

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حمیدی

موضوع: فصل سوم، ترکیبیات - ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

اینمیت گسسته دوازدهم ریاضی

دبیرستان بوعلی شیراز

کلاس سوم اسفند نوروز ساعت ۱۴:۱۵

موضوع :

ترکیبیات

مزبان حبیبی

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



یادآوری: آر  $n$  شیخ متفاوت را در یک ردیف قرار دهیم، هر جدید را  
یک جایگاه هم میزنیم و تعداد جایگاه  $n$  شیخ، برابر با  $n!$ .

مثال: به چند طریق می توان ۵ کت به متفاوت را در یک قفسه چید؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مزبان حبیبی



یادآوری: فرض کنید می خواهیم  $r$  شیء را از بین  $n$  شیء انتخاب کنیم:

الف) اگر ترتیب انتخاب مهم باشد، تعداد حالت ها  $(n)_r$  خواهد بود که

$$\text{ترتیب} \equiv (n)_r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ب) اگر ترتیب انتخاب مهم نباشد، تعداد حالت ها  $\binom{n}{r} = C(n, r)$  خواهد بود:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

مزبان حبیبی



مثال: به چند طریق می توان ۳ نفر را از بین ۷ نفر برای تشکیل تیم انتخاب کرد

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{3 \times 2 \times 1 \times \cancel{4!}} = 35$$

تعداد

مثال: به چند طریق می توان ۳ نفر از بین ۷ نفر را انتخاب کرد برای اهدای سه جایزه

$$P(7, 3) = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: از عدد یک که شش عدد ۵، هر عدد ۶، هر عدد ۱۱ است، سه عدد با هم خارج می‌کنیم.

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

الف) تعداد صریح ممکن کدام است؟

ب) در هند ص ۱، دو عدد بسیار یک فرد گسسته است؟

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$$

ج) در هند ص ۱، هر دو عدد بسیار هستند؟

$$\binom{6}{2} + \binom{5}{2} = 15 + 10 = 25$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

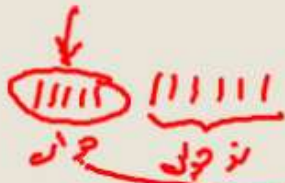


**تمرین:** ۵ جوان و ۶ نوجوان در یک یک صف کن حجم، ایستاده اند.

انچه ته ارکلی حالت ها کدام است ؟

!!!

ب) چند حالت ممکن است که همه جوانان کنار هم باشند؟



$$6! \times 5!$$

ج) در چند حالت ، نوجوان ها در انتها بایستند؟



$$6! \times 5!$$

د) در چه حالت هیچ دو نفری از یک گروه در کنار هم نیستند؟

$$\frac{6}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 6! \times 5!$$

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نمونه ای از یک کتاب ریاضی در حدی که به فریزر، اندک کتب فقه صید (م)

۱۳!

اندک تعداد کتب که در کتابخانه است؟

ب) در چند کتاب، کتاب به چهار اوستاد در کتابخانه جمع شده؟

۱۱۱۱۱۱ ۱۱۱۱

۴

۵! × ۹!

۵ به فریزر کتابخانه

ج) در چند کتاب، کتاب به چهار فریزر در کتابخانه جمع شده؟

۱۱۱۱۱۱

۶! × ۸!

د) در چند کتاب، همه کتاب به چهار علم نام، کتاب جمع شده؟

$$13! - (9! \times 5! + 6! \times 8!) =$$

مبانی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



**تمرین:** با حروف «گ. پ. چ. ر.» و ارقام ۳، ۲، ۵، ۷، ۱، اینها تا ۷ تا به

نرسیده ایم. الف) مقدار کل رمزها کدام است؟

ب) درصده از این رمزها، حروف در کنار یکدیگر می آیند؟

۱۱۱  ۱۱۱۱  ۴! × ۳!

ج) درصده تا از این رمزها، ارقام در کنار یکدیگر می آیند؟

۱۱۱  ۱۱۱۱  ۵! × ۳!

د) درصده تا از این رمزها، هم حروف در کنار هم می آیند؟

۱۱۱  ۱۱۱۱  (۴! × ۳!) - ۷!

