سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: مشتق - دوازدهم ریاضی و تجربی

فصل ۴ : مشتق

تعریف : $f =$ تابع $\qquad a \in D_f$

تابع f در یک همسایگی a تعریف شود .

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

یا :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

مثال: $f(x)=x^2+2x+1$, $x_0=1$

$$f(1)=1+2+1$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1-4}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{1}=4$$

$$\Rightarrow f'(1)=4$$

حل: $f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad , \quad x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 + \cancel{2} + 2h - \cancel{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 + 0 = 4$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$f(x)=5x+2 \quad , \quad x_0=3$ حل:

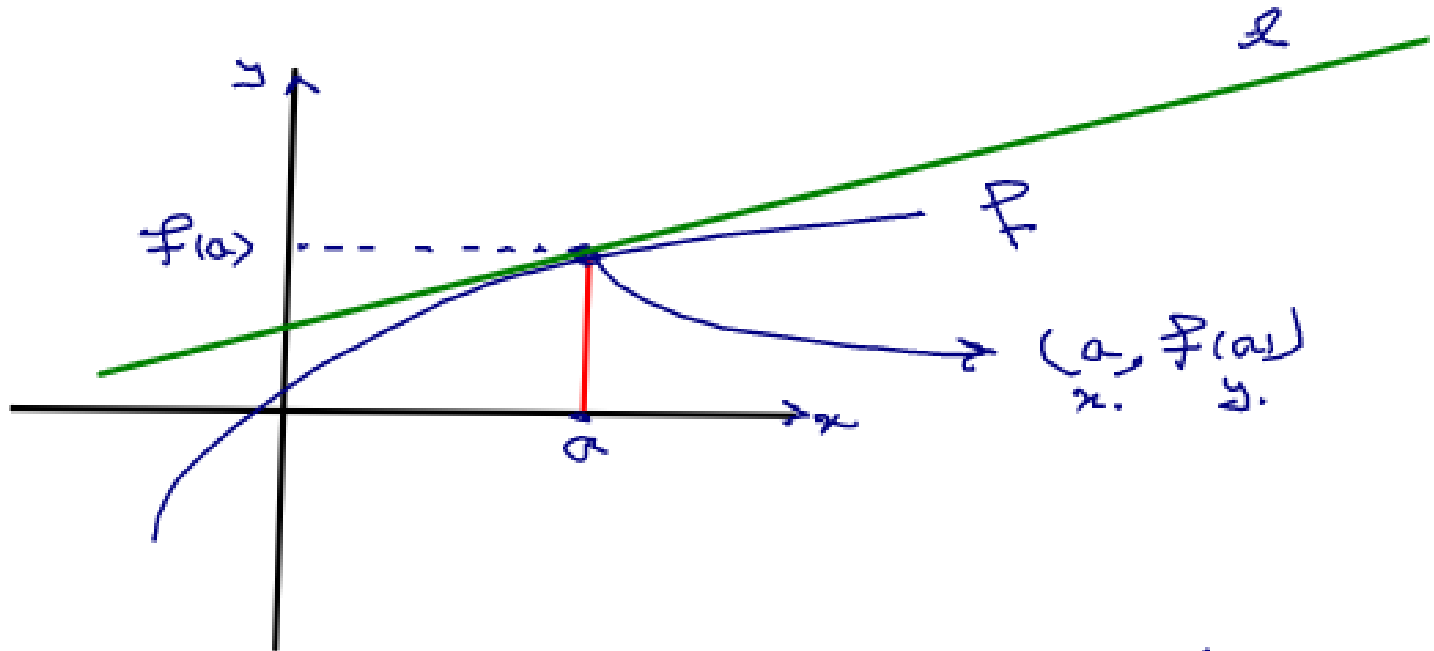
$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{5x+2-17}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{5\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=5$$

$$f'(3)=5$$

$$f(3)=5(3)+2=17$$

تفسیر مشتق: (تعبیر مشتق)



شیب خط مماس بر نمودار در نقطه a $= f'(a)$

$$m_L = f'(a)$$

مثال: شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ را در نقطه $x=1$ بیابید.

