = 0$$

راهنمایی (منسوب به پ. فرما، ⟵ مقالهٔ ج. و. س. کَسِلْز، مجلهٔ انجمن ریاضی لندن، شمارهٔ ۴۱، (۱۹۶۶)، ص۲۰۷)[1]:

**گام ۱.** مسأله را به‌حالت ذیل تحویل کنید

$$(*) \qquad x^2 = u^2 + v^2 ،\ y^2 = u^2 - v^2 \text{ که } x, y, u, v \in \mathbb{Z} \text{ دوبه‌دو نسبت به‌هم اول‌اند.}$$

**گام ۲.** تحویل به پیمانهٔ ۴ نشان می‌دهد $x$ و $y$ و $u$ فرد هستند و $v$ زوج است.

**گام ۳.** چهارجفت عامل در طرف چپ تساویهای

$$\begin{aligned}(x-u)(x+u) &= v^2\\ (u-y)(u+y) &= v^2 \qquad (**)\\ (x-y)(x+y) &= 2v^2\\ (2u-x-y)(2u+x+y) &= (x-y)^2\end{aligned}$$

هیچ عامل مشترکی جز توانهای ۲ ندارند.

**گام ۴.** با قراردادن $-y$ به‌جای $y$ درصورت لزوم، می‌توان فرض کرد $x-y$ بر ۴ بخشپذیر نیست. حال باتوجه به فرد یا زوج بودن عاملها در طرف چپ روابط (**)، ثابت کنید

$$x-u = 2v_1^2, u-y = 2u_1^2, x-y = 2x_1^2, 2u-x-y = 2y_1^2$$

که در آن $u_1, v_1, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$.

**گام ۵.** نشان دهید $u_1$، $v_1$، $x_1$ و $y_1$ جواب دیگری برای (*) است با $v_1 < v$، و با استفاده از «نزول نامتناهی» به یک تناقض برسید.

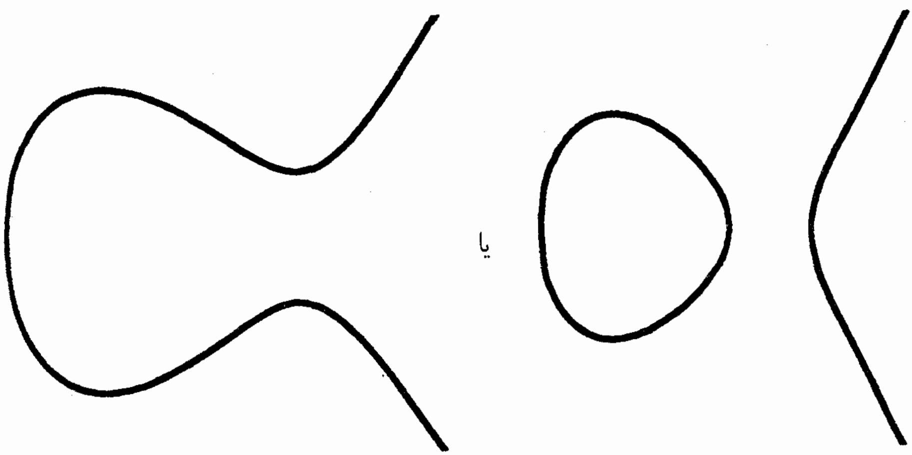
استدلال بالا را با برهان (۲.۲) مقایسه کنید، که آن برهان تنها به این علت ساده‌تر بود که در آن سر و کاری با ۲ها نداشتیم.

1. G.W.S. Cassels, Journal of London Math. Soc. **41** (1966), p.207.

# پیوست فصل اول

## خمها و گونای آنها

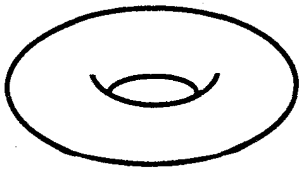
**( ۱۴.۲ ) توپولوژی خم درجهٔ سوم ناتکین.** به‌آسانی می‌توان دید که شکل خم درجهٔ سوم ناتکین مسطح $\mathbf{C} : (y^۲ = x^۳ + ax + b) \subset \mathbb{P}^۲_{\mathbb{R}}$، به یکی از دو صورت ذیل است




یعنی از لحاظ توپولوژیکی، $\mathbf{C}$ یک دایره یا دو دایره است (البته با الحاق تنها نقطهٔ بینهایت). برای بررسی همین سئوال روی $\mathbb{C}$، شکل نرمال دیگر

$$\mathbf{C} : (y^۲ = x(x - ۱)(x - \lambda)) \cup \{\infty\}$$

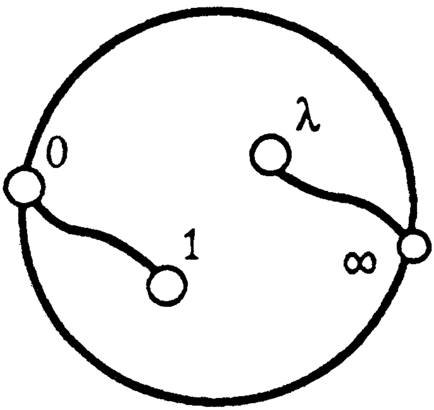
را اختیار می‌کنیم؛ توپولوژی $\mathbf{C} \subset \mathbb{P}^۲_{\mathbb{C}}$ چیست؟ جواب این سئوال یک چنبره است:



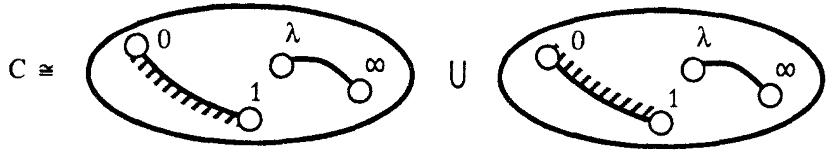
راه اثبات به‌این ترتیب است که نگاشت

$$\pi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{C}}, (\mathrm{x} : \mathrm{y} : \mathrm{z}) \longmapsto (\mathrm{X} : \mathrm{Z}), \infty \longmapsto (۱ : ۰)$$

را در نظر می‌گیریم، این نگاشت در مختصات آفین به‌شکل $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \longmapsto \mathrm{x}$ است، لذا یک نگاشت دو به یک است که با نمودارهای $\mathrm{y} = \pm\sqrt{\mathrm{x}(\mathrm{x}-۱)(\mathrm{x}-\lambda)}$ متناظر می‌شود. همه می‌دانیم که $\mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{C}}$ با کرهٔ ریمان $\mathrm{S}^{۲}$ («تصویر گنجنگاشتی») همسانریخت است؛ «تابع» $\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \pm\sqrt{\mathrm{x}(\mathrm{x}-۱)(\mathrm{x}-\lambda)}$ را که در خارج مجموعهٔ $\{۰, ۱, \lambda, \infty\}$ دو مقداری است روی $\mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{C}}$ در نظر بگیرید:

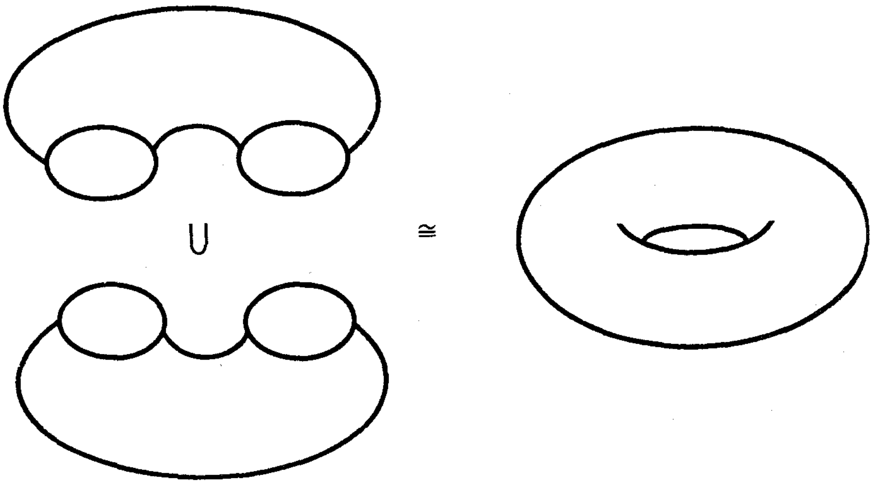



حال $\mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{C}}$ را در امتداد دو مسیر ۰۱ و $\lambda\infty$ می‌بریم؛ پوشش دوگانه به دو پارچه تقسیم می‌شود، لذا تابع y روی هر پارچه تک مقداری است. بنابراین

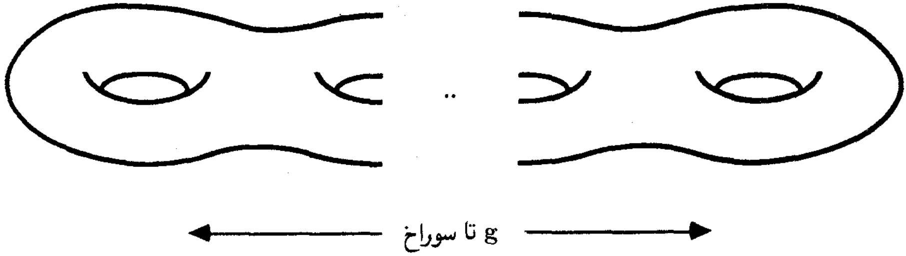



(قسمت مضرس شکل، چگونگی جفت‌شدن دو پارچه را هنگام به‌هم چسبانیدن مشخص می‌کند).

برای دیدن ماوقع، هریک از پارچه‌ها را از هم جدا کنید:




**(۱۵.۲) بحث در مورد گونا.** به هر خم تصویری ناتکین $\mathbf{C}$ روی $\mathbb{C}$ دقیقاً یک ناوردای توپولوژیکی نسبت داده می‌شود، که گونای آن، $g = g(\mathbf{C})$ است:




برای مثال، خم آفین $\mathbf{C} : (y^2 = f_{2g+1}(x) = \Pi_i(x - a_i)) \subset \mathbb{C}^2$، که در آن $f_{2g+1}$ یک چندجمله‌یی درجه $2g+1$ از $x$ با ریشه‌های متمایز $a_i$ است، می‌تواند درست مشابه (۱۳.۲) به رویهٔ ریمانی $\sqrt{f}$ مربوط شود، این خم را نیز می‌توان به‌عنوان یک پوشش دوگانه کره ریمانی $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ در نظر گرفت که در $2g+1$ نقطهٔ $a_i$ و نقطهٔ $\infty$ منشعب شده است، با بحثی مشابه می‌توان دید که گونای این خم برابر $g$ است. مثال دیگر، گونای یک خم ناتکین مسطح $\mathbf{C}_d \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ از درجه $d$ است، که توسط فرمول

$$g = g(\mathbf{C}_d) = \binom{d-1}{2}$$

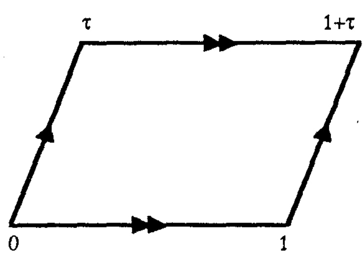
داده می‌شود.

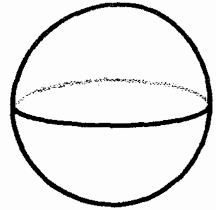
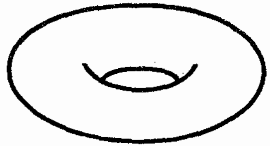
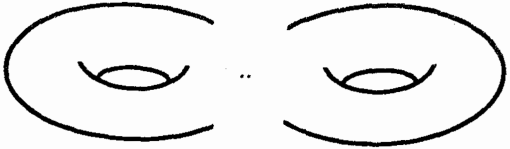
**( ۱۶.۲ ) تنفس تبلیغاتی!.** خمهای مختلط (یعنی رویه‌های ریمانی فشرده) در یک طیف کاملی از مسائل ریاضی ظاهر می‌شوند، از حساب دیوفانتوسی گرفته تا نظریهٔ توابع مختلط، توپولوژی در بعدهای پایین، و معادلات دیفرانسیل فیزیک ریاضی. پس همین امروز بروید یک خم مختلط برای خود بخرید!

ویژگیهای یک خم، تا حد فوق‌العادهٔ زیادی، توسط گونای آن بالاخص براساس سه حالت $g = 0$، $g = 1$ یا $g \geq 2$ مشخص می‌شود. بعضی از جنبه‌های شگفت‌آور این موضوع، در جدول صفحهٔ بعد توصیف، و در هر مورد توضیح مختصری داده شده است؛ این مطالب باید بخشی از معلومات پایه‌یی هر ریاضیدان باشد.

در پاسخ جزئی به مسأله دیوفانتوسی که در (۱.۱ــ۲) اشاره و مجددا در (۱.۲) مطرح شد، معلوم شده است که شرط لازم وکافی برای اینکه خمی دارای نمایش پارامتری برحسب توابع گویا باشد این است که گونای آن صفر باشد، یعنی $g = 0$؛ اگر روی هیأت مشخصی کار می‌کنیم، یک خم با گونای صفر می‌تواند اصلاً هیچ نقطهٔ kیی‌ـمقدار نداشته باشد (مثل مقطع مخروطی مذکور در (۲.۱ ))، لیکن اگر خمی یک چنین نقطه‌ای داشته باشد، نمایش پارامتری روی k دارد و بنابراین نقاط kیی‌ـمقدار آن در تناظر دوسوئی با $\mathbb{P}^1_k$ هستند. هر خم مسطح با گونای یک، با خمی درجهٔ سوم، مانند خمهای این بخش، یکریخت است، و یک قانون گروهی روی نقاط kیی‌ـمقدار آن تعریف می‌شود (به‌شرط اینکه حداقل یک چنین نقطه‌ای روی خم وجود داشته باشدـزیرا، چیزی به‌عنوان گروه تهی وجود ندارد)؛ اگر k یک هیأت عددی (مثلاً $k = \mathbb{Q}$) باشد، این نقاط kیی‌ـمقدار یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که متناهی‌ـمولد است. (قضیهٔ موردل‌ـوِیل). درحالی که اکنون معلوم شده است که هر خم با گونای ناکوچکتر از ۲، فقط یک مجموعهٔ متناهی نقاط kیی‌ـمقدار دارد؛ این مطلب موضوع قضیه معروفی است که فالتینگز آن را در ۱۹۸۳ ثابت و به‌خاطر آن مدال فیلدز سال ۱۹۸۶ را دریافت کرد. بنابراین، به‌عنوان مثال، برای هر $n \geq 4$، خم فرما $x^n + y^n = 1$ حداکثر دارای تعدادی متناهی نقطهٔ گویاست.

روی $\mathbb{C}$، هر خم ناتکین $C$ با گونای یک، از لحاظ توپولوژیک، یک چنبره است، و یک قانون گروهی دارد، لذا از لحاظ تحلیلی به‌صورت $C \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.\tau)$ است:



| | $g = 0$ | $g = 1$ | $g \geq 2$ |
|---|---|---|---|
| **توپولوژی**<br>C همسانریخت است با: |  |  |  |
| گروه بنیادی: | همبند ساده | $\pi = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ | مثل گروه آزاد با تعداد ۲g مولد |
| **هندسهٔ جبری/هندسهٔ تحلیلی مختلط** | | | |
| نشاندنها، توصیفهای خاص: | $C \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$<br>$\cong C_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ | $C \cong C_3 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$<br>$\cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ | توصیف‌ساده‌ای وجودندارد، لیکن مثلاً اغلب خمهای با گونای سه با خم ناتکین $C_4 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ یکریخت‌اند. |
| خودریختیها: | گروه سه‌بعدی تبدیلات تصویری | انتقالها در قانون گروهی × گروه متناهی | گروه متناهی |
| بعد فضای مختصه‌ها: | صفر | یک (نسبت ناهمساز یا ناوردای j) | $3g - 3$ |
| **هندسهٔ دیفرانسیل** | | | |
| یک ردهٔ طبیعی از متریکهای ریمانی با خمیدگی ثابت وجود دارد: | خمیدگی ثابت مثبت | خمیدگی صفر (یعنی، مسطح) | خمیدگی ثابت منفی |
| **مسائل دیوفانتوسی** | | | |
| اگر $k = \mathbb{Q}$ و یا k یک هیأت عددی باشد (یعنی، $[k:\mathbb{Q}] < \infty$) در این صورت: | $C_k = \mathbb{P}^1_k$ یا $C_k = \varnothing$ | $C_k$ یک گروه آبلی متناهی-مولد است (قضیهٔ موردل-ویل) | $C_k$ مجموعه‌ای است متناهی (قضیهٔ فالتینگز-حدسیهٔ موردل) |

یکریختی بین این خارج‌قسمت و یک خم $C_3$ در صفحهٔ $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ توسط یک نگاشت تمام‌ریخت $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow C_3$ داده شده است یعنی یک نوع «نمایش پارامتری» $C_3$؛ لیکن $\varphi$ نمی‌تواند برحسب توابعی گویا (بنابر (۲.۲)) بیان شود، و یک نگاشت $\infty$ـبه‌ـ۱ است، یعنی به نظریه توابع دو دوره‌ای از یک متغیر مختلط، مربوط می‌شود، که از تکیه‌گاههای اصلی آنالیز در سدهٔ نوزدهم بوده است (تابع $\mathcal{P}$یِ وایرشتراس، تابع تتای ریمان).

موضوع مهم و قابل توجه دیگر این است که دوره‌های تناوب متفاوت $\tau$ معمولاً به خمهای متفاوتی منجر می‌شوند؛ همهٔ این خمها با چنبرهٔ استاندهٔ $S^1 \times S^1$ همسانریخت‌اند، لیکن به‌عنوان خمهای جبری، یا خمهای تحلیلی مختلط، یکریخت نیستند. دورهٔ تناوب $\tau$ یک مختصهٔ عددی (مدولوس)، یعنی پارامتر مختلطی است حاکم بر تغییرات ساختار مختلط $C$ روی فضای توپولوژیک ثابت $S^1 \times S^1$.

برای مطالعه مطالب بیشتر دربارهٔ خمها، می‌توانید به کتاب [د. مامفرد، خمها و ژاکوبین آنها]، که قسمت اول آن تقریباً به‌صورت محاوره است، و یا به کتاب [ کلمنز ] رجوع کنید.

# ۲

# رستهٔ چندگوناهای آفین

## بخش سوم. چندگوناهای آفین و قضیهٔ صفرهای هیلبرت

قسمت اعظم نیمه نخست این بخش، جبر تعویضپذیر محض است؛ توجه داشته باشید که در سرتاسر این مبحث منظور از حلقه، یک حلقهٔ تعویضپذیر واحددار است. از آنجا که این درس در وهلهٔ اول یک درس جبر تعویضپذیر نیست، نکات چندی بسرعت مرور خواهد شد.

**(۱.۳) قضیه‌ـتعریف.** شرایط ذیل روی یک حلقهٔ $A$ هم‌ارزند.

(الف) هر ایده‌آل $I \subset A$ متناهی‌ـمولّد است، یعنی برای هر ایده‌آل $I$ در $A$، عناصری نظیر $f_1, \ldots, f_k \in I$ وجود دارند به‌طوری که $I = (f_1, \ldots, f_k)$.

(ب) هر زنجیر صعودی

$$I_1 \subset \ldots \subset I_m \subset \ldots$$

از ایدآلهای $A$ مختوم است، یعنی زنجیر سرانجام به صورت مانای $I_N = I_{N+1} = \cdots$ در می‌آید (شرط مانایی زنجیرهای صعودی یا (ش. م. ز. ص[1] .)).

(ج) هر مجموعهٔ ناتهی از ایده‌آلهای $A$ یک عضو ماکسیمال دارد.

اگر این شرایط برقرار باشند، $A$ یک حلقهٔ نوتری است.

**برهان.** (الف) $\Longrightarrow$(ب). فرض کنید $I_1 \subset \ldots \subset I_m \subset \ldots$. قرار می‌دهیم $I = \cup I_m$. روشن است که $I$ هنوز یک ایده‌آل است. هرگاه $I = (f_1, \ldots, f_k)$، هر $f_i$ به ایده‌آلی مانند $I_{m(i)}$،

1. The ascending chain condition (a. c. c.)

برای مقداری از اندیس $m(i)$، متعلق است. لذا با فرض $m = \max(m(i))$، خواهیم داشت $I = I_m$ و زنجیر در $I_m$ ماناست.

(ب) $\Longleftarrow$(ج) روشن است. (در واقع، از اصل انتخاب استفاده می‌شود.)

(ج) $\Longleftarrow$(الف). فرض کنید ایدآل $I$ داده شده است؛ قرار دهید

$$\Sigma = \{J \subset I | \text{ایدآل متناهی‌ـمولّد است } J\}$$

پس طبق (ج)، $\Sigma$ عنصر ماکسیمالی، مثل $J_\circ$ دارد. پس خواهیم داشت $I = J_\circ$، زیرا در غیر این صورت هر عنصر $f \in I \backslash J_\circ$ یک ایده‌آل $J_\circ + Af$ را به دست می‌دهد که باز متناهی‌ـمولّد است ولی اکیداً از $J_\circ$ بزرگتر است. □

به‌عنوان یک تمرین فکری ثابت کنید $\mathbb{Z}$ و $k[X]$ نوتری هستند.

**( ۲.۳ ) قضیه.** (الف) فرض کنید $A$ یک حلقهٔ نوتری است و $I \subset A$ یک ایده‌آل؛ در این صورت حلقهٔ خارج قسمت $B = A/I$ نیز نوتری است.

(ب) گیریم $A$ یک حوزهٔ صحیح نوتری و $K$ هیأت کسرهای آن باشد؛ فرض کنید $S$ زیر مجموعه‌ای از $A$ و $\circ \not\in S$، قرار می‌دهیم:

$$B = A[S^{-1}] = \{\frac{a}{b} \in K | a \in A, \text{ حاصلضربی از عناصر } S \text{ است } b \text{ یا } b = 1\}$$

در این صورت $B$ نیز نوتری است.

**برهان.** تمرین: در هر حالت ایدآلهای $B$ برحسب ایدآلهائی از $A$ قابل بیان‌اند؛ برای راهنمایی $\longleftarrow$ تمرین ۴.۳.

**( ۳.۳ ) قضیه.** (قضیهٔ پایهٔ هیلبرت). برای هر حلقهٔ $A$،

$$A \text{ نوتری است } \Longrightarrow A[X] \text{ نوتری است}$$

**برهان.** فرض کنید $J \subset A[X]$ یک ایدآل $A[X]$ است، ثابت می‌کنیم که $J$ متناهی‌ـمولّد است. «ایدآل ضرایب پیشرو جمله‌های درجهٔ $n$» در $J$ را به شکل ذیل تعریف می‌کنیم

$$J_n = \{a \in A | \exists f = aX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_\circ \in J\}$$

پس $J_n$ یک ایدآل $A$ است و $J_n \subset J_{n+1}$ (لطفاً به سلیقه خود ثابت کنید). لذا با استفاده از شرط مانایی زنجیرهای صعودی، عددی مانند $N$ وجود دارد به‌طوری که

$$J_N = J_{N+1} = \cdots$$

حال یک مجموعه مولّد برای ایدآل J به‌شرح ذیل می‌سازیم: برای هر $i \leq N$، فرض کنید $a_{i1}, \ldots, a_{im(i)}$ مولدهای $J_i$ باشند، و طبق تعریف $J_i$، برای هر یک از $a_{ik}$ها، فرض کنید $f_{ik} = a_{ik}X^i + \ldots \in J$ یک چندجمله‌یی درجه i با ضریب جملهٔ پیشرو $a_{ik}$ باشد.

حال می‌گوییم مجموعهٔ

$$\{f_{ik} | i = ۰, \ldots, N, k = ۱, \ldots, m(i)\}$$

که به شرح بالا ساخته شد، ایدآل J را تولید می‌کند: برای هر $g \in J$، فرض کنید $\deg g = m$. پس جملهٔ پیشرو g، جملهٔ $bx^m$ خواهد بود که $b \in J_m$، لذا بنابر آنچه در مورد $J_m$ می‌دانیم، می‌توانیم بنویسیم $b = \Sigma c_{m'k} a_{m'k}$ ($m' = m$، اگر $m \leq N$، در غیر این صورت $m' = N$). حال چندجمله‌یی $g_۱ = g - X^{(m-m')} . \Sigma c_{m'k} f_{m'k}$ را در نظر بگیرید: طبق عملکرد ما، ضریب جملهٔ درجه m این چند جمله‌یی صفر است، لذا $\deg g_۱ \leq \deg g - ۱$؛ و با استقرا، می‌توان g را به صورت ترکیبی از $f_{ik}$ها نوشت، لذا این عناصر J را تولید می‌کنند. □

فرع. اگر k یک هیأت باشد، هر k_جبر متناهی_مولّد، نوتری است.

یک k_جبر متناهی_مولّد، حلقه‌ای است به صورت $A = k[a_۱, \ldots, a_n]$، بنابراین به‌عنوان حلقهٔ A توسط عناصر k و $a_۱, \ldots, a_n$ تولید می‌شود، هر چنین حلقه‌ای با یک خارج قسمت حلقهٔ چندجمله‌ییها به شکل $A \cong k[X_۱, \ldots, X_n]/I$ یکریخت است. هر هیأت نوتری است و با استقراء در (۳.۳)، $k[X_۱, \ldots, X_n]$ نوتری است؛ بالاخره باگذر به خارج قسمت، بنابر (۲.۳ــ(الف))، نتیجه ثابت می‌شود. □

**( ۴.۳ ) تناظر V.** فرض می‌کنیم k هیأتی دلخواه باشد و $A = k[X_۱, \ldots, X_n]$. با پیروی از آنچه نزد اکثریت قریب به اتفّاق صاحبنظران در هندسهٔ جبری[۱] مرسوم است، $k^n$ را به صورت $\mathbb{A}^n_k$ می‌نویسیم و آن را فضای آفین n بعدی روی k می‌گوئیم؛ اگر یک چندجمله‌یی $f(X_۱, \ldots, X_n) \in A$ و یک نقطهٔ $P = (a_۱, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k$ داده شده باشند، عنصر $f(a_۱, \ldots, a_n) \in k$ به عنوان «مقدار تابع f در نقطهٔ P» در نظر گرفته می‌شود. تناظر

$$\{\text{ایدآلهای } J \text{ در } A\} \xrightarrow{V} \{\text{زیرمجموعه‌های } X \text{ در } \mathbb{A}^n_k\}$$

را به صورت

$$J \longmapsto V(J) = \{P \in \mathbb{A}^n_k | f(P) = ۰, \quad \text{برای هر } f \in J\}$$

۱. در حالی که $\mathbb{A}^n_k$ یک چندگوناست، $k^n$ تنها یک مجموعه از نقاط است. اگر بخواهید می‌توانید قرار داد اخیر را یک ملاّ نقطی‌بودن قلمداد کنید؛ در این باره ⟵ (۶.۴) و (۳.۸).

تعریف می‌کنیم.

**تعریف.** یک زیرمجموعهٔ $X \subset \mathbb{A}^n_k$ یک مجموعهٔ جبری است اگر برای ایدآلی مانند I، $X = V(I)$. (این همان چیزی‌است که چند گونا گفته می‌شود، لیکن فعلاً این کلمه را به کار نمی‌بریم.) توجه داشته باشید که بنابر نتیجهٔ (۳.۳)، I متناهی‌ـمولّد است. اگر $I = (f_1, \ldots, f_r)$، روشن است که

$$V(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_k | f_i(P) = 0, i = 1, \ldots, r\}$$

بنابراین یک مجموعه جبری مکان هندسی نقاطی است که در تعدادی متناهی از معادلات چندجمله‌یی صدق می‌کنند.

هرگاه $I = (f)$ یک ایدآل اصلی باشد، معمولاً به جای $V(I)$، $V(f)$ نوشته می‌شود؛ البته این همان چیزی است که با علامتگذاری بخشهای اول و دوم به صورت $V : (f = 0)$ می‌نوشتیم.

**( ۵.۳ ) قضیه‌ـتعریف.** تناظر V در ویژگیهای صوری ذیل صدق می‌کند:

(الف) $V(0) = \mathbb{A}^n_k$؛ $V(A) = \varnothing$؛

(ب) $I \subset J \Longrightarrow V(I) \supset V(J)$؛

(ج) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$؛

(د) $V(\Sigma_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$

بنابراین زیر مجموعه‌های جبری $\mathbb{A}^n_k$ تشکیل مجموعه‌های بستهٔ یک توپولوژی روی $\mathbb{A}^n_k$ را می‌دهند، که آن را توپولوژی زاریسکی گویند.

اثبات ویژگیهای بالا کاملاً ساده است؛ به استثنای ویژگی شمول $\subset$ در (ج). برای اثبات این شمول، فرض کنید $P \notin V(I_1) \cup V(I_2)$؛ پس عناصر $f \in I_1$ و $g \in I_2$ وجود دارند به طوری که $f(P) \neq 0$ و $g(P) \neq 0$. بنابراین $fg \in I_1 \cap I_2$، لیکن $fg(P) \neq 0$ و لذا $P \notin V(I_1 \cap I_2)$. □

توپولوژی زاریسکی روی $\mathbb{A}^n_k$، روی هر مجموعهٔ جبری $X \subset \mathbb{A}^n_k$ یک توپولوژی القا می‌کند؛ زیرمجموعه‌های بستهٔ X، زیرمجموعه‌های جبری مشمول X هستند.

توجه به این نکته اهمیت دارد که توپولوژی زاریسکی روی یک چندگونا، توپولوژی بسیار ضعیفی است و با توپولوژی معمولی فضاهای متری مانند $\mathbb{R}^n$ کاملاً تفاوت دارد. به عنوان مثال، یک زیرمجموعهٔ بسته از $\mathbb{A}^1_k$ با توپولوژی زاریسکی، یا کلّ $\mathbb{A}^1_k$ است و یا زیرمجموعه‌ای است متناهی. برای توصیف توپولوژی زاریسکی روی $\mathbb{A}^2_k$، به تمرین ۱۲.۳ رجوع کنید. اگر $k = \mathbb{R}$ یا $k = \mathbb{C}$، مجموعه‌های بستهٔ توپولوژی زاریسکی در توپولوژی معمولی نیز بسته هستند، زیرا توابع چندجمله‌یی،

پیوسته‌اند. در واقع زیرمجموعه‌های بسته یا باز در توپولوژی زاریسکی، زیرمجموعه‌های بسته یا باز بسیار خاصی در توپولوژی معمولی هستند: یک زیرمجموعهٔ بازناتهی $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی زاریسکی مکمل یک زیر چندگونا است، لذا خودبه‌خود در $\mathbb{R}^n$ چگال است.

توپولوژی زاریسکی ممکن است برای بعضی از دانشجویان دردسر ایجاد کند؛ زیرا این توپولوژی تنها به صورت یک اصطلاح به کار برده می‌شود، و تقریباً محتوائی ندارد، این مشکل محتملاً مشکلی است روانی و نه تکنیکی.

**( ۶.۳ ) تناظرI.** به عنوان نوعی تناظر معکوس برای V، تناظر ذیل وجود دارد

$$\{\text{زیر مجموعه‌های } X \text{ در } \mathbb{A}^n_k\} \xrightarrow{I} \{\text{ایدآلهای } J \text{ در } A\}$$

که به صورت

$$X \mapsto I(X) = \{f \in A | f(P) = 0, \text{ برای هر } P \in X\}$$

تعریف می‌شود. یعنی I به هر مجموعهٔ X، ایدآل چندجمله‌ییهائی را که روی X صفر می‌شوند، نظیر می‌کند.

**قضیه.** (الف) $X \subset Y \Longrightarrow I(X) \supset I(Y)$

(ب) برای هر زیرمجموعهٔ $X \subset \mathbb{A}^n_k$ داریم $X \subset V(I(X))$، و تساوی فقط و فقط زمانی برقرار است که X یک مجموعه جبری باشد؛

(ج) برای هر ایدآل $J \subset A$، داریم $J \subset I(V(J))$؛ این شمول می‌تواند اکید باشد.

**برهان.** (الف) بدیهی است. دو علامت شمول در (ب) و (ج) تکرار معلوم هستند: اگر $I(X)$ به صورت مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ییهائی که روی کلیهٔ نقاط X صفر می‌شوند تعریف شده باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ X، همهٔ چندجمله‌ییهای واقع در $I(X)$ در این نقطه صفر می‌شوند. البته عکس این استدلال هم صحیح است.

قسمت بقیهٔ(ب) آسان است: اگر $X = V(I(X))$، X قطعاً یک مجموعه جبری است، زیرا به شکل Vی یک ایدآل است. بالعکس، اگر $X = V(I_0)$ یک مجموعهٔ جبری باشد، $I(X)$ لااقل شامل ایدآل $I_0$ است، لذا $V(I(X)) \subset V(I_0) = X$.

دو راه متفاوت برای اکید شدن شمول $J \subset I(V(J))$ در (ج) وجود دارد. فهمیدن این حالتها از بیشترین اهمیت برخوردار است، زیرا درک آنها رهنمونی به حکم صحیح قضیهٔ صفرهاست.□

**مثال۱.** فرض کنید هیأت $k$ جبری-بسته نیست، و چندجمله‌یی ناثابت $f \in k[X]$ در هیأت $k$ریشه ندارد. ایدآل $J = (f) \subset k[X]$ را در نظر می‌گیریم. پس $J \neq k[X]$، زیرا $1 \not\in J$. لیکن $V(J) = \{P \in \mathbb{A}^1_k | f(P) = 0\} = \varnothing$. بنابراین $I(V(J)) = k[X]$ (زیرا هر تابع در همهٔ نقاط مجموعهٔ تهی صفر است).

لذا اگر هیأت یک هیأت جبری-بسته نباشد، ممکن است نتوانیم به قدرکافی صفر پیدا کنیم. مثالی نسبتاً مشابه: در $\mathbb{R}^2$، چندجمله‌یی $X^2 + Y^2$ معرف نقطهٔ تنهای $P = (0, 0)$ است، لذا $V(X^2 + Y^2) = \{P\}$. لیکن چندجمله‌ییهای بسیاری علاوه بر مضارب $X^2 + Y^2$ روی $\{P\}$ صفر می‌شوند، و در واقع $I(P) = (X, Y)$.

**مثال۲.** برای هر $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ و هر $a \geq 2$، $f^a$ معرّف همان مکان $f$است، یعنی $f^a(P) = 0 \iff f(P) = 0$. لذا $V(f^a) = V(f)$، و $f \in I(V(f^a))$، لیکن معمولاً $f \not\in (f^a)$. این مشکل قبلاً نیز در $\mathbb{R}^2$ پیدا شده بود: در بخش اول ذکری از «خط 'دوگانه» که توسط $X^2 = 0$ تعریف شده بود، به میان آمد. تنها تعبیری که می‌توان برای این موضوع نمود این است که خط $(X = 0)$ با چندگانگی ۲ در نظر گرفته شده است، لیکن خود مجموعه نقطه‌یی نمی‌رساند که به طور دوگانه درنظر گرفته شده است.

**( ۷.۳ ) مجموعهٔ جبری تحویلناپذیر.** یک مجموعهٔ جبری $X \subset \mathbb{A}^n_k$ تحویلناپذیر است هرگاه هیچ تجزیه‌ای از $X$ به صورت

$$X = X_1 \cup X_2 \qquad X_1, X_2 \subsetneqq X،$$

از اجتماع دو زیر مجموعهٔ جبری سره $X$ وجود نداشته باشد. برای مثال مجموعهٔ $V(xy) \subset \mathbb{A}^2_k$ مکانی است متشکل از دو محور مختصات، یعنی مجموعه‌های جبری $V(x)$ و $V(y)$، و لذا تحویلپذیر است.

**قضیه.** (الف) اگر $X \subset \mathbb{A}^n_k$ یک مجموعهٔ جبری و $I(X)$ ایدآل متناظر آن باشد؛ آنگاه

$$X \text{ تحویلناپذیر است } \iff I(X) \text{ یک ایدال اول است}$$

(ب) هر مجموعهٔ جبری $X$ تجزیهٔ (یکتائی) به صورت

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r \qquad (*)$$

دارد که $X_i$ها تحویلناپذیرند و برای $i \neq j$، $X_i \not\subset X_j$.

$X_i$ها در $(*)$، مؤلفه‌های تحویلناپذیر $X$ خوانده می‌شوند.

**برهان.** (الف). ثابت می‌کنیم که: $X$ تحویلپذیر است $\Longleftrightarrow$ $I(X)$ ایدآل اول نیست.

($\Longleftarrow$) فرض کنید $X = X_1 \cup X_2$ که $X_1, X_2 \subsetneq X$ مجموعه‌های جبری هستند. $X_1 \subsetneq X$ به این معنی است که عنصری مانند $f_1 \in I(X_1)\backslash I(X)$ وجود دارد، و به طور مشابه از $X_2 \subsetneq X$ عنصر $f_2 \in I(X_2)\backslash I(X)$ حاصل می‌شود. امّا حاصلضرب $f_1f_2$ در همه نقاط $X$ صفر می‌شود، و لذا $f_1f_2 \in I(X)$. بنابراین $I(X)$ یک ایدآل اول نیست.

($\Longrightarrow$) فرض کنید $I(X)$ یک ایدآل اول نیست، پس عناصر $f_1$ و $f_2$ وجود دارند به طوری که $f_1, f_2 \not\in I(X)$ ولی $f_1f_2 \in I(X)$. قرار می‌دهیم $I_1 = (I(X), f_1)$ و $X_1 = V(I_1)$؛ پس $X_1 \subsetneq X$ یک زیرمجموعهٔ جبری است؛ همچنین با قراردادن $I_2 = (I(X), f_2)$ و $X_2 = V(I_2)$، داریم $X_2 \subsetneq X$. لیکن $X \subset X_1 \cup X_2$، زیرا برای هر $P \in X$ داریم $f_1f_2(P) = 0$ که ایجاب می‌کند $f_1(P) = 0$ یا $f_2(P) = 0$.

(ب). ابتدا حکم ذیل را اثبات می‌کنیم: زیر مجموعه‌های جبری $\mathbb{A}^n_k$ در شرط مانایی زنجیرهای نزولی صدق می‌کنند، یعنی، هر زنجیر

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$$

سرانجام به $X_N = X_{N+1} = \cdots$ منتهی می‌شود. زیرا زنجیر

$$I(X_1) \subset I(X_2) \subset \ldots \subset I(X_n) \subset \ldots$$

یک زنجیر صعودی از ایدآلهای $A$ است، و این نیز به تساوی $X_N = X_{N+1} = \ldots$ منجر می‌شود. از این رو درست به همان صورت که در (۱.۳) دیدیم خواهیم داشت:

(!) هر مجموعهٔ ناتهی $\Sigma$ از زیر مجموعه‌های جبری $\mathbb{A}^n_k$ یک عضو مینیمال دارد

حال برای اثبات (ب)، فرض کنید $\Sigma$ مجموعهٔ زیر مجموعه‌های جبری $\mathbb{A}^n_k$ باشد که برای آنها تجزیهٔ (*) وجود ندارد. اگر $\Sigma = \varnothing$، (ب) ثابت شده است. از طرف دیگر اگر $\Sigma \neq \varnothing$، بنابر (!) مجموعه $\Sigma$ دارای یک عضو مینیمال $X \in \Sigma$ است؛ که این موضوع بلافاصله ما را به یکی از دو تناقض ذیل می‌رساند: اگر $X$ تحویلناپذیر باشد، آنگاه $X \not\in \Sigma$، که یک تناقض است، اگر $X$ تحویلپذیر باشد، آنگاه $X = X_1 \cup X_2$ به طوری که $X_1, X_2 \subsetneq X$، لذا با توجه‌به مینیمال بودن $X$ در $\Sigma$، نتیجه می‌گیریم $X_1, X_2 \not\in \Sigma$. لذا $X_1$ ، $X_2$ تجزیه‌هایی به صورت (*) به عوامل تحویلناپذیر دارند که با کنار هم گذاشتن این دو تجزیه، تجزیه‌ای برای $X$ به عوامل تحویلناپذیر حاصل می‌شود،

بنابراین $X \not\in \Sigma$. این تناقض نشان می‌دهد که $\Sigma = \varnothing$. به این ترتیب بحث وجود در جزء (ب) ثابت می‌شود. اثبات یکتایی تجزیه، خیلی ساده است؛ $\longrightarrow$ تمرین ۸.۳. □

برهان (ب) برهان شاخص متداول علمای جبر است: برهان از نظر منطقی بسیار روشن است، لیکن می‌توان گفت که محتوا را کاملاً پوشیده نگاه می‌دارد: نکتهٔ واقعی این است که اگر $X$ تحویلناپذیر نباشد، به صورت $X = X_1 \cup X_2$ تجزیه می‌شود، سپس همین موضوع در مورد $X_1$ و $X_2$ و غیره مطرح می‌شود، که بالاخره باید به مجموعه‌های جبری تحویلناپذیر رسید، زیرا در غیر این صورت یک زنجیر نزولی نامتناهی از مجموعه‌های جبری به دست خواهد آمد.

**( ۸.۳ )** حال می‌خواهیم قضیهٔ صفرها را بیان و اثبات کنیم. در همهٔ برهانهایی که برای قضیهٔ صفرها عرضه شده است، یک پیچیدگی ذاتی وجود دارد. ما اثبات این قضیه را به دو جزء تقسیم کنیم. ابتدا حکمی از جبر تعویضپذیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم، که بعداً در (۱۵.۳) ثابت خواهد شد (در واقع اجزای این برهان مایهٔ قوی هندسی خواهند داشت).

**واقعیت دشوار.** فرض کنید $k$ یک هیأت (نامتناهی)، و $A = k[a_1, \dots, a_n]$ یک $k$ـجبری متناهی‌ـمولّد باشد. در این صورت

$$A \text{ یک هیأت است } \Longrightarrow A \text{ روی } k \text{ جبری است}$$

برای آن که یک دید تقریبی از علت درستی مطلب بالا داشته باشید، توجه کنید. که اگر $t \in A$ روی $k$ متعالی باشد، آنگاه $k[t]$ یک حلقه چندجمله‌ییها است، بنابراین شامل بینهایت عنصر اول است (طبق استدلال اقلیدس). لذا توسیع $k \subset k(t)$، به عنوان یک $k$ـجبر، متناهی‌ـمولّد نیست: زیرا تعداد متناهی از عناصر $\frac{p_i}{q_i} \in k(t)$ تنها می‌تواند تعدادی متناهی عنصر اول در مخرجهای این عناصر داشته باشد.

**( ۹.۳ ) تعریف.** اگر $I$ یک ایدآل حلقهٔ $A$ باشد، رادیکال $I$ که به صورت

$$\operatorname{rad} I = \sqrt{I} = \{f \in A \mid f^n \in I \quad \text{برای مقداری از } n\}$$

تعریف می‌شود، یک ایدآل $A$ است، چه اگر $f, g \in \sqrt{I}$، آنگاه برای $m$ و $n$ مناسب، $f^n, g^m \in I$، بنابراین

$$(f+g)^r = \Sigma \binom{r}{a} f^a g^{r-a} \in I \qquad \text{برای } r \geq n+m-1،$$

ایدآل $I$ را رادیکال گویند هرگاه $\sqrt{I} = I$.

توجه کنید که هر ایدآل اول یک ایدآل رادیکال است. بررسی این مطلب نیز آسان است که در یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا مانند $k[X_1,\ldots,X_n]$، برای هر ایدآل اصلی $I = (f)$، که $f = \Pi f_i^{n_i}$ (تجزیهٔ f به عوامل اول متمایز)، داریم $\sqrt{I} = (f_{red})$ که $f_{red} = \Pi f_i$.

**(۱۰.۳) قضیه‌صفرها** (قضیهٔ صفرهای هیلبرت). فرض کنید k یک هیأت جبری-بسته است.

(الف) هر ایدآل ماکسیمال حلقهٔ چندجمله‌یی $A = k[X_1,\ldots,X_n]$، برای نقطه‌ای مانند $P = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{A}_k^n$ به شکل $m_P = (X_1 - a_1,\ldots,X_n - a_n)$ است؛ یعنی همان ایدآل $I(P)$ای همه چندجمله‌ییهائی است که در P صفر می‌شوند.

(ب) اگر J یک ایدآل A باشد و $J \neq (1)$، آنگاه $V(J) \neq \varnothing$.