مزبان حبیبی



جلیت با تکرار :

آره بیرون دایره به رسم که ۲ تا ی آن م به هم سفید آینه تعداد حاصل  
جلیت این آینه د، برابر با :

$$\left. \begin{array}{l} ۱۰ \\ ۱۰ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{۱۰!}{۲!} = ۱۰! / ۲$$

جلیت = ۱۰  
جلیت = ۲

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: با ارقام ۵ و ۳ و ۲، ۲ و ۲ و ۲، چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

$$\text{تعداد حالت ها} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

تمرین: با حروف پ، گ، ر، ج، چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟

$$\frac{4!}{2!} = 4 \times 3 \times 2 = 12.$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



جایگت با تکرار تعیین یافته :

اگر  $n$  تایی داشته باشی که  $r_1$  تا  $r_k$  تا داشته و ... بگیرند  $(r_1 + r_2 + \dots + r_k = n)$

آنچه مقدار جایگت - این را برابر با :

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots}$$

مثال: با حروف ۵، ۵ و ۳ عدد ۲۲۲۵۵۵، چند عدد شش رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{6!}{2! \times 3!}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تذکره: با حروف « گ گ گ گ گ » چه « و ا ر ق ا م » « ۵ و ۵ و ۲ و ۲ » چند انرژی  
تایید می توان ب طرح؟

$$\frac{9!}{3! \times 2!}$$

مثال: د. نغمه ک رایج چند مرتبه می توان در سه مکان ۲، ۳، ۴ لغزنی امکان داد؟

$$\frac{10!}{2! \times 3! \times 4!} = \binom{10}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{4}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسبه و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سه راه مرتبه اول :

به چند طریق می توان یک دسته گل شامل ۵ گل که از بین سه نوع گل متفاوت انتخاب کرده  
( از هر نوع گل به تعداد کافی موجود دارد.)

$x_1 =$  تعداد گل نوع اول

$x_2 =$  تعداد گل نوع دوم

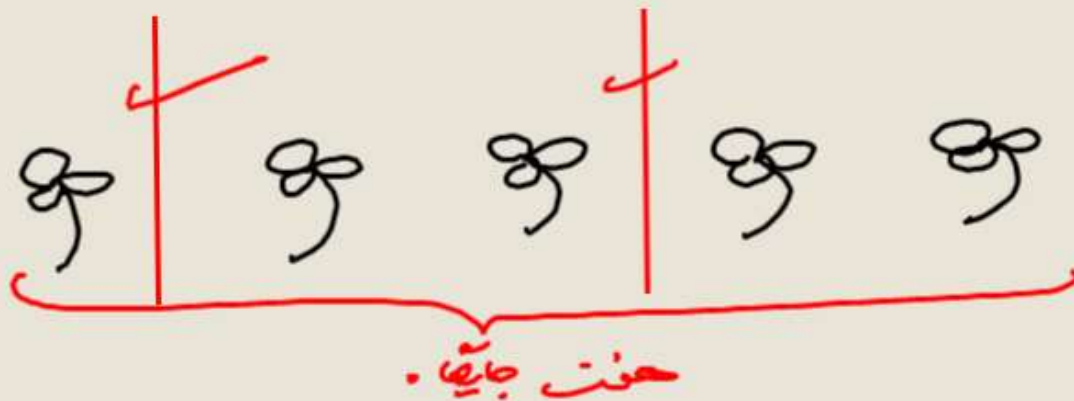
$x_3 =$  تعداد گل نوع سوم

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

تبدیلی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$- \text{حالت} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

مزبان حبیبی





نتیجه ۱: اگر جداولی  $n$  سطر و  $k$  ستون داشته باشد

تعداد اجزای آن برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{تعداد اجزای جدول} &= n + k - 1 \\ \text{تعداد اجزای سطر} &= k - 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{تعداد اجزای ستون} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