$$f(1)=\sqrt{1+3}=2$$

$$m=f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$$

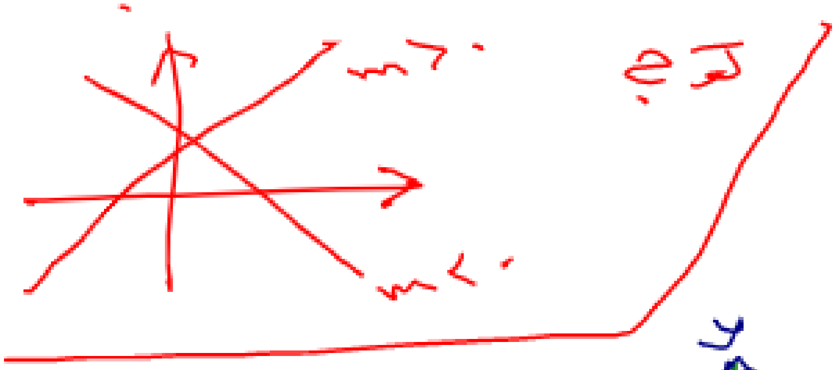
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}\longrightarrow m=f'(1)=\frac{1}{4}$$

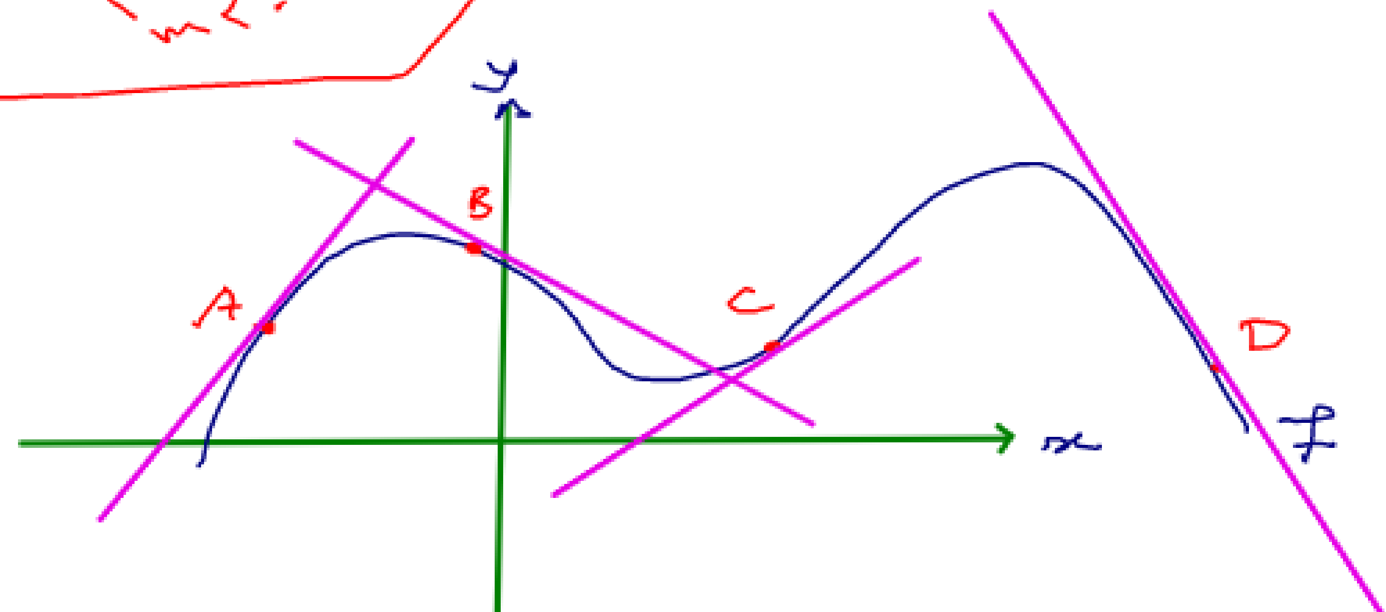
تمرین: اگر $f(x)=x^2+x$ آنگاه $f'(0)$ را بیابید.