(ج) برای هر ایدآل J در A،

$$I(V(J)) = \mathrm{rad} J$$

مضمون اصلی قضیه همان (ب) است، که بیان می‌کند اگر ایدآل J تمام حلقهٔ $k[X_1,\ldots,X_n]$ نباشد صفرهایی در $\mathbb{A}_k^n$ خواهد داشت. توجه داشته باشید که اگر k جبری-بسته نباشد، حکم (ب) کاملاً نادرست است، زیرا اگر $f \in k[X]$ یک چندجمله‌یی ناثابت باشد، کل حلقهٔ $k[X]$ را به صورت ایدآل تولید نخواهد کرد، لیکن تساوی $V(f) = \varnothing \subset \mathbb{A}_k^1$ کاملاً امکانپذیر است. اسم این قضیه *Nullstellensatz* (صفر یک چندجمله‌یی = *Nullstelle* + قضیه = *satz*)، باید یادآور مضمون آن باشد (لیکن برای آن که فرد بی‌سوادی به حساب نیایید اسم آلمانی قضیه را به خاطر داشته باشید!).

**نتیجه.** تناظرهای V و I

$$\{\text{زیرمجموعه‌های } X \text{ از } \mathbb{A}_k^n\} \overset{V}{\underset{I}{\rightleftarrows}} \{\text{ایدآلهای } J \text{ در } A\}$$

$$\text{تناظرهای دوسوئی} \qquad \cup \qquad\qquad \cup$$

$$\{\text{زیرمجموعه‌های جبری } \mathbb{A}_k^n\} \longleftrightarrow \{\text{ایدآلهای رادیکال } A\}$$

$$\text{و} \qquad \cup \qquad\qquad \cup$$

$$\{\text{زیرمجموعه‌های جبری تحویلناپذیر } \mathbb{A}_k^n\} \longleftrightarrow \{\text{ایدآلهای اول } A\}$$

را القا می‌کنند. زیرا طبق (۶.۳-(ب)) برای هر مجموعهٔ جبری X، $V(I(X)) = X$، و طبق (ج) قضیهٔ صفرها برای ایدآل رادیکال J، $I(V(J)) = J$.

**برهان قضیّهٔ صفرها (با فرض درستی (۸.۳)).** (الف) فرض می‌کنیم $m \subset k[X_1, \dots, X_n]$ یک ایدآل ماکسیمال باشد؛ قرار می‌دهیم $K = k[X_1, \dots, X_n]/m$، و ترکیب نگاشتهای $k \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K$ را با $\varphi$ نشان می‌دهیم. $K$ یک هیأت است (زیرا $m$ ایدآل ماکسیمال است)، و $K$ به عنوان $k$ـجبر، متناهی‌ـمولّد است (زیرا توسط نگاره‌های $X_i$ها تولید شده است). بنابراین به موجب (۸.۳)، $\varphi : k \to K$ یک توسیع جبری هیأتهاست. لیکن چون $k$ جبری‌ـبسته است، $\varphi$ یک یکریختی خواهد بود.

امّا برای هر $i$، عنصر $X_i \in k[X_1, \dots, X_n]$، به یک عنصر $b_i \in K$ نگاشته می‌شود؛ لذا با فرض $a_i = \varphi^{-1}(b_i)$، عناصر $X_i - a_i \in \operatorname{Ker}\{k[X_1, \dots, X_n] \to K\} = m$ به دست می‌آیند. بنابراین عناصر $a_1, \dots, a_n \in k$ وجود دارند به قسمی که $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subset m$. از طرف دیگر، روشن است ایدآل سمت چپ در رابطهٔ شمول اخیر یک ایدآل ماکسیمال است. لذا $m = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. به این ترتیب (الف) ثابت می‌شود.

(الف)$\Longleftarrow$(ب). اثبات این موضوع آسان است. اگر $J \neq A = k[X_1, \dots, X_n]$، آنگاه ایدآلی ماکسیمال مانند $m$ در $A$ وجود دارد به قسمی که $J \subset m$ (بررسی وجود $m$ با استفاده از شرط مانایی زنجیرهای صعودی ساده است). بنابر (الف) ایدآل $m$ به شکل $m = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ خواهد بود؛ لیکن $J \subset m$ به این معنی است که برای هر $f \in J$، داریم $f(P) = 0$، که $P = (a_1, \dots, a_n)$، بنابراین $P \in V(J)$.

(ب)$\Longleftarrow$(ج). اثبات این قسمت مستلزم ترفند زیرکانه‌ای است. فرض کنید $J \subset k[X_1, \dots, X_n]$ یک ایدآل و $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. متغیر دیگری مانند $Y$ در نظر می‌گیریم. و ایدآل جدید $J_1$ را به صورت

$$J_1 = (J, fY - 1) \subset k[X_1, \dots, X_n, Y]$$

یعنی به عنوان ایدآلی که توسط $J$ و $fY - 1$ تولید شده، تعریف می‌کنیم. به بیانی عاری از دقت، $V(J_1)$ چندگونائی است متشکل از نقاط $P \in V(J)$، به طوری که $f(P) \neq 0$. دقیقتر بگوییم، هر نقطه $Q \in V(J_1) \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$ یک $(n+1)$تایی $Q = (a_1, \dots, a_n, b)$ است به قسمی که برای هر $g \in J$، تساوی $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ برقرار است، یعنی، $P = (a_1, \dots, a_n) \in V(J)$ و

$$f(P).b = 1 \quad \text{یعنی،} \quad f(P) \neq 0, \qquad b = f(P)^{-1},$$

حال فرض کنید برای هر $P \in V(J)$ داشته باشیم $f(P) = 0$؛ پس روشن است، بنابر آنچه در بالا گفتیم، $V(J_1) = \varnothing$. لذا می‌توان از (ب) نتیجه گرفت که $1 \in J_1$، یعنی، عبارتی به صورت ذیل وجود دارد

$$1 = \Sigma g_i f_i + g_0(fY - 1) \in k[X_1, \dots, X_n, Y] \qquad (**)$$

که در آن $f_i \in J$ و $g_0, g_i \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$.

ببینیم که $Y$ چگونه در طرف راست عبارت (**) ظاهر شده است: علاوه بر اینکه به طور صریح در جملهٔ آخر طرف راست ظاهر شده است، می‌تواند در هر یک از $g_i$ها نیز ظاهر شود؛ فرض کنید $Y^N$ بالاترین توان $Y$ باشد که در $g_0$ یا یکی از $g_i$ها ظاهر شده است. اگر طرفین رابطهٔ (**) را در $f^N$ ضرب کنیم، رابطهٔ ذیل به دست می‌آید

$$f^N = \Sigma G_i(X_1, \dots, X_n, fY) f_i + G_0(X_1, \dots, X_n, fY)(fY - 1) \qquad (***)$$

که $G_i$ همان $f^N g_i$ است که به صورت یک چندجمله‌یی از $X_1$، ...، $X_n$ و $(fY)$ نوشته شده است.

در واقع (***) یک تساوی از چندجمله‌ییهاست در $k[X_1, \dots, X_n, Y]$، لذا با بیان آن به پیمانهٔ $(fY - 1)$ خواهیم داشت

$$f^N = \Sigma h_i(X_1, \dots, X_n) f_i \in k[X_i, \dots, X_n, Y]/(fY - 1)$$

که هر دو طرف تساوی بالا عناصر $k[X_1, \dots, X_n]$ هستند، با توجه به اینکه همریختی طبیعی $k[X_1, \dots, X_n] \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n, Y]/(fY - 1)$ یک به یک است (این نگاشت در واقع نگاشت شمول $k[X_1, \dots, X_n]$ در $k[X_1, \dots, X_n][f^{-1}]$ به صورت یک زیر حلقه از هیأت کسرهای $k[X_1, \dots, X_n]$ است)، در نتیجه خواهیم داشت

$$f^N = \Sigma h_i(X_1, \dots, X_n) f_i \in k[X_1, \dots, X_n]$$

یعنی، برای یک $N$ مناسب، $f^N \in J$. □

**تذکر.** بسیاری از کتابهای درسی بحث بالا را با ذکر این نکته که (**) یک اتحّاد است و لذا با قراردادن $Y = f^{-1}$ نیز معتبر است، کوتاه می‌کنند. البته این استدلال کاملاً صحیح است، لیکن ما برای وضوح بیشتر ترجیح دادیم شرح بیشتری بدهیم.

**( ۱۱.۳ ) مثالهای حل شده.** (الف) ابررویه‌ها. ساده‌ترین مثال از چندگوناها ابررویهٔ $V(f) : (f = 0) \subset \mathbb{A}^n_k$ است. اگر $k$ جبری‌ـبسته باشد، بین عناصر تحویلناپذیر $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ و ابررویه‌های تحویلناپذیر تناظر آشکاری وجود دارد: نتیجه‌ای که از قضیهٔ صفرها به دست می‌آید این است که دو چند جمله‌یی $f_1$ و $f_2$ (که مضرب همدیگر نباشند) معرف ابررویه‌های متمایز $V(f_1)$ و $V(f_2)$ هستند. این موضوع بدون استفاده از قضیهٔ صفرها به هیچ وجه آشکار نیست (برای مثال، روی $\mathbb{R}$ نادرست است)؛ با این حال می‌توان این مطلب را بدون استفاده از قضیهٔ صفرها به کمک نظریهٔ حذف، روش صریحتری که چاشنی زیبائی از سدهٔ نوزدهم به همراه دارد، ثابت کرد؛ در این باره، $\longrightarrow$تمرین ۱۳.۳.

(ب) همین که از ابررویه‌ها بگذریم، بر خلاف آنچه که حسّ می‌شود، اغلب چندگوناها با معادله‌های متعدّدی داده می‌شوند؛ این حالت زمانی پیش می‌آید که ایدآل $I(X)$ به مولّدهای زیاد، یعنی خیلی بیشتر از متمّم‌ـبعد $X$ نیاز دارد. مثالی از یک خم $C \subset \mathbb{A}^3_k$ می‌آوریم که در آن $I(C)$ به سه مولّد نیاز دارد؛ البته فرض می‌کنیم که $k$ یک هیأت نامتناهی است.

ابتدا ایدآل $J = (uw - v^2, u^3 - vw)$ را در نظر می‌گیریم. $J$ یک ایدآل اوّل نیست. چون

$$w(uw - v^2) - v(u^3 - vw) = u(w^2 - u^2v) \in J$$

لیکن $u, w^2 - u^2v \notin J$. بنابراین

$$V(J) = V(J, u) \cup V(J, w^2 - u^2v)$$

روشن است که $V(J, u)$ خط $(u = v = 0)$ است. حال می‌گوییم مؤلّفهٔ دیگر یعنی $C = V(J, w^2 - u^2v)$ یک خم تحویلناپذیر است؛ زیرا $C$ توسط

$$uw = v^2, u^3 = vw, w^2 = u^2v$$

داده شده است. ثابت می‌کنیم که $C \subset \mathbb{A}^3$ نگارهٔ نگاشت $\varphi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow C \subset \mathbb{A}^3$ است که توسط $t \longmapsto (t^3, t^4, t^5)$ داده می‌شود: برای اثبات این موضوع اگر فرض کنیم $u \neq 0$، آنگاه $v \neq 0$، $w \neq 0$، قرار می‌دهیم $t = \frac{v}{u}$ پس $t = \frac{w}{v}$ و $\frac{w}{u} = (\frac{v}{u})(\frac{w}{v}) = t^2$. بنابراین $v = \frac{w^2}{u^2} = t^4$، $u = (\frac{v}{(\frac{v}{u})}) = \frac{t^4}{t} = t^3$ و $w = tv = t^5$. امّا خم $C$ تحویلناپذیر است، زیرا اگر $C = X_1 \cup X_2$ با $X_i \subset C$ و $f_i(u, v, w) \in I(X_i)$، آنگاه برای همه مقادیر $t$، یکی از چندجمله‌ییهای $f_i(t^3, t^4, t^5)$ باید صفر شود چون تعداد صفرهای هر چند جمله‌یی ناصفر یک متغیره، متناهی است یکی از چندجمله‌ییهای $f_1$ و $f_2$ باید متحد با صفر باشد. لذا $f_i \in I(C)$.

این مثال، مثالی از یک نوع «تکجمله‌یی» ساده است؛ در حالت کلی تشخیص مؤلّفه‌های تحویلناپذیر یک چندگونا ممکن است خیلی پیچیده باشد و پیچیده‌تر از آن، اثبات تحویلناپذیر بودن مؤلّفه‌هاست. مثالی مشابه در تمرین ۱۱.۳ داده شده است.

( ۱۲.۳ ) **جبرهای متناهی.** حال به ذکر مقدماتی برای اثبات (۸.۳) می‌پردازیم. فرض کنید $A \subset B$ دو حلقه باشند. طبق معمول گوئیم $B$ روی $A$ متناهی‌ـمولّد یا ($A$ـجبر متناهی‌ـمولّد) است، اگر تعدادی متناهی از عناصر $B$ مانند $b_1, \ldots, b_n$ وجود داشته باشند. به طوری که $B = A[b_1, \ldots, b_n]$ ، یعنی $B$، به عنوان یک حلقه توسط $A$ و $b_1, \ldots, b_n$ تولید شود.

در مقابل تعریف بالا، تعریف دیگری را در نظر می‌گیریم: $B$ یک $A$ـجبر متناهی است هر گاه عناصری مانند $b_1, \ldots, b_n$ در $B$ وجود داشته باشند به طوری که $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$، یعنی، $B$ به صورت یک $A$ـمدول متناهی‌ـمولّد باشد. تفاوت اساسی این دو تعریف در تولید به عنوان حلقه (وقتی شما مجازید هر عبارت چندجمله‌یی بر حسب $b_1, \ldots, b_n$ را در نظر بگیرید) و تولید به عنوان مدول است(وقتی که $b_i$ها فقط می‌توانند به شکل خطی ظاهر شوند). برای مثال، $k[X]$ یک $k$ـجبر متناهی‌ـمولّد است (که توسط تنها عنصر $X$ تولید می‌شود)، لیکن یک $k$ـجبر متناهی نیست (زیرا به عنوان یک فضای برداری روی $k$ بعدش نامتناهی است).

**قضیه.** (الف) حلقه‌های $A \subset B \subset C$ را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت

$B$ یک $A$ـجبر متناهی و $C$ یک $B$ـجبر متناهی است $\Longrightarrow$ $C$ یک $A$ـجبر متناهی است

(ب) اگر $A \subset B$ و $B$ یک $A$ـجبر متناهی باشد و $x \in B$، آنگاه $x$ در یک معادلهٔ چندجمله‌یی تکین روی $A$ صدق می‌کند یعنی، رابطه‌ای به صورت

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \qquad a_i \in A$$

وجود دارد (توجه کنید که ضریب جملهٔ پیشرو مساوی ۱ است).

(ج) به عکس، اگر $x$ در یک معادلهٔ چندجمله‌یی تکین روی $A$ صدق کند، آنگاه $B = A[x]$ یک $A$ـجبر متناهی است.

**برهان.** (الف) و (ج) تمرینهای ساده‌ای هستند (با نتایج مشابه در مورد توسیع هیأتها مقایسه کنید). برای اثبات (ب) از یک «ترفند دترمینانی» که چندان هم بدیهی نیست استفاده می‌کنیم (که

این ترفند، زادهٔ فکرِ خود مِن نیست!): فرض کنید $B = \Sigma A b_i$؛ برای هر $i$، $xb_i \in B$، لذا عناصر ثابت $a_{ij} \in A$ وجود دارند به طوری که

$$xb_i = \Sigma_i a_{ij} b_i$$

تساوی اخیر را می‌توان به شکل ذیل نوشت

$$\Sigma_i (x\delta_{ij} - a_{ij}) b_i = \circ$$

که در آن $\delta_{ij}$ ماتریس همانی است. حال فرض کنید $\mathbf{M}$ ماتریسی باشد که

$$\mathbf{M}_{ij} = (x\delta_{ij} - a_{ij})$$

و قرار دهید $\Delta = \det \mathbf{M}$. با استفاده از جبر خطی معمولی، (با فرض این که $\mathbf{b}$ بردار ستونی با درایه‌های $b_i$، ...، $b_n$ و $\mathbf{M}^{adj}$ ماتریس الحاقی $\mathbf{M}$ است)، داریم $\mathbf{Mb} = \circ$ بنابراین

$$\circ = (\mathbf{M}^{adj})\mathbf{Mb} = \Delta \mathbf{b}$$

در نتیجه برای هر $i$، $\Delta b_i = \circ$، لیکن عنصر $۱_B \in B$ یک ترکیب خطی از $b_i$هاست، بنابراین $\Delta = \Delta \times ۱_B = \circ$، لذا به رابطه‌ای که می‌خواستیم رسیده‌ایم: $\det(x\delta_{ij} - a_{ij}) = \circ$. واضح است که این رابطه یک معادلهٔ چندجمله‌یی تکین برحسب $x$ است که ضرایب آن در $A$ هستند. □

**( ۱۳.۳ ) نرمالسازی نوتر**

**قضیه.** (لم‌نرمالسازی نوتر). فرض کنیم $k$ یک هیأت نامتناهی و $A = k[a_۱, \ldots, a_n]$ یک $k$ـجبر متناهی‌ـمولّد باشد. در این صورت یک عدد $m$، $m \le n$، و عناصر $y_۱, \ldots, y_m \in A$ وجود دارند به طوری که

(الف) $y_۱$،...،$y_m$ عنصرهای جبری‌ـمستقل روی $k$ هستند؛

و

(ب) $A$ یک $k[y_۱, \ldots, y_m]$ـجبر متناهی است.

(طبق معمول، (الف) به این معنی است که هیچ رابطهٔ چندجمله‌یی ناصفر بین $y_i$ها وجود ندارد؛ این موضوع را به زبان جبری می‌توان چنین گفت که نگاشت طبیعی (پوشای) $k[Y_۱, \ldots, Y_m] \longrightarrow k[y_۱, \ldots, y_m] \subset A$ یک به یک است).

همان طورکه انتظار دارید، قضیّهٔ بالا بیان این است که توسیع حلقه‌ها را می‌توان به این صورت ساخت که ابتدا تعدادی عنصر جبری‌ـمستقل اضافه کرد و سپس «یک توسیع جبری از توسیع حاصل» را در نظر گرفت؛ با این حال، حکم (ب) از این دقیقتر است، زیرا بیان می‌کند که نه تنها هر عنصر $A$ روی $k[y_1, \dots, y_m]$ جبری است بلکه در یک معادلهٔ چندجمله‌یی تکین روی این حلقه صدق می‌کند.

**برهان.** فرض می‌کنیم $I$ هستهٔ نگاشت پوشای طبیعی باشد، یعنی

$$I = \ker\{k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[a_1, \dots, a_n] = A\}$$

فرض می‌کنیم $0 \neq f \in I$؛ فکر اصلی برهان این است که به جای متغیرهای $X_1, \dots, X_{n-1}$ متغیرهای مناسب $X'_1, \dots, X'_{n-1}$ را چنان قرار می‌دهیم که $f$ به یک معادلهٔ چندجمله‌یی تکین برحسب $a_n$ روی $A' = k[a'_1, \dots, a'_{n-1}]$ تبدیل شود. می‌نویسیم

$$a'_1 = a_1 - \alpha_1 a_n$$
$$\vdots$$
$$a'_{n-1} = a_{n-1} - \alpha_{n-1} a_n$$

(که $\alpha_i$ها عناصری از $k$ هستند که باید بعداً مشخص شوند). در این صورت

$$0 = f(a'_1 + \alpha_1 a_n, \dots, a'_{n-1} + \alpha_{n-1} a_n, a_n)$$

**ادّعا.** برای انتخاب مناسبی از $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in k$، چندجمله‌یی

$$f(X'_1 + \alpha_1 X_n, \dots, X'_{n-1} + \alpha_{n-1} X_n, X_n)$$

بر حسب $X_n$ تکین است.

با استفاده از این ادّعا، قضیه به روش استقراء روی $n$ ثابت می‌شود: اگر $I = 0$، در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد، چون $a_1, \dots, a_n$ جبری‌ـمستقل‌اند. در غیر این صورت، عنصر غیر صفر $f \in I$ را انتخاب و فرض می‌کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ مطابق ادعا تعیین شده باشند؛ در این صورت $f$ یک رابطهٔ تکین با ضرایب در $A' = k[a'_1, \dots, a'_{n-1}] \subset A$ را که $a_n$ در آن

صدق می‌کند، به دست می‌دهد. طبق فرض استقراء، عناصر $y_1, \ldots, y_m \in A'$ وجود دارند به طوری که

(۱) $y_1$، ...، $y_m$ روی $k$ جبری‌ـمستقل‌اند؛

(۲) $A'$ یک $k[y_1, \ldots, y_m]$ـجبر متناهی است.

پس مطابق (۱۲.۳ـ(ج))، $A = A'[a_n]$ روی $A'$ متناهی است، لذا طبق (۱۲.۳ـ(الف))، $A$ روی $k[y_1, \ldots, y_m]$ متناهی است، و قضیه ثابت می‌شود.

حال کافی است ادّعا را به اثبات برسانیم. فرض می‌کنیم $\deg f = d$، و می‌نویسیم

$$f = F_d + G$$

که $F_d$ همگن از درجهٔ $d$ است و $\deg G \leq d - 1$. لذا

$$f(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) = f(X'_1 + \alpha_1 X_n, \ldots, X'_{n-1} + \alpha_{n-1} X_n, X_n)$$

$$= F_d(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1).X_n^d + (\text{چندجمله‌یی که نسبت به } X \text{ از درجهٔ نابیشتر از } d - 1 \text{ است})$$

اگر $F_d(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1) \neq 0$، موضوع ثابت شده است. لیکن $F_d$ یک چندجمله‌یی غیر صفر است، و بررسی مخالف صفر بودن مقدار آن برای «تقریباً همهٔ» مقادیر $\alpha_1$، ...، $\alpha_{n-1}$، مشکل نیست. (برهان این مطلب در تمرین ۱۳.۳ آورده می‌شود). □

**( ۱۴.۳ ) تذکر.** (۱) در واقع، برهان (۱۳.۳) نشان می‌دهد که $y_1$، ...، $y_m$ می‌توانند به شکل $m$ صورت خطی عمومی از $a_1$، ...، $a_n$ انتخاب شوند. برای درک اهمیت (۱۳.۳)، قرار می‌دهیم $I = \ker\{k[X_1, \ldots, X_n] \to k[a_1, \ldots, a_n] = A\}$، و برای سهولت فرض می‌کنیم $I$ یک ایدآل اول است. چندگونای $V = V(I) \subset \mathbb{A}_k^n$ را در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم $\pi : \mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^m$ نگاشت تصویر خطی تعریف شده به وسیلهٔ $y_1$، ...، $y_m$ باشد، و $p = \pi|_V : V \longrightarrow \mathbb{A}_k^m$. می‌توان دید که قسمتهای (الف) و (ب)یِ قضیهٔ (۱۳.۳) ایجاب می‌کنند که برای هر $P \in \mathbb{A}_k^m$، $p^{-1}(P)$ یک مجموعهٔ متناهی ناتهی باشد (←تمرین ۱۶.۳).

(۲) برهان مربوط به (۱۳.۳) یک تعبیر هندسی ساده نیز دارد: انتخاب $n - 1$ صورت خطی از $n$ متغیر $X_1$، ...، $X_n$ متناظر با ساختن یک نگاشت تصویر خطی $\pi : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^{n-1}$ است؛ در این صورت تارهای $\pi$ یک خانوادهٔ $(n - 1)$ـبعدی از خطوط موازی تشکیل می‌دهند. پس از انتخاب $f \in I$، به آسانی می‌توان دید که $f$ موجب پیدایش رابطهٔ تکین نسبت به متغیر نهایی $X_n$ می‌شود اگر و تنها اگر هیچ یک از این خطوط موازی، مجانب چندگونای $(f = 0)$ نباشد؛ با عبارات هندسهٔ

تصویری، این مطلب بدین معنی است که نقطهٔ بینهایت $(\circ : \alpha_1 : \cdots : \alpha_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}_k^{n-1}$ که عمل تصویر موازی را مشخص می‌کند به بستار تصویری $(f = \circ)$ تعلق ندارد.

(۳) برهان بالا برای (۱۳.۳) برای هیأت متناهی پاسخگو نیست (←تمرین ۱۴.۳). ولی، خود قضیه بدون هیچ شرطی روی $k$ درست است (← [مامفرد، مقدمه، ص۴] یا [عطیّه-مکدانلد،(۹.۷)]).

**( ۱۵.۳ ) برهان (۸.۳).** فرض کنید $A = k[a_1, \ldots, a_n]$ یک $k$-جبر متناهی-مولّد باشد. عناصر $y_1, \ldots, y_m \in A$ را مطابق قضیهٔ ۱۳.۳ در نظر می‌گیریم، و قرار می‌دهیم $B = k[y_1, \ldots, y_m]$. در این صورت $A$ یک $B$-جبر متناهی است، و طبق فرض، $A$ یک هیأت است. اگر می‌دانستیم $B$ یک هیأت است، بلافاصله نتیجه می‌شد $m = \circ$، لذا $A$ یک $k$-جبر متناهی، یعنی یک توسیع متناهی هیأت $k$ می‌شد، و (۸.۳) به اثبات می‌رسید. بنابراین کافی است حکم ذیل را اثبات کنیم:

**لم.** اگر $A$ یک هیأت و $B \subset A$ یک زیرحلقهٔ $A$ و $A$ یک $B$-جبر متناهی باشد، آنگاه $B$ یک هیأت است.

**برهان.** برای هر عنصر $b \in B$، $b \neq \circ$، وارون آن $b^{-1} \in A$ در $A$ است. امّا مطابق (۱۲.۳-(ب))، از ویژگی تناهی نتیجه می‌شود که $b^{-1}$ در یک معادلهٔ تکین روی $B$ صدق می‌کند، یعنی، رابطه‌ای به صورت

$$b^{-n} + a_{n-1}b^{-(n-1)} + \cdots + a_1 b^{-1} + a_\circ = \circ, a_i \in B$$

وجود دارد؛ از ضرب طرفین در $b^{n-1}$ خواهیم داشت،

$$b^{-1} = -(a_{n-1} + a_{n-2}b + \cdots + a_\circ b^{n-1}) \in B$$

لذا $B$ یک هیأت است. به این ترتیب (۸.۳) ثابت و برهان قضیه صفرها کامل می‌شود. □

( ۱۶.۳ ) برای آن که ترتیبی بدهیم که همه چیز در مشخصهٔ $p$ نیز قابل دستیابی باشد، لازم است که کمی به دقت خود بیفزاییم از این مطلب تنها در یک مورد بعداً استفاده خواهیم کرد، لذا اگر در مورد تفکیک‌پذیری از نظریهٔ گالوا چیز زیادی به خاطر ندارید، وقت زیادی برای آن صرف نکنید و از آن چشم‌پوشی کنید (دراین صورت از ۱۷.۳ ادامه دهید).

**پیوست.** در شرایط (۱۳.۳)، اگر بعلاوه $k$ جبری-بسته و $A$ یک حوزهٔ صحیح با هیأت کسرهای $K$ باشد، آنگاه $y_1, \ldots, y_m \in A$ به صورت بالا می‌توانند طوری انتخاب شوند که (الف) و (ب) برقرار باشند، و بعلاوه

(ج) $k(y_1, \ldots, y_m) \subset K$ یک توسیع تفکیک‌پذیر باشد.

**برهان.** اگر k از مشخصهٔ صفر باشد. هر توسیع متناهی آن تفکیک‌پذیر است؛ بنابراین فرض می‌کنیم k از مشخصهٔ p باشد. چون A یک حوزهٔ صحیح است، ایدآل I اول است؛ و لذا اگر $I \neq 0$، I شامل یک عنصر تحویلناپذیر مانند f خواهد بود. حال برای هر i، دو حالت وجود دارد: یا f نسبت به $X_i$ تفکیک‌پذیر است، و یا $f \in k[X_1, \ldots, X_i^p, \ldots, X_n]$.

**ادّعا.** اگر f نسبت به همه $X_i$ها تفکیک‌ناپذیر باشد، آنگاه برای یک چندجمله‌یی g، $f = g^p$، که با تحویلناپذیری f مغایرت دارد.

فرض ما این است که f به شکل زیر است:

$$f = F(X_1^p, \ldots, X_n^p), \qquad F \in k[X_1, \ldots, X_n]$$

در این صورت، فرض کنید $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ چندجمله‌یی حاصل از گرفتن p امین ریشهٔ هر ضریب F باشد؛ پس با استفادهٔ مکرّر از اتحاد استاندهٔ $(a+b)^p = a^p + b^p$ در مشخصهٔ p، به آسانی می‌توان دید که $f = g^p$.

از اینجا نتیجه می‌شود که هر چند جمله‌یی تحویلناپذیر f لااقل نسبت به یکی از $X_i$ها تفکیک‌پذیر است. مثلاً فرض کنید f نسبت به $X_n$ تفکیک‌پذیر است. حال با بحثی دقیقاً مشابه بحث بالا،

$$f(X'_1 + \alpha_1 X_n, \ldots, X'_{n-1} + \alpha_{n-1} X_n, X_n)$$

یک رابطهٔ تکین تفکیک‌پذیر برای $a_n$ روی $A' = k[a'_1, \ldots, a'_{n-1}]$ به دست می‌دهد. در این صورت نتیجه با همان بحث استقرایی حاصل می‌شود، با توضیح این نکته که ترکیب توسیعهای تفکیک‌پذیر هیأتها، تفکیک‌پذیر است. □

**( ۱۷.۳ ) تحویل به یک ابررویه.** قضیه ذیل را از نظریهٔ گالوا یادآوری می‌کنیم:

**قضیه‌عنصر اولیّه.** فرض می‌کنیم K یک هیأت نامتناهی و $K \subset L$ یک توسیع متناهی و تفکیک‌پذیر است؛ در این صورت عنصری مانند $x \in L$ وجود دارد به قسمی که $L = K(x)$. بعلاوه، اگر L روی K توسط عناصر $z_1, \ldots, z_k$ تولید شود، عنصر x را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی $\Sigma_i \alpha_i z_i$ انتخاب کرد.

(این موضوع نتیجه بلافصل قضیهٔ اساسی نظریه گالواست: اگر $K \subset M$ بستار نرمال L روی K باشد، توسیع $K \subset M$ یک توسیع متناهی گالوایی‌ست، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی گالوانتها تعدادی

متناهی توسیع هیأت واسط بین $K$ و $M$ وجود دارد. زیر هیأتهای واسط بین $K$ و $L$ تشکیل یک مجموعهٔ متناهی $\{K_j\}$ از $K$ـزیر فضاهای برداری $L$ را می‌دهند، لذا می‌توان عنصری مانند $x \in L$ را که متعلق به هیچ یک از $K_j$ها نباشد انتخاب کرد. اگر $z_1, \ldots, z_k$ که همه با هم، متعلق به هیچ $K_i$ نیستند داده شده باشند، آنگاه $x$ می‌تواند به صورت یک ترکیب $K$ـخطی از $z_i$ها انتخاب شود. در این صورت $K(x) = L$.)

**فرع.** با فرضهای لم نرمالسازی نوتر (۱۳.۳)، عناصری مانند $y_1, \ldots, y_{m+1} \in A$ وجود دارند که $y_1, \ldots, y_m$ در حکم (۱۳.۳) صدق می‌کنند، و بعلاوه، $K$، هیأت کسرهای $A$، توسط $y_1, \ldots, y_{m+1}$ روی $k$ تولید شده است.

**برهان.** به موجب (۱۶.۳)، می‌توان طوری ترتیب داد که $K$ یک توسیع تفکیک‌پذیر $k(y_1, \ldots, y_m)$ باشد. اگر $A = k[x_1, \ldots, x_n]$، آنگاه $x_i$ها قطعاً $K$ را به صورت یک توسیع هیأتی $k(y_1, \ldots, y_m)$، تولید می‌کنند، در نتیجه اگر $y_{m+1}$ یک ترکیب خطی مناسبی از $x_i$ها با ضرایب در $k(y_1, \ldots, y_m)$ باشد، $y_{m+1}$ می‌تواند $K$ را به صورت یک توسیع هیأت $k(y_1, \ldots, y_m)$ تولید کند؛ که از ضرب ضرایب در مخرج مشترک و حذف مخرجها، $y_{m+1}$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از $x_i$ها با ضرایب در $k[y_1, \ldots, y_m]$ انتخاب نمود، که در این صورت $y_{m+1} \in A$. □

از لحاظ جبری، آنچه که ثابت کرده‌ایم این است که توسیع هیأتی $k \subset K$، در حالی که لزوماً متعالی محض نیست، می‌تواند به صورت ترکیبی از توسیع متعالی محض $k \subset k(y_1, \ldots, y_m) = K_0$ و یک توسیع جبری اولیهٔ $K_0 \subset K = K_0(y_{m+1})$ به دنبال آن، تولید شود. به عبارت دیگر، $K = k(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1})$، با تنها یک رابطهٔ وابستگی جبری بین مولّدها. تعبیر هندسی این فرع در (۱۰.۵) روشن خواهد شد.

## تمرینهای بخش سوم.

**۱.۳** حوزهٔ صحیح $A$ یک حوزهٔ ایدآل اصلی گفته می‌شود هرگاه هر ایدآل $I$ در $A$ اصلی، یعنی به صورت $I = (a)$ باشد؛ مستقیماً نشان دهید که ایدآلهای یک حوزهٔ ایدآل اصلی در شرط مانایی زنجیرهای صعودی صدق می‌کنند.

**۲.۳** نشان دهید که حوزهٔ صحیح $A$ یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست اگر و تنها اگر هر زنجیر صعودی از ایدآلهای اصلی آن مختوم باشد و هر عنصر تحویلناپذیر $A$ اول.

**۳.۳** الف) لم‌گاوس را اثبات نمایید: اگر $A$ یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا و $f, g \in A[X]$ چندجمله‌ییهایی

با ضرایب در $A$ باشند، آنگاه هر عنصر اول $A$ که عامل مشترک ضرایب حاصلضرب $fg$ باشد، عامل مشترک ضرایب $f$ یا $g$ است.

ب) در جبر دورهٔ کارشناسی ثابت می‌شود که اگر $K$ یک هیأت باشد، آنگاه $K[X]$ یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست. با استقراء روی $n$ نشان دهید که $k[X_1, \ldots, X_n]$ یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست ؛ برای این کار نیاز خواهید داشت که تجزیه به عوامل در $k[X_1, \ldots, X_n]$ را با تجزیه به عوامل در $k(X_1, \ldots, X_{n-1})[X_n]$ مقایسه کنید، و از لم گاوس برای حذف مخرجها استفاده نمایید.

**۴.۳** جزء (ب)یِ قضیهٔ ۲.۳ را ثابت کنید: هرگاه $A$ یک حوزهٔ صحیح با هیأت کسرهای $K$باشد، و اگر $0 \not\in S \subset A$ یک زیرمجموعهٔ $A$ باشد، $B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B = A[S^{-1}] = \{\frac{a}{b} \in K | a \in A \text{ و } b \text{ مساوی ۱ و یا حاصلضربی از عناصر } S \text{ است}\}$$

ثابت کنید هر ایدآل $B$ با معین بودن اشتراک آن با $A$ به‌طور کامل مشخص می‌شود، و از آنجا نتیجه بگیرید هرگاه $A$ نوتری باشد، $B$ نیز نوتری است.

**۵.۳** فرض کنید $J = (XY, XZ, YZ) \subset k[X, Y, Z]$؛ مجموعهٔ $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ را مشخص کنید؛ آیا این مجموعه تحویلناپذیر است؟ آیا تساوی $J = I(V(J))$ برقرار است؟ نشان دهید $J$ نمی‌تواند توسط دو عنصر تولید شود. حال فرض کنید $J' = (XY, (X-Y)Z)$؛ مجموعهٔ $V(J')$ را معیّن و $\mathrm{rad} J'$ را محاسبه کنید.

**۶.۳** فرض کنید $J = (X^2 + Y^2 - 1, Y - 1)$؛ عنصری مانند $f$ پیدا کنید که $f \in I(V(J)) \backslash J$.

**۷.۳** فرض کنید $J = (X^2 + Y^2 + Z^2, XY + XZ + YZ)$؛ $V(J)$ و $I(V(J))$ را معین کنید.

**۸.۳** نشان دهید مؤلّفه‌های تحویلناپذیر یک مجموعهٔ جبری یکتا هستند (این حکم بدون برهان در (۷.۳ـ(ب)) ذکر شده بود). به این معنی که اگر $V = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{j \in J} W_j$ دو تجزیهٔ $V$ به اجتماع عوامل تحویلناپذیر باشد، با فرض پیراستگی هر دو تجزیه (یعنی برای $i \neq i'$، $V_i \not\subset V_{i'}$)، $V_i$ها جایگشتی از $W_j$ها هستند.

**۹.۳** فرض کنید $f = X^2 - Y^2$ و $g = X^3 + XY^2 - Y^3 - X^2Y - X + Y$؛ مولفّه‌های تحویلناپذیر $V(f, g) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ را به دست آورید.

**۱۰.۳** اگر $J = (uw - v^2, w^3 - u^5)$، نشان دهید $V(J)$ دارای دو مؤلّفه تحویلناپذیر است که یکی از آنها خم $C$ی مورد بحث در (۱۱.۳ـ(ب)) است.

ثابت کنید که خم $C$ را می‌توان با دو معادلهٔ $uw = v^2$ و $u^5 - 2u^2vw + w^3 = 0$ تعریف کرد. نکتهٔ قابل تأمل در اینجا این است که تحدید معادلهٔ دوّم به رویهٔ مخروطی درجهٔ دوّم

($uw = v^2$) این معادله را به مربّع کامل بدل می‌کند[1].

**۱۱.۳** هرگاه $f = v^2 - uw$، $g = u^4 - vw$، $h = w^2 - u^3v$، با نحوهٔ دید (۱۱.۳ـ(ب)) چندگونای $V(f, g, h) \subset \mathbb{A}^3$ را معین کنید. ببینید که $V(f, g)$، $V(f, h)$ و $V(g, h)$ مؤلفه‌های جالب دیگری دارند یا نه.

**۱۲.۳** الف) نشان دهید برای هر هیأت k، یک مجموعهٔ جبری در $\mathbb{A}^1_k$ یک مجموعهٔ متناهی و یا کل $\mathbb{A}^1_k$ است. نتیجه بگیرید که در این حالت توپولوژی زاریسکی همان توپولوژی متمم‌ـمتناهی است.

ب) هیأت دلخواه kرا در نظر بگیرید و فرض کنید $f, g \in k[X, Y]$ عناصر تحویلناپذیری باشند که مضرب همدیگر نیستند. نشان دهید $V(f, g)$ متناهی است (راهنمایی: قرار دهید $K = k(X)$؛ ابتدا نشان دهید f و g در حوزهٔ ایدآل اصلی $K[Y]$ عامل مشترک ندارند. نتیجه بگیرید که عناصری مانند $p, q \in K[Y]$ وجود دارند به طوری که $pf + qg = 1$؛ حال با از بین بردن مخرجهای p و q نشان دهید عنصری مانند $h \in k[X]$ و عناصری مانند $a, b \in k[X, Y]$ وجود دارند به قسمی که $h = af + bg$. لذا نتیجه بگیرید که برای مختص X از نقاط $V(f, g)$ تنها تعدادی متناهی مقدار ممکن وجود دارد.)

ج) ثابت کنید هر مجموعهٔ جبری $V \subset \mathbb{A}^2_k$ اجتماعی متناهی از خمها و نقاط است.

**۱۳.۳** الف) فرض کنید k یک هیأت نامتناهی است و $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ یک چندجمله‌یی ناثابت، یعنی $f \notin k$. ثابت کنید $V(f) \neq \mathbb{A}^n_k$ (راهنمایی: فرض کنید f شامل متغیر $X_n$ است، و نمایش $f = \Sigma a_i(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^i$ را در نظر بگیرید؛ حال از استقراء روی nاستفاده کنید.)

ب) حال فرض کنید k جبری‌ـبسته است و f را مانند قسمت (الف) در نظر بگیرید. هرگاه درجهٔ f نسبت به $X_n$ برابر m و $a_m(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^m$ جملهٔ پیشرو f باشد؛ نشان دهید که $a_m \neq 0$هر چه باشد، برای هر مقدار $(X_1, \ldots, X_{n-1})$، یک مجموعهٔ متناهی ناتهی از نقاط $V(f)$ نظیر می‌شود. بالاخص نتیجه بگیرید که اگر $n \geq 2$، آنگاه $V(f)$ نامتناهی است.

ج) حال نتایج جزء (ب)یِ این تمرین و جزء (ج) تمرین ۱۲.۳ را کنار هم بگذارید و نتیجه بگیرید که اگر هیئت k جبری‌ـبسته باشد، چندجمله‌ییهای تحویلناپذیر متمایز $f \in k[X, Y]$ معرّف ابررویه‌های متمایزی از $\mathbb{A}^2_k$ هستند (با (۱۱.۳ـ(الف)) مقایسه کنید).

د) نتایج جزء (ج) را برای $\mathbb{A}^n_k$ تعمیم دهید.

**۱۴.۳** مثالی بزنید تا نشان دهد برهانی که برای لم‌نرمالسازی نوتر در (۱۳.۳) داده شده است در مورد هیأت متناهی k معتبر نیست. (راهنمایی: یک چندجمله‌یی $f(X, Y)$ پیدا کنید که برای آن

---

[1]. با توجه به معادلهٔ اول، اگر معادلهٔ دوم را در u ضرب کنیم، عبارت حاصل مربع کامل می‌شود. م.

$F_d(\alpha, 1) = \alpha^q - \alpha$، و لذا برای هر $\alpha \in k$، $F_d(\alpha, 1) = 0$.)

**۱۵.۳** فرض کنید $A$ یک حلقه و $A \subset B$ یک $A$ـجبر متناهی باشد. ثابت کنید اگر $m$ یک ایدآل ماکسیمال در $A$ باشد، $mB \neq B$.(راهنمایی: بر خلاف فرض کنید $B = mB$؛ اگر $B = \Sigma Ab_i$، آنگاه برای هر $i$، $b_i = \Sigma a_{ij} b_j$، که $a_{ij} \in m$. حال نشان دهید

$$\Delta = \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$$

و نتیجه بگیرید $1_B \in m$، که یک تناقض است. (همچنین ←[عطیّه ـ مکدانلد، قضیهٔ ۴.۲، فرع ۵.۲]))

**۱۶.۳** فرض کنید $A = k[a_1, \ldots, a_n]$ همان $k$ـجبر نرمالسازی نوتر (۱۳.۳) باشد، قرار دهید $I = \ker\{k[X_1, \ldots, X_n] \to k[a_1, \ldots, a_n] = A\}$، و $V = V(I)$ را در $\mathbb{A}^n_k$ در نظر بگیرید؛ برای سهولت $I$ را ایدآل اوّل بگیرید:

فرض کنید $Y_1، \ldots، Y_m$ صورتهای خطی عمومی از $X_1$، ...، $X_n$ باشند و $\pi : \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^m_k$ نگاشت تصویری خطیی باشد که توسط $Y_1، \ldots، Y_m$ تعریف شده است؛ قرار دهید $p = \pi|_V : V \to \mathbb{A}^m_k$. ثابت کنید جزءهای (الف) و (ب)یِ (۱۳.۳) ایجاب می‌کنند که برای هر $P \in \mathbb{A}^m_k$، مجموعهٔ $p^{-1}(P)$ متناهی باشد، و اگر $k$ جبری‌ـبسته باشد این مجموعه ناتهی است. (راهنمایی: برای هر $i$، ایدآل $I$ شامل یک رابطه تکین برای $X_i$ روی $k[Y_1, \ldots, Y_m]$ است؛ تناهی مجموعه به آسانی از این مطلب نتیجه می‌شود. برای ناتهی بودن، از تمرین ۱۵.۳ استفاده کنید تا نشان دهید برای هر $P = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{A}^m_k$، ایدآل $J_P = I + (Y_1 - b_1, \ldots, Y_m - b_m)$ مخالف $k[X_1, \ldots, X_n]$ است. حال حکم ناتهی بودن در قضیهٔ صفرها را به کار ببرید.)

## بخش چهارم. توابع روی چندگوناها

در این بخش روی یک هیأت ثابت $k$ کار می‌کنیم؛ از (۴.۸ـ(۲)) به بعد، $k$ جبری‌ـبسته فرض خواهد شد. اگر خواننده‌ای در این بخش فرض کند $k = \mathbb{C}$، چیزی از دست نخواهد داد، و حتی از یک پشتیبان روانی هم بهره‌مند خواهد شد. گاهی برای سادگی در علامتگذاری از نوشتن هیأت $k$ صرفنظر می‌کنیم.

**( ۴.۱ ) توابع چندجمله‌یی.** فرض کنید $V \subset \mathbb{A}^n_k$ یک مجموعهٔ جبری، و $I(V)$ ایدآل آن باشد. حلقهٔ خارج قسمت $k[V] = k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ به‌طور طبیعی یک حلقهٔ توابع روی $V$ است. به‌طور مشروحتر، یک تابع چندجمله‌یی روی $V$، بنابر تعریف، نگاشتی است مانند $f : V \to k$ به صورت $P \longmapsto F(P)$ که $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$؛ به این معنی که $f$ تحدید نگاشتی است مانند $F : \mathbb{A}^n \to k$ که توسط یک چندجمله‌یی داده شده است. بنابر تعریف $I(V)$، دو چندجمله‌یی $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ معرّف یک تابع روی $V$ هستند اگر و تنها اگر

$$F(P) - G(P) = 0 \text{ ،} P \in V \text{ برای هر}$$

یعنی اگر و فقط اگر، $F - G \in I(V)$. از این رو حلقهٔ مختصاتی $k[V]$ را به صورت

$$k[V] = \{f : V \longrightarrow k | \text{یک تابع چندجمله‌یی است } f\} \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$$

تعریف می‌کنیم. این حلقه کوچکترین حلقهٔ توابع روی $V$ است که شامل توابع مختصّی $X_i$ است (همراه با $k$)، لذا در این مورد خاص نامگذاری سنتی خیلی بی‌مناسبت نیست.

**( ۴.۲ ) $k[V]$ و زیر مجموعه‌های جبری $V$** . یک مجموعهٔ جبری $X \subset \mathbb{A}^n_k$ مشمول در $V$ است اگر و تنها اگر $I(X) \supset I(V)$. از سوی دیگر، ایدآلهای $k[X_1 \ldots, X_n]$ که شامل $I(V)$ باشند با ایدآلهای $k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ تناظر دوسویی دارند. (اگر این مطلب برای شما روشن نیست، می‌توانید چنین استدلال کنید: هر ایدآل $J$ که $I(V) \subset J \subset k[X_1, \ldots, X_n]$، متناظر است با ایدآل $J/I(V)$؛ بعکس، هر ایدآل $J_0$ در $k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ به نگارهٔ وارون آن در $k[X_1, \ldots, X_n]$ نظیر می‌شود.)

لذا تناظرهای $I$ و $V$

$$\{I \subset k[V] \text{ ایدآلهای}\} \xrightarrow{V} \{X \subset V \text{ زیر مجموعه‌های}\}$$

توسط

$$I \longmapsto V(I) = \{P \in V | f(P) = 0 \text{ ، برای هر } f \in I\}$$

و

$$\{I \subset k[V] \text{ ایدآلهای}\} \xleftarrow{I} \{X \subset V \text{ زیر مجموعه‌های}\}$$

توسط

$$I(X) = \{f \in k[V] | f(P) = 0 \text{ ، برای هر } P \in X\} \longleftarrow\!\!| \quad X$$

مثل بخش سوم تعریف می‌شوند، و ویژگیهای مشابهی دارند. بویژه $V$ دارای توپولوژی زاریسکی است، که در آن مجموعه‌های بسته زیر مجموعه‌های جبری هستند (که البته این توپولوژی همان توپولوژی القایی از توپولوژی زاریسکی $\mathbb{A}^n$ است).

**قضیه.** فرض کنید $V \subset \mathbb{A}^n$ یک مجموعهٔ جبری باشد. شرایط ذیل هم ارزند:

(الف) $V$ تحویلناپذیراست؛

(ب) اشتراک هر دو زیرمجموعهٔ باز ناتهی $U_1, U_2 \subset V$ مجموعه‌ئی است ناتهی، یعنی $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$؛

(ج) هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی $U \subset V$ چگال است.

برهان کاملاً پیش پاافتاده است: تحویلناپذیری $V$ به این معنی است که $V$ اجتماع دو زیرمجموعهٔ بسته سره نیست؛ (ب) دقیقاً بیان همین مطلب برحسب متمّمهاست، زیرا

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing \iff V = (V - U_1) \cup (V - U_2)$$

یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک چگال است اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ باز را قطع کند، لذا (ج) درست بیان دیگری از (ب) است.

**( ۳.۴ ) نگاشتهای چندجمله‌یی.** فرض کنید $V \subset \mathbb{A}^n$ و $W \subset \mathbb{A}^m$ مجموعه‌های جبری باشند؛ مختصات در $\mathbb{A}^n$ را با $X_1, \ldots, X_n$ و مختصات در $\mathbb{A}^m$ را با $Y_1, \ldots, Y_m$ نشان می‌دهیم.

**تعریف.** نگاشت $f : V \to W$ یک نگاشت چندجمله‌یی است هرگاه $m$ چندجمله‌یی $F_1, \ldots, F_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ وجود داشته باشند به طوری که

$$f(P) = (F_1(P), \ldots, F_m(P)) \in \mathbb{A}^n_k \quad \text{، برای هر } P \in V$$

این تعریف، تعمیم واضحی است از مفهوم تابع چندجمله‌یی که در بالا ذکر کردیم.

**ادّعا.** نگاشت $f : V \to W$ یک نگاشت چندجمله‌یی است اگر و تنها اگر برای هر $j$، نگاشت مرکّب $f_j = Y_j \circ f$ متعلق به $k[V]$ باشد:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & W \subset \mathbb{A}^m_k \arrow[d, "Y_j"] \\ & k \end{tikzcd} \qquad \text{(}j\text{ـامین تابع مختصّی)}$$

این موضوع روشن است: اگر $f$ توسط چندجمله‌ییهای $F_۱،\ldots،F_m$ داده شده باشد، آنگاه تابع مرکب مزبور دقیقاً همان تابع $P \longmapsto F_j(P)$ است که یک تابع چندجمله‌یی است. بعکس، اگر برای هر $j$، $f_j \in k[V]$ ، آنگاه برای هر انتخاب $F_j \in k[X_۱, \ldots, X_n]$ به طوری که $f_j = F_j(I(V)$به پیمانه$)$ ، بیانی از $f$ به صورت نگاشت چندجمله‌یی توسط $(F_۱, \ldots, F_m)$ داده می‌شود.

با توجه به این ادعا، نگاشت $f$ را می‌توان به صورت $f = (f_۱, \ldots, f_m)$ نوشت.

ترکیب نگاشتهای چندجمله‌یی به طریق روشنی تعریف می‌شود: اگر $V \subset \mathbb{A}^n$، $W \subset \mathbb{A}^m$ و $U \subset \mathbb{A}^\ell$ مجموعه‌های جبری، و $f : V \to W$، $g : W \to U$ نگاشتهای چندجمله‌یی باشند، آنگاه نگاشت $g \circ f : V \to U$ نیز یک نگاشت چندجمله‌یی است؛ زیرا اگر $f$ توسط $F_۱, \ldots, F_m \in k[X_۱, \ldots, X_n]$ و $g$ توسط $G_۱, \ldots, G_\ell \in k[Y_۱, \ldots, Y_m]$ داده شوند، آنگاه $g \circ f$ بوسیلهٔ $G_۱(F_۱, \ldots, F_m), \ldots, G_\ell(F_۱, \ldots, F_m) \in k[X_۱, \ldots, X_n]$ داده خواهد شد.

**تعریف.** نگاشت چندجمله‌یی $f : V \to W$ بین مجموعه‌های جبری را یک یکریختی گوییم هرگاه یک نگاشت چندجمله‌یی $g : W \to V$ وجود داشته باشد به قسمی که $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$.

مثالهای چندی از نگاشتهای چندجمله‌یی قبلاً داده شده‌اند: برای مثال، پارامتریسازیهای $\mathbb{R}^۱ \to \mathbf{C} \subset \mathbb{R}^۲$ در (۱.۲) که توسط $t \longmapsto (t^۲, t^۳)$ و یا $t \longmapsto (t^۲ - ۱, t^۳ - t)$ داده شده بودند، و نگاشت $k \to \mathbf{C} \subset \mathbb{A}^۳_k$ که در (۱۱.۳ـ(ب)) به شکل $t \longmapsto (t^۳, t^۴, t^۵)$ داده شده بود، همگی نگاشتهائی از این نوع هستند. همچنین، درتوضیح نرمالسازی نوتر، یک مجموعهٔ جبری $V \subset \mathbb{A}^n_k$ داده شده بود، و یک نگاشت تصویر عمومی $p : V \longrightarrow \mathbb{A}^m_k$ که توسط $m$ صورت خطی «نسبتاً عمومی» $Y_۱،\ldots،Y_m$ تعریف می‌شد، در نظر گرفته شده بود؛ که چون $Y_i$ها صورتهای خطی از مختصات $X_i$ در $\mathbb{A}^n_k$ هستند، این نگاشت تصویر، یک نگاشت چندجمله‌یی است.

از سوی دیگر پارامتریسازی دایره که در (۱.۱) توسط توابع گویا داده شده است (در مخرج جملهٔ $(\lambda^2 + 1)$ وجود دارد) و همچنین نگاشتهای وارون پارامتریسازی هر کدام از خمهای تکین (۱.۲) از $C \subset \mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^1$ یعنی $(X, Y) \dashrightarrow t = \frac{Y}{X}$، شرایط نگاشت چندجمله‌یی را (لااقل به شکلی که نوشته شده‌اند) به همین دلیل دارا نیستند.

**(۴.۴) نگاشتهای چندجمله‌یی و $k[V]$** .

**قضیه.** فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{A}_k^n$ و $W \subset \mathbb{A}_k^m$ ، مانند بالا، مجموعه‌هائی جبری باشند.

(۱) هر نگاشت چندجمله‌یی $f : V \to W$ یک همریختی حلقه‌یی

$$f^* : k[W] \to k[V]$$

القاء می‌کند، که به وسیلهٔ ترکیب توابع تعریف می‌شود؛ یعنی، اگر $g \in k[W]$ یک تابع چندجمله‌یی باشد، $f^*(g) = g \circ f$ نیز یک تابع چندجمله‌یی است و نگاشت $g \longmapsto g \circ f$ معرّف همریختی حلقه‌یی $f^*$ است، در واقع $f^* : k[W] \to k[V]$ یک همریختی $k$ـجبری است. (به تغییر جهت $f^*$ توجه داشته باشید.)

(۲) بعکس، هر همریختی $k$ـجبری $\Phi : k[W] \to k[V]$ برای نگاشت چندجمله‌یی یکتا تعریف شدهٔ $f : V \to W$ به شکل $\Phi = f^*$ است.

بنابراین از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که تناظر

$$\{f : V \to W \text{ نگاشتهای چندجمله‌یی}\} \to \{\Phi : k[W] \to k[V] \text{ همریختیهای } k\text{ـجبری}\}$$

که توسط

$$f \longmapsto f^*$$

تعریف می‌شود، دوسوئی است.

(۳) اگر $f : V \to W$ و $g : W \to U$ نگاشتهای چندجمله‌یی باشند، آنگاه دو همریختی حلقه‌یی $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : k[U] \to k[V]$ بر هم منطبق‌اند.

**برهان.** (۱) بنابر آنچه در (۳.۴) گفته شد، $f^*(g) : V \to k$ یک نگاشت چندجمله‌یی است، و لذا $f^*(g) \in k[V]$. روشن است که برای هر $a \in k$، $f^*(a) = a$ (زیرا عناصر $k$ به عنوان توابع ثابت روی $V$ و $W$ درنظر گرفته می‌شوند). بالاخره این حقیقت که $f^*$ یک همریختی حلقه‌یی است نتیجه‌ای صوری است، زیرا $k[W]$ و $k[V]$ حلقه‌هائی از توابع هستند. (ساختار حلقه‌یی به صورت نقطه‌یی تعریف می‌شود، به عنوان مثال، برای $g_1, g_2 \in k[W]$، حاصل جمع $g_1 + g_2$، طبق

تعریف، تابعی است روی $W$ به قسمی که برای هر $P \in W$، $(g_1+g_2)(P) = g_1(P)+g_2(P)$؛ بنابراین

$$f^*(g_1+g_2)(Q) = (g_1+g_2)(f(Q)) = g_1(f(Q)) + g_2(f(Q))$$
$$= f^*g_1(Q) + f^*g_2(Q)$$

هیچ‌کس این مهملات را نخواهد خواند، مگر نه؟)

جزء (۳) نتیجه مستقیم شرکتپذیری ترکیب نگاشتهاست.

جزء (۲) هرچند محتوای چندانی ندارد، برهان درست آن تا حدی مشکل است. برای $i = 1, \ldots, m$، فرض کنید $y_i \in k[W]$ تابع مختصی iـام روی $W$ باشد، در نتیجه

$$k[W] = k[y_1, \ldots, y_m] = k[Y_1, \ldots, Y_m]/I(W)$$

امّا $\Phi : k[W] \to k[V]$ داده شده است، لذا می‌توان $f_i \in k[V]$ را توسط $f_i = \Phi(y_i)$ تعریف کرد.

نگاشت $f : V \to \mathbb{A}^m_k$ را که توسط $f(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P))$ تعریف شده است، در نظر می‌گیریم. این نگاشت یک نگاشت چندجمله‌یی است زیرا $f_i \in k[V]$. بعلاوه می‌گوییم $f$، $V$ را به درون $W$ می‌نگارد، یعنی، $f(V) \subset W$، زیرا، فرض کنید $G \in I(W) \subset k[Y_1, \ldots, Y_m]$؛ پس

$$G(y_1, \ldots, y_m) = 0 \in k[W]$$

که طرف چپ تساوی به این معنی است که عناصر $y_i$ از حلقه را در عبارت چندجمله‌یی $G$ قرار داده‌ایم. بنابراین، $\Phi(G(y_1, \ldots, y_m)) = 0 \in k[V]$ لیکن $\Phi$ یک همریختی kـجبری است، بنابراین

$$k[V] \ni 0 = \Phi(G(y_1, \ldots, y_m)) = G(\Phi(y_1), \ldots, \Phi(y_m)) = G(f_1, \ldots, f_m)$$

$f_i$ها توابعی روی $V$ هستند، و $G(f_1, \ldots, f_m) \in k[V]$ طبق تعریف همان تابع $P \longmapsto G(f_1(P), \ldots, f_m(P))$ است. این موضوع نشان می‌دهد که برای هر $P \in V$، و هر $G$ در $I(W)$، مختصات $f(P)$ یعنی $(f_1(P), \ldots, f_m(P))$ در شرط $G(f_1(P), \ldots, f_m(P)) = 0$ صدق می‌کند. چون $W$ زیرمجموعه‌ای است در $\mathbb{A}^m_k$ که با صفر قراردادن $G \in I(W)$ تعریف شده است، از اینجا نتیجه می‌گیریم که $f(P) \in W$. به این ترتیب ثابت می‌شود که $f$ داده شده در بالا یک نگاشت چندجمله‌یی $f : V \to W$ است. برای بررسی انطباق دو همریختی kـجبری

$\Phi : k[W] \to k[V]$، $f^*$ بر هم، کافی است نشان دهیم اثر آنها روی مولّدها یکی است، یعنی، $f^*(y_i) = \Phi(y_i)$؛ یک بررسی سریع ساختمان f (در آغاز برهان (۲) در بالا) نشان می‌دهد که در واقع این مطلب درست است. یک استدلال کاملاً مشابه نشان می‌دهد که نگاشت f توسط شرط $f^*(y_i) = \Phi(y_i)$ به طور یکتا معین می‌شود. □

**( ۵.۴ ) نتیجه.** نگاشت چندجمله‌یی $f : V \to W$ یکریختی است اگر و تنها اگر $f^* : k[W] \to k[V]$ یکریختی باشد.

**مثال.** روی یک هیأت نامتناهی k، نگاشت چندجمله‌یی

$$\varphi : \mathbb{A}^1_k \to \mathbf{C} : (Y^2 = X^3) \subset \mathbb{A}^2_k$$

که توسط

$$T \longmapsto (T^2, T^3)$$

داده شده، یکریختی نیست، زیرا در این حالت همریختی

$$\Phi^* : k[\mathbf{C}] = k[X, Y]/(Y^2 - X^3) \to k[T]$$

توسط $X \longmapsto T^2$، $Y \longmapsto T^3$ داده شده است. نگارهٔ $\varphi^*$، k_جبری است که توسط $T^2$ و $T^3$ تولید شده است، ولی $k[T^2, T^3] \subsetneq k[T]$. (لطفاً مطمئن شوید که می‌فهمید چرا $T^2$ و $T^3$ حلقهٔ $k[T]$ را تولید نمی‌کنند، چارهٔ دیگری نیست.)

توجه کنید که $\varphi$ دوسویی است، و لذا دارای نگاشت وارون کاملاً خوبی به صورت $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbb{A}^1_k$ است که در حالت $X = Y = 0$ توسط $(X, Y) \longmapsto 0$ داده می‌شود و در غیر این صورت توسّط $Y/X$. پس چرا $\varphi$ یکریختی نیست؟ موضوع از این قرار است که توابع چندجمله‌یی روی $\mathbf{C}$ از توابع چندجمله‌یی روی $\mathbb{A}^1$ کمترند؛ به‌تعبیری شما خود می‌توانید این را ببینید، زیرا $k[\mathbb{A}^1] = k[T]$ یک تابع چندجمله‌یی دارد که مشتق آن در مبدأ ناصفر است. احساس جسورانهٔ من این است که «$\varphi$ بردار مماس در مبدأ را درهم می‌فشارد و به بردار صفر بدل می‌کند».

**( ۶.۴ ) چندگونای آفین.** فرض کنید k یک هیأت است؛ می‌خواهیم چندگوناهای آفین را به صورت یک زیرمجموعهٔ جبری تحویلناپذیر $V \subset \mathbb{A}^n_k$، با تقریب یکریختی تعریف کنیم.

مطابق قضیهٔ (۴.۴) حلقهٔ مختصاتی $k[V]$ یک ناوردای ردهٔ یکریختی V است. این مطلب به ما امکان می‌دهد که چندگونا را به نحوی تعریف کنیم که در آن از فضای محیطی $\mathbb{A}^n_k$ کمتر

استفاده شود؛ دلیل تمایل به این کار نسبتاً پیچیده است، و برای مقاصد عملی اگر از این تعریف صرفنظر کنید چیز زیادی از دست نخواهید داد: در ارجاعهای بعدی یک چندگونای آفین را همواره به همان مفهوم بالا خواهیم آورد. (در این صورت مطلب را از (۷.۴) به بعد ادامه دهید).

**تعریف.** یک چندگونای آفین روی هیأت $k$، یک مجموعهٔ $V$ است همراه با حلقهٔ $k[V]$ از توابعی مانند $f : V \to k$ که مقادیر آنها در $k$ است، به قسمی که

(الف) $k[V]$ یک $k$ـجبر متناهی‌ـمولّد است،

و

(ب) برای یک انتخاب $x_1, \ldots, x_n$ از مولّدهای $k[V]$ روی $k$، نگاشت

$$V \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$$

توسّط

$$P \longmapsto (x_1(P), \ldots, x_n(P))$$

$V$ را به صورت یک مجموعهٔ جبری تحویلناپذیر در $\mathbb{A}^n_k$ می‌نشاند.

**( ۷.۴ ) هیأت تابعی.** فرض می‌کنیم $V$ یک چندگونای آفین است؛ $k[V]$ حلقهٔ مختصاتی $V$، حوزهٔ صحیحی است که عناصر آن توابعی هستند $k$ـیی مقدار روی $V$.

**تعریف.** هیأت تابعی $V$ که آن را با $k(V)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از هیأت کسرهای $k[V]$. هر عنصر $f \in k(V)$ یک تابع گویا روی $V$ خوانده می‌شود؛ توجه کنید که $f \in k(V)$ از طبق تعریف به‌صورت خارج قسمت $f = \frac{g}{h}$ است که $h \in k[V]$، $g$ و $h \neq 0$.

پیشاپیش می‌دانیم، که به علّت وجود صفرهای $h$، $f$ یک تابع روی $V$ نیست، ولی، برای هر $P \in V$ به‌طوری که $h(P) \neq 0$، $f$ خوشتعریف است، لذا لااقلّ $f$ یک «تابع جزئاً تعریف شده» است. حال اصطلاحاتی را که مؤید این مفهوم است وارد می‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنید $f \in k(V)$ و $P \in V$؛ $f$ را در $P$ منظم گوییم، یا می‌گوییم $P$ در حوزهٔ تعریف $f$ است، هرگاه نمایشی از $f$ به صورت $f = \frac{g}{h}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $g, h \in k[V]$ و $h(P) \neq 0$.

نکتهٔ مهمی که باید به خاطر سپرد این است که معمولاً $k[V]$ یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا نیست، لذا $f \in k[V]$ به راحتی می‌تواند نمایشهای اساساً متفاوتی به‌صورت $f = \frac{g}{h}$ داشته باشد؛ به‌عنوان مثال، ←تمرین (۹.۴).

قرار دادِ

$$\mathrm{dom}\ f = \{P \in V | \text{است منظم } P \text{ در } f\}$$

را برای حوزهٔ تعریف f انتخاب می‌کنیم، و همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathcal{O}_{V,P} = \{f \in k(V) | \text{است منظم } P \text{ در } f\} = k[V][\{h^{-1} | h(P) \neq 0\}]$$

در این صورت $\mathcal{O}_{V,P} \subset k(V)$ زیرحلقه‌ای است که آن را حلقهٔ موضعی V در P گوئیم.

**( ۸.۴ ) قضیه.** (۱) مجموعهٔ $\mathrm{dom}\ f$ در توپولوژی زاریسکی زیرمجموعه‌ئی است باز و چگال. فرض کنید هیأت k جبری‌ـبسته است؛ در این‌صورت

(۲) $\mathrm{dom}\ f = V \iff f \in k[V]$؛

(یعنی، تابع چندجمله‌یی=تابع گویای منظم ). به‌علاوه، برای هر $h \in k[V]$، قرار می‌دهیم

$$V_h = V \setminus V(h) = \{P \in V | h(P) \neq 0\}$$

در این‌صورت

(۳) $\mathrm{dom}\ f \supset V_h \iff f \in k[V][h^{-1}]$.

**برهان.** برای $f \in k(V)$، ایدآل مخرجهای f را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم.

$$D_f = \{h \in k[V] | hf \in k[V]\}$$

$$= \{h \in k[V] | g \in k[V] \text{ که دارد وجود } f = \tfrac{g}{h} \text{ صورت به } f \text{ از نمایشی}\} \cup \{0\}$$

با توجه به سطر اول، روشن است که $D_f$ یک ایدآل $k[V]$ است. پس آشکارا

$$V \setminus \mathrm{dom}\ f = \{P \in V | h(P) = 0 \text{، } h \in D_f \text{ هر برای}\} = V(D_f)$$

لذا $V \setminus \mathrm{dom}\ f$ یک مجموعهٔ جبری V است؛ بنابراین $\mathrm{dom}\ f = V \setminus V(D_f)$ متمم یک مجموعهٔ بسته است، لذا در توپولوژی زاریسکی باز است. روشن است که $\mathrm{dom}\ f$ ناتهی است، و لذا طبق قضیهٔ(۲.۴) چگال است.

حال با استفاده از جزء (ب)ی قضیهٔ صفرها،

$$\mathrm{dom}\ f = V \iff V(D_f) = \varnothing \iff (f \in k[V] \text{، یعنی، } 1 \in D_f)$$

بالاخره،

$$h \text{ روی } V(D_f) \text{ صفر می‌شود} \iff \operatorname{dom} f \supset V_h$$

و با استفاده از جزء (ج) قضیه صفرها، حکم طرف راست هم‌ارز است با این که $h^n \in D_f$ برای یک n، یعنی، $f = \frac{g}{h^n} \in k[V][h^{-1}]$. $\square$

**( ۹.۴ ) نگاشتهای گویا.** فرض کنید V یک چندگونای آفین باشد.

**تعریف.** یک نگاشت گویای $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^n_k$ نگاشتی است که توسط توابع گویایی مانند $f_1, \ldots, f_n$ جزئاً تعریف شده است، یعنی،

$$\text{برای هر } P \in \cap \operatorname{dom} f_i \text{ ،} \quad f(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P))$$

طبق تعریف، $\operatorname{dom} f = \cap \operatorname{dom} f_i$؛ و مانند قبل، f را در $P \in V$ منظم گوئیم هرگاه $P \in \operatorname{dom} f$.
طبق تعریف، نگاشت‌گویای $V \dashrightarrow W$ بین دو چندگونای آفین $V \subset \mathbb{A}^n$ و $W \subset \mathbb{A}^m$، نگاشتی است گویا مانند $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ به قسمی که $f(\operatorname{dom} f) \subset W$.

دو مثال از نگاشتهای گویا را در انتهای (۳.۴) شرح داده‌ایم.

**( ۱۰.۴ ) ترکیب نگاشتهای گویا.** ترکیب $g \circ f$ از نگاشتهای گویای $f : V \dashrightarrow W$ و $g : W \dashrightarrow U$، ممکن است قابل تعریف نباشد. این مشکل از آنجا ناشی می‌شود که یک نگاشت‌گویا در واقع یک نگاشت نیست: با یک تعبیر طبیعی و روشن، این ترکیب نگاشتی است که روی مجموعهٔ $\operatorname{dom} f \cap f^{-1}(\operatorname{dom} g)$ تعریف می‌شود؛ لیکن، این مجموعه اتفاقاً ممکن است تهی باشد(← تمرین ۱۰.۴).

اگر به زبان جبری بیان کنیم، این مسأله چنین می‌شود: فرض کنید f توسط $f_1, \ldots, f_m \in k(V)$ داده شده است، لذا

$$f : V \dashrightarrow W \subset \mathbb{A}^m$$

توسط

$$P \longmapsto (f_1(P), \ldots, f_m(P))$$

برای هر $P \in \cap \operatorname{dom} f_i$ مشخص شده است؛ هر $g \in k[W]$ به‌صورت (به پیمانهٔ $g = G(I(W)$ برای یک $G \in k[Y_1, \ldots, Y_m]$ است، و $g \circ f = G(f_1, \ldots, f_m)$ در $k[V]$ خوشتعریف است.

بنابراین دقیقاً مشابه (۴.۴) یک همریختی k_جبری

$$f^* : k[W] \longrightarrow k(V)$$

به f نظیر می‌شود. لیکن، اگر $h \in k[W]$ متعلق به هستهٔ $f^*$ باشد، هیچ معنایی نمی‌توان برای $f^*(\frac{g}{h})$ قائل شد، در نتیجه $f^*$ را نمی‌توان به یک همریختی هیأتی $k(W) \to k(V)$ توسیع داد.

**تعریف.** نگاشت گویای $f : V - \to W$ را غالب گوییم[1] اگر $f(\text{dom } f)$ برای توپولوژی زاریسکی در W چگال باشد. به زبان هندسی، مطلب بالا به این معنی است که $f^{-1}(\text{dom } g) \subset \text{dom } f$ برای هر نگاشت گویای $g : W - \to U$، یک مجموعهٔ باز چگال است، در نتیجه $g \circ f$ روی یک زیرمجموعهٔ باز چگال V معیّن، و لذا یک نگاشت جزئاً تعریف شده $V - \to U$ است.

از دیدگاه جبری،

$$f^* : k[W] \to k(V) \text{ یک‌به‌یک است } \Longleftrightarrow f \text{ غالب است}$$

برای هر $g \in k[W]$،

$$g \in \ker\ f^* \Longleftrightarrow f(\text{dom } f) \subset V(g)$$

یعنی، $f^*$ یک‌به‌یک نیست اگر و تنها اگر $f(\text{dom } f)$ مشمول یک زیرمجموعهٔ جبری اکید از W باشد.

روشن است که وقتی f یک نگاشت گویای غالب باشد، ترکیب نگاشتهای گویای f و g تعریف شده است: $g \circ f$ نگاشت گویایی است که مؤلّفه‌های آن $f^*(g_i)$ است. باید توجه داشت که حوزهٔ تعریف $g \circ f$ قطعاً شامل $f^{-1}(\text{dom } g) \cap \text{dom } f$ خواهد بود، لیکن می‌تواند عملاً بزرگتر نیز باشد (← تمرین ۶.۴).

**( ۱۱.۴ ) قضیه.** (۱) هر نگاشت گویای غالب $f : V - \to W$ معرّف یک همریختی هیأتی $f^* : k(W) \to k(V)$ است.

(۲) بعکس، هر k_همریختی $\Phi : k(W) \to k(V)$ از یک نگاشتِ‌گویای غالب یکتایِ $f : V - \to W$ به دست می‌آید.

(۳) اگر f و g نگاشتهای گویای غالب باشند، آنگاه $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

برهان این قضیه تنها با تغییرات مختصری در برهان (۴.۴)، به دست می‌آید.

**( ۱۲.۴ ) ریختبری روی یک زیرمجموعهٔ باز یک چندگونای آفین.** فرض کنیم V و

1. dominant

W چندگوناهای آفین، و $U \subset V$ یک زیرمجموعهٔ باز باشد.

**تعریف.** یک ریختبری $f : U \to W$ نگاشت گویایی است مانند $f : V -\to W$ به قسمی که $U \subset \operatorname{dom} f$، و لذا f در هر نقطهٔ $P \in U$ منظم است.

اگر $U_1 \subset V$ و $U_2 \subset W$ مجموعه‌های باز باشند، آنگاه یک ریختبری $f : U_1 \to U_2$ یک ریختبری مانند $f : U_1 \to W$ است به قسمی که $f(U_1) \subset U_2$. هر ریختبری که ریختبری وارون دوطرفه داشته باشد یکریختی نامیده می‌شود.

بایدتوجه‌داشت که وقتی V و W چندگوناهای آفین هستند، طبق جزء(۲)ی قضیهٔ(۸.۴)،

$$\{f : V \to W \text{ریختبریهای}\} = \{f : V \to W \text{نگاشتهای چندجمله‌یی}\}$$

طرف چپ تساوی بالا متشکل از نگاشتهای گویائی است که شرط منظم‌بودن را دارند، در حالی که طرف راست مستقیماً عبارتهائی برحسب چندجمله‌ییها هستند.

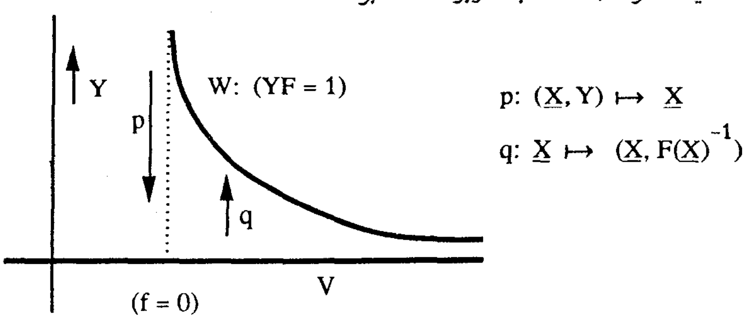
**مثال.** پارامتریسازی خم درجهٔ سوّم تیزه‌یی $\mathbb{A}^1 \to C : (Y^2 = X^3)$ که در (۱.۲) بیان گردیده، القاکنندهٔ یکریختی $\mathbb{A}^1\setminus\{0\} \cong C\setminus\{(0,0)\}$ است؛ برای توضیح بیشتر ←تمرین ۵.۴.

**( ۱۳.۴ ) زیرمجموعه‌های بازِ استانده.** فرض کنید V یک چندگونای آفین است. برای هر $f \in k[V]$ قرار می‌دهیم $V_f = V\setminus V(f) = \{P \in V | f(P) \neq 0\}$. پس $V_f$ مجموعهٔ بازی است که آن را یک مجموعهٔ باز استاندهٔ V گوئیم.

**قضیه.** $V_f$ با یک چندگونای آفین یکریخت است، و

$$k[V_f] = k[V][f^{-1}]$$

**برهان.** روش اثبات، بررسی نمودار تابع $f^{-1}$ است؛ ترفندی مشابه برای اثبات (ب) $\Longleftarrow$ (ج) در برهان قضیهٔ صفرها (۱۰.۳) به کاربرده شده بود.



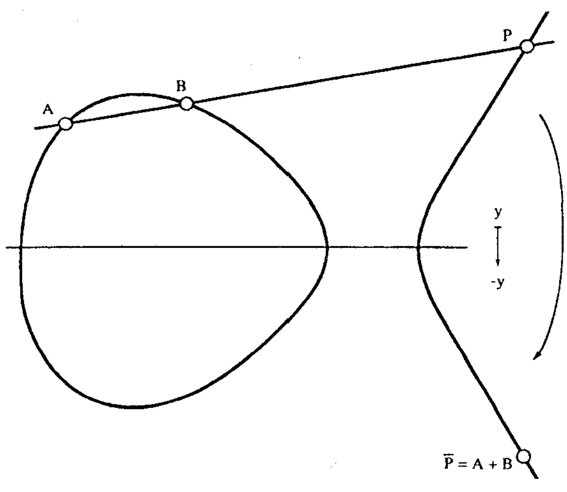
فرض کنید $J = I(V) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$، چندجمله‌یی $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f = F(\mod J)$. حال ایدآل $I \subset k[X_1, \ldots, X_n, Y]$ را به صورت $I = (J, YF - 1)$ تعریف و فرض می‌کنیم

$$V(I) = W \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

به اسانی می‌توان تحقیق کرد که نگاشتهائی که در نمودار بالا نشان داده شده‌اند، ریختبریهائی بین $W$ و $V_f$ بوده و وارون یکدیگر هستند. حکم قضیه در مورد حلقهٔ مختصاتی در جزء (۳) از (۸.۴) آمده‌است. □

اهمیت مجموعه‌های بازِاستاندهٔ $V_f$ از این جهت است که این مجموعه‌ها یک پایه برای توپولوژی زاریسکی روی $V$ تشکیل می‌دهند: هر مجموعهٔ باز $U \subset V$ اجتماعی از $V_f$هاست (زیرا هر زیرمجموعهٔ بسته، به صورت $V(I) = \cap_{f\in I} V(f)$ است که در آن $I$ یک ایدآل است). بنابراین نکتهٔ اصلی قضیه‌ای که در بالا اثبات شد این است که هر مجموعهٔ باز $U \subset V$ اجتماع مجموعه‌های باز $V_f$ است که $V_f$ها چندگوناهای آفین هستند.

( ۱.۰ ) **مثال حل شده.** در بخش دوم قانون جمع $(A, B) \mapsto A + B$ روی یک خم مسطح ناتکین (تصویری) درجهٔ سوم $C \subset \mathbb{P}^2$ را مورد بحث قرار دادیم. فرض کنید $C : (y^2 = x^3 + ax + b)$ یک خم ناتکین آفین درجهٔ سوّم باشد:




در اینجا نشان می‌دهیم که قانون جمع معرّف یک نگاشت گویای $\varphi : C_0 \times C_0 - \to C_0$ است و $\varphi$ در جاهایی که انتظار داریم یک ریختبری است. هر چند این موضوع را بررسی نخواهیم کرد،

این بحث برهان دیگری برای شرکتپذیری قانون گروهی «با استفاده از پیوستگی» به دست می‌دهد. که برای هر هیأت معتبر است (← توضیحات (۲.۱۰)).

بررسی این مطلب مشکل نیست (با تمرین ۷.۲ مقایسه کنید) که اگر $A = (x, y)$، $B = (x', y')$، و $x \neq x'$، آنگاه با فرض $u = (y - y')/(x - x')$، سومّین نقطهٔ تلاقی $AB$ با $C$ نقطهٔ $P = (x'', y'')$ است، که

$$x'' = f(x, y, x', y') = u^{2} - (x + x')$$
$$y'' = g(x, y, x', y') = u^{3} + xu + y'$$

چون $x''$و $y''$ توابعی گویا از مختصات $(x, y)$ و $(x', y')$ هستند، نتیجه می‌گیریم که $\varphi : C_0 \times C_0 - \to C_0$ یک نگاشت گویاست. با عنایت به فرمول داده شده، هرجاکه $x \neq x'$، $\varphi$ یک ریختبری است، زیرا مخرج $u$غیر صفر است. امّا اگر $x = x'$ و $y = -y'$، آنگاه $x''$ و $y''$ باید بینهایت شوند که این مطلب متناظر با این واقعیت است که خط $AB$ خم تصویری $C$ را در نقطهٔ بینهایت $O = (0 : 1 : 0)$ قطع می‌کند. ولی، اگر $x = x'$ و $y = y' \neq 0$، آنگاه نقطهٔ $P = (x'', y'')$ باید خوشتعریف باشد. حال می‌گوییم $f$ و $g$ توابعی هستند که در چنین نقاطی روی $C_0 \times C_0$ منظم‌اند: برای روشن کردن موضوع، توجه می‌کنیم که

$$y'^{2} = x'^{3} + ax' + b \text{ و } y^{2} = x^{3} + ax + b$$

و لذا

$$y^{2} - y'^{2} = x^{3} - x'^{3} + a(x - x')$$

بنابراین، تساوی

$$u = (y - y')/(x - x') = (x^{2} + xx' + x'^{2} + a)/(y + y')$$

برای این توابع گویا روی $C_0 \times C_0$، برقرار است. با ملاحظهٔ مخرج طرف راست تساوی، نتیجه می‌گیریم که $u$ (در نتیجه $f$ و $g$) وقتی $y \neq -y'$، منظم است.

نتیجهٔ محاسبات فوق، این قضیه است: قانون جمع $\varphi : C_0 \times C_0 - \to C_0$ در هر نقطهٔ $(A, B) \in C_0 \times C_0$ به شرطی که $A + B \neq 0$، یک ریختبری است.

## تمرینهای بخش چهارم.

۱.۴ احکام بخش چهارم تا (۸.۴ـ(۱)) و خود این حکم، برای هر هیأت دلخواه $k$ معتبر است؛ بالاخص تعبیر این نتایج را در مورد هیأتهای متناهی پیدا کنید. مثال نقضی برای (۸.۴ـ(۲))، وقتی $k$ جبری‌ـبسته نباشد، پیدا کنید.

۲.۴ نگاشت چندجمله‌یی $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ توسط $X \longmapsto (X, X^2, X^3)$ داده شده است؛ ثابت کنید که نگارهٔ $\varphi$ یک زیرمجموعهٔ جبری $C \subset \mathbb{A}^3$ است و $\varphi : \mathbb{A}^1 \to C$ یک یکریختی است. این مطلب را تعمیم دهید.

۳.۴ نگاشت چندجمله‌یی $\varphi_n : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$ توسّط $X \longmapsto (X^2, X^n)$ داده شده است؛ نشان دهید اگر $n$ زوج باشد، نگارهٔ $\varphi_n$ با $\mathbb{A}^1$ یکریخت است، و $\varphi_n$ خارج از $\{0\}$ یک نگاشت دو به یک است. نشان دهید که اگر $n$ فرد باشد $\varphi_n$ دوسوئی است، در این حالت وارون گویای $\varphi_n$ را مشخص کنید.

۴.۴ نشان دهید که یک ریختبری $\varphi : X \to Y$ بین دو چند گونای آفین، یک یکریختی از $X$ در یک زیرچندگونای $\varphi(X) \subset Y$ است اگر و تنها اگر نگاشت القائی $\Phi : k[Y] \to k[X]$ پوشا باشد.

۵.۴ فرض کنید $C : (Y^2 = X^3) \subset \mathbb{A}^2$؛ در این‌صورت

الف) پارامتریسازی $f : \mathbb{A}^1 \to C$ که توسط $(T^2, T^3)$ داده شده است، یک نگاشت چندجمله‌یی است؛

ب) $f$ یک وارون گویای $g : C - \to \mathbb{A}^1$ دارد که توسط $(X, Y) \longmapsto Y/X$ تعریف می‌شود؛

ج) $\mathrm{dom}\, g = C \backslash \{(0, 0)\}$؛

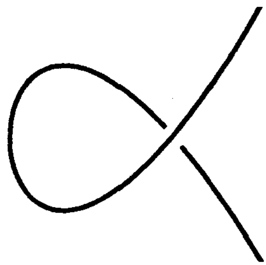
د) $f$ و $g$ یکریختیهای وارون همدیگر برای برقراری $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\} \cong C \backslash \{(0, 0)\}$ هستند.

۶.۴ (۱) نشان دهید که حوزهٔ تعریف $g \circ f$ می‌تواند اکیداً بزرگتر از $\mathrm{dom}\, f \cap f^{-1}(\mathrm{dom}\, g)$ باشد. (راهنمایی: وقتی $f$ و $g$ نگاشتهای گویای وارون همدیگرند، این حالت براحتی می‌تواند پیش آید، $f$ و $g$ی تعریف شده در تمرین (۵.۴) را در این مورد بیازمایید.)

(۲) اکثر درسها در حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره متضمن مثالهایی مانند تابع $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ هستند. توضیح دهید که چگونه تحدید $f$ به هر خم هموار مآربر $(0, 0)$ تابعی از نوع $C^\infty$ است، ولی به عنوان یک تابع دومتغیره، حتی پیوسته هم نیست.

۷.۴ فرض کنید $C : (Y^2 = X^3 + X^2) \subset \mathbb{A}^2$؛ نشان دهید پارامتریسازی آشنای $\varphi : \mathbb{A}^1 \to C$

که توسط $(T^{۲}-۱, T^{۳}-T)$ داده می‌شود، یک نگاشت چندجمله‌یی است، لیکن یک یکریختی نیست (چرا؟). یکریختی بودن یا نبودن نگاشت تحدید $\varphi' : \mathbb{A}^{۱}\setminus\{۱\} \to \mathbf{C}$ را بررسی کنید:



۸.۴ فرض کنید $\mathbf{C} : (Y^{۳} = X^{۴} + X^{۳}) \subset \mathbb{A}^{۲}$؛ نشان دهید نگاشت $(X, Y) \mapsto X/Y$ معرّف یک نگاشت گویای $\psi : \mathbf{C} - \to \mathbb{A}^{۱}$ است، و وارون آن یک نگاشت چندجمله‌یی $\varphi : \mathbb{A}^{۱} \longrightarrow \mathbf{C}$ است که $\mathbf{C}$ را به صورت پارامتری در می‌آورد. ثابت کنید $\varphi$ به یکریختی ذیل تحدید می‌شود

$$\mathbb{A}^{۱}\setminus\{\text{سه نقطه}\} \cong \mathbf{C}\setminus\{(۰, ۰)\}$$

۹.۴ گیریم $V : (XT = YZ) \subset \mathbb{A}^{۴}$؛ بگویید چرا $k[V]$ یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا نیست. (پیدا کردن این چرا ساده است، ولی ارائه یک برهان دقیق مشکلتر است). مجموعهٔ $\mathrm{dom}\, f$ را برای $f = X/Y \in k(V)$، پیدا کنید، و نشان دهید که از مکان $(Y = ۰) \subset V$ اکیداً بزرگتر است.

۱۰.۴ فرض کنید $f : \mathbb{A}^{۱} \to \mathbb{A}^{۲}$ توسط $X \mapsto (X, ۰)$ داده شده باشد و نگاشت گویای $g : \mathbb{A}^{۲} - \to \mathbb{A}^{۱}$ توسط $(X, Y) \mapsto X/Y$؛ نشان دهید ترکیب $g \circ f$ در هیچ‌جا تعریف شده نیست. بزرگترین زیرمجموعهٔ هیأت تابعی $k(\mathbb{A}^{۱})$ را که روی آن $g^*$ قابل تعریف است، معین کنید.

۱۱.۴ مفهوم حاصلضرب دو مجموعهٔ جبری را تعریف و بررسی کنید. دقیقتر بگوییم،

(۱) اگر $V \subset \mathbb{A}^n_k$ و $W \subset \mathbb{A}^m_k$ دو مجموعهٔ جبری باشند، ثابت کنید $V \times W \subset \mathbb{A}^{n+m}_k$ نیز یک مجموعهٔ جبری است؛

(۲) با عرضهٔ مثالهائی نشان دهید توپولوژی زاریسکی روی $V \times W$، با توپولوژی حاصلضرب توپولوژیهای $V$ و $W$ یکی نیست؛

(۳) ثابت کنید، $V$ و $W$ تحویلناپذیر $\Longleftarrow V \times W$ تحویلناپذیر است.

(۴) نشان دهید اگر $V \cong V'$ و $W \cong W'$، آنگاه $V \times W \cong V' \times W'$.

۱۲.۴ الف) ثابت کنید هر $f \in k(\mathbb{A}^{۲})$ که در مبدأ $(۰, ۰)$ منظم نباشد روی کلیهٔ نقاط یک خم مارّبر $(۰, ۰)$ نیز منظم نیست.