تمرین: شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^3 + 1$ را در $x = 2$ بیابید.

نکته



مثال :



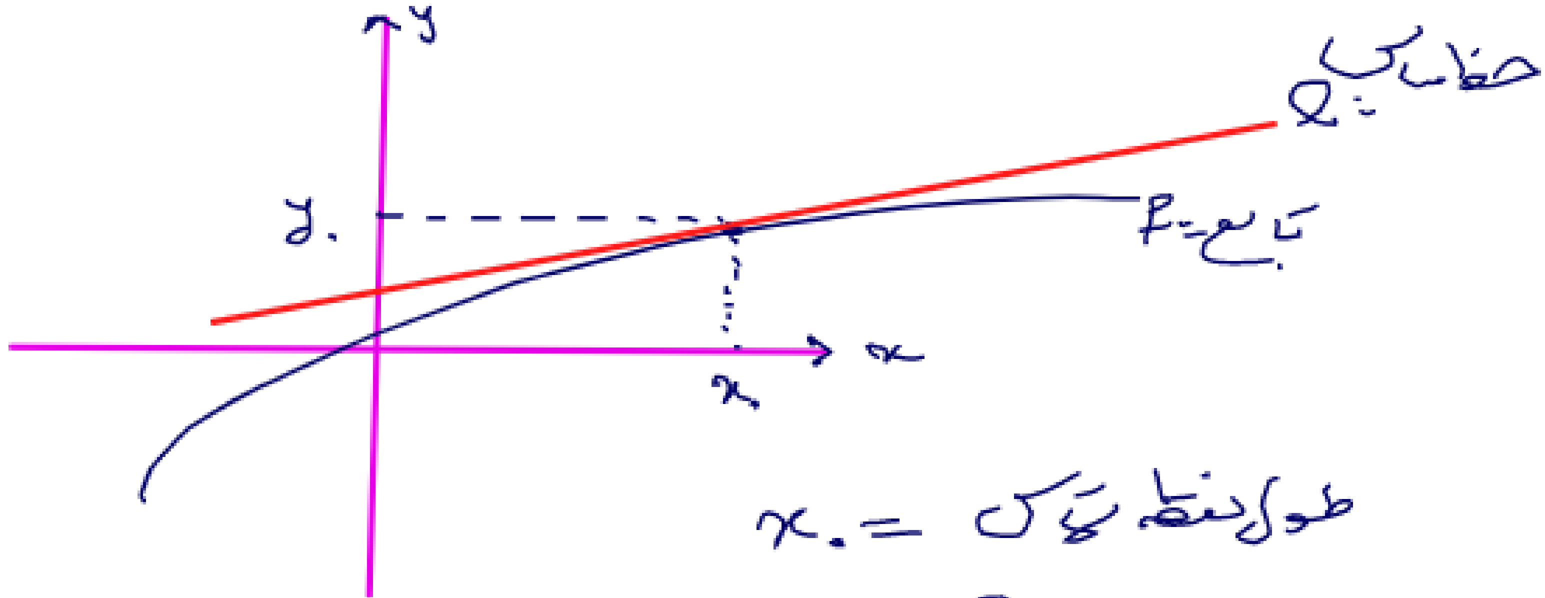
شیب مثبت : A و $C \Longrightarrow m_A > m_C$

شیب منفی B و $D \Longrightarrow m_B > m_D$

$$m_D < m_B < m_C < m_A$$

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

توجه: معادله خط مماس:



$x_0 =$ طول نقطه تماس

$y_0 = f(x_0)$

$m = f'(x_0)$

خط مماس: $y - y_0 = m(x - x_0)$

تمرین: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x_0=9$ بنویسید.