ب) نتیجه بگیرید $\mathbb{A}^{2}\setminus(0,0)$ یک چندگونای آفین نیست.
(راهنماییها: برای (الف)، از این واقعیت که $k(\mathbb{A}^{2}) = k(X,Y)$ هیأت کسرهای حوزهٔ تجزیهٔ یکتای $k[X,Y]$ است و از نتیجهٔ تمرین ۱۳.۳ـ(ب) استفاده کنید. برای قسمت (ب)، فرض کنید $\mathbb{A}^{2}\setminus(0,0)$ یک چندگونای آفین است، و حلقهٔ مختصاتی آن را مشخص کنید؛ سپس با به کارگیری نتیجهٔ ۵.۴ به یک تناقض برسید.)

# ۳

# کاربردها

## بخش پنجم. هندسهٔ تصویری و دوسوگویا

هدف قسمت اول بخش پنجم تعمیم مطالب بخشهای سوم و چهارم به چندگوناهای تصویری است؛ این‌کار، جز تنها در چند مورد اساسی، تقریباً به‌طور مکانیکی صورت می‌گیرد. بقیهٔ این بخش به هندسهٔ دوسوگویا اختصاص دارد، که با مطالعهٔ هیأت تابعی $k(V)$ از انتهای بخش چهار شروع می‌شود، این موضوعی است که به‌خوبی در هر دو مورد تصویری و آفین مصداق پیدا می‌کند.

**( ۵.۰ ) چرا چندگوناهای تصویری؟** خم درجهٔ سوّم

$$\mathbf{C} : (Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3) \subset \mathbb{P}^2$$

اجتماع دوخم آفین

$$\mathbf{C}_0 : (y^2 = x^3 + ax + b) \subset \mathbb{A}^2 \qquad (\text{قطعهٔ } (Z = 1) \text{ از } \mathbf{C})$$

و

$$\mathbf{C}_1 : (z_1 = x_1^3 + ax_1z_1^2 + bz_1^3) \subset \mathbb{A}^2 \qquad (\text{قطعهٔ } (Y = 1) \text{ از } \mathbf{C})$$

است که توسط یکریختی

$$\mathbf{C}_0 \setminus (y = 0) \longrightarrow \mathbf{C}_1 \setminus (z_1 = 0)$$

به‌صورت

$$(x, y) \mapsto (x/y, 1/y)$$

به‌هم چسبانیده شده‌اند.

مثال خیلی ساده‌تر، $\mathbb{P}^1$ با مختصات همگن $(X,Y)$ اجتماع دو نسخه از $\mathbb{A}^1$ است که در آنها مختصات بترتیب $x_0$، $y_1$ گرفته می‌شوند، و این دو نسخه توسط یکریختی

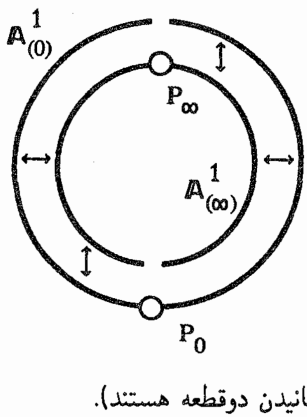
$$\mathbb{A}^1 \setminus (x_0 = 0) \longrightarrow \mathbb{A}^1 \setminus (y_1 = 0)$$

به‌صورت

$$x_0 \mapsto 1/x_0$$

به‌هم چسبانیده شده‌اند.

شکل معمولی آن چنین است




(پیکانهای$\leftrightarrow$ معرف نحوهٔ چسبانیدن دوقطعه هستند).

مطلب شایان توجه درک این نکته است که چندگوناهای تصویری از هر چندگونای آفین اکیداً بزرگترند. زیرا، بامفهوم طبیعی ریختبری (که در این بخش تعریف می‌شود)، می‌توان دید که برای هر عدد دلخواه $n$، هیچ ریختبری ناثابت $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{A}^n$ یا $C \longrightarrow \mathbb{A}^n$ وجود ندارد ($\leftarrow$ تمرینهای ۱.۵ و ۱۲.۵ و توضیح (۸.۱۰)).

یک راه حل برای این مسأله، تعریف مفهوم «چندگونای مجرد» $V$ به شکل اجتماع $V = \cup V_i$ از چندگوناهای آفین است، که با تقریب چسبانیدن مناسبی در نظر گرفته می‌شود. در قیاس با

تعریف خمینه‌ها در توپولوژی، این راه‌حل، راه‌حل جالبی است، لیکن به مشکلات تکنیکی بیشتری برخورد می‌کند. با استفادهٔ جنبی از چندگوناهای تصویری و کار در فضای محیطی حاضر آمادهٔ $\mathbb{P}^n$، این مشکلات مرتفع می‌شود، در نتیجه (جز اندکی پیچیدگی در کار با مختصات همگن)، مطالعهٔ چندگوناهای تصویری خیلی مشکلتر از مطالعهٔ چندگوناهای آفین نخواهد شد. زیرا، هرچند این موضوع در سطح مقدّماتی ممکن است روشن نباشد، چندگوناهای تصویری، تا حد زیادی، یک چارچوب طبیعی برای مطالعهٔ چندگوناها به‌دست می‌دهند (این مطلب به‌طور خلاصه از دیدگاهی پیشرفته‌تر در (۱۱.۸) بحث شده است.)

### ( ۱.۵ ) حلقه‌های مدرّج و ایده‌آلهای همگن

**تعریف.** چندجمله‌یی $f \in k[X_0, \cdots, X_n]$ را همگن از درجهٔ $d$ گوئیم هرگاه

$$f = \Sigma a_{i_0 \cdots i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$$

به‌طوری‌که $a_{i_0 \cdots i_n} \neq 0$ فقط وقتی ممکن است که $i_0 + \cdots + i_n = d$. هر چند جمله‌یی دلخواه $f \in k[x_0, \cdots, x_m]$ دارای یک نمایش یکتای $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_N$ است که برای هر $d = 0, 1, \cdots, N$، $f_d$ یک چند جمله‌یی همگن از درجهٔ $d$ است.

**قضیه.** اگر $f$ چندجمله‌یی همگن از درجهٔ $d$ باشد، آنگاه برای هر $\lambda \in k$

$$f(\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_0, \cdots, X_n)$$

و اگر $k$ یک هیأت نامتناهی باشد، عکس حکم بالا نیز برقرار است.

**برهان.** امتحان کنید و ببینید.

**تعریف.** ایده‌آل $I \subset k[X_0, \cdots, X_n]$ را همگن گوئیم هرگاه برای هر $f \in I$، تجزیه همگن آن $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_N$ برای هر $i$، در $f_i \in I$ صدق کند.

تعریف فوق هم‌ارز با این است که بگوئیم $I$ توسط (تعدادی متناهی) از چند جمله‌ییهای همگن تولید می‌شود.

**( ۲.۵ ) تناظرهای $I - V$ در حالت همگنی.** فرض کنید $\mathbb{P}_k^n$ فضای $n$ـبعدی تصویری روی هیأت $k$ و $X_0$، $\cdots$، $X_n$ مختصّات همگن باشند. در این صورت $f \in k[X_0, \cdots, X_n]$ یک تابع روی $\mathbb{P}_k^n$ نیست: زیرا طبق تعریف $\mathbb{P}_k^n = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$، که $\sim$ معرف رابطه هم‌ارزی

$$(X_0, \cdots, X_n) \sim (\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n), \qquad \lambda \in k \setminus \{0\}$$

است؛ $f$ تنها یک تابع روی $k^{n+1}$ است. لیکن، برای $P \in \mathbb{P}^n$ و برای هرچند جمله‌یی $f$، شرط $f(P) = 0$ خوشتعریف است به شرطی که $f$ همگن باشد: فرض کنید $P = (X_0 : \cdots : X_n)$، در این صورت $X = (X_0, \cdots, X_n)$ نمایندهٔ ردهٔ هم‌ارزی $P$ در $k^{n+1}\backslash\{0\}$ است. ولی چون $f(\lambda X) = \lambda^d f(X)$، اگر $f(X_0, \cdots, X_N) = 0$، آنگاه تساوی $f(\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n) = 0$ نیز برقرار است، در نتیجه شرط $f(P) = 0$ مستقل از انتخاب نماینده است. با در نظرداشتن این توضیح، مشابه قبل، تناظرهای

$$\{\text{زیر مجموعه‌های } X \subset \mathbb{P}^n_k\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \{\text{ایده‌آلهای همگن } J \subset k[X_0, \cdots, X_n]\}$$

را به‌وسیلهٔ

$$V(J) = \{P \in \mathbb{P}^n_k | f(P) = 0 \text{، برای هر چند جمله‌یی همگن } f \in J\}$$

و

$$I(X) = \{f \in k[X_0, \ldots, X_n] | f(P) = 0 \text{، برای هر } P \in X\}$$

تعریف می‌کنیم. به‌عنوان یک تمرین، بررسی کنید که دلیل همگن‌بودن ایده‌آل $I(X)$ را می‌فهمید.

تناظرهای $V$ و $I$ همان ویژگیهای صوری مذکور در حالت آفین در بخش سوم را دارند (برای مثال $V(J_1 + J_2) = V(J_1) \cap V(J_2)$). هر زیر مجموعه به شکل $V(I)$ یک زیر مجموعهٔ جبری از $\mathbb{P}^n_k$ نامیده می‌شود، ومشابه حالت آفین، $\mathbb{P}^n_k$ از توپولوژی زاریسکی برخوردار است که مجموعه‌های بستهٔ آن زیر مجموعه‌های جبری هستند.

**( ۳.۵ ) قضیهٔ صفرها در حالت تصویری.** مثل حالت آفین، با استدلالی کاملاً روشن، برای هر ایده‌آل $J$، $I(V(J)) \supset \mathrm{rad}(J)$ و برای هر مجموعهٔ جبری، $V(I(X)) = X$. تنها یک نکته است که باید مورد توجه قرار گیرد: ایده‌آل بدیهی $(1) = k[X_0, \cdots, X_n]$ (یعنی کلّ حلقه) معرّف مجموعهٔ تهی در $k^{n+1}$، و بنابراین در $\mathbb{P}^n_k$ است، که ویژگی مورد انتظار است؛ لیکن، ایده‌آل $(X_0, \ldots, X_n)$ که معرف $\{0\}$ در $k^{n+1}$ است، با مجموعهٔ تهی در $\mathbb{P}^n_k$ متناظر است. ایده‌آل $(X_0, \ldots, X_n)$ در احکام متعددی از این نظریه، یک استثنای نابهنجار (مجموعهٔ تهی از جنبهٔ نظری) است و به‌طور سنتی به «ایده‌آل نامربوط» معروف است.

لذا صورت همگن قضیه صفرها به شکل ذیل درمی‌آید:

قضیه. فرض کنید k یک هیأت جبری‌بسته است. دراین‌صورت

$$V(J) = \varnothing \Longleftrightarrow \text{rad } J \supset (X_\circ, \ldots, X_n) \quad (۱)$$

(۲) اگر $V(J) \neq \varnothing$، آنگاه $I(V(J)) = \text{rad } J$

فرع. تناظرهای I و V روی مجموعه‌های ذیل نگاشتهای دوسوئی وارون یکدیگرند

$$\left\{\begin{array}{c} \text{ایدآلهای رادیکال همگن } J \subset k[X_\circ, \cdots, X_n] \\ \text{به‌قسمی که } J \neq k[X_\circ, \cdots, X_n] \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\text{زیرمجموعه‌های جبری } X \subset \mathbb{P}^n\right\}$$

$$\bigcup \qquad\qquad\qquad\qquad \bigcup$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{ایدآلهای اول همگن } J \subset k[X_\circ, \cdots, X_n] \\ \text{به‌قسمی که } J \neq k[X_\circ, \cdots, X_n] \\ \text{و } J \neq (X_\circ, \cdots, X_n) \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{زیر مجموعه‌های جبری} \\ \text{تحویلناپذیر } X \subset \mathbb{P}^n \end{array}\right\}$$

برهان. فرض می‌کنیم $\pi : \mathbb{A}^{n+۱}\backslash\{\circ\} \to \mathbb{P}^n$، نگاشت معرّف $\mathbb{P}^n$ باشد. برای هر ایده‌آل همگن $J \subset k[X_\circ, \cdots, X_n]$، فرض می‌کنیم $V^a(J) \subset \mathbb{A}^{n+۱}$ (با علامتگذاری موقت) مجموعهٔ جبری آفین تعریف شده توسط J باشد. چون J یک ایده‌آل همگن است، $V^a(J)$ دارای ویژگی زیر است

$$(\alpha_\circ, \cdots, \alpha_n) \in V^a(J) \Longleftrightarrow (\lambda\alpha_\circ, \cdots, \lambda\alpha_n) \in V^a(J)$$

و $V(J) = V^a(J)\backslash\{\circ\}/\sim \subset \mathbb{P}^n$. بنابراین

$$V(J) = \varnothing \Longleftrightarrow V^a(J) \subset \{\circ\} \Longleftrightarrow \text{rad } J \supset (X_\circ, \cdots, X_n)$$

که استلزام آخر با استفاده از قضیهٔ صفرها در حالت آفین به‌دست آمده است. همچنین، اگر $V(J) \neq \varnothing$، آنگاه

$$f \in I(V(J)) \Longleftrightarrow f \in I(V^a(J)) \Longleftrightarrow f \in \text{rad } J$$

□

زیر مجموعهٔ جبری آفین $V^a(J)$ که در بالا معرفی شد، مخروط آفین روی زیر مجموعهٔ جبری تصویری $V(J)$ نامیده می‌شود.

**( ۴.۵ ) توابع گویا روی $V$** . فرض کنید $V \subset \mathbb{P}^n_k$ یک مجموعهٔ جبری تحویلناپذیر، و $I(V) \subset k[X_\circ, \cdots, X_n]$ ایده‌آل وابسته به آن باشد؛ هیچ روش مستقیمی برای تعریف توابع منظم روی $V$ برحسب چندجمله‌ییها وجود ندارد: هر عنصر $F \in k[X_\circ, \cdots, X_n]$ معرّف تابعی است بر مخروط آفین روی $V$، لیکن (طبق حالت $d = \circ$ در قضیهٔ ۱.۵) این تابع تنها وقتی روی رده‌های هم‌ارزی ثابت خواهد بود که $F$ همگن از درجهٔ صفر، یعنی، یک مقدار ثابت باشد. لذا از همان آغاز، فقط روی توابع گویا کار می‌کنیم:

**تعریف.** یک تابع گویا روی $V$ یک تابع (جزئاً تعریف‌شده) $f : V - \to k$ است که توسط $f(P) = g(P)/h(P)$ داده شده است، و $g, h \in k[X_\circ, \cdots, X_n]$ چند جمله‌ییهای همگن از درجهٔ $d$ هستند.

باید توجّه کرد که با شرط $h(P) \neq \circ$، خارج‌قسمت $g(P)/h(P)$ خوشتعریف است، زیرا برای هر $\circ \neq \lambda \in k$ ، $\mathbf{X} = (X_\circ, \cdots, X_n)$، داریم

$$g(\lambda\mathbf{X})/h(\lambda\mathbf{X}) = \lambda^d g(\mathbf{X})/\lambda^d h(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X})/h(\mathbf{X})$$

امّا روشن است که نسبتهای $g/h$ و $g'/h'$ معرّف تابع گویای واحدی روی $V$ هستند اگر و تنها اگر $h'g - g'h \in I(V)$ بنابراین مجموعهٔ همهٔ توابع گویا هیأت ذیل را تشکیل می‌دهد:

$$k(V) = \{g/h | h \notin I(V) \text{ و } g, h \in k[X_\circ, \cdots, X_n] \text{ چند جمله‌ییهای همگن و همدرجه‌اند}\}/\sim$$

که $\sim$ معرّف رابطه هم‌ارزی زیر است

$$g/h \sim g'/h' \iff h'g - g'h \in I(V)$$

$k(V)$ هیأت تابعی (گویای) $V$ خوانده می‌شود.

حال به تعاریفی می‌پردازیم که دقیقاً مشابه تعاریف در حالت آفین هستند. برای $f \in k(V)$ و $P \in V$، گوئیم $f$ در $P$ منظم است هرگاه نمایشی به‌صورت $f = g/h$ وجود داشته باشد که $g$ و $h$ چند جمله‌ییهای همگن و همدرجه‌اند و $h(P) \neq \circ$. قرار می‌دهیم

$$\operatorname{dom} f = \{P \in V | \text{منظم است } P \text{ در } f\}$$

و

$$\mathcal{O}_{V,P} = \{f \in k(V) | \text{منظم است } P \text{ در } f\}$$

روشن است، $\operatorname{dom} f \subset V$ یک مجموعهٔ باز چگال با توپولوژی زاریسکی در $V$ است. (اثبات مشابه (۴.۸ـ(۱)) است)، و $\mathcal{O}_{V,P} \subset k(V)$ یک زیر حلقه است.

**(۵.۵) پوشش آفین یک چندگونای تصویری.** فرض می‌کنیم $V \subset \mathbb{P}^n$ یک مجموعه جبری تحویلناپذیر باشد، و برای سادگی فرض می‌کنیم برای هر i، $V \not\subset (X_i = 0)$ . می‌دانیم $\mathbb{P}^n$ توسط $(n+1)$ قطعهٔ آفین $\mathbb{A}^n_{(i)}$ پوشانیده می‌شود، که مختصات آفین (ناهمگن) $\mathbb{A}^n_{(i)}$ به‌صورت $X^{(i)}_n$ ،$X^{(i)}_0$، $\cdots$، $X^{(i)}_{i-1}$، $X^{(i)}_{i+1}$، $\cdots$، است، و

$$X^{(i)}_j = X_j/X_i, \quad j \neq i \text{ برای}$$

قرار می‌دهیم $V_{(i)} = V \cap \mathbb{A}^n_{(i)}$. در این صورت روشن است که $V_{(i)} \subset \mathbb{A}^n_{(i)}$ یک مجموعهٔ جبری آفین است، زیرا

$$V_{(0)} \ni P = (1 : x^{(0)}_1 : \cdots : x^{(0)}_n)$$
$$\iff f(1, x^{(0)}_1, \cdots, x^{(0)}_n) = 0 \text{ ،} f \in I(V) \text{ برای هر چند جمله‌یی همگن}$$

که مجموعه‌ای از روابط چند جمله‌یی است برحسب مختصّات نقطهٔ P یعنی $(x^{(0)}_1, \cdots, x^{(0)}_n)$. برای سهولت، در استدلال $i = 0$ فرض شده است، و هروقت ضروری باشد چنین فرضی خواهد شد. خواننده باید به یاد داشته باشد که این قضیه برای هریک از قطعه‌های آفین $V_{(i)}$ صادق است. مجموعه‌های $V_{(i)}$ قطعه‌های آفین استاندهٔ V خوانده می‌شوند.

**قضیه.** (۱) تناظر $V \longmapsto V_{(0)} = V \cap \mathbb{A}^n_{(0)}$ معرّف یک نگاشت دوسویی است به شکل

$$\{V \subset \mathbb{P}^n \text{زیر مجموعه‌های جبری تحویلناپذیر} | V \not\subset (X_0 = 0)\} \leftrightarrow$$
$$\{V_{(0)} \subset \mathbb{A}^n_{(0)} \text{زیر مجموعه‌های جبری تحویلناپذیر}\}$$

که تناظر وارون آن از راه گرفتن بستار در توپولوژی زاریسکی به‌دست می‌آید.

(۲) برای $V \subset \mathbb{P}^n$، ایده‌آل همگن آن را که در همین بخش تعریف شده است با $I^h(V) \subset k[X_0, \cdots, X_n]$، و ایده‌آل معمولی ناهمگن وابسته به $V_{(0)} \subset \mathbb{A}^n_{(0)}$ را (مطابق بخش ۳)، با $I^a(V_{(0)}) \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ نمایش می‌دهیم؛ در این‌صورت بین $I^h(V)$ و $I^a(V_{(0)})$ رابطه‌های ذیل برقرارند

$$I^a(V_{(0)}) = \{f(1, X_1, \cdots, X_n) | f \in I^h(V)\}$$

و

$$I^h(V)_d = \{X_0^d f(X_1/X_0, \cdots, X_n/X_0) | f \in I^a(V_{(0)}), \deg f \leq d\}$$

که اندیس d در $I^h(V)_d$ معرّف قطعهٔ درجهٔ dی ایدآل است.

(۳) $k(V) \cong k(V_{(\circ)})$، و برای هر $f \in k(V)$، حوزهٔ تعریف f به‌عنوان تابعی روی $V_{(\circ)}$، برابر است با $V_{(\circ)} \cap \operatorname{dom} f$.

**برهان.** (۱) و (۲) ساده هستند. (۳). اگر $g, h \in k[X_\circ, \cdots, X_n]$ چندجمله‌ییهای همگن از درجه d باشند، و $h \not\in I(V)$، آنگاه تحدید $g/h \in k(V)$ به $V_{(\circ)}$ عبارت است از تابع

$$g(1, X_1/X_\circ, \cdots, X_n/X_\circ)/h(1, X_1/X_\circ, \cdots, X_n/X_\circ)$$

که معرّف نگاشت $k(V) \longrightarrow k(V_{(\circ)})$ است، و روشن است که وارون آن چه باید باشد. □

**(۶.۵) نگاشتهای گویا و ریختبریها** . نگاشتهای گویا بین چندگوناهای تصویری (یا آفین) بااستفاده از $k(V)$تعریف می‌شوند: اگر $V \subset \mathbb{P}^n$ یک مجموعهٔ جبری تحویلناپذیر باشد، یک نگاشت گویای $V - \longrightarrow \mathbb{A}^m$ نگاشتی (جزئاً تعریف‌شده) است به‌صورت $P \longmapsto (f_1(P), \cdots, f_m(P))$، که $f_1, \cdots, f_m \in k(V)$. یک نگاشت گویای $V - \longrightarrow \mathbb{P}^m$ به شکل

$$P \longmapsto (f_\circ(P) : f_1(P) : \cdots : f_m(P))$$

تعریف می‌شود که $f_\circ, f_1, \cdots, f_m \in k(V)$. باید توجه داشت که اگر $g \in k(V)$ یک عنصر ناصفر باشد، آنگاه $gf_\circ, gf_1, \cdots, gf_m$ معرّف همان نگاشت گویاست. بنابراین، (به‌شرط آنکه V در فضای تصویری کوچکتر $(X_\circ = \circ)$ نگاشته نشود)، در همه‌جا می‌توان $f_\circ$ را برابر ۱ فرض کرد.

روشن است که در این‌صورت، یک نگاشت دوسوئی بین دو مجموعهٔ

$$\{\text{نگاشتهای گویای } f : V - \longrightarrow \mathbb{A}^m \subset \mathbb{P}^m\}$$

و

$$\{\text{نگاشتهای گویای } f : V - \longrightarrow \mathbb{P}^m \mid f(V) \not\subset (X_\circ = \circ)\}$$

وجود دارد، زیرا هر نگاشت از این دو نوع، توسط m عنصر $f_i \in k(V)$ داده می‌شود.

**تعریف.** نگاشت گویای $f : V - \longrightarrow \mathbb{P}^m$ در $P \in V$ منظم است هرگاه نمایشی مانند $f = (f_\circ, f_1, \cdots, f_m)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که

(۱) هریک از توابع $f_\circ, \cdots, f_m$ در P منظم باشند؛

و

(۲) لااقل یکی از $f_i(P)$ها مخالف صفر باشد.

دلیل لزوم شرط دوم در اینجا این است که بتوان نسبتهای $f_j$ به $f_i$ را در $P$تعریف کرد. اگر $f$ در نقطهٔ $P$ منظم باشد (مثل قبل، این مطلب به‌صورت $P \in \operatorname{dom} f$ بیان می‌شود)، آنگاه $f : U \longrightarrow \mathbb{A}^m_{(i)} \subset \mathbb{P}^m$ برای یک همسایگی باز مناسب $P$ مانند $U \subset V$، یک ریختبری است: کافی است $U = \cap_j \operatorname{dom}(f_j/f_i)$ فرض شود که $f_i(P) \neq ۰$؛ در این‌صورت $f$ ریختبریی است که توسط $\{f_j/f_i\}_{j=۰,\cdots,i-۱,i+۱,\cdots,m}$ تعریف می‌شود.

اگر $U \subset V$ یک زیرمجموعهٔ باز چندگونای تصویری $V$ باشد، آنگاه یک ریختبری $f : U \longrightarrow W$ نگاشتی است گویا مانند $f : V - \longrightarrow W$ به‌طوری‌که $\operatorname{dom} f \supset U$. بنابراین یک ریختبری نگاشت گویائی است که در همهٔ نقاط $U$ منظم باشد.

( ۷.۵ ) **مثالها. (۱) خم نرمال گویا.** این مثال، مثال خیلی ساده‌ای است از یک نشانیدن یکریخت $f : \mathbb{P}^۱ \xrightarrow{\cong} C \subset \mathbb{P}^n$ که تعمیم مقطع مخروطی پارامتری‌شدهٔ (۷.۱) است، و در سرتاسر هندسهٔ تصویری و هندسهٔ جبری به‌کرّات مطرح می‌شود. طبق تعریف

$$f : \mathbb{P}^۱ \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

توسّط

$$(U : V) \longmapsto (U^m : U^{m-۱}V : \cdots : V^m)$$

تعریف می‌شود (که در طرف دوّم همهٔ تکجمله‌ییهای درجهٔ $m$ برحسب $U$ و $V$ نوشته شده‌اند). با استدلال گام‌به‌گام نتایج ذیل را می‌توان گرفت:

(۱) $f$ یک نگاشت گویاست، زیرا به‌صورت $(۱ , \cdots, (U/V)^{m-۱}, (U/V)^m)$ داده شده است؛

(۲) $f$ یک ریختبری روی $\mathbb{P}^۱$ است، زیرا هرگاه $V \neq ۰$، $f$ توسط فرمول قبل داده می‌شود و اگر $V = ۰$، آنگاه $U \neq ۰$، و در استدلال $V/U$ جایگزین $U/V$ می‌شود.

(۳) نگارهٔ $f$ مجموعهٔ نقاط $(X_۰ : \cdots : X_m) \in \mathbb{P}^m$ است به‌قسمی‌که

$$(X_۰ : X_۱) = (X_۱ : X_۲) = \cdots = (X_{m-۱} : X_m)$$

یعنی

$$X_۰X_۲ = X_۱^۲, X_۰X_۳ = X_۱X_۲, X_۰X_۴ = X_۱X_۳, \cdots$$

کلّ این معادلات را می‌توان به شکل دترمینانی فوق‌العاده راحت زیر

$$\text{رتبهٔ}\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2\cdots X_{m-1} \\ X_1 & X_2 & X_3\cdots X_m \end{bmatrix} \leq 1$$

نوشت (شرط فوق برای رتبه دقیقاً بدین معنی است که همهٔ کهادهای $2 \times 2$ صفرند). این معادلات، معادلات همگنِ معرّفِ یک مجموعهٔ جبری $C \subset \mathbb{P}^m$ هستند؛

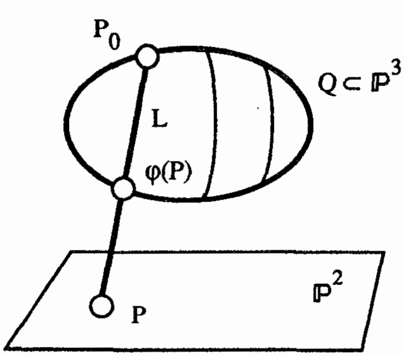
(۴) پیدا کردن ریختبری وارون $g : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ دشوار نیست: کافی است برای هرنقطه $C$، نسبت مشترک $(X_0 : X_1) = \cdots = (X_{m-1} : X_m) \in \mathbb{P}^1$ را اختیار کنیم. به‌عنوان تمرین مطالبی را که باید پیش خود بررسی نمائید معین، و همهٔ آنها را بررسی کنید.

**(۲) نگاشت تصویر خطی، پارامتریسازی یک رویهٔ درجهٔ دوّم.** نگاشت $\pi : \mathbb{P}^3 - \longrightarrow \mathbb{P}^2$ که توسّط $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) \longmapsto (X_1 : X_2 : X_3)$ تعریف می‌شود یک نگاشت گویاست، که خارج از نقطه $P_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ یک ریختبری است. فرض کنید $Q \subset \mathbb{P}^3$ یک رویهٔ درجهٔ دوم است با $P_0 \in Q$. پس به هر نقطهٔ $P$ از $\mathbb{P}^2$ یک خط $L$ در $\mathbb{P}^3$ نظیر می‌شود که از $P \in \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ می‌گذرد، و $L$ درحالت عمومی رویهٔ $Q$ را در $P_0$ و نقطهٔ دوم $\varphi(P)$ قطع می‌کند: به‌عنوان مثال، اگر $Q : (X_0X_3 = X_1X_2)$، آنگاه وارون نگاشت $\pi|_Q : Q - \longrightarrow \mathbb{P}^2$ عبارت است‌از

$$\varphi : \mathbb{P}^2 - \longrightarrow Q\,, \qquad (X_1 : X_2 : X_3) \longmapsto (X_1X_2/X_3 : X_1 : X_2 : X_3)$$

این دراصل همان مفهوم پارامتریسازی دایره در (۱.۱) است.

پیداکردن $\operatorname{dom}\pi$ و $\operatorname{dom}\varphi$ و دادن یک تعبیر هندسی از تکینگیهای $\pi$ و $\varphi$، تمرینی است که جایزه دارد ($\longleftarrow$ تمرین ۲.۵).



**( ۸.۵ ) نگاشتهای دوسوگویا.**

**تعریف.** فرض کنید $V$ و $W$ دو چندگونای آفین یا تصویری باشند؛ نگاشت گویای $f : V - \longrightarrow W$ را یک نگاشت دوسوگویا (یا یک هم‌ارزی دوسوگویا) می‌نامند هرگاه دارای وارون گویا باشد، یعنی، نگاشت گویایی مانند $g : W - \longrightarrow V$ وجودداشته باشد به‌قسمی‌که $f \circ g = \mathrm{id}_W$ و $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

**قضیه.** سه‌شرط ذیل درمورد نگاشت گویای $f : V - \longrightarrow W$ هم‌ارزند:

(۱) $f$ یک هم‌ارزی دوسوگویاست؛

(۲) $f$ یک نگاشت غالب است ($\longleftarrow$ (۱۰.۴)) و $f^* : k(W) \longrightarrow k(V)$ یک یکریختی است؛

(۳) مجموعه‌های باز $V_\circ \subset V$ و $W_\circ \subset W$ وجود دارند به‌قسمی‌که تحدید $f$ به $V_\circ$ یک یکریختی $f : V_\circ \longrightarrow W_\circ$ است.

**برهان.** تعریف $f^*$ به‌همان طریق تعریف چندگوناهای آفین داده می‌شود، و (۱) $\Longleftrightarrow$ (۲) مثل (۱۱.۴) است. (۳) $\Longrightarrow$ (۱) روشن است، زیرا یکریختی $f : V_\circ \longrightarrow W_\circ$ و وارون آن $g = f^{-1} : W_\circ \longrightarrow V_\circ$ طبق تعریف، نگاشتهای گویا بین $V$ و $W$ هستند.

استلزام اصلی (۱)$\Longrightarrow$(۳) تاحدی پیچیده است، لیکن محتوای چندانی ندارد (اگر می‌خواهید دچار دردسر نشوید، مطلب را از (۹.۵) ادامه دهید!): طبق فرض (۱)، نگاشتهای گویای $f : V - \longrightarrow W$ و $g : W - \longrightarrow V$ وجود دارند که وارون همدیگرند؛ حال قرار می‌دهیم $V' = \mathrm{dom}\ f \subset V$ و $\varphi = f|_{V'} : V' \longrightarrow W$ و نیز $W' = \mathrm{dom}\ g \subset W$ و $\psi = g|_{W'} : W' \longrightarrow V$. درنمودار

$$\begin{tikzcd} \psi^{-1}(V') \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & V' \arrow[r, "\varphi"] & W \\ W \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

همهٔ پیکانها ریختبری هستند و تساوی $\mathrm{id}_W|_{\psi^{-1}(V')} = \varphi \circ \psi$ (به‌عنوان دوریختبری) از تساوی $\mathrm{id}_W = f \circ g$ (به‌عنوان دونگاشت گویا) نتیجه می‌شود. بنابراین

$$\varphi(\psi(P)) = P, \qquad \text{برای هر}\ P \in \psi^{-1}(V')$$

حال قرار می‌دهیم $V_\circ = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(V'))$، و $W_\circ = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(W'))$؛ در این صورت $\varphi : V_\circ \longrightarrow \psi^{-1}(V')$ طبق ساختمان بالا یک ریختبری است. ولی، $\psi^{-1}(V') \subset W_\circ$ زیرا

$P \in \psi^{-1}(V'_\circ)$ ایجاب می‌کند که $\varphi(\psi(P)) = P$، بنابراین $P \in \psi^{-1}(\varphi^{-1}(W'_\circ)) = W_\circ$.
در نتیجه $\varphi : V_\circ \longrightarrow W_\circ$ یک ریختبری است، و همین‌طور $\psi : W_\circ \longrightarrow V_\circ$. □

**(۹.۵) چندگوناهای گویا** . مفهوم هم‌ارزی دوسوگویا که در (۸.۵) مورد بحث قرارگرفت، در هندسهٔ جبری از اهمیّت کلیدی برخوردار است. شرط (۳) در قضیهٔ فوق بیان می‌کند که قسمتهای «عمده» چندگوناهای $V$ و $W$ یکی هستند، ولی ممکن است در حول‌وحوش لبه‌ها مختصر تفاوتی باهم داشته باشند؛ مثالی از کاربرد تبدیلات دوسوگویا، به اصطلاح، فراگستری یک چندگونای تکین برای به‌دست‌آوردن یک چندگونای ناتکین است، که در این مورد⟵ (۱۲.۶). یک حالت خاص و مهّم قضیهٔ (۸.۵) نتیجهٔ ذیل است.

**نتیجه.** برای چندگونای داده شدهٔ $V$، دو شرط زیر هم‌ارزند:

(الف) هیأت تابعی $k(V)$ یک توسیع متعالی محض $k$است، یعنی برای مقداری از $n$، $k(V) \cong k(t_1, \cdots, t_n)$.

(ب) یک مجموعهٔ باز چگال $V_\circ \subset V$ وجوددارد که با یک زیرمجموعهٔ باز چگال $U_\circ \subset \mathbb{A}^n$ یکریخت است.

چندگونائی که در این شرایط صدق کند، چندگونای گویاگفته می‌شود. شرط (ب) بیان دقیق این حکم است که $V$ با $n$ متغیر مستقل پارامتری می‌شود. این مفهوم قبلاً در این کتاب چندین‌بار به‌طور ضمنی آمده است (به‌عنوان مثال، (۱.۱)، (۱.۲)، (۱۱.۳ـ(ب)) و (۷.۵ـ(۲))). بخش اعظمی از کاربردهای مقدماتی هندسهٔ جبری در شاخه‌های دیگر ریاضیّات، به‌نحوی به چندگوناهای گویا مربوط می‌شود.

**(۱۰.۵) تحویل به یک ابررویه.** نتیجهٔ بلافصل بحث نرمالسازی نوتر در انتهای بخش سوم این است که هرچندگونا با یک ابررویه، هم‌ارز دوسوگویاست: اولاً، چون مسائل دوسوگویا، فقط به یک زیرمجموعهٔ باز چگال بستگی دارند، و هر مجموعهٔ باز شامل یک زیرمجموعهٔ باز چگالی است که با یک چندگونای آفین یکریخت است(طبق (۱۳.۴))، کافی است حالت چندگونای آفین $V \subset \mathbb{A}^n$ را در نظر بگیریم. در (۱۸.۳) ثابت کردیم که عناصری مانند $y_1, \cdots, y_{m+1} \in k[V]$ وجود دارند که توسیع هیأتی$k \subset k(V)$ را تولید می‌کنند، و چنان هستند که $y_1, \cdots, y_m$ جبری‌ـمستقل‌اند، و $y_{m+1}$ روی $k(y_1, \cdots, y_m)$ جبری است. بنابراین عناصر فوق معرّف یک ریختبری مانند $V \longrightarrow \mathbb{A}^{m+1}$ هستند که یک هم‌ارزی دوسوگویا بین $V$ و یک ابررویهٔ $V' \subset \mathbb{A}^{m+1}$ است.

**(۱۱.۵) حاصلضربها** . اگر $V$ و $W$ دوچندگونای آفین باشند یک تعبیر طبیعی وجود دارد که در آن $V \times W$ باز یک چندگونای آفین است: هرگاه $V \subset \mathbb{A}^n$ و $W \subset \mathbb{A}^m$، آنگاه

$V \times W$ زیرمجموعه‌ای است از $\mathbb{A}^{n+m}$ که به‌صورت ذیل داده‌شده است

$$\{((\alpha_۱, \cdots, \alpha_n); (\beta_۱, \cdots, \beta_m)) | f(\underline{\alpha}) = ۰ \ \forall f \in I(V) \text{ و } g(\underline{\beta}) = ۰ \ \forall g \in I(W)\}$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $V \times W$ تحویلناپذیر می‌ماند. البته باید توجه داشت که توپولوژی زاریسکیِ حاصلضرب، با حاصلضرب توپولوژیهای زاریسکی یکی نیست ($\longleftarrow$ تمرین ۱۰.۵).

حالت چندگوناهای تصویری چندان روشن نیست؛ برای آنکه بتوانیم حاصلضربها را تعریف کنیم، ابتدا لازم است تحقیق کنیم که خود $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ یک چندگونای تصویری است. می‌دانیم که $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ به‌طور قطع با $\mathbb{P}^{n+m}$ یکریخت نیست ($\longleftarrow$ جزء (۲)یِ تمرین ۲.۵). برای تحقیق مطلبِ فوق، از ساختمانی تاحدّی مشابه ساختمان (۷.۵ـ(۱))، یعنی روش نشانیدن («نشانیدن سگره») استفاده می‌کنیم:

$$\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow S_{n,m} \subset \mathbb{P}^N, N = (n+۱)(m+۱) - ۱$$

بدین‌ترتیب که $\mathbb{P}^N$ فضای تصویری با مختصات همگن

$$(U_{ij})_{i=۰,\cdots,n;\ j=۰,\cdots,m}$$

فرض می‌شود، که مفیدتر است $U_{ij}$ها را درایه‌های ماتریس

$$\begin{bmatrix} U_{۰۰} & \cdots & U_{۰m} \\ U_{۱۰} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix}$$

بگیریم. در این‌صورت $\varphi$ توسّط

$$((X_۰ : \cdots : X_n), (Y_۰ : \cdots : Y_m)) \longmapsto (X_i Y_j)_{\ i=۰,\cdots,n;\ j=۰,\cdots,m}$$

تعریف می‌شود. روشن است که $\varphi$ ریختبریی است خوشتعریف، و به‌آسانی می‌توان دید که نگارهٔ آن $S_{n,m}$ یک زیر چندگونای تصویری است که توسّط

$$\text{رتبه} \begin{bmatrix} U_{۰۰} & \cdots & U_{۰m} \\ U_{۱۰} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix} \leq ۱$$

یعنی، توسّط معادلات

$$\det\begin{vmatrix} U_{ik} & U_{i\ell} \\ U_{jk} & U_{j\ell} \end{vmatrix} = \circ, \quad \begin{matrix} \forall i,j = \circ,\cdots,n \\ \forall k,\ell = \circ,\cdots,m \end{matrix}$$

تعریف می‌شود. نگاشت $S_{n,m} \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ را که وارون نگاشت بالاست، به‌شرح زیر به‌دست می‌آوریم. برای $P \in S_{n,m}$ لااقل یک زوج $(i,j)$ وجود دارد به‌طوری $U_{ij}(P) \neq \circ$؛ این $(i,j)$ را ثابت می‌گیریم و این نگاشت را چنین تعریف می‌کنیم

$$S_{n,m} \ni P \longmapsto ((U_{\circ j} : \cdots : U_{nj}), (U_{i\circ} : \cdots : U_{im})) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$$

حال توجه می‌کنیم که انتخاب $(i,j)$ مسأله‌ای نیست، زیرا ماتریس $U_{ij}(P)$ از رتبهٔ ۱ است، و لذا همهٔ سطرهای آن باهم و همهٔ ستونهای آن باهم متناسب‌اند.

بااین توضیحات، بررسی این مطلب که اگر $V \subset \mathbb{P}^n$ و $W \subset \mathbb{P}^m$ چندگوناهای تصویری باشند، آنگاه $V \times W \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong S_{n,m} \subset \mathbb{P}^N$ هم یک چندگونای تصویری در $\mathbb{P}^N$ است، چندان مشکل نیست ($\longleftarrow$ تمرین ۱۱.۵).

## تمرینهای بخش پنجم.

**۱.۵** ثابت کنید هر تابع منظم روی $\mathbb{P}^1$ تابعی است ثابت. (راهنمایی: از نمادگذاری (۰.۵) استفاده کنید؛ فرض کنید $f \in k(\mathbb{P}^1)$ درهر نقطهٔ $\mathbb{P}^1$ منظم است. حال (۸.۴ـ(۲)) را برای قطعه آفین $\mathbb{A}^1_{(\circ)}$ به‌کار برید، تا نشان دهید که $f = p(x_\circ) \in k[x_\circ]$؛ روی قطعهٔ آفین دیگر یعنی $\mathbb{A}^1_{(\infty)}$ نتیجه بگیرید که، $f = p(\frac{1}{y_1}) \in k[y_1]$. امّا، چه‌طور ممکن است $p(\frac{1}{y_1})$ یک چندجمله‌یی باشد؟). نتیجه بگیرید برای هر مقدار $m$، هیچ ریختبری ناثابت $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^m$ وجود ندارد.

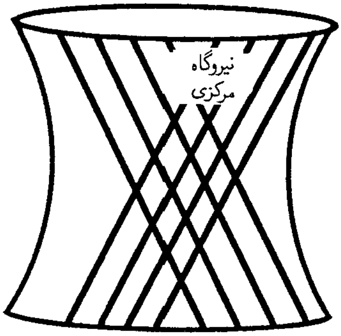
**۲.۵ رویهٔ درجهٔ دوّم در $\mathbb{P}^3$.** (۱) نشان دهید که نشانیدن $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ به‌روش سگره (مطابق (۱۰.۵)) یک یکریختی از $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ با رویهٔ درجهٔ دوم

$$S_{1,1} = Q : (X_\circ X_3 = X_1 X_2) \subset \mathbb{P}^3$$

به‌دست می‌دهد.

(۲) نگاره‌های دو خانواده از خطهای $\{P\} \times \mathbb{P}^1$ و $\mathbb{P}^1 \times \{P\}$ در $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ را روی $Q$ پیدا کنید. با استفاده از این مطلب خطوط جدا از همی را در $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ به‌دست آورید، و به‌کمک آن نتیجه بگیرید که $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \not\cong \mathbb{P}^2$.

(این واقعیت که رویهٔ درجه دوم دو خانوادهٔ مولد مستقیم‌الخط دارد، در مهندسی ساختمان کاربردهایی دارد: اگر بخواهید رویهٔ بتنی انحناداری بسازید، روشن است که اگر بتوانید با اعمال حایلهای خطّی شکل رویه را تعیین کنید، این خود، امتیاز ویژه‌ای به‌شمار می‌آید. برای توضیح و دیدن اشکال آن ⟵[م. برگر، ۶.۴.۱۴_۷ و ۳.۳.۱۵].)




(۳) نشان دهید دوخط روی $Q$ وجوددارند که از نقطهٔ $P = (۱ : ۰ : ۰ : ۰)$ می‌گذرند، و اگر $U$ متمم این دو خط در $Q$ باشد، $U$ همان نگارهٔ $\mathbb{A}^۱ \times \mathbb{A}^۱$ براثر نشانیدن به‌روش سگره است.

(۴) نشان دهید که براثر عمل تصویر $\pi|_Q : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^۲$ (مطابق نمادگذاری (۷.۵_(۲)))، $U$ به‌طور یکریخت بر یک نسخهٔ $\mathbb{A}^۲$ نگاشته می‌شود، و دوخط گذرنده از $P$ بر دونقطه از $\mathbb{P}^۲$ نگاشته می‌شوند.

(۵) با نمادگذاری (۷.۵_(۲))، مجموعه‌های $\mathrm{dom}\ \pi$ و $\mathrm{dom}\ \varphi$ را معین، و تکینگیهای $\pi$ و $\varphi$ را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

**۳.۵** کدامیک از عبارات ذیل معرّف نگاشتهای گویای $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ بین فضاهای تصویری با بعدهائی مناسب هستند ($n, m = ۱$ یا ۲)؟ در هر یک از حالتها، $\mathrm{dom}\ \varphi$ را تعیین کرده بگویید که آیا $\varphi$ دوسوگویا هست یا نیست؟ و اگر هست نگاشت وارون آن را بنویسید.

(الف) $(x : y : z) \longmapsto (x : y)$

(ب) $(x : y) \longmapsto (x : y : ۱)$

(ج) $(x : y) \longmapsto (x : y : ۰)$

(د) $(x : y : z) \longmapsto (\frac{۱}{x} : \frac{۱}{y} : \frac{۱}{z})$

$(x : y : z) \longmapsto ((x^۳ + y^۳)/z^۳ : y^۲/z^۲ : ۱)$ (ه)

$(x : y : z) \longmapsto (x^۲ + y^۲ : y^۲ : y^۲)$ (ط)

**۴.۵** خم‌نرمال گویای درجهٔ سوّم ($\longleftarrow$ (۷.۵ـ(۱))) خمی است مانند $C \subset \mathbb{P}^۳$ که به‌صورت فصل مشترک سه‌رویهٔ درجهٔ دوم، $C = Q_۱ \cap Q_۲ \cap Q_۳$، تعریف می‌شود، که

$$Q_۱ : (XZ = Y^۲), \quad Q_۲ : (XT = YZ), \quad Q_۳ : (YT = Z^۲)$$

این خم را خم‌درجهٔ سوم چپ نیز می‌نامند، که عنوان چپ اشاره به این نکته است که این‌خم یک خم مسطح نیست. نشان دهید که برای هر دورویه از رویه‌های درجه دوم $Q_i$ و $Q_j$، فصل مشترک آنها به‌صورت $Q_i \cap Q_j = C \cup \ell_{ij}$، بیان می‌شود که $\ell_{ij}$ یک‌خط است. در نتیجه خم $C$ در فضای سه‌بعدی فصل مشترک هیچ دورویه از سه‌رویهٔ درجه دوم بالا نیست.

**۵.۵** فرض کنید $Q_۱ : (XZ = Y^۲)$ و $F : (XT^۲ - ۲YZT + Z^۳ = ۰)$؛ ثابت کنید که $C = Q_۱ \cap F$ همان خم درجهٔ سوّم چپ تمرین ۴.۵ است. (راهنمایی: از ضرب $F$ در $X$ و تفریق مضرب مناسبی از $Q_۱$ از $XF$، مربع کاملی حاصل می‌شود.)

**۶.۵** فرض کنید خم تحویلناپذیر $C \subset \mathbb{P}^۳$ به‌شکل $C = Q_۱ \cap Q_۲$ تعریف شده است که $Q_۱ : (TX = q_۱), Q_۲ : (TY = q_۲)$ و $q_۱$، $q_۲$ صورتهای درجه دوّم برحسب $X$ و $Y$ و $Z$ هستند. نشان دهید تحدید نگاشت تصویر $\pi : \mathbb{P}^۳ - \longrightarrow \mathbb{P}^۲$ به‌خم $C$ که توسط $(X : Y : Z : T) \longmapsto (X : Y : Z)$ تعریف شده است، یک یکریختی است بین خم $C$ و خم‌مسطح $D \subset \mathbb{P}^۲$ که با $Xq_۲ = Yq_۱$ داده شده است.

**۷.۵** فرض کنید $\varphi : \mathbb{P}^۱ \longrightarrow \mathbb{P}^۱$ یک یکریختی است؛ نمودار $\varphi$ را به‌صورت یک زیر چندگونای $\mathbb{P}^۱ \times \mathbb{P}^۱ \cong Q \subset \mathbb{P}^۳$ مشخص کنید. حال همین عمل را در مورد نگاشت دوـبه‌ـیک $\varphi : \mathbb{P}^۱ \longrightarrow \mathbb{P}^۱$ که توسط $(X : Y) \longmapsto (X^۲ : Y^۲)$ تعریف می‌شود، انجام دهید.

**۸.۵** ثابت کنید هر ابررویهٔ درجهٔ دوم تحویلناپذیر $Q \subset \mathbb{P}^{n+۱}$ گویاست؛ یعنی، مشابه آنچه در شکل مربوط به (۷.۵ـ(۲)) آمده است، نشان دهید اگر $P \in Q$ یک نقطهٔ ناتکین باشد، آنگاه عمل تصویر خطی از $\mathbb{P}^{n+۱}$ در $\mathbb{P}^n$، یک نگاشت دوسوگویای $Q - \longrightarrow \mathbb{P}^n$ را القا می‌کند.

**۹.۵** در هر یک از خمهای مسطّح ذیل، هر سه قطعهٔ آفین استاندهٔ آنها را معین کنید و فصل مشترک خم را با هریک از سه محور مختصات به‌دست آورید:

(الف) $y^۲z = x^۳ + axz^۲ + bz^۳$؛ (ب) $x^۲y^۲ + x^۲z^۲ + y^۲z^۲ = ۲xyz(x + y + z)$؛

(ج) $xz^۳ = (x^۲ + z^۲)y^۲$.

**۱۰.۵** (۱) ثابت کنید حاصلضرب دو مجموعهٔ جبری تحویلناپذیر مجموعه‌ای است تحویلناپذیر (راهنمایی: برای هر $w \in W$، زیرمجموعهٔ $V \times \{w\}$ تحویلناپذیر است؛ برای عبارت داده‌شدهٔ $V \times W = U_1 \cup U_2$، زیرمجموعه‌های $W_i = \{w \in W | V \times \{w\} \subset U_i\}$، $i = 1, 2$، را درنظر بگیرید.)

(۲) توپولوژی روی $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ را که حاصلضرب توپولوژیهای زاریسکی روی هریک از عوامل است، در نظر بگیرید و مجموعه‌های بستهٔ آن را مشخص کنید. حال زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{A}^2$ را پیداکنید که در توپولوژی زاریسکی روی $\mathbb{A}^2$ بسته باشد ولی در توپولوژی حاصلضرب فوق بسته نباشد.

**۱۱.۵** (الف) اگر $\mathbb{A}^n_{(0)}$ و $\mathbb{A}^m_{(0)}$ بترتیب قطعه‌های آفین استاندهٔ $\mathbb{P}^n$ و $\mathbb{P}^m$ باشند، نشان دهید که نشانیدن سگره‌ی (۱۱.۵)، $\mathbb{A}^n_{(0)} \times \mathbb{A}^m_{(0)}$ را به‌طور یکریخت بر یک قطعه آفین از چندگونای $S_{n,m} \subset \mathbb{P}^N$، مانند $S_{(0)} \subset \mathbb{A}^N$ می‌نگارد، و $N$ مختصات $\mathbb{A}^N$ به $X_1$، $\cdots$، $X_n$ ، $Y_1$، $\cdots$، $Y_m$ و $nm$ جملهٔ $X_iY_j$ تحدید می‌شوند.

(ب) نشان دهید اگر $V \subset \mathbb{P}^n$، $W \subset \mathbb{P}^m$، آنگاه حاصلضرب $V \times W$ یک زیر چندگونای تصویری از $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = S_{n,m} \subset \mathbb{P}^N$ است (راهنمایی: حاصلضرب قطعه‌های آفین $V_{(0)} \times W_{(0)} \subset \mathbb{A}^{n+m}$ یک زیر چندگوناست که، همان‌گونه که در (۱۱.۵) توضیح داده شد، به‌وسیلهٔ چندجمله‌ییها تعریف می‌شود؛ حال نشان دهید که هریک از این چندجمله‌ییها تحدید یک چندجمله‌یی همگن از $U_{ij}$ به $S_{(0)} \cong \mathbb{A}^{n+m}$ است).

**۱۲.۵** فرض کنید $\mathbf{C}$ خم درجهٔ سوّم (۰.۵) باشد؛ ثابت کنید هر تابع منظم $f$ روی $\mathbf{C}$ یک تابع ثابت است. برهان را به مرحله‌های ذیل تقسیم کنید:

**مرحلهٔ اوّل.** با به‌کارگیریِ (۸.۴ـ(۲)) برای قطعهٔ آفین $\mathbf{C}_{(0)}$، بنویسید $f = p(x, y) \in k[x, y]$.

**مرحلهٔ دوّم.** باکم‌کردن مضرب مناسبی از چندجمله‌یی $y^2 - x^3 - ax - b$ از $f$، فرض کنید $p(x, y) = q(x) + yr(x)$، که $q, r \in k[x]$.

**مرحله سوم.** به‌کارگیری (۸.۴ـ(۲)) برای قطعهٔ آفین $\mathbf{C}_{(\infty)}$ خواهد داد

$$f = q(x_1/z_1) + (\frac{1}{z_1})r(x_1/z_1) \in k[\mathbf{C}_{(\infty)}]$$

و بنابراین یک چندجمله‌یی مانند $S(x_1, z_1)$ وجوددارد به‌طوری‌که

$$q(x_1/z_1) + (\frac{1}{z_1})r(x_1/z_1) = S(x_1, z_1)$$

**مرحلهٔ چهارم.** از حذف مخرجها، و استفاده از $k[\mathbf{C}_{(\infty)}] = k[x_1, z_1]/g$، که $g = z_1 - x_1^3 - ax_1z_1^2 - bz_1^3$، اتحاد چندجمله‌یی ذیل را در $k[x_1, z_1]$ نتیجه بگیرید

$$Q_m(x_1, z_1) + R_{m-1}(x_1, z_1) \equiv S(x_1, z_1)z_1^m + A(x_1, z_1)g$$

که $Q_m$ و $R_{m-1}$ چندجمله‌ییهای همگن بترتیب از درجه‌های $m$ و $m-1$ اند.

**مرحلهٔ پنجم.** حال فرض کنید $S = S^+ + S^-$ و $A = A^+ + A^-$ تجزیهٔ $S$ و $A$، به‌حاصل‌جمع جمله‌هائی از درجهٔ زوج و فرد باشند. با توجه به اینکه $g$ تنها شامل جمله‌های درجهٔ فرد است، با فرض زوج‌بودن $m$، از اتحاد بالا دو اتحاد زیر نتیجه می‌شوند:

$$Q_m \equiv S^+z_1^m + A^-g\ , \quad R_{m-1} \equiv S^-z_1^m + A^+g$$

برای حالتی هم که $m$ فرد است عباراتی مشابه به‌دست می‌آید.

**مرحلهٔ ششم.** $Q_m$ یک چندجمله‌یی همگن از درجهٔ $m$ است، و لذا $A^-g$ از درجهٔ ناکوچکتر از $m$ خواهد بود؛ با درنظرگرفتن جملهٔ باکمترین درجهٔ از $A^-g$، نشان دهید که $Q_m$ بر $z_1$ بخشپذیر است. و درمورد $R_{m-1}$ نیز نتیجه‌ای مشابه به‌دست آورید. حال فرض کنید که در اتحاد مرحلهٔ چهارم، $m$ مینیمم مقدار خود را اختیار کند، و از آنجا نتیجه بگیرید که $q(x)$ از درجهٔ صفر است و $r(x)=0$.

**۱۳.۵ رویهٔ وِرونِزِه.** نشانیدن $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ را که به‌صورت

$$(X : Y : Z) \longmapsto (X^2 : XY : XZ : Y^2 : YZ : Z^2)$$

تعریف می‌شود، مطالعه کنید؛ معادلات معرّف نگارهٔ $\mathbb{P}^2$ یعنی $S = \varphi(\mathbb{P}^2)$، را بنویسید، و (با نوشتن معادلات ریختبری وارون $\varphi$) یکریختی‌بودن $\varphi$ را نشان دهید. ثابت کنید خطوط $\mathbb{P}^2$ بر مقاطع مخروطی در $\mathbb{P}^5$، و مقاطع مخروطی $\mathbb{P}^2$ برخمهای درجهٔ چهارم چپ در $\mathbb{P}^5$ نگاشته می‌شوند ($\longleftarrow$ (۷.۵)).

برای هر خط $\ell \subset \mathbb{P}^2$، فرض کنید $\pi(\ell) \subset \mathbb{P}^5$ صفحهٔ تصویری تولیدشده توسط مقطع مخروطی $\varphi(\ell)$ باشد. ثابت کنید اجتماع $\pi(\ell)$ها برای همهٔ $\ell \subset \mathbb{P}^2$ها یک ابررویهٔ درجه سوم مانند $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ تشکیل می‌دهند. (راهنمایی: مشابه (۷.۵) و (۱۱.۵)، می‌توان معادلات $S$ را به‌شکل $1 \leq$ رتبهٔ $(M)$، نوشت که $M$ یک ماتریس متقارن $3 \times 3$ است که درایه‌های آن با ۶ مختص $\mathbb{P}^5$ نوشته می‌شوند؛ حال نشان دهید که معادلهٔ $\Sigma$، همان $\det M = 0$ است. برای توضیحات بیشتر در این مورد می‌توانید به مرجع [سِمپِل وراث، ص ۱۲۸] مراجعه کنید.

## بخش ششم. فضای مماس، ناتکینی و بعد

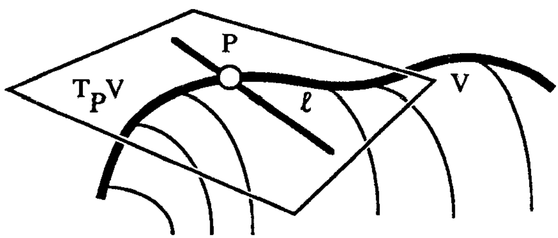
**( ۱.۶ ) نقاط ناتکین یک ابررویه.** فرض کنید $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ یک چندجمله‌یی تحویلناپذیر باشد، $f \not\in k$، و قرار دهید $V = V(f) \subset \mathbb{A}^n$؛ فرض کنید $P = (a_1, \cdots, a_n) \in V$، و $\ell$ خطی مار بر $P$ باشد. چون $P \in V$، واضح است که $P$ یک ریشه $f|_\ell$ است.

**سئوال.** در چه صورت $P$ یک ریشهٔ چندگانه $f|_\ell$ است؟

**پاسخ.** اگر و تنها اگر $\ell$ مشمول زیرفضای خطیِ آفینِ

$$T_P V : (\sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(P).(X_i - a_i) = 0) \subset \mathbb{A}^n$$

یعنی فضای مماس $V$ در $P$ باشد.




برای اثبات، $\ell$ را به‌صورت پارامتری زیر می‌نویسیم

$$\ell : X_i = a_i + b_i T$$

که $P = (a_1, \cdots, a_n)$ و $(b_1, \cdots, b_n)$ شیب یا بردار هادی $\ell$ است. در این‌صورت $f|_\ell = f(\cdots, a_i + b_i T, \cdots) = g(T)$ یک چندجمله‌یی برحسب $T$ است، و می‌دانیم که $(T = 0)$ یک ریشهٔ $g$ است. بنابراین

$$\text{یک ریشهٔ چندگانه } g \text{ است } 0 \iff \frac{\partial f}{\partial T}(0) = 0$$

یعنی

$$\iff \sum_i bi \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) = 0 \iff \ell \subset T_P V$$

**تعریف.** $P \in V \subset \mathbb{A}^n$ یک نقطهٔ ناتکین $V$ است اگر برای مقداری از $i$، $\partial f/\partial X_i(P) \neq 0$؛ در غیر این‌صورت $P$ یک نقطهٔ تکین، یا یک تکینگی $V$ است.

روشن است که اگر $P$ یک نقطه ناتکین باشد $T_P V$ یک زیرفضای آفین $(n-1)$ بعدی $\mathbb{A}^n$ است، و اگر $P \in V$ یک نقطهٔ تکین باشد، آنگاه $T_P V = \mathbb{A}^n$.

**( ۲.۶ ) تذکر.** (الف) مشتقهای جزئی $\partial f/\partial X_i(P)$ که در عبارت بالا ظاهر شده‌اند، با عملیات جبری صوری (یعنی، اثر $\partial/\partial X_i$ بر $X_i^n$، برابر $nX_i^{n-1}$ است) به‌دست می‌آیند؛ و مشتقگیری با استفاده از حد موردنظر نیست.

(ب) فرض کنید $k = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$، و $\partial f/\partial X_i(P) \neq 0$؛ برای سادگی $i$ را مساوی ۱ می‌گیریم. در این‌صورت نگاشت $p : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ که به شکل $(X_1, \cdots, X_n) \longmapsto (f, X_2, \cdots, X_n)$ تعریف می‌شود دارای دترمینان ژاکوبی غیر صفر در $P$ است، در نتیجه طبق قضیهٔ تابع وارون، یک همسایگی $P$ مانند $U \subset \mathbb{A}^n$ وجود دارد به‌طوری که $p|_U : U \to p(U) \subset \mathbb{A}^n$ یک دیفرانسیلریختی از همسایگی $U$ با مجموعهٔ باز $p(U)$ از $\mathbb{A}^n$ است (نسبت به توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$)؛ یعنی، $p|_U$ دوسویی است، و هر دو نگاشت $p$ و $p^{-1}$ توابع دیفرانسیلپذیر حقیقی یا مختلط هستند. به‌عبارت دیگر، $(f, X_2, \cdots, X_n)$ یک دستگاه مختصات دیفرانسیلپذیر جدید روی $\mathbb{A}^n$ در نزدیکی $P$ تشکیل می‌دهد؛ این امر ایجاب می‌کند که یک همسایگی $P$ در $V : (f = 0)$ با یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{A}^{n-1}$ با مختصات $(X_2, \cdots, X_n)$ دیفرانسیلریخت باشد. بنابراین در نزدیکی هر نقطهٔ ناتکین $P$، $V$ یک خمینه با پارامترهای موضعی $(X_2, \cdots, X_n)$ است.

**( ۳.۶ ) قضیه.** مجموعهٔ $V_{ns} = \{P \in V |$ ناتکین است $P\}$ یک زیرمجموعهٔ باز و چگال $V$ برای توپولوژی زاریسکی است.

**برهان.** متمم $V_{ns}$ مجموعهٔ $V_s$ متشکل از نقاط تکین است، که توسط $\partial f/\partial X_i(P) = 0$، $i = 1, \cdots, n$، تعریف می‌شود، یعنی

$$V_s = V(f, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial X_n}) \subset \mathbb{A}^n$$

که طبق تعریف توپولوژی زاریسکی، یک مجموعهٔ بسته است. چون $V$ (به‌موجب ۱۱.۳ـ(الف))، تحویلناپذیر است برای این‌که نشان دهیم $V_{ns}$ چگال است، تنها کافی است که، (به‌موجب قضیهٔ ۲.۴)، نشان دهیم ناتهی است؛ برخلاف، فرض کنید $V_{ns}$ تهی است، یعنی $V = V(f) = V_s$. در این‌صورت همهٔ چندجمله‌ییهای $\partial f/\partial X_i$ باید روی $V$ صفر شوند، بنابراین (باردیگر طبق (۱۱.۳))،

$\partial f/\partial X_i$ها باید در $k[X_1,\cdots,X_n]$ بر f بخشپذیر باشند؛ لیکن با در نظرگرفتن $\partial f/\partial X_i$ به‌عنوان یک چندجمله‌یی برحسب $X_i$، درجهٔ آن اکیداً از درجه f کمتر است، در نتیجه بخشپذیری $\partial f/\partial X_i$ بر f ایجاب می‌کند که در واقع $\partial f/\partial X_i$ به‌عنوان یک چندجمله‌یی مساوی صفر شود، یعنی $\partial f/\partial X_i = 0$. روشن است که این مطلب وقتی روی $\mathbb{C}$ امکانپذیر است که $X_i$ در چندجمله‌یی f وجود نداشته باشد و اگر این مطلب برای همه iها اتفاق بیفتد، آنگاه f مقداری است ثابت در $\mathbb{C}$، که خلاف فرض است. روی یک هیأت کلی k، $\partial f/\partial X_i = 0$ (برای هر i) تنها وقتی امکانپذیر است که f یک چندجمله‌یی تفکیک‌ناپذیر نسبت به $X_i$ باشد؛ یعنی، $\mathrm{char}(k) = p$ و f یک چندجمله‌یی از $X_i^p$ باشد. هرگاه این امر برای همه iها پیش آید، مطابق استدلالی که در (۱۶.۳) کردیم، f توان p‌ـام یک چندجمله‌یی در $k[X_1,\cdots,X_n]$ خواهد شد؛ که با تحویلناپذیری f مغایرت دارد. □

**( ۴.۶ ) فضای مماس.**

**تعریف.** فرض کنید $V \subset \mathbb{A}^n$ یک چندگونا و $P = (a_1,\cdots,a_n) \in V$. برای هر $f \in k[X_1,\cdots,X_n]$ قرار می‌دهیم

$$f_P^{(1)} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(P).(X_i - a_i)$$

این چندجمله‌یی، «جزء مرتبهٔ اول f در P»، یک چندجمله‌یی خطی آفین (یعنی، خطی بعلاوهٔ مقدار ثابت) است. حال فضای مماس V در P را به‌صورت

$$T_P V = \cap(f_P^{(1)} = 0) \subset \mathbb{A}^n,$$

تعریف می‌کنیم، که اشتراک بالا روی همهٔ f ها در $I(V)$ گرفته می‌شود.

**( ۵.۶ ) قضیه.** تابع $V \longrightarrow \mathbb{N}$ که توسط $P \longmapsto \dim T_P V$ تعریف می‌شود، یک تابع بالا ـ نیمپیوسته (نسبت به توپولوژی زاریسکی V) است. به‌عبارت دیگر، برای هر عدد صحیح r، زیرمجموعهٔ

$$S(r) = \{P \in V | \dim T_P V \geq r\} \subset V$$

یک مجموعهٔ بسته است.

**برهان.** فرض کنید $(f_1,\cdots,f_m)$ یک مجموعهٔ مولد $I(V)$ باشد؛ به‌آسانی می‌توان دید که برای هر $g \in I(V)$، $g_P^{(1)}$ یعنی جزء مرتبه اول g، یک ترکیب خطی از جزءهای مرتبه اول $f_i$هاست، در نتیجه تعریف $T_P V$ به‌شکل ذیل ساده می‌شود

$$T_P V = \cap_{i=1}^m (f_{i,P}^{(1)} = 0) \subset \mathbb{A}^n$$

بااستفاده از جبر خطی مقدماتی،

$$\text{رتبهٔ ماتریس} \quad P \in S(r) \iff n - r \geq \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P)\right)_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$$

هرکهاد دترمینان از نوع $(n - r + 1) \times (n - r + 1)$ در ماتریس $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P)\right)_{i,j}$ صفر است $\iff$

اما هر درایهٔ $\partial f_i/\partial X_j(P)$ از ماتریس فوق یک تابع چندجمله‌یی از مختصات P است؛ لذا هر کهاد، دترمینانِ یک ماتریس از چندجمله‌ییهاست، و بنابراین خود یک چندجمله‌یی است. از این‌رو $S(r) \subset V \subset \mathbb{A}^n$ یک زیرمجموعهٔ جبری است. □

**(۶.۶) فرع ـ تعریف.** عددی طبیعی مانند r و زیرمجموعه‌ای باز و چگال مانند $V_\circ \subset V$ وجود دارد به‌طوری که

برای همهٔ نقاط $P \in V$ ، رابطهٔ $\dim T_P V \geq r$ و برای $P \in V_\circ$ ، رابطهٔ $\dim T_P V = r$ برقرار است.

r را طبق تعریف بعد V گوییم، و چنین می‌نویسیم $\dim V = r$؛ و هرگاه برای $P \in V$، $\dim T_P V = r$، P را ناتکین، و اگر $\dim T_P V > r$، P را نقطهٔ تکین می‌خوانیم. یک چندگونای V ناتکین است هرگاه درکلیهٔ نقاط $P \in V$ ناتکین باشد.

**برهان.** فرض کنید $r = \min\{\dim T_P V\}$، که مینیمم برای کلیه نقاط $P \in V$ فرض شده است. پس روشن است که

$$S(r) = V, S(r+1) \subsetneq V$$

بنابراین مجموعهٔ $S(r)\backslash S(r+1) = \{P \in V | \dim T_P V = r\}$ باز و ناتهی است. □

**(۷.۶)** از قضیهٔ (۳.۶) نتیجه می‌شود که اگر $V = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ ابررویه‌ای باشد که توسط چندجمله‌یی ناثابت f تعریف شده است، آنگاه $\dim V = n - 1$. از طرف دیگر، برای یک ابررویه، تساوی $k[V] = k[X_1, \cdots, X_n]/(f)$ برقرار است در نتیجه با فرض این‌که f به‌طور نابدیهی شامل $X_1$ است، هیأت تابعی V به‌صورت

$$k(V) = k(X_2, \cdots, X_n)[X_1]/(f)$$

خواهد بود، یعنی $k(V)$ از k با الحاق $n - 1$ عنصر جبری ـ مستقل و سپس یک توسیع جبری اولیه به‌دست می‌آید.

**تعریف.** اگر $k \subset K$ یک توسیع هیأتی باشد درجهٔ تعالی[1] $K$ روی $k$ عبارت است از ماکسیمم تعداد عناصر $K$ که روی $k$ جبری ـ مستقل باشند. درجهٔ تعالی $K$ روی $k$ را با $\operatorname{tr}\deg_k K$ نمایش می‌دهند.

نظریهٔ مقدماتی درجهٔ تعالی توسیع هیأتی $K$ روی $k$ به‌طور صوری کاملاً مشابه نظریهٔ بعد فضای برداری است: هرگاه $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in K$ داده شده باشند، معنی جبری ـ مستقل بودن آنها روی $k$ را می‌دانیم (← (۱۳.۳))؛ اگر $K$ روی $k(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ جبری باشد، $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ جزء متعالی توسیع را پدید می‌آورند؛ و اگر این عناصر جبری ـ مستقل باشند و جزء متعالی توسیع را پدید بیاورند، آنگاه یک پایهٔ تعالی تشکیل می‌دهند. حال این یک قضیهٔ ساده‌ای است که نشان دهیم یک پایهٔ تعالی، یک مجموعهٔ جبری ـ مستقل ماکسیمال، و یک مجموعهٔ پدیدآور مینیمال است، و تعداد عناصر هر دو پایهٔ تعالی $K$ روی $k$ یکی هستند (← تمرین ۱.۶).

بنابراین برای یک ابررویهٔ $V \subset \mathbb{A}^n$، تساوی $\dim V = n - 1 = \operatorname{tr}\deg_k k(V)$ برقرار است. بقیهٔ این بخش به اثبات معتبربودن تساوی $\dim V = \operatorname{tr}\deg_k k(V)$ برای هر چندگونا، با تحویل به حالت یک ابررویه، اختصاص دارد. اولین چیزی که باید ثابت کنیم، این است که برای هر نقطهٔ $P \in V$ روی یک چندگونا، فضای مماس $T_P V$، که تاکنون برحسب دستگاه مختصات خاص فضای محیطی $\mathbb{A}^n$ تعریف شده است، در واقع یک ناوردای ذاتی از همسایگی $P \in V$ است.

## (۸.۶) ماهیت ذاتی $T_P V$

از این به‌بعد برای نقطه دادهٔشده $P = (a_1, \cdots, a_n) \in V \subset \mathbb{A}^n$، مختصات جدید $X_i' = X_i - a_i$ را اختیار می‌کنیم تا $P$ به مبدأ انتقال یابد، و لذا فرض می‌کنیم که $P = (0, \cdots, 0)$. در این‌صورت $T_P V \subset \mathbb{A}^n$ یک زیرفضای برداری $k^n$ خواهد بود.

**قرارداد.** ایدآل $(X_1, \cdots, X_n) \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ را با $M_P$، و ایدآل متناظر به $P$ در $k[V]$ را با $m_P$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت روشن است که $m_P = M_P/I(V) \subset k[V]$.

**قضیه.** با قرارداد بالا،

(الف) یک یکریختی طبیعی بین فضاهای برداری

$$(T_P V)^* \cong m_P/m_P^2$$

وجود دارد، که علامت $()^*$ معرف دوگان یک فضای برداری است.

1. transcendence degree

(ب) هرگاه $f \in k[V]$ طوری باشد که $f(P) \neq ۰$، و $V_f \subset V$ مجموعهٔ بازآفین استانده‌ای باشد که در (۱۳.۴) معرفی کردیم، آنگاه نگاشت طبیعی

$$T_P(V_f) \longrightarrow T_P V$$

یک یکریختی است.

**برهان.** (الف). فضای برداری صورتهای خطی روی $k^n$ را با $(k^n)^*$ نمایش می‌دهیم؛ این فضا، فضائی است برداری با پایهٔ $X_۱, \cdots, X_n$. چون $P = (۰, \cdots, ۰)$، برای هر $f \in k[X_۱, \cdots, X_n]$، جزء خطی $f_P^{(۱)}$ طبیعتاً عنصری است از $(k^n)^*$؛ نگاشت $d : M_P \to (k^n)^*$ را به‌شکل $df = f_P^{(۱)}$ برای هر $f \in M_P$، تعریف می‌کنیم.

نگاشت d پوشاست، زیرا عناصر $X_i \in M_P$ به پایهٔ طبیعی $(k^n)^*$ نگاشته می‌شوند؛ همچنین $M_P^۲ =$ هستهٔ d، زیرا

$$f \in M_P^۲ \iff f \text{ با جمله‌های درجهٔ دوم برحسب } X_۱, \cdots, X_n \text{ شروع می‌شود} \iff f_P^{(۱)} = ۰$$

بنابراین $M_P/M_P^۲ \cong (k^n)^*$، که حکم (الف) برای حالت خاص $V = \mathbb{A}^n$ است. در حالت کلی، به‌عنوان دوگان شمول $T_P V \subset k^n$، یک نگاشت تحدید $(k^n)^* \to (T_P V)^*$ وجود دارد که یک صورت خطی $\lambda$ روی $k^n$ را به تحدید آن روی $T_P V$ می‌نگارد؛ حال نگاشت ترکیبی:

$$D : M_P \to (k^n)^* \to (T_P V)^*$$

را تعریف می‌کنیم. D پوشاست زیرا هر یک از عوامل آن پوشاست. حال گوییم هستهٔ D دقیقاً برابر $M_P^۲ + I(V)$ است، که در نتیجه

$$m_P/m_P^۲ = M_P/(M_P^۲ + I(V)) \cong (T_P V)^*$$

که حکم موردنیاز است. حال برای اثبات ادعا، می‌نویسیم

$$f \in \text{هستهٔ } D \iff f_P^{(۱)}|_{T_P V} = ۰ \iff f_P^{(۱)} = \sum_i a_i g_{i,P}^{(۱)}, \qquad \text{برای } g_i \in I(V)$$

(زیرا $T_P V \subset k^n$ زیرفضائی است برداری که توسط معادله‌های $g_P^{(۱)} = ۰$، $g \in I(V)$، تعریف شده است)

$$\iff f - \sum_i a_i g_i \in M_P^۲, \qquad \text{برای } g_i \in I(V) \iff f \in M_P^۲ + I(V)$$

اثبات جزء (ب)ی قضیهٔ (۸.۶) به خواننده واگذار می‌شود (← تمرین ۲.۶). □

**( ۹.۶ ) فرع.** $T_PV$ با تقریب یکریختی، تنها به همسایگی $P \in V$ بستگی دارد. دقیقتر بگوییم، اگر $P \in V_\circ \subset V$ و $Q \in W_\circ \subset W$، و $V_\circ$، $W_\circ$ زیرمجموعه‌های باز چندگوناهای آفین باشند، و $\varphi : V_\circ \to W_\circ$ یک یکریختی باشد که P را به Q می‌نگارد، آنگاه یک یکریختی طبیعی $T_PV_\circ \to T_QW_\circ$ وجود دارد؛ بنابراین $\dim T_PV_\circ = \dim T_QW_\circ$.

بالاخص، اگر V و W دو چندگونای هم‌ارز دوسو گویا باشند، آنگاه $\dim V = \dim W$.

**برهان.** با گذر به یک همسایگی کوچکتر P در V، می‌توان فرض کرد که $V_\circ$ با یک چندگونای آفین یکریخت است (قضیه ۱۳.۴). در این‌صورت $W_\circ$ نیز یک چندگونای آفین خواهد بود، و $\varphi$ یک یکریختی $k[V_\circ] \cong k[W_\circ]$ را القا می‌کند که $m_P$ را به $m_Q$ می‌نگارد. تساوی اخیر باتوجه به (۸.۵) برقرار است، زیرا V و W شامل زیرمجموعه‌های بازچگالی هستند که با هم یکریخت‌اند. □

**( ۱۰.۶ ) قضیه.** برای هر چندگونای V، $\dim V = \operatorname{tr}\deg_k k(V)$.

**برهان.** برای حالتی که V یک ابررویه است، حکم معلوم است. ازطرف دیگر هر چندگونا با یک ابررویه هم‌ارز دوسو گویاست (بنابر (۱۰.۵))، و هر دو طرف تساوی مطلوب برای چندگوناهای هم‌ارز دوسو گویا یکی هستند. □

**( ۱۱.۶ ) ناتکینی و چندگوناهای تصویری.** هرچند نتایج بالا برای چندگوناهای آفین موردبحث قرار گرفتند، مفهوم ناتکینی و بعد مستقیماً برای هر چندگونای دلخواه V تعمیم داده می‌شود: نقطهٔ $P \in V$ ناتکین است هرگاه P یک نقطهٔ ناتکین یک مجموعهٔ باز آفین شامل P مانند $V_\circ \subset V$ باشد؛ به‌موجب فرع (۹.۶) این مفهوم به‌انتخاب $V_\circ$ بستگی ندارد. از سوی دیگر، برای چندگونای تصویری $V \subset \mathbb{P}^n$، گاهی مفیدتر است فضای مماس بر V در P را به‌عنوان یک زیرفضای تصویری $\mathbb{P}^n$ در نظر بگیریم. در اینجا، تعریف را تنها در مورد یک ابررویه بیان می‌کنیم: اگر $V = V(f)$ ابررویه‌ای باشد که توسط چندجمله‌یی همگن درجهٔ dِ $f \in k[X_\circ, \cdots, X_n]$ تعریف شده است و $P = (a_\circ : \cdots : a_n) \in V$، آنگاه معادلهٔ $\sum \partial f/\partial X_i(P) \cdot X_i = \circ$ معادلهٔ یک ابرصفحه در $\mathbb{P}^n$ است که نقش فضای مماس بر V در P را ایفا می‌کند. اگر $P \in \mathbb{A}^n_{(\circ)}$، آنگاه این ابررویهٔ تصویری، بستار تصویریِ ابرصفحه مماس آفین بر $V_{(\circ)}$ در P است، که این موضوع به‌راحتی بااستفاده از فرمول اویلر قابل تحقیق است: زیرا

اگر $f \in k[X_\circ, \cdots, X_n]$ یک چندجمله‌یی همگن درجهٔ d باشد، آنگاه $\sum X_i \cdot \dfrac{\partial f}{\partial X_i} = df$

به‌موجب این فرمول، برای این‌که ببینیم $P \in \mathbb{P}^n$ یک نقطهٔ تکین روی V هست یا نیست، تنها تحقیق درستی $(n+1)$ شرط از $(n+2)$ شرط

$$f(P) = 0, \frac{\partial f}{\partial X_i}(P) = 0, i = 0, \cdots, n$$

کافی است. لذا مثلاً اگر درجهٔ f بر مشخصهٔ هیأت k بخشپذیر نباشد، آنگاه $\partial f/\partial X_i(P) = 0$، $i = 1, \cdots, n$، ایجاب می‌کند که $f(P) = 0$ و $P \in V$ یک نقطه تکین باشد.

**( ۱۲.۶ ) مثال حل‌شده: فراگستری.** فرض کنید $B = \mathbb{A}^2$. اگر مختصات در B را با $(u, v)$، و نگاشت $\sigma : B \to \mathbb{A}^2$ را به‌صورت $(u, v) \longmapsto (x = u, y = uv)$ تعریف کنیم، روشن است $\sigma$ یک ریختبری دوسو گویاست: $\sigma$ محور v_ها یعنی خط $\ell : (u = 0)$ را درهم می‌فشارد و به مبدأ O بدل می‌کند و در خارج این مجموعه استثنایی، یک یکریختی است. بیاییم ببینیم که $\sigma$ خم $C : (f = 0) \subset \mathbb{A}^2$ را به‌چه صورتی درمی‌آورد؛ مسأله وقتی جالب خواهد بود که C از مبدأ O بگذرد.

روشن است که $\sigma^{-1}(C) \subset B$ زیرمجموعهٔ جبری است که توسط

$$(f \circ \sigma)(u, v) = f(u, uv) = 0$$

تعریف شده است؛ چون طبق فرض $O \in C$، از اینجا نتیجه می‌شود که خط $\ell : (u = 0)$ مشمول در $\sigma^{-1}(C)$ است، که با رابطهٔ $u|f(u, uv)$ هم‌ارز است. به‌راحتی می‌توان دید که m، یعنی بالاترین توان u، که $u^m|f(u, uv)$، با کوچکترین درجهٔ $m = a + b$ از تکجمله‌ییهای $x^a y^b$ که در f وجود دارند، یعنی، چندگانگی f در O، برابر است؛ لذا $\sigma^{-1}(C)$ به اجتماع خم استثنایی $\sigma^{-1}(O) = \ell$ (با چندگانگی m) و یک خم جدید $C_1$ که توسط $f_1(u, v) = f(u, uv)/u^m$ تعریف می‌شود، تجزیه می‌شود. مثالهای ذیل را در نظر بگیرید

(الف) $f = \alpha x - y + \cdots$ ; یا (ب) $f = y^2 - x^2 + \cdots$ و یا (ج) $f = y^2 - x^3$،

که ... معرف جملات درجات بالاتر است. واضح است در (الف)، f دارای چندگانگی ۱ است، و $f_1 = \alpha - v + \cdots$ (که ... معرف جملاتی است بخشپذیر بر u)، بنابراین $C_1$ مجدداً ناتکین است، و خط $\ell$ را به‌طور مورّب در نقطهٔ $(0, \alpha)$ قطع می‌کند؛ لذا $\sigma$ نقطه $O \in \mathbb{A}^2$ را با خط $\ell$، که نقاط آن با امتدادهای مماس در نقطهٔ O (به‌استثنای $(x = 0)$) متناظرند، عوض می‌کند. در (ب)، $f_1 = v^2 - 1 + \cdots$، در نتیجه $C_1$ دو نقطه ناتکین $(0, \pm 1)$ بالای $O \in C$ دارد؛ بنابراین فراگستری $\sigma$، دو شاخهٔ خم تکین C را «از هم جدا» می‌کند. در مثال (ج)، $f_1 = v^2 - u$، در نتیجه $C_1$ ناتکین است، ولی در بالای نقطه O، خم $C_1$ بر خم درهم فشردهٔ $\ell$ مماس است.

در هریک از حالات (ب) یا (ج)، $\sigma$ خم تکین $C$ را با خم ناتکین $C_1$ عوض می‌کند که با $C$ هم‌ارز دوسوگویاست (که این با دخالت‌دادن «مختصات جدید» $u = x$ و $v = y/x$ انجام می‌گیرد). این همان چیزی است که اصطلاحاً رفع تکینگیها نامیده می‌شود. در حالت خمهای مسطح، این رفع همواره توسط یک رشته از فراگستریها عملی است (به تمرین ۶.۶ برای مثالهای مختلف، و مرجع [فولتن، ص۱۶۲ تا ۱۷۱] برای توضیحات بیشتر مراجعه کنید)، و در این حالت فرایند رفع، اطلاعات مفصلی از تکینگیها به‌دست می‌دهد. قضیهٔ معروفی منسوب به هـ. هیروناکا امکان رفع تکینگیها توسط فراگستریها را (در بعدی دلخواه روی هیأت با مشخصهٔ صفر) تضمین می‌کند. این، یک قضیهٔ نظری عمده و اساسی است که مطالعهٔ دوسوگویای چندگوناها را به مطالعهٔ چندگوناهای ناتکین تبدیل می‌کند؛ ولی، فرایند واقعیِ رفع توسط فراگستریها در حالت کلی، فوق‌العاده پیچیده است و لزوماً به فهم این تکینگیها یا چندگوناها چندان کمکی نمی‌کند.

## تمرینهای بخش ششم

**۱.۶** فرض کنید $k \subset K$ یک توسیع هیأتی، و $(u_1, \cdots, u_r)$، $(v_1, \cdots, v_s)$ دو مجموعه از عناصر $K$ باشند، به‌طوری‌که $(u_1, \cdots, u_r)$ جبری ـ مستقل باشد و $(v_1, \cdots, v_s)$ توسیع $K$ روی $k$ را به‌طور جبری پدید آورد (یعنی $K$ یک توسیع جبری $k(v_1, \cdots, v_s)$ باشد). ثابت کنید $r \leq s$. (راهنمایی: مرحلهٔ استقرایی عبارت از این است که فرض کنید $(u_1, \cdots, u_i, v_{i+1}, \cdots, v_s)$، هیأت $K$ را به‌طور جبری روی $k$ پدید می‌آورند، سپس $u_{i+1}$ را در نظر بگیرید.) از اینجا نتیجه بگیرید که تعداد عناصر هر دو پایهٔ تعالی $K$ روی $k$ یکی هستند.

**۲.۶** قسمت (ب)ی قضیهٔ ۸.۶ را ثابت کنید. (راهنمایی.

$$I(V_f) = (I(V), Yf - 1) \subset k[X_1, \cdots, X_n, Y]$$

در نتیجه اگر $Q = (a_1, \cdots, a_n, b) \in V_f$، آنگاه $T_Q V_f \subset \mathbb{A}^{n+1}$ توسط معادلات $T_P V \subset \mathbb{A}^n$ و یک معادلهٔ متضَمن $Y$ تعریف می‌شود.)

**۳.۶** نقاط تکین خمهای ذیل در $\mathbb{A}^2$ را معین کنید.

(الف) $y^2 = x^3 - x$؛ (ب) $y^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$؛

(ج) $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy(x + y + 1) = 0$؛ (د) $x^2 = x^4 + y^4$؛

(هـ) $xy = x^6 + y^6$؛ (و) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$؛ (ز) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

**۴.۶** نقاط تکین رویه‌های ذیل در $\mathbb{A}^3$ را به‌دست آورید

(الف) $xy^2 = z^2$؛ (ب) $x^2 + y^2 = z^2$؛ (ج) $xy + x^3 + y^3 = 0$. (نمایش ترسیمی قسمتهای حقیقی رویه‌ها در حد توانایی‌تان، مفید خواهد بود؛ هندسهٔ جبری‌دانها معمولاً رسّامهای خوبی نیستند!)

۵.۶ نشان دهید ابررویهٔ $V_d \subset \mathbb{P}^n$ که توسط معادله

$$X_0^d + X_1^d + \cdots + X_n^d = 0$$

تعریف می‌شود، ناتکین است (به‌شرط این‌که مشخصهٔ k عدد d را نشمارد).

۶.۶ (الف) فرض کنید $C_n \subset \mathbb{A}^2$ خمی باشد که توسط $f_n : y^2 = x^{2n+1}$ تعریف شده است و $\sigma : B \to \mathbb{A}^2$ مطابق (۱۲.۶) تعریف شده و $\ell = \sigma^{-1}(O)$ باشد؛ نشان دهید $\sigma^{-1}(C_n)$ به‌اجتماع $\ell$ و یک خم یکریخت با $C_{n-1}$ تجزیه می‌شود. از آنجا نتیجه بگیرید که $C_n$ با یک رشته از n فراگستری، قابل رفع است.

(ب) چگونگی رفع تکینگیهای خمهای ذیل را به‌وسیلهٔ یک یا چند بار فراگستری بررسی کنید: (۱) $y^3 = x^4$؛ (۲) $y^3 = x^5$؛ (۳) $(y^2 - x^2)(y^2 - x^5) = x^8$.

۷.۶ ثابت کنید که فصل مشترک یک ابررویهٔ $V \subset \mathbb{A}^n$ (که یک ابرصفحه نیست)، با ابرصفحهٔ مماس $T_PV$، دارای تکینگی در نقطه P است.

## بخش هفتم. بیست و هفت خط واقع بر یک رویهٔ درجهٔ سوم

در این بخش $S \subset \mathbb{P}^۳$ یک رویهٔ ناتکین درجهٔ سوم است که توسط یک چندجمله‌یی درجهٔ سوم همگن $f = f(X, Y, Z, T)$ داده شده است. خطوط $\ell$ از $\mathbb{P}^۳$ را که روی رویهٔ $S$ واقع‌اند، در نظر می‌گیریم.

### ( ۱.۷ ) نتایج ناتکینی

**قضیه.** (الف) برای هر نقطهٔ $P \in S$ حداکثر سه خط واقع بر $S$ از نقطهٔ $P$ می‌گذرند؛ اگر دو یا سه خط از یک نقطه بگذرند، حتماً همصفحه خواهند بود. یعنی به اشکال ذیل هستند


(ب) هر صفحهٔ $\Pi \subset \mathbb{P}^۳$ رویهٔ $S$ را به یکی از صورتهای ذیل قطع می‌کند:
(۱) یک خم درجهٔ سوم تحویلناپذیر؛ یا (۲) یک مقطع مخروطی و یک خط؛ و یا (۳) سه خط متمایز.