$x_0 = 9$

$y_0 = f(9) = \sqrt{9} = 3$

$$m = f'(9) = \lim_{x\to 9} \frac{f(x)-f(9)}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

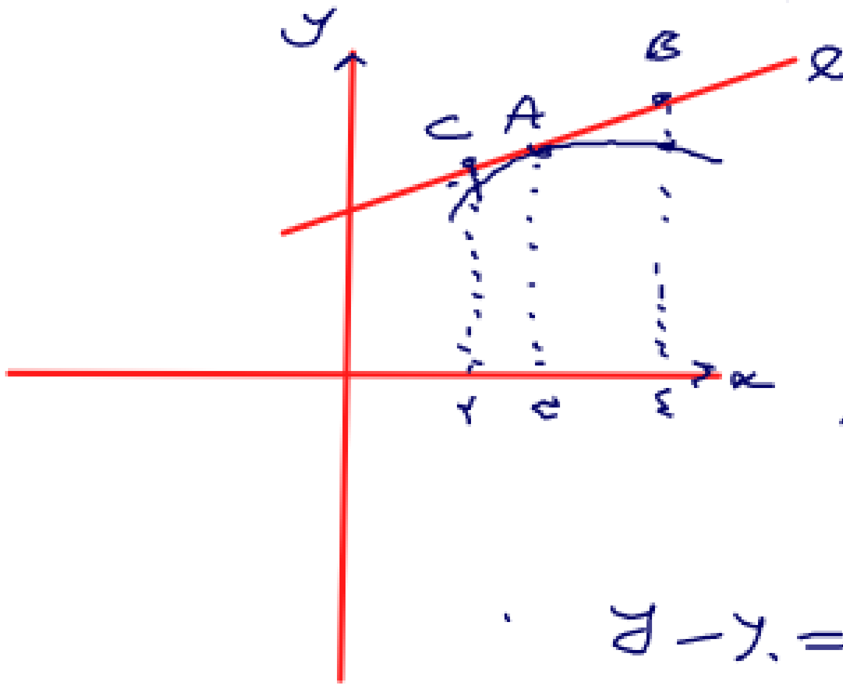
$$= \lim_{x\to 9} \frac{\cancel{x-9}}{(\cancel{x-9})(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

معادله مماس $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x-9)$$

تمرین: معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x^2$ را از $x_0=3$ بنویسید.

تمرین : اگر $f'(3)=2$ و $f(3)=7$ آنگاه مختصات نقاط B و C را بیابید.



$B(4, ?)$

$C(2, ?)$

$B, C \in l$

$x_0 = 3 , \ y_0 = f(3) = 7$

$m = f'(3) = 2$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 7 = 2(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$

$x = 4 \Rightarrow y = 2(4) + 1 = 9 \Longrightarrow B(4, 9)$

$x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 5 \Longrightarrow C = (2, 5)$

پاسخ:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ و $x_0 = 2$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 9$

$\checkmark\ m = f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 2x + \overbrace{1 - 9}^{-8}}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(2x+4)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2} (2x+4) = 8$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 9 = 8(x - 2)$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ آنگاه $f'(5)$ را بیابید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{5-x}{5x}}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{5x(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{-1}{5x}=\frac{-1}{25}$$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{1}{5}$ مقدار $f'(2)$ را بیابید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ آنگاه $f'(a)$ را بیابید.

روش اول:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

روش دوم:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ ، دامنه f و دامنه f' را مشخص کنید.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5x-2}{x-1}=\frac{3}{0}=\infty$$

پس $1\notin D_{f'}$.

$$a\neq 1 \Rightarrow f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{5x-5a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{5(x-a)}{x-a}=5 \Rightarrow f'(a)=\begin{cases}5 & a\neq 1\\ \infty & a=1\end{cases}$$

پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

از طرفی $D_f=\mathbb{R}$

فرمول های مشتق :

$$\boxed{1)\quad f(x)=c\ (\forall x) \Longrightarrow f'(c)=0}$$

مثال : $y=5 \Rightarrow y'=0$

$y=2\sqrt{3} \Longrightarrow y'=0$

$y=\pi-\sqrt{2} \Longrightarrow y'=0$

$$\boxed{2)\quad f(x)=ax+b \Longrightarrow f'(x)=a}$$

مثال : $y=3x-1 \Rightarrow y'=3 \Longrightarrow (y')'=0$

$y=\pi x+\sqrt{2} \Longrightarrow y'=\pi \Longrightarrow (y')'=0$

$$\boxed{۲)\quad f(x)=x^{n}\ (n\in \mathbb{N}) \Longrightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$$