**برهان.** (الف) اگر $\ell \subset S$، آنگاه $\ell = T_P\ell \subset T_PS$، در نتیجه خطوط واقع بر $S$ که از $P$ می‌گذرند بر صفحهٔ $T_PS$ قرار دارند؛ مطابق قسمت (ب) تعداد آنها حداکثر سه‌تاست.

(ب) باید نشان دهیم که خط چندگانه امکانپذیر نیست: فرض کنیم $\Pi : (T = ۰)$ و $\ell : (Z = ۰) \subset \Pi$، آنگاه چندگانه‌بودن خط $\ell$ روی $S \cap \Pi$ به این معنی است که $f$ به‌صورت ذیل است

$$f = Z^۲ \cdot A(X, Y, Z, T) + T \cdot B(X, Y, Z, T)$$

که $A$ یک صورت خطی و $B$ یک صورت درجه دوم است. لذا $S : (f = ۰)$ در نقطهٔ $Z = T = B = ۰$ تکین است؛ این مجموعه، مجموعه‌ای است ناتهی زیرا، این نقاط با مجموعهٔ ریشه‌های $B$ روی خط $\ell : (Z = T = ۰)$ متناظرند. $\square$

**( ۲.۷ ) قضیه.** لااقل یک خط $\ell$ بر رویهٔ $S$ وجود دارد.

راههای چندی برای اثبات این قضیه وجود دارند. یکی از برهانهای استانده، استفاده از بعد شماری است: خطوط واقع در $\mathbb{P}^۳$ توسط چندگونایی چهاربعدی پارامتری می‌شوند، و برای آن‌که خط $\ell$ روی $S$ واقع شود باید $\ell$ چهار شرط داشته باشد (زیرا تحدید $f$ به $\ell$ یک صورت درجهٔ

سوم است، که چهار ضریب آن باید صفر شوند). اندکی کار لازم است تا این توضیحات به‌صورت برهان دقیق درآیند، زیرا، در وهلهٔ اول نشان داده می‌شود که مجموعه این خطوط فقط بعد نامنفی دارد، و این به‌معنی ناتهی‌بودن این مجموعه نیست ($\longleftarrow$ توضیحات و تذکرات اضافی برای اهل نظر (۱۵.۸) در مورد اثبات سنتی این مطلب و مشکلات آن).

همچنین کاملاً منطقی است که قضیه را ثابت‌شده فرض کنیم (یعنی خود را به رویه‌هایی که شامل خطوط مستقیم‌اند محدود کنیم). حال توضیح می‌دهیم که چگونه (۲.۷) را می‌توان مستقیماً از راه هندسه مختصاتی و نظریهٔ حذف اثبات نمود. برهان آن پنج ـ شش صفحهٔ آتی را دربرمی‌گیرد، و به چهار مرحله تقسیم می‌شود. می‌توانید اگر ترجیح می‌دهید، از مطالعهٔ آن صرفنظر کنید (در این‌صورت مطلب را از (۳.۷) ادامه دهید).

**مرحلهٔ اول** (ساختمان مقدماتی). برای هر نقطهٔ $P \in S$، فصل مشترک $S$ با صفحهٔ مماس $T_PS$، خم درجهٔ سوم مسطح $C = S \cap T_PS$ است، که طبق تمرین ۷.۶ در نقطهٔ $P$ تکین است. می‌توان فرض کرد که $C$ تحویلناپذیر است، زیرا در غیر این‌صورت، $P$ بر خطی از $S$ واقع، و مطلب اثبات‌شده است؛ لذا $C$ یک خم درجهٔ سوم گرهی و یا تیزه‌یی است، و مختصات $(X : Y : Z : T)$ از $\mathbb{P}^3$ را می‌توان طوری اختیار کرد که $T_PS : (T = 0)$ و $P = (0 : 0 : 1 : 0)$، و

$$\mathbf{C} : (XYZ = X^3 + Y^3) \text{یا} (X^2Z = Y^3)$$

این مطلب که $C$ برای $P \in S$ داده شده گرهی یا تیزه‌یی باشد به ماتریس مشتقات دوم $f$ در $P$ (یا ماتریس هِسِه‌یی) بستگی دارد؛ این موضوع به‌طور مشروح در تمرین ۳.۷ بحث شده است، که نشان می‌دهد (اگر مشخصه مخالف ۲ باشد) حالت تیزه‌یی حتماً برای بعضی از نقاط $P \in S$ باید پیش آید. بنابراین برای سادگی، قضیهٔ ۲.۷ را در حالت خم تیزه‌یی ثابت می‌کنیم، در اصل، اثبات در حالت خم گرهی نیز مشابه این حالت است، فقط محاسبات حذفی پیچیده‌تر است ($\longleftarrow$ تمرین ۱۰.۷). بنابراین فرض کنید

$$f = X^2Z - Y^3 + gT$$

که $g = g_2(X, Y, Z, T)$ یک صورت درجهٔ دوم است؛ و بنابر فرض ناتکینی $S$ در $P$، $g(0 : 0 : 1 : 0) \neq 0$، لذا می‌توان فرض کرد $g(0 : 0 : 1 : 0) = 1$.

**مرحلهٔ دوم** (حکم ادعای اصلی). نقطهٔ متغیر $P_\alpha = (1 : \alpha : \alpha^3 : 0)$ را روی $C \subset S$ در نظر می‌گیریم. هر خط از $\mathbb{P}^3$ که از نقطهٔ $P_\alpha$ می‌گذرد، صفحهٔ متمم یعنی $\Pi : (X = 0)$ را

در نقطهٔ $Q = (\circ : Y : Z : T)$ قطع می‌کند. معادلاتی را که مستلزمِ بودن خط $P_\alpha Q$ روی S باشد، برحسب $\alpha$ و مختصات Q می‌نویسیم؛ از بسط $f(\lambda P_\alpha + \mu Q)$ برحسب توانهای $\lambda$ و $\mu$ خواهیم داشت

$$P_\alpha Q \subset S \Longleftrightarrow A(Y,Z,T) = B(Y,Z,T) = C(Y,Z,T) = \circ$$

که A و B و C بترتیب صورتهای درجهٔ اول، دوم و سوم برحسب Y، Z و Tاند و ضرایب آنها شامل $\alpha$ است.

**ادعای اصلی.** یک چندجمله‌ای «منتج» مانند $R_{۲۷}(\alpha)$ وجود دارد، که یک چندجمله‌یی تکین از درجهٔ ۲۷ نسبت به $\alpha$ است، به‌طوری که

$$R(\alpha) = \circ \Longleftrightarrow \text{معادله‌های } A = B = C = \circ \text{ ریشهٔ مشترکی مانند } (\eta : \xi : \tau) \in \mathbb{P}^۲ \text{ دارند}$$

این حکم، اثبات قضیهٔ (۲.۷) است، زیرا نتیجه می‌دهد که برای هر ریشهٔ $\alpha$ از R، نقطه‌ای مانند $Q = (\circ : \eta : \xi : \tau)$ روی $\Pi$ وجود دارد که برای آن خط $P_\alpha Q$ روی S واقع است. اندیشهٔ اصلی در اینجا، محاسبات حذفی استانده بر پایهٔ تمرین ۱۰.۱ است؛ بقیهٔ اثبات مربوط به این است که A، B و C را به‌طور صریح به‌دست آوریم و مدعا را ثابت کنیم.

**مرحلهٔ سوم.** (صورت قطبی). بنابر تعریف، قطبی f صورتی است مرکب از دو دسته متغیر $(X, Y, Z, T)$ و $(X', Y', Z', T')$ به شکل

$$f_۱(X, Y, Z, T; X', Y', Z', T') = \frac{\partial f}{\partial X}X' + \frac{\partial f}{\partial Y}Y' + \frac{\partial f}{\partial Z}Z' + \frac{\partial f}{\partial T}T'$$

باتوجه به تعریف فضای مماس ($\longleftarrow$ شماره‌های (۴.۶) و (۱۰.۶))، روشن است که برای نقاط $P = (X : Y : Z : T) \in S$ و $P \neq Q = (X' : Y' : Z' : T') \in \mathbb{P}^۳$،

$$\text{خط } PQ \text{ در نقطهٔ } P \text{ بر رویهٔ } S \text{ مماس است} \Longleftrightarrow f_۱(P; Q) = \circ$$

همچنین روشن است که

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda^۳ f(P) + \lambda^۲ \mu f_۱(P; Q) + \lambda \mu^۲ f_۱(Q; P) + \mu^۳ f(Q)$$

در نتیجه برای $P \neq Q \in \mathbb{P}^۳$، چهار شرط

$$f(P) = f_۱(P; Q) = f_۱(Q; P) = f(Q) = \circ$$

شرایط واقع‌بودن $\ell = PQ$ بر رویهٔ $S : (f = ۰)$ هستند. به زبان هندسی، این معادلات بیان می‌کنند که خط $\ell$، هم در نقطهٔ $P$ و هم در نقطهٔ $Q$ بر رویهٔ $S$ مماس است، بدین ترتیب $f|_\ell$ در هر دو نقطه ریشهٔ دوگانه دارد، و لذا طبق قضیهٔ ۸.۱، $\ell \subset S$.

صورت قطبی $f = X^۲Z - Y^۳ + gT$ عبارت است از

$$f_۱ = ۲XZ \cdot X' - ۳Y^۲ \cdot Y' + X^۲ \cdot Z' + g(X, Y, Z, T) \cdot T' + Tg_۱$$

که در اینجا $g_۱ = g_۱(X, Y, Z, T; X', Y', Z', T')$ صورت قطبی $g$ است که به‌همان شکل بالا تعریف می‌شود؛ از آنجا که $g$ یک صورت درجهٔ دوم است، $g_۱$ یک صورت دوخطی متقارن خواهد بود، در نتیجه $g_۱(P, P) = ۲g(P)$.

با قراردادن $P_\alpha = (۱ : \alpha : \alpha^۳ : ۰)$ و $Q = (۰ : Y : Z : T)$، معادلات $P_\alpha Q \subset S$ به‌شکل $A = B = C = ۰$ درمی‌آیند، که

$$A = Z - ۳\alpha^۲Y + g(۱, \alpha, \alpha^۳, ۰)T$$
$$B = -۳\alpha Y^۲ + g_۱(۱, \alpha, \alpha^۳, ۰; ۰, Y, Z, T)T$$
$$C = -Y^۳ + g(۰, Y, Z, T)T$$

**مرحلهٔ چهارم** (محاسبات حذفی). حال متغیرهای $Y$ و $Z$ و $T$ را از سه معادله اخیر، باتوجه به بالاترین توانهای موجود $\alpha$، حذف می‌کنیم. از آنجا که $g(۰, ۰, ۱, ۰) = ۱$، نتیجه می‌شود که

$$g(۱, \alpha, \alpha^۳, ۰) = \alpha^۶ + \cdots = a^{(۶)}$$

که $\ldots$ معرف جملات با توانهای پایین‌تر نسبت به $\alpha$ است؛ بنابراین $a^{(۶)}$ یک چندجمله‌یی تکین از درجهٔ ۶ است. لذا معادلهٔ $A = ۰$، $Z$ را به‌شکل ترکیبی خطی از $Y$ و $T$ به‌دست می‌دهد،

$$Z = ۳\alpha^۲Y - a^{(۶)}T$$

از قراردادن $Z$ در $B$، و استفاده از دوخطی‌بودن $g_۱$ خواهیم داشت

$$B' = -۳\alpha Y^۲ + g_۱(۱, \alpha, \alpha^۳, ۰; ۰, Y, ۳\alpha^۲Y - a^{(۶)}T, T)T = b_۰Y^۲ + b_۱YT + b_۲T^۲$$

که

$$b_۰ = -۳\alpha \quad , \quad b_۱ = g_۱(۱, \alpha, \alpha^۳, ۰; ۰, ۱, ۳\alpha^۲, ۰) = ۶\alpha^۵ + \cdots,$$
$$b_۲ = g_۱(۱, \alpha, \alpha^۳, ۰; ۰, ۰, -a^{(۶)}, ۱) = -۲\alpha^۹ + \cdots$$

همچنین از قراردادن $Z$ در $C$ و بسط صورت درجهٔ دوم $g$ خواهیم داشت

$$C' = -Y^3 + g(0, Y, 3\alpha^2 Y - a^{(6)}T, T)T = c_0 Y^3 + c_1 Y^2 T + c_2 Y T^2 + c_3 T^3$$

که

$$\begin{aligned} c_0 &= -1 \quad , \quad c_1 = g(0, 1, 3\alpha^2, 0) = 9\alpha^4 + \cdots, \\ c_2 &= g_1(0, 1, 3\alpha^2, 0; 0, 0 - a^{(6)}, 1) = -6\alpha^8 + \cdots, \\ c_3 &= g(0, 0, -a^{(6)}, 1) = \alpha^{12} + \cdots \end{aligned}$$

اما مطابق نتیجهٔ تمرین ۱.۱۰، $B'$ و $C'$ دارای ریشهٔ مشترک $(\eta : \tau)$ هستند اگر و تنها اگر

$$\det \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

این دترمینان یک چندجمله‌یی است برحسب $\alpha$، و با اندکی دقت می‌توان دید که جملهٔ پیشرو آن با قراردادن جملهٔ پیشرو هر درایه به‌جای آن درایه در این دترمینان به‌دست می‌آید:

$$\det \begin{vmatrix} -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & & \\ & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 & \\ & & -3\alpha & 6\alpha^5 & -2\alpha^9 \\ -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} & \\ & -1 & 9\alpha^4 & -6\alpha^8 & \alpha^{12} \end{vmatrix} = \alpha^{27} \cdot \det \begin{vmatrix} -3 & 6 & -2 & & \\ & -3 & 6 & -2 & \\ & & -3 & 6 & -2 \\ -1 & 9 & -6 & 1 & \\ & -1 & 9 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^{27}$$

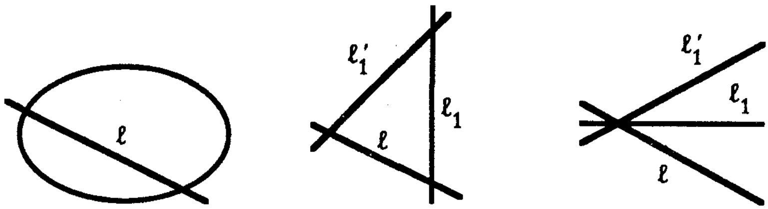
با این ترتیب برهان ادعای اصلی کامل می‌شود. □

**( ۳.۷ ) قضیه.** برای هر خط دادهٔ‌شدهٔ $\ell \subset S$، دقیقاً پنج جفت خط $(\ell_i, \ell'_i)$ از خطوط واقع بر $S$ وجود دارند که $\ell$ را قطع می‌کنند به‌گونه‌ای که

(۱) برای $i = 1, \cdots, 5$، $\ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$ بر یک صفحه است، و

(۲) برای $i \neq j$، $(\ell_i \cup \ell'_i) \cap (\ell_j \cup \ell'_j) = \varnothing$.

**برهان.** (اقتباس از [بوویل، ص۵۱]). اگر $\Pi$ صفحه‌ای از $\mathbb{P}^3$ شامل خط $\ell$ باشد، آنگاه، (مقطع مخروطی)+$\Pi \cap S = \ell$، (زیرا $f|_\Pi$ بر معادله $\ell$ بخشپذیر است). این مقطع مخروطی می‌تواند تکین یا ناتکین باشد:




باید ثابت کنیم که دقیقاً پنج صفحه متمایز $\Pi_i \supset \ell$ وجود دارند که برای آنها حالت مقطع مخروطی تکین پیش می‌آید. ویژگی بیان‌شده در (۲)، که حاکی از فصل‌مشترک نداشتن صفحات متمایز است، از (۱.۷ـ(الف)) نتیجه خواهد شد.

فرض کنید $\ell : (Z = T = 0)$؛ پس می‌توانیم $f$ را به‌شکل ذیل بسط دهیم

$$f = AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F \qquad (*)$$

که $A, B, C, D, E, F \in k[Z, T]$، به‌قسمی که $A$، $B$ و $C$ صورتهای خطی، $D$ و $E$ صورتهای درجهٔ دوم هستند، و $F$ یک صورت درجهٔ سوم است. اگر این معادله را به‌عنوان یک مقطع مخروطی متغیر برحسب $X$ و $Y$ در نظر گیریم، این مقطع مخروطی تکین است اگر و تنها اگر

$$\Delta(Z, T) = 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD = 0$$

(در اینجا $\Delta$ چهاربرابر مبین معمولی است اگر مشخصهٔ هیأت مخالف ۲ باشد؛ در حالتی که مشخصه مساوی ۲ باشد، این حکم به یک تمرین ساده بدل می‌شود.)

دقیقتر بگوییم، هر صفحه ماربر $\ell$ به شکل $\Pi : (\mu Z = \lambda T)$ داده شده است، که اگر $\mu \neq 0$، می‌توان فرض کرد $\mu = 1$، در این‌صورت معادله به‌شکل $Z = \lambda T$ درمی‌آید. لذا برحسب مختصات همگن $(X : Y : T)$ روی $\Pi$، $f|_\Pi = T \cdot Q(X, Y, T)$، که

$$\begin{aligned} Q =& A(\lambda, 1)X^2 + B(\lambda, 1)XY + C(\lambda, 1)Y^2 \\ &+ D(\lambda, 1)TX + E(\lambda, 1)TY + F(\lambda, 1)T^2 \end{aligned}$$

اما $\Delta(Z, T)$ چندجمله‌یی همگنی است از درجهٔ پنج، لذا بنابر (۸.۱)، با احتساب چندگانگی، دارای پنج ریشه خواهد بود. برای اثبات قضیه، باید نشان دهیم $\Delta$ ریشهٔ چندگانه ندارد؛ که این مطلب نیز از ناتکینی $S$ نتیجه می‌شود.

**ادّعا.** $\Delta(Z, T)$ فقط ریشه‌های ساده دارد.

فرض کنید $(Z = ۰)$ یک ریشهٔ $\Delta$، و $\Pi : (Z = ۰)$ صفحهٔ متناظر آن است؛ باید نشان دهیم که $\Delta$ بر $Z^۲$ بخشپذیر نیست. طبق شکل بالا، $\Pi \cap S$ مجموعه‌ای متشکل از سه خط است، و برحسب آن که این سه خط متقارب باشند یا نباشند، می‌توان مختصات را طوری ترتیب داد که معادلات به‌شکل ذیل درآیند: یا

$$\ell : (T = ۰) \quad , \quad \ell_۱ : (X = ۰) \quad , \quad \ell'_۱ : (Y = ۰) \qquad (۱)$$

یا

$$\ell : (T = ۰) \quad , \quad \ell_۱ : (X = ۰) \quad , \quad \ell'_۱ : (X = T) \qquad (۲)$$

بنابراین، در حالت (۱)، $f = XYT + Zg$، که $g$ یک صورت درجهٔ دوم است، و برحسب عبارت (*)، رابطهٔ بالا بدین معنی است که $B = T + aZ$، و $Z|A, C, D, E, F$ . بنابراین، به پیمانهٔ جملات بخشپذیر بر $Z^۲$،

$$\Delta \equiv -T^۲F(Z^۲ \text{ به پیمانهٔ})$$

بعلاوه $P = (۰ : ۰ : ۰ : ۱) \in S$، و ناتکینی $S$ در $P$ بدین معنی است که $F$ باید شامل جملهٔ $ZT^۲$ با ضریب ناصفر باشد. بالاخص، $Z^۲$ نمی‌تواند $F$ را بشمارد. بنابراین $(Z = ۰)$ یک ریشهٔ سادهٔ $\Delta$ است.

در حالت (۲) نیز محاسبات مشابه حالت (۱) است ($\leftarrow$ تمرین ۷.۱). $\square$

**(۴.۷) فرع.** (الف) دو خط جدا از هم $\ell, m \subset S$ وجود دارند.

(ب) $S$ یک رویهٔ گویاست (یعنی، با $\mathbb{P}^۲$ به‌طور دوسو گویا هم‌ارز است، $\leftarrow$ (۹.۵)).

**برهان.** (الف) باتوجه به (۳.۷ـ(۲)) کافی است دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ را در نظر بگیریم.

(ب) دو خط جدا از هم $\ell, m \subset S$ را اختیار می‌کنیم، و نگاشتهای گویای

$$\varphi : S -\to \ell \times m \quad \text{و} \quad \psi : \ell \times m -\to S$$

را به‌شرح ذیل تعریف می‌کنیم. اگر $P \in \mathbb{P}^۳ \setminus (\ell \cup m)$، خط یکتایی مانند $n$ وجود دارد که از نقطهٔ $P$ می‌گذرد و هر دو خط $\ell$ و $m$ را قطع می‌کند؛ یعنی

$$P \in n \quad , \quad \ell \cap n \neq \varnothing \quad , \quad m \cap n \neq \varnothing$$

قرار می‌دهیم $\Phi(P) = (\ell \cap n, m \cap n) \in \ell \times m$. این رابطه معرف ریختبریِ زیر است

$$\Phi : \mathbb{P}^3 \backslash (\ell \cup m) \longrightarrow \ell \times m$$

که تارِ آن روی $(Q, R) \in \ell \times m$ خط $QR$ از $\mathbb{P}^3$ است. حال نگاشت گویای $\varphi : S - \to \ell \times m$ را تحدید $\Phi$ به $S$ تعریف می‌کنیم.

بعکس، برای $(Q, R) \in \ell \times m$، فرض کنید $n$ خط $n = QR$ در $\mathbb{P}^3$ است. طبق (۳.۷) تنها تعدادی متناهی از خطوط واقع بر $S$ هستند که خط $\ell$ را قطع می‌کنند، در نتیجه تقریباً برای هر $(Q, R)$، خط $n$ رویهٔ $S$ را در سه نقطه $\{P, Q, R\}$ قطع می‌کند که $Q$ و $R$ نقاط داده‌شده بر $\ell$ و $m$ هستند. بنابراین، می‌توانیم $\psi : \ell \times m - \to S$ را توسط $(Q, R) \longmapsto P$ تعریف کنیم؛ $\psi$ یک نگاشت گویاست زیرا نسبتهای مختصات $P$ توابعی گویا از نسبتهای مختصات $Q$ و $R$ هستند.

روشن است که $\varphi$ و $\psi$ وارون همدیگرند. □

**(۵.۷)** می‌خواهیم همهٔ خطوط واقع بر رویهٔ $S$ را با ترتیب مطرح‌شده در قضیهٔ ۳.۷ برحسب یک شکلبندی از خط $\ell$ و پنج زوج خط جدا از هم $(\ell_i, \ell'_i)$، به‌دست آوریم. هر خط دیگر $n \subset S$ باید دقیقاً یکی از خطوط $\ell_i$ و $\ell'_i$ را قطع کند که $i = ۱, \dots, ۵$: زیرا در فضای $\mathbb{P}^3$، خط $n$ صفحهٔ $\Pi_i$ را قطع می‌کند و $\Pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$؛ همچنین، $n$ نمی‌تواند هر دو خط $\ell_i$ و $\ell'_i$ را قطع کند، زیرا این موضوع با (۱.۷ـ(الف)) مغایرت پیدا می‌کند. مفتاحِ تعیین بقیهٔ خطوط روی $S$ لم ذیل است. این لم بیان این است که خط $n$، برحسب آنکه توسط کدام‌یک از خطوط $\ell_i$ یا $\ell'_i$ قطع شده باشد، به‌طور یکتا مشخص می‌شود. خط $n$ را قاطع $\ell$ گوییم هرگاه $\ell \cap n \neq \varnothing$

**لم.** فرض کنید $\ell_۱, \dots, \ell_۴ \in \mathbb{P}^3$ خطوطی جدا از هم باشند، در این‌صورت

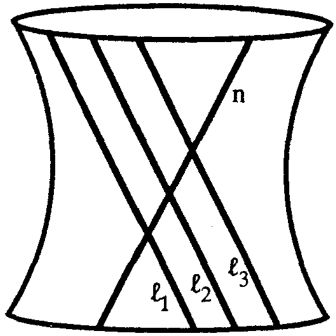
یا هر چهار خط $\ell_i$ بر یک رویهٔ هموار درجهٔ دوم $Q \subset \mathbb{P}^3$ واقع‌اند، و در این‌صورت تعداد قاطعهای مشترک $\ell_۱, \dots, \ell_۴$ نامتناهی است،

و یا، چهار خط $\ell_i$ بر هیچ خم درجه دوم قرار ندارند، یعنی $\ell_۱, \dots, \ell_۴ \not\subset Q$؛ و در این‌صورت این چهار خط یک یا دو قاطع مشترک دارند.

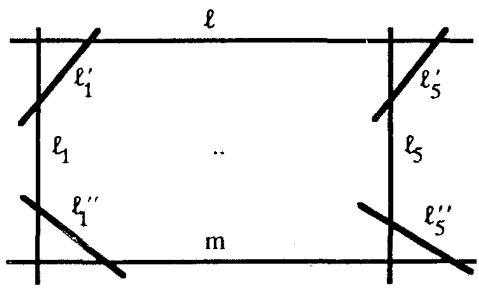
**برهان.** رویهٔ درجهٔ دوم همواری مانند $Q$ وجود دارد به‌طوری که $\ell_۱, \ell_۲, \ell_۳ \subset Q$: برهانهای چندی برای این مطلب وجود دارد (← تمرین ۲.۷).

پس در یک انتخاب مناسب مختصات، $Q : (XT - YZ = ۰)$، و $Q$ شامل دو خانواده خط یا مولد خواهد بود: هر مورب $\ell_۱$، $\ell_۲$، $\ell_۳$ لزوماً مشمول در $Q$ خواهد بود زیرا سه نقطه از آن

متعلق به Q است. حال اگر $\ell_4 \not\subset Q$، آنگاه $\ell_4 \cap Q = \{$یک یا دو نقطه$\}$ ، و مولدهای خانوادهٔ دیگر که از این نقاط می‌گذرند، همهٔ قاطعهای مشترکِ خطوط $\ell_1, \cdots, \ell_4$ خواهند بود. □




**( ۶.۷ ) بیست و هفت خط.** فرض کنید $\ell$ و m دو خط جدا از هم روی S باشند؛ همان‌طور که دیدیم، m از هریک از پنج جفت خط $(\ell_i, \ell_i')$ که $\ell$ را قطع می‌کنند، دقیقاً یکی را قطع می‌کند. با شماره‌گذاری مجدد جفتها، فرض می‌کنیم خط m خطوط $\ell_i$، $i = 1, \cdots, 5$، را قطع کند. علامتگذاری زیر را در رابطه با خطوطی که m یا $\ell$ را قطع می‌کنند به‌کار می‌بریم:




بدین‌ترتیب پنج جفت خطی که m را قطع می‌کنند عبارت‌اند از $(\ell_i, \ell_i'')$، $i = 1, \cdots, 5$. با اِعمال (۳.۷ـ(۲)) بر m، نتیجه می‌شود که برای $i \neq j$، خط $\ell_i''$ خط $\ell_j$ را قطع نمی‌کند. ازسوی دیگر، هر خط واقع بر S لزوماً یکی از خطوط $\ell$، $\ell_j$ یا $\ell_j'$ را قطع می‌کند، بنابراین برای $i \neq j$، خط $\ell_i''$ خط $\ell_j'$ را قطع می‌کند.

**ادّعا.** (۱) اگر $n \subset S$ خط دیگری جز ۱۷ خط بالا باشد، دقیقاً سه خط از پنج خط $\ell_1, \cdots, \ell_5$ را قطع می‌کند.

(۲) بعکس، برای هر سه اندیس $\{i,j,k\} \subset \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، دقیقاً یک خط یکتای $\ell_{ijk} \subset S$ وجود دارد که $\ell_i$، $\ell_j$ و $\ell_k$ را قطع می‌کند.

**برهان.** (۱) روشن است که هر چهار خط جدا از هم روی S، نمی‌توانند همه باهم بر یک رویهٔ درجهٔ دوم Q واقع باشند، زیرا در غیر این‌صورت $Q \subset S$، که با تحویلناپذیری S مغایرت دارد.

اگر n حداقل چهار خط از خطوط $\ell_i$ را قطع کند، آنگاه مطابق لم ۵.۷، $n = m$ یا $n = \ell$، که یک تناقض است. اگر n حداکثر دو خط از خطوط $\ell_i$ را قطع کند، آنگاه لازم می‌آید حداقل سه خط از $\ell'_i$ها را قطع کند، و در نتیجه n، مثلاً چهار خط $\ell'_۲$، $\ell'_۳$، $\ell'_۴$، $\ell'_۵$ و یا چهار خط $\ell_۱$، $\ell'_۳$، $\ell'_۴$، $\ell'_۵$ را قطع می‌کند؛ لیکن بنابر آنچه در بالا گفته شد، $\ell$ و $\ell''_۱$ دو قاطع مشترکِ پنج خطِ جدا از هم $\ell'_۲$، $\ell'_۳$، $\ell'_۴$، $\ell'_۵$ و $\ell_۱$ می‌باشند، لذا مجدداً طبق لم۵.۷ اگر n بیش از سه خط از خطوط فوق را قطع کند، آنگاه $n = \ell$ یا $n = \ell''_۱$. این نتیجه نیز تناقضی مشابه است.

(۲) به‌موجب (۳.۷) تعداد ۱۰ خط بر S وجود دارند که $\ell_۱$ را قطع می‌کنند، که از این ده خط فقط چهار خط آن به‌شمار آمده‌اند (که عبارت‌اند از، $\ell$، $\ell'_۱$، m و $\ell''_۱$). شش خط بقیه دقیقاً دو خط از چهار خط $\ell_۲$،$\cdots$، $\ell_۵$ را قطع خواهند کرد، و دقیقاً $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت ممکن وجود دارد؛ لذا هر شش حالت باید اتفاق افتد. □

با این ترتیب خطوط واقع بر S عبارت‌اند از

$$\{\ell, m, \ell_i, \ell'_i, \ell''_i, \ell_{ijk}\}$$

که تعداد آنها برابر است با

$$۱ + ۱ + ۵ + ۵ + ۵ + ۱۰ = ۲۷$$

**(۷.۷) پیکربندی خطوط.** حکم دیگر این است که خطوط واقع بر S عبارت‌اند از $\ell$، $\ell_۱$، $\cdots$، $\ell_۵$، $\ell'_۱$، $\cdots$، $\ell'_۵$، و ۱۶ خط دیگر که تعداد فردی از خطوط $\ell_۱$،$\cdots$،$\ell_۵$ را قطع می‌کنند:

$\ell''_i$ فقط $\ell_i$ را قطع می‌کند،

$\ell_{ijk}$ تنها $\ell_i$، $\ell_j$ و $\ell_k$ را قطع می‌کند،

m فقط $\ell_۱$، $\ldots$ ،$\ell_۵$ را قطع می‌نماید.

با نامگذاری طبق (۶.۷)، می‌توان به‌آسانی رابطهٔ وقوع بین ۲۷ خط واقع بر S را به‌شرح زیر به‌دست آورد:

$\ell$ خطوط $\ell_1$، ...، $\ell_5$، $\ell'_1$، ...، $\ell'_5$ را قطع می‌کند؛

$\ell_1$ خطوط $\ell$، m، $\ell'_1$، $\ell''_1$، و $\ell_{1jk}$ را برای ۶ حالت $\{j,k\} \subset \{۲,۳,۴,۵\}$ قطع می‌کند؛

$\ell'_1$ خطوط $\ell$، $\ell_1$، $\ell''_j$ (برای چهار حالت $j = ۲,۳,۴,۵$) و $\ell_{ijk}$ (برای چهار حالت $\{i,j,k\} \subset \{۲,۳,۴,۵\}$) را قطع می‌کند؛

$\ell''_1$ خطوط m، $\ell_1$، $\ell'_j$ (برای چهار حالت $j = ۲,۳,۴,۵$) و $\ell_{ijk}$ (برای چهار حالت $\{i,j,k\} \subset \{۲,۳,۴,۵\}$) را قطع می‌نماید؛

$\ell_{۱۲۳}$ خطوط $\ell_1$، $\ell_2$، $\ell_3$، $\ell_{۱۴۵}$، $\ell_{۲۴۵}$، $\ell_{۳۴۵}$، $\ell'_4$، $\ell'_5$، $\ell''_4$، $\ell''_5$ را قطع می‌کند.

این پیکربندی ترکیبیاتی نمایشهای مختلف متعددی دارد، که بعضی از آنها از تقارنی بیشتر از آنچه در بالا داده شد، برخوردارند، به‌عنوان مثال ← مرجع [سمپل و راث، صفحات ۱۲۲ـ۱۲۸ و ۱۵۱ـ۱۵۲].

## تمرینهای بخش هفتم.

**۱.۷** حالت (۲)یِ حکم قضیهٔ۳.۷ را ثابت کنید. (راهنمایی: مشابه برهان مذکور در حالت (۱)، $f = X(X-T)T + Zg$، در نتیجه $A = T + aZ$ و $D = -T^2 + Z\cdot\ell$، که $\ell$ یک عامل خطی است، بنابراین $Z|B, C, E, F$ و Z چندجمله‌یی D را نمی‌شمارد؛ همچنین، از ناتکینی S در $(۰ : ۰ : ۱ : ۰)$ نتیجه می‌شود که $C = cZ$، که $c \neq ۰$. حال $\Delta(Z,T)$ به پیمانهٔ $Z^2$ را محاسبه کنید).

**۲.۷** ثابت کنید برای هر سه خط جدا از هم مفروض $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset \mathbb{P}^3$، یک رویهٔ درجهٔ دوم ناتکین Q وجود دارد به‌طوری که $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subset Q$. (راهنمایی: برای هر i، سه نقطهٔ $P_i, P'_i, P''_i \in \ell_i$ را درنظر بگیرید، و مشابه (۱۱.۱) یا (۴.۲) نشان دهید که حداقل یک رویهٔ درجهٔ دوم مار بر این نقاط وجود دارد؛ که نتیجه می‌شود $\ell_i \subset Q$. حال ثابت کنید Q نمی‌تواند تکین باشد: مثلاً اگر Q اجتماع دو صفحه باشد، چه پیش می‌آید؟)

**۳.۷ هسه‌یی.** فرض کنید $f = f_d(x_0, \cdots, x_n)$ یک صورت درجهٔ d برحسب $x_0، \cdots، x_n$ و معرف ابررویهٔ $V : (f = ۰) \subset \mathbb{P}^n$ باشد؛ و برای سادگی فرض کنید مشخصهٔ هیأت مخالف ۲ است و عدد $(d - ۱)$ را نمی‌شمارد. برای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم f، از قرارداد $f_{x_i} = \partial f/\partial x_i$ و $f_{x_i x_j} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ استفاده می‌کنیم. بسط تیلر f حول نقطهٔ $P \in \mathbb{P}^n$ چنین است

$$f = f(P) + f^{(1)}(\underline{x}) + f^{(2)}(\underline{x}) + \cdots$$

که $f^{(1)}$ و $f^{(2)}$ صورتهای خطی درجه دوم

$$f^{(1)} = \sum f_{x_i}(P) \cdot x_i \qquad , \qquad f^{(2)} = (\tfrac{1}{2}) \sum f_{x_i x_j}(P) \cdot x_i \cdot x_j$$

هستند.

اگر $P \in V$ یک نقطهٔ تکین باشد، آنگاه $f(P)$ و $f^{(1)}$ در نقطهٔ $P$ صفر می‌شوند، و ماهیت $V$ یا $f$ در حوالی $P$ با تقریب مرتبهٔ دوم توسط صورت درجهٔ دوم $f^{(2)}$ معین می‌شود. همچنین اگر $P \in V$ یک نقطهٔ ناتکین باشد، آنگاه ماهیت $f$ وقتی به ابرصفحهٔ $T_P V$ (یا به مقطع ابرصفحهٔ تکین $V \cap T_P V$) تحدید شود، توسط $f^{(2)}$ معین می‌گردد. ماتریس هسه‌ییِ $f$ (نسبت به مختصات $x_0$، ...، $x_n$) توسط $H(f) = H(f, \underline{x}) = \{f_{x_i x_j}\}_{i,j}$، و هسه‌ییِ $f$ به صورت $h(f) = h(f, \underline{x}) = \det\ H(f)$ تعریف می‌شود.

(۱) فرض کنید $x'_i = \sum a_{ij} x_j$ یک تبدیل مختصات تصویری با $A = (a_{ij})$ که یک ماتریس ناتکین $(n + 1) \times (n + 1)$ است، باشد. اگر $g(\underline{x'}) = f(A\underline{x})$، نشان دهید ماتریس هسه‌یی به‌شکل

$$H(g, \underline{x'}) = ({}^t A) H(f, \underline{x}) A$$

تبدیل می‌شود که ${}^t A$ ماتریس ترانهادهٔ $A$ است؛ نتیجه بگیرید که $h(g, \underline{x'}) = (\det A)^2 h(f, \underline{x})$.

(۲) یک قطعهٔ آفین $V_{(i)} \subset \mathbb{A}^n_{(i)}$ از $V : (f = 0)$ را مطابق (۵.۵) در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $P \in V_{(i)}$ یک نقطهٔ ناتکین باشد، و $\Pi = T_P V_{(i)}$ صفحهٔ مماس آفین فرض شود؛ تحدید معادلهٔ معرف $V_{(i)}$، یعنی $f/x_i^d$ را به $\Pi$، $\varphi$ می‌نامیم. ثابت کنید بسط تیلر $\varphi$ در $P$ با یک صورت درجهٔ دوم ناتباهیدهٔ $\varphi^{(2)}$ (از $(n - 1)$ متغیرا) شروع می‌شود اگر و تنها اگر $h(f)(P) \neq 0$.

(راهنمایی. بااستفاده از (۱) مطلب را به‌حالت $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$ و $T_P V : (x_1 = 0)$ تبدیل کنید. در این‌صورت $\varphi^{(2)}$، بلوک $(n - 1) \times (n - 1)$ زیرین سمت راست ماتریس هسه‌یی تصویری $H(f)$ خواهد بود. باتوجه به $f_{x_i}(P) = 0$ برای $i \neq 1$ و فرمول اویلر $\sum_j f_{x_i x_j} x_j = (d - 1) f_{x_i}$، نشان دهید تنها یک درایهٔ ناصفر در سطر و ستون صفرم ماتریس $H(f)$ وجود دارد. با [فولتن، ص۱۱۶] مقایسه کنید.)

(۳) فرض می‌کنیم $C : (f = 0) \subset \mathbb{P}^2$ یک خم درجهٔ سوم مسطح ناتکین باشد؛ از جزء (۲) نتیجه بگیرید که $P \in C$ یک نقطهٔ عطف است اگر و تنها اگر $H(f)(P) = 0$. قضیه بزو ایجاب می‌کند که مجموعهٔ $(f = H(f) = 0) \subset \mathbb{P}^2$ ناتهی باشد ($\leftarrow$ (۹.۱) و مرجع [فولتن، ص۱۱۲]).

(۴) فرض می‌کنیم $S : (f = \circ) \subset \mathbb{P}^{3}$ یک رویهٔ درجهٔ سوم ناتکین باشد، برای هر $P \in S$ ثابت کنید اگر $P$ روی هیچ خطی از $S$ نباشد، فصل مشترک $S \cap T_P S$ یک خم درجهٔ سوم تیزه‌یی است اگر و تنها اگر $H(f)(P) = \circ$. نتیجه بگیرید که، همان‌طور که در مرحلهٔ اول برهان (۲.۷) لازم بود، مقاطعی به‌صورت خم درجهٔ سوم تیزه‌یی وجود دارند.

**۴.۷** (۱) نشان دهید اگر $P \in S$ یک نقطهٔ تکین رویهٔ درجهٔ سوم باشد، آنگاه حداقل یک خط $\ell \subset V$ (و در «وضعیت عمومی»، ۶ خط) وجود دارد که از $P$ می‌گذرد.

(۲) اگر $X \subset \mathbb{P}^{4}$ یک ابررویهٔ درجهٔ سوم ناتکین (یک خمینهٔ سه‌بعدی درجهٔ سوم) و $P \in X$ باشد، آنگاه حداقل یک خط $\ell \subset X$ (و در «وضعیت عمومی»، ۶ خط) وجود دارد که از $P$ می‌گذرد. ( راهنمایی: معادلهٔ $X$ را برحسب مختصاتی که در آن $P = (\circ : \cdots : \circ : 1)$، بنویسید.)

**۵.۷** ثابت کنید نگاشت گویای $\varphi : S \dashrightarrow \ell \times m$ که در جزء (ب)ی فرع ۴.۷ بیان گردید، در واقع یک ریختبری است؛ نشان دهید که $\varphi$ پنج خط $S$ را درهم می‌فشارد و به نقطه‌ای مبدل می‌کند.

**۶.۷** همهٔ ۲۷ خط واقع بر رویهٔ درجهٔ سوم قطری (یا رویهٔ فرما) به معادلهٔ

$$S : (X^{3} + Y^{3} + Z^{3} + T^{3} = \circ) \subset \mathbb{P}^{3}$$

را برحسب صفحه‌هایی مانند $(X = \rho Y)$، $\rho^{3} = 1$، به‌دست آورید.

**۷.۷** فرض کنید رویهٔ درجهٔ سوم $S \subset \mathbb{P}^{3}$ به‌صورت $S : (f = \circ)$ با معادلهٔ

$$f(X, Y, Z, T) = ZX^{2} + TY^{2} + (Z - d^{2}T)(Z - e^{2}T)(Z - f^{2}T) = \circ$$

که در آن $d$ و $e$ و $f$ مقادیری متمایز و ناصفر از $k$ هستند، و خط $\ell \subset S$ توسط $Z = T = \circ$ داده شده‌اند. با در نظرگرفتن صفحهٔ متغیری ماربر $\ell$ مشابه (۳.۷)، معادلات ۱۰ خط از خطوط $S$ را که $\ell$ را قطع می‌کنند، بنویسید.

**۸.۷** (طرح‌شده توسط ر. کَسدَگلی[1]). رویهٔ درجهٔ سوم $S_{(\circ)} \subset \mathbb{R}^{3}$ در مختصات آفین توسط معادلهٔ

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2xyz = 1 + \lambda^{2} \qquad (*)$$

با $\lambda \in \mathbb{R}$، و $\lambda > \circ$ مقداری ثابت، داده شده است.

1. R. Casdagli

(۱) با نوشتن (*) به‌شکل

$$(x-yz)^۲ = (y^۲-۱)(z^۲-۱)+\lambda^۲$$

نشان دهید که ۴ لوله از $S_{(۰)}$ منشعب می‌شوند که تا بینهایت کشیده شده‌اند. از طرف دیگر، رویهٔ تصویری متناظر $S \subset \mathbb{P}^۳_{\mathbb{R}}$ صفحهٔ بینهایت را در سه خط $XYZ=۰$ قطع می‌کند. بااستفاده از این، توپولوژی S را شرح دهید.

(۲) با در نظرگرفتن (*) به‌عنوان معادلهٔ یک مقطع مخروطی متغیر در صفحهٔ $(x, y)$ با پارامتر z، نشان دهید که چهار زوج خط $S_{(۰)}$ که $(Z=۰)$ را به‌طور مجانبی قطع می‌کنند، دارای معادلات زیرند: $z=\mu, x=(\mu\pm\lambda)y$؛ $z=-\mu, x=(-\mu\pm\lambda)y$؛ $z=۱, x-y=\pm\lambda$؛ $z=-۱, x+y=\pm\lambda$، که $\mu^۲=۱+\lambda^۲$. رویهٔ $S_{(۰)}$ را در $\mathbb{R}^۳$ و ۲۴ خط آن را به‌کمک رسمهای کامپیوتری و یا مدلی از گچ نمایش دهید.

**۹.۷ حالتی که همه خطوط گویا هستند.** فرض کنید مشخصهٔ هیأت k مخالف ۲ باشد و $S:(f=۰)$ رویهٔ درجهٔ سوم ناتکین زیر:

$$f = A(X,Y)\cdot T - B(X,Y)\cdot Z + (\text{جملات با درجهٔ ناکمتر از ۲ نسبت به } T, Z) = ۰$$

در این‌صورت رویهٔ $S:(f=۰)$ شامل خط $\ell:(Z=T=۰)$ است، و صفحهٔ مماس در نقطهٔ $P=(۱:\lambda:۰:۰)$ عبارت است از $T_PS: A(۱,\lambda)T = B(۱,\lambda)Z$.

(۱) با استفاده از تعویض متغیر خطی نسبت به $(X, Y)$ و $(Z, T)$، A و B را به‌صورت $A=X^۲+\Delta Y^۲$، و $B=XY$ درآورید $(\Delta\in k)$، و نشان دهید اگر $\Delta$ مربع کامل باشد تعویض متغیر خطی مناسبی، A و B را به‌شکل $A=X^۲$ و $B=Y^۲$ درمی‌آورد.

(۲) فرض کنید رویهٔ S شامل خط $m:(X=Y=۰)$ نیز باشد و برای سادگی قرارداد $A=X^۲, B=Y^۲$ را اختیار می‌کنیم. همچنین فرض کنید $\ell_۱$، ...، $\ell_۵$ پنج قاطع مشترک $\ell$ و m هستند، و $P_i=\ell_i\cap\ell=(۱:\lambda_i:۰:۰)$ نقاط تلاقی $\ell$ و $\ell_i$، $(i=۱,\cdots,۵)$ باشند. ثابت کنید

$$\ell_i: (Y=\lambda_iX, T=\lambda_i^۲Z), i=۱,\cdots,۵$$

و همچنین

$$f = X^۲T - Y^۲Z + X(\sigma_۵Z^۲+\sigma_۳ZT+\sigma_۱T^۲) - Y(\sigma_۴Z^۲+\sigma_۲ZT+T^۲)$$

که در آن $\sigma_1$، ... ،$\sigma_5$ توابع متقارن مقدماتی برحسب $\lambda_1$، ... ،$\lambda_5$ هستند.

(۳) بقیهٔ خطوط واقع بر S را پیدا کنید. (راهنمایی: $\ell'_i$ و $\ell''_i$ در صفحاتی واقع‌اند که با آنها آشنایی دارید. با استدلالی مشابه (۶.۷)، به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر خطی که هر سه خط $\ell_1$، $\ell_2$، $\ell_3$ را قطع کند به‌شکل $(\tau_2 Z + T) : X = (\tau_3 Z + \tau_1 Y) : Y = \alpha : \beta$ داده می‌شود که $(\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1$، و $\tau_1$، $\tau_2$، $\tau_3$ توابع متقارن مقدماتی از $\lambda_1$، $\lambda_2$، $\lambda_3$ هستند.)

۱۰.۷ این تمرین برای خواننده‌ای است که به محاسبات طولانی علاقه‌مند است و یا به یک نرم‌افزار جبر کامپیوتری دسترسی دارد. اگر یک رویهٔ درجهٔ سوم ناتکین S شامل یک خم درجهٔ سوم گرهی C (به‌صورت مقطع S با یک صفحه) باشد، معادلهٔ S را می‌توان به‌شکل

$$f = XYZ - X^3 - Y^3 + Tg$$

نوشت. فرض کنید $P_\alpha = (\alpha : \alpha^2 : 1 + \alpha^3 : 0)$ با $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq \infty$، نقطه‌ای متغیر از C باشد، و $Q = (0 : Y : Z : T)$. در این‌صورت با بسط $f(\lambda P_\alpha + \mu Q)$ برحسب قطبی f، مانند مرحلهٔ سوم (۲.۷)، نشان دهید خط $P_\alpha Q \subset S$، اگر و تنها اگر $A = B = C = 0$، که

$$A = (-2\alpha^4 + \alpha)Y + \alpha^3 Z + g(\alpha, \alpha^2, 1 + \alpha^3, 0)T$$

$$B = \alpha YZ - 3\alpha^2 Y^2 + g_1(\alpha, \alpha^2, 1 + \alpha^3, 0; 0, Y, Z, T)T$$

$$C = -Y^3 + g(0, Y, Z, T)T$$

ثابت کنید که یک چندجمله‌یی «منتج» $R_{27}(\alpha)$ وجود دارد، که نسبت به $\alpha$ تکین و از درجهٔ ۲۷ است و جملهٔ ثابت آن ۱ است، به‌طوری که

$$A = B = C = 0 \text{ ریشهٔ مشترکی مانند } (\eta : \xi : \tau) \in \mathbb{P}^2 \text{ دارند} \iff R(\alpha) = 0$$

(راهنمایی: $A = 0$ را نسبت به Z حل کنید (با این ترتیب یک جملهٔ $\alpha^3$ در مخرج پیدا می‌شود)، با قراردادن Z در B و C و به‌دست‌آوردن چندجمله‌ییهای درجهٔ دوم و سوم دومتغیره برحسب Y، T، از دترمینان سیلوستر برای حذف Y و T استفاده کنید. نکته‌ای که محاسبات را در این حالت مشکلتر می‌سازد این است که دترمینانی که از جملهٔ پیشرو در هر درایه به‌دست می‌آید، برابر صفر است. دلیل آن این است که A و B و C، برای $\alpha = 0, \infty$، دارای ریشهٔ مشترک بدیهی $Q = P_\alpha = (0 : 0 : 1 : 0)$ هستند. از پیش می‌دانیم که دترمینان شامل جملات $\alpha^{18}$، ... ، $\alpha^{-15}$ است، و باید با محاسبهٔ چهار ضریب اول و چهار ضریب آخر نشان دهید که این دترمینان برابر است با $(-10\alpha^{15} + \cdots - 10\alpha^{-12})$.

# بخش هشتم. توضیحات نهایی

این بخش برای امتحان‌دادن نیست، ولی مطالعهٔ بعضی از مباحث آن ممکن است موردتوجه دانشجویان قرار گیرد.

## تاریخ و جامعه‌شناسی هندسهٔ جبری به‌عنوان یک مبحث جدید

**( ۱.۸ ) مقدمه.** جایگاه و منزلت هندسهٔ جبری در ریاضیات، در عرض سی و چند سال گذشته، مشابه منزلت ریاضیات در جهان به‌طور کلی بوده است که بیشتر از آنکه آن را بفهمند به آن احترام می‌گذاشتند و از آن واهمه داشتند. در عین‌حال سئوالات روزمره دربارهٔ هندسهٔ جبری، که از سوی همکاران انگلیسی یا دانشجویان دوره‌های تحصیلات تکمیلی دانشگاه واریک پیوسته مطرح می‌شوند، معمولاً سئوالاتی هستند مقدماتی: که قاعدتاً یا در کتاب حاضر آمده‌اند و یا در کتاب [عطیّه و مکدانلد]. آنچه در ذیل می‌خوانید دیدگاهی است در مورد پیشرفتهای اخیر هندسهٔ جبری و کوششی برای توضیح این پارادوکس. ولی مدعی قطعیت این دیدگاه نیستم.

**( ۲.۸ ) پیشینهٔ تاریخی.** در سدهٔ نوزدهم هندسهٔ جبری را منابع مختلفی مایه بخشیده‌اند. نخست خود اصول و آیین هندسی: هندسهٔ تصویری (و هندسهٔ ترسیمی، که موردتوجه زیاد در ارتش زمان ناپلئون بود)، مطالعهٔ خمها و رویه‌ها به‌خاطر شناخت خود آنها، هندسهٔ پیکربندی؛ سپس نظریهٔ توابع مختلط، بررسی یک رویهٔ ریمانی فشرده به‌عنوان یک خم جبری، و تجدید بنای جبری محض آن با توجه به هیأت تابعی خودش. بالاتر از همهٔ اینها، مشابهت عمیق بین یک‌خم جبری و حلقهٔ اعداد صحیح یک هیأت عددی، و نیاز به زبان واحدی برای جبر و هندسه در نظریهٔ ناورداها بوده‌اند، که نقش بسزایی در توسعهٔ جبر مجرد در اوائل سدهٔ بیستم ایفا کرده‌اند.

دهه‌های اول سدهٔ بیستم شاهد دسته‌بندی عمیقی بود. از یک سو، مطالعهٔ خمها و رویه‌ها به روش سنتی هندسی، که از سوی مکتب برجستهٔ ایتالیایی به‌شدت دنبال می‌شد؛ این مطالعه، درکنار دستاوردهای کاملاً چشمگیرش، نقشی محرک و اساسی در توسعهٔ توپولوژی و هندسهٔ دیفرانسیل داشت، ولی رفته‌رفته چنان به استدلال «برپایهٔ شهود هندسی» وابسته گردید که حتی پیشروان این مکتب قادر به پشتیبانی جدی آن نبودند. از سوی دیگر، نیروهای تازه‌نفس جبر تعویضپذیر، در حال پی‌ریزی پایه‌ها و ارائهٔ روشهای برهان بودند. یک نمونهٔ بارز برای تفاوت بین این دو دیدگاه، از یک سو استدلال چاو و واندر واردن بود، که وجود یک چندگونای جبری پارامتری سازِ خمهای فضایی از درجه وگونای مفروضی را بادقت کامل اثبات می‌کردند، و از سوی دیگر، سِوِری بود، که در مطالعات خود در همهٔ کارهایش استفادهٔ سازنده‌ای از چنین فضاهای پارامتری می‌نمود، و در سالهای آخر

عمرش، از مداخلهٔ جبردانان (البته غیر ایتالیایی در آن زمان) در حوزهٔ کارش سخت آزرده‌خاطر شد، و بالاخص به‌طور ضمنی اذعان نمود که مکتب شخص وی فاقد دقت بوده است.

**( ۳.۸ ) دقت، اولین موج.** به‌دنبال معرفی جبر مجرد از سوی هیلبرت و ایمی نوتر، مبانی دقیق هندسهٔ جبری در دهه‌های ـ۱۹۲۰ و ـ۱۹۳۰ توسط واندر واردن، زاریسکی و وِیل پایه‌ریزی شد (سهم واندر واردن معمولاً تاحدی نادیده گرفته می‌شود، زیرا شماری از ریاضیدانانِ دورانِ بلافاصله پس از جنگ، ازجمله بعضی از پیشگامان هندسهٔ جبری، به وی به‌دیدهٔ همکار نازیها می‌نگریستند).

هدف اصلی برنامهٔ آنها این بود که مبانی هندسهٔ جبری چنان باشد که روی هر هیأت دلخواه کارایی داشته باشد. در این رابطه، یک مشکل زیربنایی کلیدی این است که نمی‌توان چندگونا را صرفاً به‌عنوان یک مجموعه نقاط تعریف کرد: اگر کار را با یک چندگونای $V \subset \mathbb{A}^n_k$ روی یک هیأت مفروض $k$ شروع کنیم، $V$ صرفاً یک زیرمجموعه از $k^n$ نیست و مجبوریم برای توسیعهای $k \subset K$، نقاط $K$یی ـ مقدارِ $V$ را نیز در نظر بگیریم (برای بحث در این زمینه ← (۱۳.۸ـ(ج))). یک دلیل نمادگذاری $\mathbb{A}^n_k$ این است که نشان دهیم این نقاط، نقاط $k$یی ـ مقدار چندگونای $\mathbb{A}^n$ هستند که می‌خواهیم مستقل از هیأت خاص $k$ وجود داشته باشند.

لزوم مجازبودن به تغییر هیأت زمینه در سراسر استدلال، مشکلات تکنیکی و مفهومی خیلی زیادی به‌بار می‌آورد (بهتر است از نمادگذاری چیزی نگوییم). با این‌حال، تا حوالی سال ۱۹۵۰، مبانی وِیل به‌عنوان یک الگو پذیرفته شده بود، تا جایی که هندسه‌دانان سنتی (مانند هاج و پِدو) خود را مجبور دیدند که کتابهای خود را بر این پایه بنویسند، که به‌اعتقاد من، برای خواندنی‌شدن کتابهایشان ضروری بود.

**( ۴.۸ ) عصر گروتندیک.** از حوالی سال ۱۹۵۵ تا ۱۹۷۰، هندسهٔ جبری تحت سیطرهٔ ریاضیدانان پاریس، ابتدا سِر و بعد بالاخص بیشتر گروتندیک و مکتب او بود. تأثیر روش گروتندیک به هیچوجه نباید دست‌کم گرفته شود، مخصوصاً حالا، که تاحدی، تازگی خود را از دست داده است. در این دوره بود که پیشرفتهای عظیم مفهومی و تکنیکی ایجاد شد و به مدد استفادهٔ سیستماتیک از مفهوم کلیدی «طرح گروتندیک» (یا به‌طور خلاصه «طرح») ـ چیزی کلیتر از یک چندگونا، ← (۱۲.۸-۱۴)) ـ هندسهٔ جبری عملاً توانست همهٔ پیشرفتهای حاصله در توپولوژی، جبرمانستگیها، نظریه اعداد و غیره را جذب کند و حتی نقشی غالب در توسعهٔ آنها داشته باشد. گروتندیک پیرامون سال ۱۹۷۰ در اوایل سنین چهل، خود را از صحنهٔ تحولات کنار کشید، که باید آن را ضایعهٔ غم‌انگیزی به‌حساب آورد (گروتندیک اصولاً در اعتراض به سرمایه‌گذاری نظامیان در

علم، IHES[1] را ترک نمود). هر هندسهٔ جبری‌دان کارآزموده، به انبوه تکنیکهای توانایی که در این دوره توسعه یافته و هنوز بخش زیادی از آنها می‌باید به‌روشی قابل‌قبول نوشته شوند، عمیقاً آگاهی دارد.

از سوی دیگر، پیروی بی‌چون و چرا از مکتب گروتندیک صدمات جانبی جدی داشت: بسیاری از ریاضیدانان که قسمت اعظم عمر خود را برای تسلط در مبانی ویل صرف کرده بودند، مطرود و مورد اهانت قرار گرفتند، و تا آنجا که من می‌دانم تنها یک یا دو نفر از آنان این زبان جدید را پذیرفتند؛ و یک نسل تمام از دانشجویان (اکثراً فرانسوی) با این باور احمقانه که «هر مسأله‌ای که نتواند به لباس صورتگرائی مجرد بسیار بالائی آراسته شود، ارزش مطالعه ندارد»، شستشوی مغزی داده شده بودند و بنابراین ظهور طبیعی ریاضیدانانی که با یک مسألهٔ کوچک شروع می‌کنند و از آنجا به مسائل دیگر پی می‌برند، منتفی می‌شد. (من رساله‌ای را در مورد حساب رویه‌های درجهٔ سوم سراغ دارم که در ابتدا، بدین علت که «زمینه طبیعی برای ساختمان آن یک توپوس[2] حلقه‌یی موضعاً نوتری کلی است»، موردقبول واقع نشده بود. جدی می‌گویم!) برای بسیاری از دانشجویان این دوره ظاهراً هیچ آرزویی بالاتر از مطالعهٔ سری EGA[3] متصور نبود. مطالعهٔ نظریهٔ رسته‌ها تنها به‌خاطر خود این نظریه (که مطمئناً یکی از بی‌ثمرترین زمینه‌های فکری است) نیز به همین دوره برمی‌گردد؛ خود گروتندیک را نمی‌توان لزوماً در این مورد سرزنش کرد، زیرا استفادهٔ خود وی از رسته‌ها در حل مسائل بسیار موفقیت‌آمیز بود.

اُسلوب مطالعهٔ هندسهٔ جبری از آن زمان به‌بعد تغییرجهت داده است. در کنفرانسی که اخیراً در فرانسه برگزار شد، من به تغییر نحوهٔ نگرش اشاره کردم، ولی جواب کنایه‌آمیز «اما خم درجهٔ سوم چپ نمونه‌ای خیلی خوب برای تابعگونی است تقریباً نمایشپذیر» را دریافت کردم. من می‌دانم تعدادی از ریاضیدانان که در حال حاضر در مدیریت بودجهٔ تحقیقاتی فرانسه نقش دارند افرادی هستند که از تروریسم فکری دورهٔ یادشده رنج برده‌اند، و در نتیجه، پذیرش درخواستهای طرحهای پژوهشیِ مرکز ملیِ تحقیقاتِ علمی مرتباً در هندسه جبری کمتر می‌شود.

سوای شمار خیلی معدودی از شاگردان خود گروتندیک که توانستند راه خود را دنبال کنند و سرپای خود به‌ایستند، آنهایی که پایدارترین بهره را از افکار گروتندیک بردند و به مفیدترین نحوی آنها را منتشر کردند، آنهایی بودند که از فواصل دور تحت تأثیر این مکتب قرار گرفته بودند: مکتب هاروارد (توسط زاریسکی، مامفرد و م. آرتین)، مکتب مسکو به‌رهبری شافارویچ، و شاید هم مکتب

1. Institut Haute d'Etudes Scientifiques

۲. topos رسته‌ای است هم‌ارز با رستهٔ بافه‌های مجموعه‌ها بر روی رسته‌ای مجهز به توپولوژی گروتندیک.

3. Elements de géométrie algébrique

جبر تعویض‌پذیر ژاپنی‌ها.

**( ۵.۸ ) مهبانگ.** در اوایل دهه ۱۹۷۰ نه تاریخ پایان رسید و نه نوسانات سبک هندسهٔ جبری از آن پس کمتر شد. در دههٔ ۱۹۷۰ هرچند تعدادی از مکاتب بزرگ در جهت علایق خاص خود پیش می‌رفتند (مامفرد و فشرده‌سازی فضاهای مختصه‌ها، مکتب گریفیث و نظریهٔ هاج و خمهای جبری، دِلینی و «اوزان» در همانستگی چندگوناها، مکتب شافارویچ و رویه‌های $K_3$، ایتاکا و پیروانش و رده‌بندی چندگوناهای با ابعاد بالاتر و غیره)، به‌نظر می‌رسد اصولاً همهٔ ما معتقد بودیم که داریم یک موضوع را مطالعه می‌کنیم، و هندسهٔ جبری به‌صورت یک بلوک منحصر بفرد استوار مانده (و در واقع پهنه‌های مجاور ریاضیات را به سیطره خود کشیده) است. شاید وجود یک یا دو ریاضیدان مجرب که می‌توانسته در همهٔ زمینه‌های این رشته دستی داشته باشد، چنین چیزی را امکانپذیر ساخته است.

تا اواسط دههٔ ۱۹۸۰، این روند عوض‌شده بود، و در حال حاضر به‌نظر می‌رسد هندسهٔ جبری به ده دوازده مکتب یا بیشتر تقسیم شده است که تأثیر متقابل کاملاً محدودی دارند: خمها و چندگوناهای آبلی، رویه‌های جبری و نظریهٔ دانلدسن، خمینه‌های سه‌بعدی و رده‌بندی در ابعاد بالاتر، K_ـتئوری و دورهای جبری، نظریهٔ تقاطع و هندسهٔ شمارشی، نظریه‌های همانستگی عمومی، نظریهٔ هاج، مشخصهٔ p، هندسهٔ جبری حسابی، نظریهٔ تکینگی، معادلات دیفرانسیلِ ریاضیات در فیزیک، نظریهٔ ریسمان، کاربردهای جبر کامپیوتری، و غیره.

## توضیحات و تذّکرات اضافی برای اهل نظر

در این بخش مفاهیم مقدماتی و پیشرفته با هم آمیخته می‌شوند؛ چون این قسمت اساساً به عنوان «سخنی بابخردان» برای معلمان دانشگاه که این کتاب را تدریس می‌کنند، یا نشان دادن دشواریهای موجود در این مبحث به دانشجویان پیشرفته، تدوین شده است، ممکن است بعضی از مطالب آن ناروشن به نظر آیند.

**( ۶.۸ ) انتخاب مباحث.** انتخاب مطالب و مثالهایی که در این کتاب مورد بحث قرار گرفته‌اند، عملاً تا حدّی براساس درجهٔ سهولت محاسبات بوده است. در عین حال، راهنمائی برای «رده‌بندی چندگوناها» نیز هست: مطالب مربوط به مقاطع مخروطی، تا اندازه‌ای، برای هر خم گویا قابل استفاده‌اند، و رویه‌های درجهٔ سوم اساسیترین نمونه‌های رویه‌های گویای دِل پِتسو هستند. خمهای درجهٔ سوم با قانون گروهی‌شان نمونه‌هائی از چندگوناهای آبلی هستند؛ نکات (۲.۲) در مورد گویا نبودن یک خم درجهٔ سوّم ناتکین، اولین گام در مسألهٔ رده‌بندی است. فصل مشترک

دو مقطع مخروطی در (۱۲.۱-۱۴) و فصل مشترک دو رویهٔ درجهٔ دوم در $\mathbb{P}^3_k$ عطف به تمرین ۶.۵، نیز می‌توانند با فصل مشترک دو رویهٔ درجهٔ دوم در $\mathbb{P}^4_k$ که ردهٔ دیگری از رویه‌های دل پتسو را می‌دهند، و خانوادهٔ خطوط فصل مشترک دو رویهٔ درجهٔ دوم در $\mathbb{P}^5_k$ که یک چندگونای آبلی دوبعدی می‌سازند، در قالب الگوی مشابهی درآیند.

گونای یک خم، و تقسیمبندی به سه حالت در جدول صفحهٔ ۵۵، رده‌بندی در یک سطح پوست گردویی است. دلم می‌خواست که مطالب زیادتری در مورد گونای خمها، بویژه چگونگی محاسبهٔ گونای یک خم برحسب مشخصهٔ توپولوژیک اویلر و یا عدد تقاطع در هندسهٔ جبری، که برای هر هندسه‌دان ناآزمودهٔ جزو تمرینهای انگشت‌شمار اساسی هستند، بگنجانم. لیکن، این مبحث مانند نظریهٔ تحلیلی خمهای بیضوی روی هیأت اعداد مختلط، خود به اندازهٔ یک درس جداگانه برای دورهٔ کارشناسی نیاز به وقت و جا دارد.

**( ۷.۸ ) محاسبه در کنار نظریه.** نکتهٔ دیگری در مورد خط مشی این کتاب، که لازم است ذکر شود تأکید قابل توجّه به حالاتی است که با محاسبات صریح قابل وصول هستند. وقتی نظریّهٔ کلّی وجود ساختمانی را ثابت می‌کند، انجام آن به کمک عبارات مختصاتیِ صریح تمرین مفیدی برای درک بیشتر واقعیت و روشی مناسب برای یک کتاب درسی دورهٔ کارشناسی است. البته این مطلب نباید ابهامی در این واقعیت ایجاد کند که در واقع نظریّه برای پرداختن به حالات پیچیده طرحریزی شده است، در حالی که محاسبات صریح غالباً نمی‌توانند چیزی را برای ما روشن سازند.

**( ۸.۸ ) هیأت اعداد حقیقی در مقابل اعداد مختلط.** خوانندهٔ واقع‌بین و علاقه‌مند به این مبحث ممکن است از این که کار روی هیأت $\mathbb{R}$ در بخشهای ۱ و ۲ به اندیشهٔ کار روی هیأت دلخواه $k$ در بخش ۳ راه یافته، که بلافاصله جبری-بسته نیز فرض شده است، یکّه بخورد. توصیهٔ من به این رده از خوانندگان این است که پشتکار داشته باشند؛ ارتباطهای فراوانی بین هندسه روی هیأت اعداد حقیقی و هندسهٔ روی هیأت اعداد مختلط وجود دارند، از جملهٔ آنها روابطی هستند که شگفتی برانگیزند. پرسش دربارهٔ نقاط حقیقی یک چندگونای حقیقی، و پاسخ به آن بسیار مشکل است، و چیزی است که در هندسهٔ جبری مورد توجه عدّهٔ قلیلی قرارگرفته است؛ به هر حال، دانستن همهٔ نقاط مختلط چندگونا معمولاً یک پیشنیاز عمده است. یک رابطهٔ مستقیم دیگر بین هندسه روی $\mathbb{R}$ و هندسه روی $\mathbb{C}$ این است که هر چندگونای مختلط ناتکین $n$بعدی، یک خمینهٔ حقیقی $2n$ بعدی است- برای مثال، رویه‌های جبری یک منبع اصلی برای ساختن خمینه‌های چهاربعدی هموارند.

درکنار این ارتباطهای نسبتاً روشن، روابط ظریف بیشتری نیز وجود دارند، برای مثال: (الف) تکینگیهای خمهای مسطح $C \subset \mathbb{C}^{۲}$ به کمک تقاطع به مرز یک گوی کوچک، موجب پیدایش گرههائی در $S^{۳}$ می‌شوند؛ و (ب) ساختمان پیچ‌دهندهٔ پنروز[1]، یک خمینهٔ چهار بعدی (با نوع خاصی از متریک ریمانی) را به مثابهٔ مجموعه نقاط حقیقی‌ـمقدار یک چندگونای مختلط چهاربعدی که خمهای گویای واقع بر یک چندگونای سه‌بعدی مختلط را پارامتری می‌کنند، در نظر می‌گیرد (بنابراین کرهٔ ۴ـبعدی حقیقی $S^{۴}$ که در آن زندگی می‌کنیم، می‌تواند با مکان حقیقی گراسمانی مختلط خطوط واقع در $\mathbb{P}^{۳}_{k}$ یعنی $Gr(۲,۴)$ یکی گرفته شود).

**( ۹.۸ ) توابع منظم و بافه‌ها.** خواننده‌ای که مفهوم تابع گویای $f \in k(X)$ روی چندگونای $X$ و منظم بودن آن در یک نقطهٔ $P \in X$ را به خوبی درک کرده باشد، ((۷.۴) و (۴.۵))، تاکنون یک تصوّر ملموس خوبی از بافهٔ ساختار $\mathcal{O}_X$ پیدا کرده است. برای یک مجموعهٔ باز $U \subset X$، مجموعهٔ توابع منظم $U \to k$، یعنی

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \in k(X) | \text{در همه نقاط } P \in U \text{ منظم است } f\} = \cap_{P\in U}\mathcal{O}_{X,P}$$

زیرحلقه‌ای از هیأت $k(X)$ است. بافهٔ $\mathcal{O}_X$، در واقع خانوادهٔ حلقه‌های $\mathcal{O}_X(U)$ است وقتی که $U$ زیرمجموعه‌های باز $X$ را می‌پیماید. روشن است، هر عنصر حلقهٔ موضعی $\mathcal{O}_{X,P}$ (برای تعریف آن← (۷.۴) و (۴.۵)) یک تابع منظم در یک همسایگی $U$ از $P$ است، لذا $\mathcal{O}_{X,P} = \cup_{U\ni P}\mathcal{O}_X(U)$. و دیگر چیزی بیشتر از این ندارد؛ یک منبع ثابت از مقطعهای گویای $k(X)$ وجود دارد، و مقطعهای یک بافه روی یک مجموعهٔ باز $U$ همان مقطعهای گویا با شرط منظّم بودن در هر نقطهٔ $P \in U$ هستند.

بیان بالا برای توصیف هر بافهٔ بدون تاب روی یک چندگونای تحویلناپذیر با توپولوژی زاریسکی، کفایت می‌کند. البته اگر $X$ تحویلپذیر باشد و یا اگر بخواهید با بافه‌های پیچیده‌تری کار کنید، به تعریف کامل بافه‌ها نیاز خواهید داشت و یا می‌توانید از توپولوژی مختلط استفاده کنید.

**( ۱۰.۸ ) توابع منظّمی که همه جا تعریف شده‌اند.** اگر $X$ یک چندگونای تصویری باشد تنها توابع گویای $f \in k(X)$ که در همهٔ نقاط $P \in X$ منظم‌اند، توابع ثابت هستند. این ویژگی کلی چندگوناهای تصویری، مشابه قضیهٔ لیوویل در توابع یک متغیرهٔ مختلط است؛ برای یک چندگونا روی $\mathbb{C}$، این ویژگی از فشردگی و اصل ماکسیمم قدر مطلق هاوسدورف نتیجه می‌شود ($X \subset \mathbb{P}^{n}_{\mathbb{C}}$ در توپولوژی مختلط فشرده است، بنابراین قدر مطلق یک تابع همه جا تمامریخت روی $X$، باید ماکسیممی داشته باشد)، لیکن در هندسهٔ جبری اثبات این مطلب بدون آمادگی، سخت دشوار است. (برای مثال ←[هارتشورن، I.۳.۴])؛ این مطلب اساساً یک نتیجهٔ تناهی است و با متناهی

1. Penrose twistor

بودن بعد گروههای همانستگی منسجم ارتباط دارد).

**( ۱۱.۸ ) بستگی شگفت‌آور هندسهٔ جبری تصویری.** به تعریف مجرد وِیل از یک چندگونا (مجموعه‌های جبری آفینی که در امتداد مجموعه‌های بازیکریخت به هم چسبانیده شده‌اند) در (۴.۰) به اختصار اشاره شده بود، که پرداختن به آن به زبان بافه‌ها خیلی راحت است. با این توضیح، تصورکارکردن فقط با چندگوناهائی که در یک فضای محیطی ثابت $\mathbb{P}^N_k$ نشانیده شده‌اند، در نگاه اوّل یک محدودیت بیخودی به نظر می‌رسد. می‌خواهیم به اختصار به توصیف دیدگاه جدید در باب این مسأله بپردازیم.

**(الف) قطبی‌سازی و «مثبت بودن».** در وهلهٔ اول، چندگوناها با تقریب یکریختی در نظر گرفته می‌شوند، لذا وقتی می‌گوییم $X$ یک چندگونای تصویری است معنی آن این است که می‌توان $X$ را در یک فضای $\mathbb{P}^N$ نشانید، یعنی، با یک زیر چندگونای بستهٔ $X \subset \mathbb{P}^N$ یکریخت گرفت (مشابه (۱.۵ـ۷)). وقتی می‌گوییم چندگونای شبه تصویری، منظور چندگونایی است که با یک زیر چندگونای موضعاً بستهٔ $\mathbb{P}^N$ یکریخت است، بنابراین یک زیر مجموعهٔ چگال و بازِ یک چندگونای تصویری است؛ تصویری بودن متضمن ویژگی کمال است، یعنی $X$ نمی‌تواند به صورت یک زیرمجموعهٔ باز چگالِ چندگونای بزرگتری نشانیده شود.

انتخاب یک نشانیدن واقعی $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ (یا انتخاب یک «کلاف خطی خیلی وسیع» $\mathcal{O}_X(1)$ که مقطعهای آن مختصات همگن $\mathbb{P}^N$ باشند) اغلب یک قطبی‌سازی نامیده می‌شود، و وقتی می‌نویسیم $(X, \mathcal{O}_X(1))$ منظور این است که این انتخاب صورت گرفته است. علاوه بر ویژگی کمال، یک چندگونای تصویری $X \subset \mathbb{P}^N$ در شرط کلیدی «داشتن درجهٔ مثبت» نیز صدق می‌کند: اگر $V \subset X$ زیر چندگونایی $k$ بعدی باشد، $V$ هر زیر فضای خطی عمومی $\mathbb{P}^{N-k}$ را در تعدادی «مثبت» و متناهی نقطه قطع می‌کند. بالعکس، ملاک کلایمن[1] می‌گوید اگر $X$ یک چندگونای کامل باشد، آنگاه مضربی از یک کلاف خطی روی $X$ می‌تواند برای تعیین یک نشانیدن تصویری به کار رود، به شرطی که درجهٔ آن روی هر خم $C \subset X$، همواره بزرگتر از صفر (یعنی ناکمتر از حاصلضرب $\varepsilon$ در هر اندازهٔ معقولی از $C$) باشد. این نوع شرط مثبت بودن با انتخاب یک متر یک کاهلر[2] (متر یک ریمانی با سازگاری مطلوب با ساختار مختلط) روی یک خمینهٔ مختلط ، ارتباط نزدیکی پیدا می‌کند. بنابراین می‌توان تصویری بودن را نوعی «معین مثبت بودن» قلمداد کرد.

**(ب) بستگی.** موضوع شگفت‌آور این است که راه حلّ مسائل زیادی از هندسهٔ جبری در چارچوب چندگوناهای تصویری قرار می‌گیرد. ساختار چندگوناهای چاو که در (۲.۸) ذکر شد، یکی

1. Kleiman    2. Kähler

از این موارد است؛ مورد دیگر کار مامفرد در دههٔ ۱۹۶۰ است، که چندگوناهای پیکار[1] و شمار متعددی از فضاهای مختصّه‌ها را به صورت چندگوناهای شبه تصویری («طرحها») ساخته است. نظریه موری[2] (عهده‌دار پیشرفتهای مفهومی مهّم مربوط به گویابودن رده‌بندی چندگوناها ← مرجع [کولار]) تازه‌ترین نمونه از این نوع است و دراینجا نیز دیدها و تکنیکها به طور اجتناب ناپذیری ماهیّت تصویری دارند.

**(ج) نابسندگی چندگوناهای مجرّد.** خمها و رویه‌های ناتکین خود به خود شبه تصویری هستند؛ لیکن چندگوناهای مجردی وجود دارند که شبه تصویری نیستند (رویه‌های تکین، یا چندگوناهای ناتکین با بعدی ناکمتر از ۲). ولی اگر شما نیاز به این ساختمانها را احساس می‌کنید، تقریباً به طور حتم به مطالعه چندگوناهای موئیشه‌زون (یا فضای جبری م. آرتین) نیاز خواهید داشت این چندگوناها اشیائی در هندسهٔ جبری هستند، کلیّتر از چندگوناهای مجرد، و به روشی که تا حدی می‌توان آن را تعبیری آزادانه‌تر از «چسبانیدن قطعه‌های موضعی» دانست، به دست می‌آیند.

قضایای مربوط به چندگوناهای مجرد اغلب از راه تبدیل به قضایای شبه تصویری اثبات می‌شوند، لذا این نکته که اثبات قضایای شبه تصویری یا جزئیات عمل تبدیل، مفیدتر، جالبتر و اساسی‌تر باشند، یا احتمالاً به مقاله‌ای سطحی ولی قابل چاپ منجر شوند، بستگی به مسألهٔ خاص، علایق فردی دانشجو و وضعیت بازارکار خواهد داشت. اخیراً ثابت شده است که هر چندگونای مجرد یا چندگونای موئیشه زونی که شبه تصویری نباشد، لزوماً شامل یک خم گویاست، لیکن اثبات آن (منسوب به ج. کولار) براساس نظریه موری درنتیجه هستهٔ مرکزی آن هندسه جبری تصویری است.

**(۱۲.۸) چندگوناهای آفین و «طرحها».** حلقهٔ مختصاتی یک چندگونای جبری $V$ روی یک هیأت جبری‌ـبستهٔ $k$ (تعریف ۱.۴) که با $k[V]$ نمایش داده شد، در دو شرط ذیل صدق می‌کند: (الف) یک $k$ـجبر متناهی‌ـمولّد است؛ و (ب) یک حوزهٔ صحیح است. روشن است که حلقه‌ای که در این دو شرط صدق کند، برای چندگونائی مانند $V$، به شکل $k[V]$ خواهد بود، و یک حلقهٔ هندسی (یا $k$ـجبر هندسی) نامیده می‌شود.

دو قضیهٔ کلیدی نظری در فصل دوّم وجود دارند؛ یکی از آنها قضیهٔ ۴.۴ است و بیان دقیق آن این است که تناظر $V \longmapsto k[V] = A$ یک هم ارزی رسته‌یی بین رستهٔ چندگوناهای جبری آفین و رستهٔ عکس $k$ـجبرهای هندسی است (هر چند به علت نامناسب بودن برای خوانندگان ناآزموده، از عنوان کردن رسته‌ها خودداری شده است). قضیهٔ دیگر قضیهٔ صفرها (۳.۱۰) است، که بر اساس آن ایدآلهای اول $k[V]$ با زیر چندگوناهای تحویلناپذیر $V$ در تناظر دوسوئی قرار می‌گیرند؛ و بالاخص نقاط $V$ با ایدآلهای ماکسیمال متناظر می‌شوند.

---
1. Picard 2. Mori

این قضایا روی هم، امکان می‌دهند که چندگوناهای آفین V با «طرحهای» آفین متناظر به حلقه‌های هندسی یکی گرفته شوند (با تعریف ۶.۴ مقایسه کنید).

طیف اول، Spec A، برای هر حلقهٔ دلخواه (تعویضپذیر واحددار) به صورت مجموعهٔ ایدآلهای اوّل A تعریف شده است. این طیف دارای یک توپولوژی زاریسکی و یک بافهٔ ساختار است؛ که آن را «طرح» آفین متناظر به A گوئیم (برای توضیح بیشتر، ← [مامفرد، مقدمه؛ یا هارتشون، فصل II]). موارد متعددی برای تمیز کلّیتر بودن «طرحهای» آفین از چندگوناهای آفین وجود دارند؛ هر کدام از این موارد، مهّم هستند، و ما به اختصار در (۱۴.۸) به آنها می‌پردازیم.

درک این واقعیت که برای یک حلقه هندسی $A = k[V]$، شناخت طیف اول Spec A دقیقاً با اطلاعات مربوط به چندگونای V منطبق است و لاغیر، حایز اهمیت است. قضیهٔ صفرها می‌گوید ذخیرهٔ معتنابهی از ایدآلهای ماکسیمم وجود دارد ($m_v$ برای نقاط $v \in V$)، و هر ایدآل اول P از A اشتراک ایدآلهای ماکسیمال روی نقاط یک زیرچندگونای تحویلناپذیر $Y \subset V$ است:

$$P = I(Y) = \cap_{v \in Y} m_v$$

همواره مفید و (تقریباً، لااقّل،) مجاز است که تفاوت بین چندگوناها و «طرحها» را نادیده بگیریم و بنویسیم $V = \mathrm{Spec}\, A$، $m_v = v$، و ایدآل اول $P = I(Y)$ («نقطه ژنریک»[1]) را مانند شمارهٔ لباسشوییها تصور کنیم که در همه جا به طور چگال به پارچهٔ زیر چندگونای Y بخیه شده است.

**( ۱۳.۸ ) نقطه چیست؟** اکثریتی از دانشجویان هرگز نیازی به دانستن نظریهٔ «طرحها» بیش از آنچه که در (۹.۸) و (۱۲.۸) ذکر شد، نخواهند داشت، بجز این تذکّر که اصطلاح «نقطه ژنریک» در چند مفهوم تکنیکی به کار برده شده است، که معمولاً معنی آن چیزی است که با نقطهٔ به قدر کافی عمومی کاملاً تفاوت دارد.

این بخش برای خوانندگانی تدوین شده است که با کار در این زمینه جدید روبه‌رو هستند، و تلاش بر این است که نکاتی دربارهٔ مفاهیم مختلف نقطه در نظریهٔ «طرحها»، که می‌توانند بالقوّه مانعی عمده برای فهم افراد مبتدی باشند، ارائه دهد.

**(الف) نقاط یک چندگونا از دید نظریهٔ «طرحها».** فرض کنید k هیأتی است (که ممکن است جبری-بسته نباشد)، و $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ یک ایدآل و $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$؛ می‌گیریم $V = V(I) \subset K^n$، که $k \subset K$ یک بستارجبری انتخابی است. نقاط Spec A تنها کمی از نقاط حلقهٔ هندسی در (۱۲.۸) پیچیده‌ترند. بر اساس یک تعمیم روشن قضیهٔ صفرها، هر

1. generic point

ایدآل ماکسیمال A توسط نقطه‌ای مانند $v = (a_1, \ldots, a_n) \in V \subset K^n$ معین می‌شود، یعنی، این ایدآل ماکسیمال به شکل ذیل است

$$m_v = \{f \in A | f(P) = 0\} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \cap A$$

به سهولت می‌توان دید که نقاط متفاوت $v \in V \subset K^n$ یک ایدآل ماکسیمال $m_v$ی واحدی از A را مشخص می‌کنند اگر و تنها اگر این نقاط، به تعبیر نظریهٔ گالوا، روی k مزدوج هم باشند (زیرا A متشکل از چندجمله‌ییهای است که ضرایب آنها در k هستند). بنابراین طیف ماکسیمال، Specm A، درست همان V (فضای مداریِ گروه گالوای Gal K/k روی V) «با تقریب تزویج» است. هر ایدآل اوّل دیگر مانند P از A مثل (۱۲.۸) به یک زیرچندگونای تحویلناپذیر $Y = V(P) \subset V$ (با تقریب تزویج روی k) نظیر می‌شود؛ $P \in \text{Spec } A$ از دیدنظریهٔ «طرحها» نقطهٔ ژنریکY است، و به عنوان یک شمارهٔ لباسشویی روی نقاط Yتلقی می‌شود. توپولوژی زاریسکی Spec Aطوری تثبیت شده که نقطه P در Y همه جا چگال است. برای تمایز با سایر ایدآلهای اول، ایدآلهای ماکسیمال A را نقطه‌های بسته می‌گوییم. اگر $C : (f = 0) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ یک خم تحویلناپذیر باشد، دقیقاً یک نقطهٔ ژنریک از دید «طرحها» دارد، که با ایدآل (۰) در حلقهٔ $\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ متناظر است، درحالی‌که یک رویهٔ S علاوه بر نقطهٔ ژنریک خودش که در S ژنریک است، یک نقطهٔ ژنریک هم روی هر خم تحویلناپذیر $C \subset S$ دارد.

نقاط از دید «طرحها» برای واردکردن تعریف Spec A به عنوان مجموعه‌ای با یک توپولوژی و بافه‌ای از حلقه‌ها، نقش قاطعی دارند (همچنین در جبر تعویضپذیر و درکار با هندسهٔ جبری، مفاهیمی مانند همسایگی نقطهٔ ژنریک یک زیرچندگونای تحویلناپذیر، مهّم هستند. (←(۱۴.۸ـ(۱)))؛لیکن، نقاط $V \subset K^n$ که مقادیرشان در بستار جبری $k \subset K$ هستند بیشتر به مفهوم هندسی نقطه تشابه دارند، و نقاط هندسی نامیده می‌شوند. این مطلب مشابه حالتی است که توپولوژی زاریسکی یک چندگونایVبیشتر به عنوان یک وسیله برای بافهٔ ساختار $\mathcal{O}_V$ به کار می‌رود تا یک شیئ هندسی به خاطر خودش.

**(ب) نقاط هیأتی‌ـمقدار در نظریهٔ «طرحها».** اگر Pیک ایدآل اول A (در نتیجه نقطه‌ای از Spec A باشد هیأت مانده‌ها در P هیأت کسرهای حوزهٔ صحیح A/P است، که با k(P) نمایش داده می‌شود؛ این هیأت یک توسیع جبری هیأت پایهٔ k است اگر و تنها اگر P ایدآل ماکسیمال باشد. روشن است هر نقطه از V که مختصات آن در یک توسیع $k \subset L$ باشد (یعنی هر نقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n) \in V(I) \subset L^n$) به یک همریختی $A \to L$ (که توسط $X_i \longmapsto a_i$

تعریف شده)، نظیر می‌شود، که هستهٔ آن ایدآل اول P از Aاست؛ یا به طور هم ارز با آن می‌توان گفت هر نقطهٔ به یک نشانیدن $k(P) \hookrightarrow L$ نظیر می‌شود. اگر $P = m_v$ یک ایدآل ماکسیمال باشد، و $L = K$ بستار جبری k، انتخاب نشانیدن $A/m_v = k(V) \hookrightarrow K$ است که مختصّات نقطهٔ متناظر به $V \subset K^n$ را معین می‌کند، یا به عبارت دیگر، نقطه را از مزدوجهای گالوای خود متمایز می‌کند. این نقاط، نقاط هندسی V هستند.

برای هر توسیع $k \subset L$، همریختی k-جبرهای $A \to L$ که به هر نقطهٔ Lی-مقدار از V نظیر می‌شود، می‌تواند به لباس منطقی‌تری درآید. فراموش نکنید که یک چندگونا چیزی است بیش از یک مجموعه نقاط؛ حتی اگر تنها شامل یک نقطه باشد، لازم است هیأتی که روی آن تعریف شده، مشخص باشد. در نتیجه

$$\mathrm{Spec}\, L = \overset{L}{\cdot} = L\text{نقطهٔ}$$

چندگونائی است متشکل از یک نقطهٔ تنها که روی L تعریف شده است. با توجه به هم‌ارزی رسته‌ها طبق (۴.۴)، یک ریختبری $\mathrm{Spec}\, L \to V$ (شمول یک نقطه که روی L تعریف شده) باید همان همریختی k-جبری $A = k[V] \to L = k(\overset{L}{\cdot})$ باشد.

خلاصه، رابطهٔ بین نقطه‌ها از دید نظریهٔ «طرحها» با نقاط هیأتی-مقدار چنین است: یک نقطه $P \in \mathrm{Spec}\, A = V$ یک ایدآل اول A است، در نتیجه با یک همریختی خارج قسمت $A \to A/P \subset \mathrm{Quot}(A/P) = k(P)$ در یک هیأت متناظر است. برای هر هیأت L، یک نقطه Lی-مقدار از V عبارت است از یک همریختی $A \to L$؛ هر نقطهٔ P از دید نظریهٔ «طرحها» به روشی منطقی به یک نقطهٔ هیأتی-مقدار نظیر می‌شود، لیکن این هیأت، هیأت $k(P)$ است که با تغییر P، تغییر می‌کند. اگر Kبستار جبری k باشد، آنگاه نقاط kیی-مقدار $V \subset K^n$ دقیقاً نقاط هندسی هستند؛ یک نقطهٔ Kیی-مقدار V بر نقطهٔ $m_v$ می‌نشینند که یک نقطهٔ بسته از دید نظریه «طرحها» است، با یک شمول مشخّص $A/m_v = k(V) \hookrightarrow K$.