مثال: $y=x^{5} \Longrightarrow y'=5x^{4}$

$$y=x^{3}+7x^{5} \Longrightarrow y'=3x^{2}+7(5x^{4})$$

$$y=7x^{3}+5x-1 \Longrightarrow y'=21x^{2}+5$$

$$\boxed{۳)\quad f(x)=\sqrt{x} \Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ x>0}$$

مثال: $y=x^{3}+\sqrt{x}+1 \Longrightarrow y'=3x^{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y=7\sqrt{x}-5x \Longrightarrow y'=7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\boxed{۵)\quad f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ,\ x\neq 0}$$

مثال: $y=4\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+5\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

$$y=x^2+\sqrt[3]{x}-\sqrt{5} \Rightarrow y'=2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\boxed{۶)\quad y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

مثال: $y=\sqrt{5x+1} \Rightarrow y'=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

$$y=\sqrt{x^3+\sqrt{x}+1} \Rightarrow y'=\frac{3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^3+\sqrt{x}+1}}$$

$$\boxed{7)\quad f(x)=u^n \Longrightarrow f'(x)=n\cdot u'\cdot u^{n-1}}$$

مثال: $y=(2x-1)^5 \Rightarrow y'=5(2)(2x-1)^4$

$$y=(\sqrt{x}+\pi)^{10} \longrightarrow y'=10\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+\pi)^9$$

$$\boxed{8)\quad f(x)=u\cdot v \Longrightarrow f'(x)=u'\cdot v+v'\cdot u}$$

مثال: $y=\sqrt{x}\cdot x^3 \Longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x^3+3x^2\cdot\sqrt{x}$

$$y=(x+2)^3\cdot(3x-1)^5 \Longrightarrow y'=3(1)(x+2)^2(3x-1)^5+5(3)(3x-1)^4(x+2)^3$$

مشتق توابع مثلثاتی :

تمرین: اگر $f(x)=\sin x$ آنگاه $f'(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

$$f'(\tfrac{\pi}{4})=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1

تذکر: $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}).\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

تمرین: اگر $f(x)=\cos x$ ، مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ را بیابید.

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

فرمولهای مشتق توابع مثلثاتی :

$$\boxed{a)\quad y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x}$$

مثال: $y = 3\sin x + 5 \Rightarrow y' = 3\cos x$

$$y = \sqrt{\sin x} \longrightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$\boxed{b)\quad y = \sin u \Longrightarrow y' = u' . \cos x}$$

مثال: $y = \sin 5x \Longrightarrow y' = 5\cos 5x$

$$y = \sin\sqrt{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x}$$

$$11)\quad y=\cos x \Longrightarrow y'=-\sin x$$

مثال: $y=\sqrt{x+\cos x} \Longrightarrow y'=\dfrac{1-\sin x}{2\sqrt{x+\cos x}}$

$$y=\cos^5 x \Longrightarrow y'=5(-\sin x)\cdot\cos^4 x$$

$$12)\quad y=\cos u \Longrightarrow y'=-u'\cdot\sin u$$

مثال: $y=\cos 2x \Longrightarrow y'=-2\sin 2x$

$$y=\cos\sqrt[3]{x} \Longrightarrow y'=-\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot\sin\sqrt[3]{x}$$

13) $y=\tan x \Rightarrow y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

14) $y=\tan u \Rightarrow y'=u'\cdot(1+\tan^2 u)$

15) $y=\cot x \Rightarrow y'=-(1+\cot^2 x)$

16) $y=\cot u \Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

همچنین:

17) $y=\sin^n(u^m) \Rightarrow y'=m\cdot n\cdot u'\cdot\cos u\cdot\sin^{n-1} u^m$

18) $y=\cos^n(u^m) \Rightarrow y'=-n\cdot m\cdot u'\cdot\sin u\cdot\cos^{n-1}(u^m)$

$$(19)\qquad y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$

مثال: $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}\longrightarrow y'=\dfrac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)^2}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow y'=\frac{0(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1)}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$y=\frac{\sin x}{2\cos x-1}\rightarrow y'=\frac{\cos x(2\cos x-1)-(-2\sin x)(\sin x)}{(2\cos x-1)^2}$$

$$(20)\qquad y=u+v\Longrightarrow y'=u'+v'$$

تمرین ۱: اگر $f(x)=x^2-2$ آنگاه $f'(-1)$ را بیابید (تعریف)

تمرین ۲: اگر $f(x)=3x^2-x+1$ آنگاه معادله خط مماس بر نمودار f را در $x=2$ بنویسید. (شیب به کمک تعریف محاسبه شود)

تمرین ۳: وجود یا عدم وجود $f'(1)$ را برای تابع زیر بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ x+1 & x\le 1 \end{cases}$$

مشتق پذیری و پیوستگی:

قضیه: اگر $f'(a)$ موجود و متناهی باشد آنگاه تابع f در $x=a$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=x^3+x+1$ در R مشتق پذیر است

پس روی R پیوسته است.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ (x+1), & x\le 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

وجود ندارد

پس تابع در $x=1$ ناپیوسته است، لذا مشتق پذیر نیست.

نتیجه :

اگر تابع f در $x=a$ ناپیوسته باشد آنگاه $f'(a)$ موجود نیست. (مشتق پذیر نیست)

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید

$$\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)\Rightarrow$$ f در $x=1$ پیوسته است

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f'(1^+)=2 \\ f'(1^-)=-2 \end{cases}\Longrightarrow$$ $f'(1)$ وجود ندارد.

نتیجه: تابع ممکن است پیوسته باشد در حالیکه مشتق پذیر نیست

یعنی عکس قضیه قبل عمومیت ندارد.

تمرین: مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow$$ f در $x=0$ پیوسته است

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

حل: چون $f'(0)$ متناهی نیست پس f در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

تمرین: اگر تابعی مشتق پذیر باشد و $g(x)=f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و آنگاه $f'(2)$ را بیابید

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}$$

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=2 \Rightarrow \frac{1}{|\cos x|}=2 \Rightarrow |\cos x|=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

$$g'(x)=\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan^2 x}} \cdot f'(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

$$g'(\tfrac{\pi}{3})=\frac{2\sqrt{3}(1+3)}{4} f'(2) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\, f'(2)$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$$

- تمرین: خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن، محور yها را با چه عرضی قطع می کند؟

$$x_0=2 \Longrightarrow y_0=f(2)=\frac{10-4}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$$f'(x)=\frac{5\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{x} \Longrightarrow m=f'(2)=\frac{5\sqrt{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(6)}{2}$$

$$=5\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}=5\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Longrightarrow y-3\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{4}(x-2)$$

$$\xRightarrow{x=0} y-3\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{4}(2) \Longrightarrow y=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$$

تمرین: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=4$،

محور yها را در چه نقطه قطع می‌کند؟

تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\leq -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$ در $x=-2$ مشتق‌پذیر است. b و c را بیابید.

مشتق‌پذیر $f \Rightarrow$ f پیوسته است

$$\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow -2-2b+c=3 \Rightarrow \boxed{c=2b+5}$$

$$f'_+(-2)=f'_-(-2) \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{5-2x}}\Bigg|_{x=-2} = -x+b\Big|_{x=-2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{3} = \cancel{-x}^{\,2}+b \Rightarrow b=-2-\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow c=-\frac{16}{3}+5=-\frac{1}{3}$$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x}}{x^2-x}\right)^3$ را در $x=2$ بیابید.

$$f(x)=\frac{x^3+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2)(x^2-x)^3-3(2x-1)(x^2-x)^2\cdot(x^3+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2)=\frac{(12+2)(4-2)^3-3(5)(4-2)^2(8+2)}{(4-2)^6}=\dots$$

پایان