**(ج) نقاط ژنریک در مبانی وِیل.** در (۳.۸) به غرابت نقاط در مبانی ویل اشاره شد: هر چندگونای V که روی یک هیأت k تعریف شده، برای هر توسیع هیأت $k \subset L$ مجاز است نقاط Lی-مقدار داشته باشد. روشن است که که موضوع از نظریهٔ اعداد سرچشمه می‌گیرد، لیکن نتایجی نیز در هندسه دارد. به عنوان مثال، اگر C دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ تعریف شده روی $k = \mathbb{Q}$ باشد، در اینصورت نقطهٔ

$$P_\pi = (۲\pi/(\pi^۲ + ۱), (\pi^۲ - ۱)/(\pi^۲ + ۱))$$

مجاز است به عنوان یک نقطهٔ $\mathbb{C}$ی‌ـمقدار، تلقی شود. از آنجایی که $\pi$ روی $\mathbb{Q}$متعالی است، هر چند جمله‌یی $f \in \mathbb{Q}[x,y]$ که در نقطهٔ $P_\pi$ صفر شود، مضربی از $x^2 + y^2 - 1$ خواهد بود؛ در نتیجه $P_\pi$ یک نقطهٔ $\mathbb{Q}-$ژنریک از $C$ است، یعنی روی هیچ زیر چندگونای کوچکتری از $C$ که روی $\mathbb{Q}$تعریف شده باشد، واقع نیست. به عبارت دیگر، مزدوجهای $P_\pi$ تحت گروه خودریختنیهای $\mathbb{C}$، یعنی $\operatorname{Aut}\mathbb{C}(= \text{“}\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\text{”})$، در $C$ چگال‌اند. چون $P_\pi$ یک نقطه $\mathbb{Q}-$ژنریک است، اگر حکمی دربارهٔ $P_\pi$ را که تنها شامل چندجمله‌ییهای روی $\mathbb{Q}$باشد ثابت کنیم، این حکم برای همهٔ نقاط $C$ صادق خواهد بود.

در واقع این فکر قبلاً در مفهوم نقطهٔ $L$ی ـمقدار مذکور در (ب) تلویحاً بیان شده بود، و محتوای هندسی نقاط ژنریک می‌تواند در این زبان به روشنی دیده شود. برای مثال، هیأت $\mathbb{Q}(\pi)$همان توسیع متعالی $\mathbb{Q}$است، در نتیجه $\mathbb{Q}(\pi) \cong \mathbb{Q}(\lambda)$و ریختبری $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}(\lambda) \to C$ پارامتریسازی گویای $C$ است که در (۱.۱) مورد بحث قرار گرفت: تقریباً، شما مجازید که هر مقدار «به قدر کافی عمومی» را به جای عنصر متعالی یا مجهول $\pi$ قرار دهید. کلیتر بگوییم، هر توسیع متناهی‌ـمولّد $k \subset L$ هیأت تابعی یک چندگونای $W$ روی $k$ است؛ فرض کنید $\varphi : \operatorname{Spec} L \to V = \operatorname{Spec} A$ نقطه‌ای است متناظر به همریختی $k$ـجبرهای $A \to L$ که هستهٔ آن ایدآل اول $P$ است. پس $\varphi$ به یک نگاشت گویای $f : W - \to V$ که نگاره‌اش در زیرچندگونای $Y = V(P) \subset V$ چگال است، قابل توسیع است. بنابراین $\varphi$ یا $\varphi(\operatorname{Spec} L)$ یک نقطهٔ ژنریک هیأتی‌ـمقدار $Y$است.

**(د) نقطه‌ها به مثابهٔ ریختبری در نظریهٔ «طرحها».** بحث جزء (ج) نشان می‌دهد که هر نقطهٔ $L$ی‌ـمقدار یک چندگونای $V$ به طور ضمنی شامل یک نگاشت گویای $W - \to V$ است، که $W$ یک چندگوناست که با $\operatorname{Spec} L$ به طور دوسوگویا هم ارز است (یعنی $L = k(W)$)؛ هر هندسه‌دانی می‌تواند این پدیده را به صورت خانواده‌ای از نقاط تصوّر کند که توسّط $W$پارامتری شده‌اند.

به طور کلّی، برای یک چندگونا (یا یک «طرح») $X$، یک نقطهٔ $S$ی‌ـمقدار $X$(که $S$ یک «طرح» است) می‌تواند به صورت یک ریختبری $S \to X$ تعریف شود. اگر $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n_k$ یک چندگونای آفین با حلقهٔ مختصاتی $k[X]$ باشد و $S = \operatorname{Spec} A$، آنگاه هر نقطهٔ $S$ی‌ـمقدار بر اثر (۴.۴) به یک همریختی $k$ـجبری $k[X] \to A$، یعنی، به یک $n$ـتایی $(a_1, \ldots, a_n)$ از عناصر $A$، که برای هر $f \in I$ در شرط $f(a) = 0$ صدق می‌کند، نظیر می‌شود.

به بیانی کاملتر، تعریف نهایی مفهوم چندگونا چنین است: اگر هر نقطهٔ یک چندگونای $X$یک ریختبری باشد، آنگاه خود $X$ دقیقاً تابعگون

$$S \longmapsto X(S) = \{\text{ریختبریهای } S \to X\}$$

روی رستهٔ «طرحها» خواهد بود. (ایرادی که در مورد مفهوم $\mathbb{A}_k^n$ در پانوشت صفحه ۵۸ وارد شد منعکس کنندهٔ همین مطلب است.) بر خلاف آنچه به نظر می‌رسد، این طلسمهای ما بعدالطّبیعه از لحاظ تکنیکی بسیار مفیدند، و تعریف چندگوناها به صورت تابعگونها، در دیدگاه جدید فضاهای مختصّه‌ها نقش اساسی دارند. وقتی یک ساختمان هندسی (مانند فضای همهٔ خمها با درجه و گونای ثابت) داده شده باشد که بتواند «به طور جبری به پارامترهائی بستگی» داشته باشد، ممکن است بخواهید به مجموعهٔ همهٔ ساختمانهای ممکن، یک ساختار چندگونای جبری بدهید. حتی جالبتر از این، ممکن است دنبال خانواده‌ای از ساختمانها باشید که روی یک فضای پارامتر، «جهانی» باشد و یا «همهٔ ساختمانهای ممکن را شامل شود»؛ چندگونای پارامتر این خانوادهٔ جهانی معمولاً می‌تواند به طور خیلی مستقیمتر به صورت یک تابعگون تعریف شود (باز باید وجود این چندگونا را ثابت کنید). برای مثال چندگونای چاو که در (۲.۸) به آن اشاره شد نمایشگر تابعگون ذیل است

$$S \longmapsto \{\text{خانواده‌های خمهائی که توسط } S \text{ پارامتری می‌شوند}\}$$

**(۱۴.۸) چگونگی کلیّتر بودن «طرحها» در مقایسه با چندگوناها.** حال به طور مجزا سه حالتی را که در آنها «طرحهای» آفین کلیتر از چندگوناهای آفین هستند، مورد بحث قرار می‌دهیم؛ در موارد خیلی پریشان، ممکن است این ابهامها به صورت ترکیبی از همدیگر ضمن مسائل کلّی مطروحه در (۱۱.۸)، و یا حتی در ترکیب با پدیده‌های جدیدی مانند همگرایی $p$ـاَدیک یا متریکهای ارمیتی آراکلوف، پیش بیایند. خوشبختانه محدودیت جا مرا از توضیح بیشتر در مورد این مباحث جذّاب معاف می‌دارد!

**(الف) مقیّد نبودن به جبرهای متناهی‌ـمولّد.** فرض کنید $C \subset S$ خمی بر یک رویهٔ آفین ناتکین (روی $\mathbb{C}$، اگر می‌خواهید) باشد، حلقهٔ

$$\mathcal{O}_{S,C} = \{f \in k(S) | f = g/h, h \notin I_C\} \subset k(S)$$

حلقهٔ موضعی $S$ در $C$ است؛ هر عنصر $f \in \mathcal{O}_{S,C}$ روی یک زیرمجموعهٔ باز $S$، که خود نیز شامل یک زیرمجموعهٔ باز و چگال $C$ است، منظم است. نظریهٔ بخشپذیری در این حلقه شایان توجه است، و به مفهوم هندسی صفرها و قطبهای یک تابع برخه ریخت ارتباط پیدا می‌کند. خم $C$ توسط یک معادلهٔ تنهای $(y = ۰)$ به طور موضعی تعریف شده که $y \in I_C$ یک مولّد موضعی است. و هر عنصر ناصفر $f \in \mathcal{O}_{S,C}$ به شکل $f = y^n \times f_۰$ است که $n \in \mathbb{N}$ و $f_۰$ یک عنصر وارونپذیر $\mathcal{O}_{S,C}$ است. هر حلقه با این مشخصات یک حلقهٔ ارزهٔ گسسته[1] (ح. ا. گ.)

1. Discrete valuation ring

نامیده می‌شود، که این نامگذاری از ارزهٔ گسستهٔ $f \longmapsto n$ که مرتبهٔ صفرهای f در راستای $\mathbf{C}$ را می‌شمارد، نشأت گرفته است ($n < 0$ با قطبها متناظر است)؛ عنصر y پارامتر موضعی $\mathcal{O}_{S,C}$ خوانده می‌شود.

امّا نظریهٔ «طرحها» بی‌محابا به ما اجازه می‌دهد که $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,C}$ را به عنوان یک شیئ هندسی مورد مطالعه قرار دهیم، که فضای توپولوژیک آن ($- \circ$) تنها شامل دو نقطه است: یک نقطهٔ بسته، یعنی ایدآل ماکسیمال $(y)$($=$ نقطهٔ ژنریک$\mathbf{C}$) و یک نقطه غیر بسته، یعنی ایدآل $(0)$($=$ نقطهٔ ژنریکS) . این امتیاز، در اینجا چندان جنبهٔ تکنیکی ندارد: البته جبر تعویضپذیر آسان حلقه‌های ارزهٔ گسسته، قبل از آنکه نظریه «طرحها» معرفی شود، برای اثبات قضایائی در هندسهٔ جبری و نظریهٔ توابع مختلط به کار رفته است (برای مثال، در مورد ایدآلهای توابع، یا دربارهٔ رفتار موضعی یک پوشش انشعابی $T \to S$ روی $\mathbf{C}$ برحسب توسیع هیأتی $(k(S) \subset k(T)$). ولی اهمیّت اصلی آن در این است که یک بیان دقیق هندسی و یک تصویر ساده از جبر موضعی به ما می‌دهد.

مورد بالا در ارتباط با موضعی‌سازی، یا مفهوم تمرکز روی «همسایگی یک نقطهٔ ژنریک یک زیر چندگونا»، نمونه‌ای از فواید بررسی طیف حلقه‌های کلیتر از جبرهای متناهی‌ـمولّد روی یک هیأت است، برای هندسهٔ معمولی؛ یک مثال مشابه، نگریستن به نقطهٔ ژنریک $\operatorname{Spec} k(W)$ از یک چندگونای W به عنوان چندگونای حاصل از اشتراک همهٔ زیر مجموعه‌های باز ناتهی W است (با (۱۳.۸-(ج)) مقایسه کنید)، همانند اثر نیشخندی که پس از ناپدیدشدن چهرهٔ گربهٔ چشر[1] باقی می‌ماند!

**(ب) پوچتوانها.** حلقهٔ A ممکن است عناصر پوچتوان داشته باشد؛ به عنوان مثال $A = k[x,y]/(y^2)$ به «خط دوگانه» $2\ell \subset \mathbb{A}^2_k$ نظیر می‌شود، که می‌توان آن را نوار بینهایت باریکی از همسایگی یکی خط $\ell$ تصور کرد. هر عنصر A به صورت $f(x) + \varepsilon f_1(x)$ (با $\varepsilon^2 = 0$) است، بنابراین مثل این است که بسط تیلر یک چندجمله‌یی حول $\ell$ را، با حذف جملات پس از رتبهٔ اول، نوشته باشیم. اگر روزی چند مرتبه تمرین کنید، باید بتوانید هر عنصر A را به عنوان تابعی روی خط دوگانهٔ $2\ell$ تجسم کنید!

عناصر پوچتوان به نظریهٔ «طرحها» امکان می‌دهد تا سری تیلر را با حذف جملاتش از هر مرتبه، به‌کار گیرد، مثلاً به نقاط یک چندگونا با روشهای سریهای توانی برخورد کند. به‌کارگیری

۱. سیمایی درافسانهٔ آلیس در سرزمین اسرارآمیز، گربه‌ای خندان که ناپدید می‌شود و فقط نقش نیشخند وی باقی می‌ماند.

عناصر پوچتوان در زمینهٔ مسائل مختصّه‌ها که در انتهای (۱۴.۸ـ(د)) مورد بحث قرار گرفت، نقش قاطعی دارند: برای مثال، بیان دقیقی برای پرداختن به تغییر شکلهای بینهایت کوچک مرتبهٔ اول یک ساختمان هندسی (به عنوان ساختمانی روی فضای پارامتر $(\mathrm{Spec}\ k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$)، و تجسّم آنها به صورت بردارهای مماس بر چندگونای پارامتر جهانی، به دست می‌دهند. از آن گذشته عناصر پوچتوان منشأ پدیده‌های متعددی می‌شوند که مشابه کلاسیک ندارند، برای مثال، برقراری روابط بین توسیعهای تفکیک‌ناپذیر هیأتی و جبرهای لیِ میدانهایِ برداری روی چندگوناها در حالتی که مشخصهٔ p است.

**(ج) بی‌نیازی از هیأت پایه.** فرض کنید p عددی است اول و $\mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Q}$ زیرحلقه‌ای متشکل از اعداد گویایی که در مخرج آنها p وجود ندارد؛ $\mathbb{Z}_{(p)}$ نمونهٔ دیگری از حلقه‌های ارزهٔ گسسته با پارامتر p است. این حلقه دارای ایدآل ماکسیمال یکتای $p\,\mathbb{Z}_{(p)} \neq 0$ است، و هیأت مانده‌های آن عبارت است از $\mathbb{Z}_{(p)}/p\,\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. اگر $F \in \mathbb{Z}_{(p)}[X, Y]$، آنگاه مطالعهٔ خم $C_{\mathbb{C}} : (F = 0) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$، و یا اگر f تحویل F به پیمانه p باشد، مطالعهٔ خم $C_p : (f = 0) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_p}$ معنی پیدا می‌کند. این خم چه نوع شییء هندسی است که هم شامل خمی روی اعداد مختلط است و هم شامل خمی روی یک هیأت متناهی؟ میل خود شماست که این را واقعاً یک شییء هندسی بگیرید یا نگیرید، لیکن «طرح» $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_{(p)}[X, Y]/(F)$ دقیقاً آن را شییء هندسی می‌گیرد.

باز، از لحاظ تکنیکی این یک فکر تازه‌ای نیست: تحویل یک خم به پیمانهٔ p از سدهٔ هیجدهم صورت گرفته است، و مبانی ویل شامل یک نظریهٔ کامل برای «تخصیص» است که به بررسی همین موضوع می‌پردازد. مزیّت آن، تصوّر ملموستری از خم $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_{(p)}[X, Y]/(F)$ روی حلقهٔ ارزهٔ گسسته $\mathbb{Z}_{(p)}$ به عنوان یک شییء هندسی است که روی $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})(" = (\circ -)")$ بافته شده است و دوخم $C_{\mathbb{C}}$ و $C_p$ تارهای ژنریک و تارهای خاصّ به شمار می‌آیند.

به همین طریق، برای هر $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$، «طرح» $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[X, Y]/(F)$ یک شییء هندسی است که به ازای هر عد اول p، هم شامل خم $C_p : (f_p = 0) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_p}$ روی $\mathbb{F}_p$ است ($f_p$ تحویل F به پیمانه p است)، و هم شامل خم $C_{\mathbb{C}} : (F = 0) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$، و یک رویهٔ حسابی نامیده می‌شود؛ بعلاوه متضمّن چیزهای متعدّد دیگری هم هست: بالاخص، برای هر نقطهٔ $c \in C_{\mathbb{C}}$ که مختصات آن اعدادی جبری باشند، رویهٔ حسابی فوق شامل نسخه بدلی از $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}[c]$ است، و در نتیجه ذاتاً کلیّهٔ اطلاعات مربوط به حلقهٔ اعداد صحیح هیأت عددی تعریف c یعنی $\mathbb{Q}(c)$ را، در بردارد:

هر اندازه هم که این شییء هندسی در نظر اوّل سخت ناپذیرفتنی جلوه کند (البته اگر تمرین کنید می‌توانید به آن عادت کنید!)، یک جزء کلیدی در نظریهٔ جدید اعداد، و مبنائی است اساسی که کارهای آرا کِلوف و فالیتنگز بر آن استوار شده‌اند.

**( ۱۵.۸ ) اثبات وجود خطوط روی یک رویهٔ درجه سوّم.** هر فرد ورزیده در هندسهٔ جبری، از برهان سنتی (۲.۷) به روش بُعد شماری آگاهی دارد (مثلاً ← [بوویل، رویه‌های جبری مختلط، ص ۵۰] و یا [مامفرد، هندسهٔ جبری I، چندگوناهای تصویری مختلط، ص. ۱۷۴]). پیش از این که به مشکلات این برهان اشاره کنیم، نظری اجمالی به آن می‌اندازیم.

مجموعهٔ خطوط $\mathbb{P}^۳$ توسط گراسمانیِ چهار بعدیِ $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}(۲, ۴)$ پارامتری می‌شوند، و رویه‌های درجه سوّم به وسیلهٔ فضای تصویری $\mathbb{P}^{\mathrm{N}}$ یعنی فضای صورتهای درجهٔ سوّم برحسب X، Y، Z، T (در واقع $\mathrm{N} = ۱۹$). فرض کنید $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Gr} \times \mathrm{S}$ معرّف زیر چندگوناهای وقوع

$$\mathrm{Z} = \{(\ell, \mathrm{X}) | \ell \in \mathrm{Gr}, \mathrm{X} \in \mathrm{S}, \ell \subset \mathrm{X}\}$$

باشد. چون صورتهای درجهٔ سوم که روی خط مفروض $\ell$ صفر می‌شوند یک فضای تصویری $\mathbb{P}^{\mathrm{N}-۴}$ تشکیل می‌دهند، به آسانی می‌توان به کمک نگاشت تصویر اول $\mathbb{Z} \to \mathrm{Gr}$ نشان داد که Z یک چندگونای گویای N بعدی است. در نتیجه نگاشت تصویر دوّم $p : \mathrm{Z} \to \mathrm{S}$ یک ریختبری بین دو چندگونای N بعدی است، و بنابراین

(الف) یا نگارهٔ $p(\mathrm{Z})$ یک چندگونای N بعدی در S و در نتیجه شامل یک زیرمجموعهٔ باز و چگال S است و یا هر تار p دارای بعدی حداقل برابر ۱ است.

(ب) Z یک چندگونای تصویری است، در نتیجه، نگارهٔ $p(\mathrm{Z})$ در S بسته است.

چون مسلّماً رویه‌های درجهٔ سوّمی وجود دارند که تنها شامل تعدادی متناهی خط باشند، حالت دوّم در (الف) پیش نمی‌آید، بنابراین هر رویهٔ درجهٔ سوم به قدرکافی عمومی، شامل تعدادی خطّ است. پس (ب) تضمین می‌کند که $p(\mathrm{Z}) = \mathrm{S}$، و هر رویهٔ درجهٔ سوّم شامل خطوطی باشد.

استدلال بالا، به نظر من، به دو دلیل برای یک درس دورهٔ کارشناسی مناسب نیست: در حکم (الف) قضایائی در مورد بُعد تارها پذیرفته می‌شوند، که هر چند به طور شهودی قابل قبول‌اند، اثبات دقیق آنها (بالاخص برای دانشجویان درآخرین هفتهٔ درس) دشوار است؛ از سوی دیگر حکم (ب) بیان این قضیه است که چندگونای تصویری کامل است، که‌مجدداً (با استفاده از نظریهٔ حذف، فشردگی، یا استفادهٔ تمام و کمال از ملاک ارزه‌یی برای اختصاصی بودن یک ریختبری[1]) نیاز به اثبات دارد.

1. valuative criterion for properness

تا آنجا که شخصاً اطلاع دارم، برهان من در (۲.۷) جدید است؛ البته خوانندهٔ ورزیده متوجّه ارتباط آن با استدلال سنتی از راه کلافهای برداری خواهد شد: گراسمانی $Gr(۲,۴)$ دارای کلاف برداری $E$ از رتبهٔ تکراری ۲ (متشکل از صورتهای خطی روی خطوط $\mathbb{P}^۳$) است؛ تحدید $f$، معادلهٔ رویهٔ درجهٔ سوم، به هر خط $\ell \subset \mathbb{P}^۳$ معرّف یک مقطع $s(f) \in S^۳E$ از سومیّن توان متقارن $E$ است. بالاخره، هر مقطع $S^۳E$ یا به علت وسیع‌بودن $E$ و یا به موجب استدلال روی رده‌های چرن[1] (که در این صورت نیز عدد جادویی ۲۷ ظاهر می‌شود) باید دارای یک صفر باشد.

## به جای مقدمه

**( ۱۶.۸ ) قدردانی و ذکر بعضی از اسامی.** تلاش برای ذکر همه ریاضیدانان که در تحصیلات من سهیم بوده‌اند، امری است عبث. بیشتر از همه مدیون هر دو استاد راهنمای پیشین خودم پی‌یِردلینی[2] و پیتر سوینرتن‌ـدایر[3] (پیش از این که سیاستمداری موفق و شخصیت سرشناسی خبری شود) هستم؛ می‌توانم بگویم بیشترین معلومات خود را از کتابهای مامفرد به دست آورده‌ام، و شناخت من (آن گونه که هست) از میراث گروتندیک، بیشتر از راه مامفرد و دِلینی بوده است. جهان‌بینی من، چه به عنوان یک ریاضیدان و چه به عنوان یک انسان، قویاً از آندرِی تیورین[4] متأثر بوده است.

برداشت من از این که یک درس هندسهٔ جبری دورهٔ کارشناسی چه باید باشد، عمدتاً بر اساس درسی بوده که سوینرتن‌ـدایر پیرامون ۱۹۷۰ برای دانشجویان امتیاز طلب دانشگاه کیمبریج طرحریزی کرده، و سالهای بعد توسط خود او و بری تنیسن[5] تدریس شده است؛ کتاب حاضر از جهاتی، نسل مستقیم درس مزبور است، و بعضی از تمرینها عیناً از ورقه‌های تمرین تنیسن استخراج شده‌اند. ولی، من از آزادی مجاز در ساختار درسی دانشگاه واریک، بالاخّص از این فلسفهٔ تدریس (که صریحاً توسط کریستوفر زیمن[6] بیان شده است) که در تصمیم چگونگی و چه بودِ تدریس، تجربهٔ تحقیقاتی باید خطوط اصلی را ترسیم کند، نهایت بهره را برده‌ام.

---

1. Chern 2. Pierre Deligne 3. Peter Swinnerton-Dyer 4. Andrei Tyurin
5. Barry Tennison 6. Christopher Zeeman

## واژه‌نامه

| | |
|---|---|
| اختصاصی‌بودن | properness |
| L_ی‌مقدار | L-valued |
| ایدآل تقاطع | intersection ideal |
| ایدآل نامربوط | irrelevant ideal |
| | |
| با تقریبِ چسبانیدن | modulo glueing |
| بافه | sheaf |
| ـخیلی وسیع | very ample sheaf |
| ـساختار | structure sheaf |
| ـوسیع | ample sheaf |
| بدون تاب | torsion free |
| بستارتصویری | projective closure |
| بُعدشماری | dimension-counting |
| | |
| پارامتر جهانی | universal parameter |
| پوست گردویی | nut shell |
| پوشش آفین | affine covering |
| پوشش انشعابی | branched covering |
| پیشاپیش | a priori |
| پیشینهٔ تاریخی | prehistory |

| | |
|---|---|
| پیکربندی | configuration |
| | |
| تابع برخه‌ریخت | meromorphic function |
| تابع تصادم | bump function |
| تابع دودوره‌ای | doubly periodic function |
| تار خاص | special fibre |
| تار ژنریک | generic fibre |
| تجزیهٔ پیراسته | irredundant decomposition |
| تخصیص | specialisation |
| ترفند | trick |
| ترسیم منظری | perspective drawing |
| تقاطع تباهیده | degenerate intersection |
| تقریباً نمایشپذیر | pro-representable |
| تکرارِ معلوم | tautology |
| تکینگی | singularity |
| توابع جزئاً تعریف‌شده | partially defined functions |
| توابع متقارن مقدماتی | elementary symmetric functions |
| توان متقارن | symmetric power |
| توپوس | topos |
| توپولوژی متمم‌ـمتناهی | cofinite topology |
| | |
| جبر کامپیوتری | computer algebra |
| جبر مانستگیها | homological algebra |
| جبر موضعی | local algebra |
| | |
| چارچوب رسته‌یی | categorical framework |
| چسبانیدن | glueing |
| چند جمله‌یی تکین | monic polynomial |

| | |
|---|---|
| چند گونای تکین | singular variety |
| چند گونای شبه‌تصویری | quasi projective variety |
| | |
| حذف مخرجها | clearing denominators |
| حلقهٔ ارزهٔ گسسته | discrete valuation ring |
| حلقهٔ مختصاتی | coordinate ring |
| حلقهٔ هندسی | geometic ring |
| | |
| خطّ دوگانه | double line |
| خم تکجمله‌یی | monomial curve |
| خم درجهٔ سوّم چپ | twisted cubic curve |
| خم درجهٔ سوّم گرهی | nodal cubic curve |
| خم مختلط‌شده | complexified curve |
| خمینهٔ سه‌بعدی | 3-fold |
| | |
| درجهٔ تعالی | transcendence degree |
| دو خط متمایز | line pair |
| دیفرانسیلریخت | diffeomorphic |
| | |
| رابطهٔ وقوع | incidence relation |
| رتبهٔ تکراری | tautological rank |
| ردهٔ عکس | opposite category |
| رفع تکینگیها | resolution of singularities |
| رویهٔ انحنادار | curved surface |
| رویهٔ درجهٔ سوّم قطری | diagonal cubic surface |
| رویهٔ درجهٔ سوّم فرما | Fermat's cubic surface |
| ریختبری | morphism |

| | |
|---|---|
| ascending chain | زنجیر صعودی |
| terminating chain | زنجیر مختوم |
| construction | ساختمان |
| twistor construction | ـپیچ‌دهنده |
| rigidity | سختپایی |
| finiteness conditions | شرایط تناهی |
| the ascending chain condition | شرط مانایی زنجیرهای صعودی |
| mystic hexagon | شش‌ضلعی رمزی |
| abstract formalism | صورتگرایی مجرّد |
| scheme | طرح |
| affine spectrum | طیفِ آفین |
| prime spectrum | طیف اوّل |
| intersection number | عدد تقاطع |
| blowing-up | فراگستری |
| ambient space | فضای محیطی |
| orbit space | فضای مداری |
| transversal | قاطع |
| Hilbert Nullstellensatz,Hilbert's zeros theorem | قضیّهٔ صفرهای هیلبرت |
| polarisation | قطبی‌سازی |
| affine piece | قطعهٔ آفین |

| | |
|---|---|
| k-جبر هندسی | geometric k-algebra |
| k-یی‌مقدار | k-valued |
| کسری-خطّی | fractional-linear |
| | |
| گراسمانی | Grassmanian |
| گروه بنیادی | fundamental group |
| گفتارهای پراکنده | woffle |
| | |
| ماتریس هسه‌یی | Hessian matrix |
| مانا | stationary |
| مبانی وِیل | Weil foundations |
| متمم-بعد | codimension |
| متناهی-مولّد | finitely generated |
| مجموعهٔ پدیدآور | spanning set |
| مختصّه | modulus |
| معین مثبت‌بودن | positive definiteness |
| ملاک ارزه‌یی | valuative criterion |
| مقطع بافه | section of sheaf |
| مقطع گویا | rational section |
| منتجّ چند جمله‌ییها | resultant of polynomials |
| منسجم | coherent |
| منشعب | branched |
| موضعاً نوتری | locally Noetherian |
| موضعی‌سازی | localisation |
| مهبانگ | big bang |
| | |
| نابهنجار | awkward |
| نرم‌افزار جبر کامپیوتری | computer algebra system |

| | |
|---|---|
| infinite descent | نزول نامتناهی |
| Segre embedding | نشانیدن سگره |
| isomorphic embedding | نشانیدن یکریخت |
| intersection theory | نظریهٔ تقاطع |
| string theory | نظریهٔ ریسمان |
| catastrophe theory | نظریهٔ فاجعه |
| isolated point | نقطهٔ تنها |
| generic point | نقطهٔ ژنریک |
| projection | نگاشت تصویر |
| general projection | نگاشت تصویر عمومی |
| birational map | نگاشت دوسوگویا |
| dominant rational map | نگاشت گویای غالب |
| notation | نمادگذاری |
| representative | نماینده |
| infinitesimal strip | نوار بینهایت باریک |
| | |
| Hessian | هسه‌یی |
| birational equivalence | هم‌ارزی دوسوگویا |
| coherent cohomology | همانستگی منسجم |
| ring homomorphism | همریختی حلقه‌یی |
| k-algebra homomorphism | همریختیk_جبری |
| conconic | همقطع مخروطی |
| p-adic convergence | همگرایی p_ادیک |
| arithmetic algebraic geometry | هندسهٔ جبری حسابی |
| birational geometry | هندسهٔ دوسوگویا |
| coordinate geometry | هندسهٔ مختصّاتی |
| number field | هیأت عددی |
| residue field | هیأت مانده‌ها |

# فهرست راهنما


ابررویه ۶۷، ۷۳_۷۴، ۷۶، ۱۰۵، ۱۱۳_۱۱۴، ۱۱۸، ۱۲۱
  تحویلناپذیر ۷۶
ایدآل اوّل ۶۱_۶۲، ۱۴۴
ایدآل ماکسیمال ۶۴، ۶۵، ۷۷
ایدآل ماکسیمال mp ۱۴۵
ایدآل متناهی‌ـمولّد ۵۷، ۵۹
ایدآل همگن ۹۶_۹۷، ۱۰۰

بُعد ۴، ۶۸، ۱۱۵، ۱۲۳، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۵۲
باز استانده $V_f$ ۱۱۷
باز چگال ۶۰

پوشش آفین یک چندگونای تصویری ۱۰۰

تابع چندجمله‌یی ۵، ۷۸_۸۱، ۸۴، ۸۵، ۱۱۵
تابع گویا ۵، ۶، ۳۳، ۵۳، ۸۱، ۸۵_۸۶، ۹۰، ۹۹
تابع منظّم ۴، ۶، ۸۴_۸۵، ۹۰، ۹۲، ۱۴۲، ۱۴۹
  روی چندگونای تصویری ۹۹، ۱۰۷، ۱۱۰، ۱۴۲
تعویض مختصّات آفین ۱۶، ۲۹
تعویض مختصّات تصویری ۱۶، ۴۸
تفکیک‌پذیری ۷۳، ۱۱۴

تکین ۴، ۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۲۰_۱۲۲، ۱۲۷، ۱۳۲_۱۳۴
تکینگی ۴، ۳۲، ۱۰۸، ۱۱۳، ۱۱۸، ۱۲۰_۱۲۱، ۱۳۳، ۱۴۲
تناظر $I - V$ ۵۸_۶۱، ۶۴، ۶۵، ۷۱، ۷۵، ۷۷_۷۸، ۱۰۰، ۱۴۴_۱۴۵
  درحالت همگنی ۹۶، ۹۸
توازی ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۹، ۷۱
توپولوژی زاریسکی ۴۲، ۵۹_۶۰، ۶۲_۶۳، ۷۶، ۷۹، ۸۵، ۸۹، ۹۲، ۹۷، ۹۹_۱۰۰، ۱۰۶، ۱۱۰، ۱۱۳، ۱۴۲، ۱۴۵_۱۴۶
توپولوژی یک خم ۵۰_۵۲، ۵۴

جبر متناهی ۶، ۶۸_۶۹، ۷۱_۷۲، ۷۷
جبر متناهی‌ـمولّد ۵۸، ۶۳، ۶۸، ۹۶، ۱۴۴، ۱۴۹
جبری‌ـبسته ۶۵
جبری‌ـمستقل ۶۹_۷۰، ۱۱۵، ۱۲۰

چند گونا
  آفین ۷، ۵۸
  شبه تصویری ۷
چندجمله‌یی همگن (=صورت) ۲۰_۲۲، ۲۹_۳۱، ۳۷، ۳۹، ۸۳، ۹۷، ۱۱۸

چندگونا ۶، ۵۹، ۶۸، ۸۳_۸۴، ۹۵_۹۶، ۱۰۵_۱۰۶، ۱۱۵_۱۱۶، ۱۱۸، ۱۲۲، ۱۳۸، ۱۴۱_۱۴۶

آفین ۸۳_۸۴، ۸۶_۸۸، ۹۳، ۱۴۴_۱۴۵

تصویری ۹۴_۹۶، ۱۰۰_۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۶_۱۰۷، ۱۴۲، ۱۴۳

شبه‌تصویری ۱۴۳

کامل ۱۴۳

گویا ۵۳، ۱۰۵، ۱۲۸

مجرّد ۹۵، ۱۴۴

حاصلضرب چندگوناها ۹۲، ۱۰۵_۱۰۷، ۱۱۰

حلقهٔ ارزهٔ گسسته ۱۴۹، ۱۵۱

حلقهٔ مختصاتی k[V] ۷۸، ۸۰_۸۹، ۱۴۴_۱۴۵، ۱۴۸

حلقهٔ موضعی $\mathcal{O}_{V,P}$ ۸۵، ۹۹، ۱۴۲، ۱۴۹

حلقهٔ نوتری ۵۶_۵۷، ۷۵

حوزهٔ ایدآل اصلی ۷۴

حوزهٔ تعریف dom f ۸۴_۸۵، ۹۱_۹۲، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۸

حوزهٔ یکتایی تجزیه ۳۳، ۶۴، ۷۵، ۹۲

خط تصویری $\mathbb{P}^1$ ۱۹، ۵۱، ۹۵، ۱۰۲_۱۰۳، ۱۰۷

خطّ مجانبی ۱۲، ۱۶، ۱۷، ۱۳۵

خم آفین ۴۵، ۵۲، ۹۴

خم پارامتری (شده) ۱۲، ۱۳، ۱۹، ۲۲، ۲۸، ۳۲_۳۳، ۳۶، ۴۶، ۵۳، ۹۱، ۹۲، ۱۰۲_۱۰۳، ۱۵۰

خم تصویری ۱۷، ۲۹، ۵۲، ۸۹

خم تکجمله‌یی ۳۲، ۶۸

خم درجهٔ سوّم ۳، ۹، ۳۲_۵۲، ۸۸_۹۰، ۹۴_۹۵، ۱۰۹، ۱۲۳، ۱۴۰_۱۴۱

تکین (← خم درجهٔ سوّم گرهی یا خم درجهٔ سوّم تیزه‌یی)

تیزه‌یی ۳۲، ۴۸، ۱۳۴

چپ ۱۳۹

گرهی ۳۲، ۴۶، ۹۱، ۱۲۳

ناتکین (← خم درجهٔ سوّم)

خم گویا ۵۳، ۱۰۲، ۱۰۹، ۱۴۰، ۱۴۴

درجه تعالی $\operatorname{tr deg}_k K$ ۷۴، ۱۰۵، ۱۱۶

دسته‌مقطع مخروطی ۲۶، ۳۰

دو خط متمایز ۱۵، ۱۹

رادیکال $\sqrt{I}$ ۶۳_۶۴، ۷۵، ۹۷_۹۸

رده‌بندی چندگوناها ۵۰_۵۵، ۱۴۰

رسته‌های هندسی ۵، ۵۴

رویهٔ درجهٔ دوّم ۷۵، ۱۰۳، ۱۰۷_۱۰۹، ۱۲۹، ۱۳۲

رویهٔ درجهٔ سوّم ۹، ۱۲۲، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۵۲

ریختبری ۷، ۴۲، ۸۷_۸۸، ۹۰، ۱۰۲، ۱۰۶، ۱۱۱، ۱۲۹، ۱۳۴، ۱۴۸

ریشه‌های چندگانه، چندگانگیها ۲۰_۲۱، ۴۰، ۴۴، ۴۷، ۶۱، ۱۱۲، ۱۲۲، ۱۲۷

ریشه‌های یک صورت دومتغیره (← صفرها)

زیرمجموعهٔ جبری (← مجموعهٔ جبری)

شرط مانایی زنجیرهای صعودی ۵۶، ۵۷، ۶۲، ۶۵، ۷۴

شش‌ضلعی رمزی پاسکال ۴۳_۴۴

شکل نرمال یک خم درجهٔ سوّم ۴۵_۴۴، ۴۸

صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^2$ ۱۲، ۱۵، ۳۹_۳۵، ۴۴، ۵۵، ۹۴، ۱۰۳
صفر یک صورت ۲۱_۲۰، ۲۶، ۲۷، ۳۰، ۳۶، ۴۰، ۴۸، ۱۲۳، ۱۲۷، ۱۳۶
صورت ۲۱_۲۰، ۲۶، ۳۱، ۳۵، ۱۱۷

طرح آفین ۱۴۵
طیف اوّل Spec A ۱۴۵

غالب ۸۷، ۱۰۴

فراگستری ۱۲۰_۱۱۹
فرمول اویلر ۱۱۸، ۱۳۳
فصل مشترک خمهای مسطح ۲۱، ۳۸، ۴۱، ۷۶
فصل مشترک دو رویهٔ درجهٔ دوم ۱۴۱
فصل مشترک دو مقطع مخروطی ۳۰_۲۵، ۱۴۱
فصل مشترک دورویهٔ درجهٔسوّم ۱۰۹
فضای آفین $\mathbb{A}^n_k$ ۵۸، ۶۲، ۷۱، ۷۸_۷۶، ۹۱، ۹۵، ۱۰۵، ۱۱۲، ۱۱۸، ۱۴۸
فضای تصویری $\mathbb{P}^3$، $\mathbb{P}^n$ ۸، ۷۲، ۹۶، ۱۰۳_۱۰۱، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۸، ۱۲۹
فضای مماس $T_PV$ ۴، ۳۹، ۴۰، ۴۷، ۴۸، ۱۲۰_۱۱۲، ۱۳۳، ۱۵۱

قاطع ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۵
قانون گروهی روی خم درجهٔ سوّم ۴۲_۳۹، ۴۸_۴۵، ۵۴، ۸۹
قضیّهٔ بزو ۲۲_۲۱، ۴۱
قضیّهٔ صفرها ۶، ۳۶، ۶۵_۶۳، ۸۵، ۹۸_۹۷، ۱۴۴، ۱۴۵
قطبی ۱۲۴، ۱۳۶
قطعهٔ آفین استانده $V_{(i)}$ ۱۶، ۱۷، ۹۵، ۱۰۰، ۱۱۰
قطعهٔ آفین چندگونای تصویری ۱۷_۱۶، ۱۰۰، ۱۱۰

کرهٔ ریمان ۵۱

گونای یک خم ۵۵_۵۰، ۱۳۷

ماکسیمال $m_P$ ۱۴۶
مبین ۱۲۸_۱۲۷
مجموعهٔ باز
باز استانده $V_f$ ۶۵، ۸۵، ۸۹_۸۸
بازچگال ۴۲، ۷۹، ۸۵، ۸۷، ۱۰۵، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۸
مجموعهٔ تهی ∅ ۵۳، ۶۱، ۸۶، ۹۷
مجموعهٔ جبری ۶۴_۵۹، ۷۶، ۷۹_۷۸، ۹۲، ۱۰۱_۹۷، ۱۱۰
تحویلناپذیر ۳۹، ۶۲_۶۱، ۶۴، ۶۷، ۷۵، ۷۹، ۸۴، ۹۲، ۹۸، ۱۱۴
مختصّات آفین ۱۸، ۴۴، ۵۱، ۱۰۰، ۱۳۴
مختصّه‌ها ۵۴، ۵۵، ۱۴۰، ۱۴۹، ۱۵۱
مخرج یک تابع گویا ۷، ۸۱، ۸۵
مخروط آفین روی چندگونای تصویری ۹۸
مسائل دیوفانتی ۴، ۲۹_۱۲، ۳۴_۳۳، ۴۹_۴۷، ۵۵_۵۳، ۱۵۱
مشخصهٔ p ۷، ۱۸، ۲۰، ۲۹، ۳۳، ۹۹_۷۲، ۱۲۷، ۱۵۱

مقطع مخروطی ۲۸_۱۲، ۳۰، ۳۹_۳۶، ۴۴، ۵۳، ۱۱۱
تکین (تباهیده) ۲۶، ۳۰، ۱۲۷
منتج ۳۱_۳۰، ۱۲۶_۱۲۴، ۱۳۶
موضعی‌سازی $A[S^{-1}]$ ۵۷، ۶۶، ۸۶، ۱۴۹، ۱۵۰

ناتکین ۴، ۳۹، ۱۱۲، ۱۱۵، ۱۱۹_۱۱۸، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۷، ۱۳۴_۱۳۲، ۱۴۱، ۱۴۹
نرمال گویا ۱۰۲
نرمالسازی نوتر ۷۴_۶۹
نزول نامتناهی ۳۴، ۴۹
نشانیدن سگره ۱۰۶
نظریهٔ تکینگی ۴، ۸، ۱۲۰_۱۱۹، ۱۴۰
نظریهٔ توابع مختلط ۸، ۵۵_۵۲، ۱۳۷، ۱۴۲
نظریهٔ حذف ۳۱_۳۰، ۶۷، ۷۶، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۳۶
نظریهٔ رسته‌ها ۶، ۱۳۹، ۱۴۴، ۱۴۹
نقطهٔ بینهایت ۱۲، ۱۸_۱۶، ۲۰، ۲۱، ۴۶_۴۴، ۵۰، ۵۱، ۹۰، ۱۳۵
نقطهٔ تکین ۱۱۵
نقطهٔ ژنریک ۱۴۸_۱۴۵، ۱۵۰
نقطهٔ عطف ۴۰، ۴۴، ۴۵، ۴۸
نگاشت تصویر خطّی ۱۳، ۷۱، ۷۷، ۸۰، ۱۰۳، ۱۰۹، ۱۲۹_۱۲۸
نگاشت چندجمله‌یی ۵، ۸۳_۷۹، ۹۱، ۹۲
نگاشت گویا ۶، ۸۷_۸۶، ۹۲_۹۰، ۱۰۵_۱۰۱، ۱۰۸، ۱۲۹_۱۲۸، ۱۴۸
نگاشت منظّم ۸۸_۸۴، ۹۰، ۹۱، ۱۰۳_۱۰۱، ۱۰۷_۱۰۶، ۱۱۰، ۱۳۴
نگاشت منظم ۴
نگاشت‌گویا ۳۲
نگاشتهای دوسو گویا ۱۰۵_۱۰۴، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۲۰_۱۱۸
نگاشتهای گویا ۶، ۸۶

هِسِه‌یی ۴۵، ۱۲۳، ۱۳۳_۱۳۲
هم‌ارزی تصویری ۱۷، ۲۰، ۲۲
هم‌ارزی دوسو گویا ۱۰۵_۱۰۴، ۱۲۰_۱۱۸، ۱۲۹_۱۲۸، ۱۴۸
هم‌ارزی رسته‌های $V \to k[V]$ ۸۲_۸۱، ۱۴۴، ۱۴۶
همگرایی p_اَدیک ۱۴۹
هندسهٔ تحلیلی مختلط ۶، ۴۲، ۵۵_۵۰، ۱۴۱، ۱۴۳
هندسهٔ تصویری ۱۲، ۱۵، ۹۴
هندسهٔ جبری تصویری ۱۴۴_۱۴۳
هندسهٔ حقیقی ۹، ۱۴۱
هیأت تابعی $k(V)$ ۷۴، ۸۷_۸۲، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۱۶، ۱۱۸، ۱۴۹_۱۴۸
هیأت جبری_بسته ۶۱، ۶۴، ۹۱، ۱۴۱، ۱۴۷_۱۴۴

یکریختی ۷، ۸۰، ۸۳، ۸۸، ۸۹، ۹۱، ۹۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۷_۱۰۶، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۸