مزبان حبیبی



مثال: از بین ۴ نفع ۶ به ضمیمه هر دو سوال ۱۰ تا ۶ حل کنید

$$n=10, \quad k=4$$
$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$$

مثال: به ضمیمه هر دو سوال ۷ تا ۵ از بین ۵ نفع ۵ حل کنید

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نتیجه ۲: تعداد جواب ها در معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  در مجانب  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$   
(اعداد صحیح منفی) برابر است با:  
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

اثبات: --- ، تعداد کل متغیرها  $x_1, \dots, x_k$  ، تعداد کل متغیرها  $x_1, \dots, x_k$

ماتریس  $n$  ضرایب  $k$  متغیرها

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$  در مجموعه اعداد صحیح منفی چند جواب دارد؟

$$\binom{10 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{12}{2}$$

مثال: معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$  چند جواب دارد. (در  $(-1, 4)$ )

$$\binom{3 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{6}{3}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: تعداد

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$  و  $x_1 > 2$  چند جواب دارد؟

$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0 \Rightarrow y_1 > 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow (x_1 - 2) + x_2 + x_3 = 10 - 2$

$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 8$

$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} =$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



گزینه: سه راه

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{با شرط } x_i \geq 1$$

چند جواب دارد؟

$$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 - 1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 - 1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) = 1 - 3$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = -2 \quad (y_1, y_2, y_3 \geq 0)$$

$$\binom{4 + 2 - 1}{2 - 1} = \binom{4}{2}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسّه بنیگه  
۱

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

ان ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی

دبرستان بوعلی شیراز

تیرماه دهم سنه ۱۴۰۵

در صحنه  
کتاب لایسنس

مزبان حبیبی

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات کسبه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: مربعی  $3 \times 3$  بنویسید و اعداد  $1, 2, 3$  را چنان در آن بنویسید که جمع هر ردیف  
ستونی، عدد یکسان باشد.

A	B	C
C	A	B
B	C	A

1	2	3
2	3	1
3	1	2

مزبان حبیبی



تعریف مربع لاین:

مربع  $n \times n$  را یک مربع لاین می گویند، اگر اعداد او  $1, 2, \dots, n$  را در سطرها  
رستون ها آن چنان بنویسیم که در هیچ سطر و هیچ ستونی، عدد تکراری  
نداشته باشد.

مبانی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال، در مربع لائین  $3 \times 3$  بنویسید  
تعداد ۲ در ۳

شکل اول رسم

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

→

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

⇒

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



کاربرد :

تبدیل برنامه به بنویسید که سه کلاس سه درس مختلف، سه درس

مختلف را بخوانند.

	ج ۱	ج ۲	ج ۳
کلاس A	۳	۲	۱
کلاس B	۱	۳	۲
کلاس C	۲	۱	۳

۱ یعنی  
۲ یعنی  
۳ یعنی

مزبان حبیبی



تعریف: دو مربع لایتن  $n \times n$  را نسبتاً مدعی گویند چنانچه اعداد آنها را درون یک مربع  $n \times n$  جدید درکنار هم بنویسیم، در مربع هیچ دو عدد تکراری نباشد.

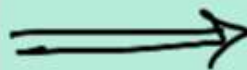
مثال:

A:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

B:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱



A.B:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

مزبان حبیبی



مثال: دو مربع زیر را بسازید اما متعامد نیستند.

۲	۳	۴	۱
۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲

۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳

۲۲	۳۲	۴۴	۱۱
۱۳	۲۴	۳۱	۴۲
۴۱	۱۲	۲۳	۳۴
۳۴	۴۱	۱۲	۲۳

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مکرتین: شخصی مرازات درسه لوز سفارته درسه جده مختلف، سه لوز انی جدا گانه  
 راه-بارسه. آزاد سه دت و شلو ادا سه بارسه و بخواجه در هوصبه لباس  
 غیر تکراری بیوشد این برنامه براتک بنویسید.

۱ ۲ ۳

لوز ۱	۱	۲	۳
لوز ۲	۳	۱	۲
لوز ۳	۲	۳	۱

۱، ۲، ۳  
 شان لوزانی

۱ ۲ ۳

لوز ۱	۱	۲	۳
لوز ۲	۲	۳	۱
لوز ۳	۳	۱	۲

۱، ۲، ۳  
 شانه دت و شلو

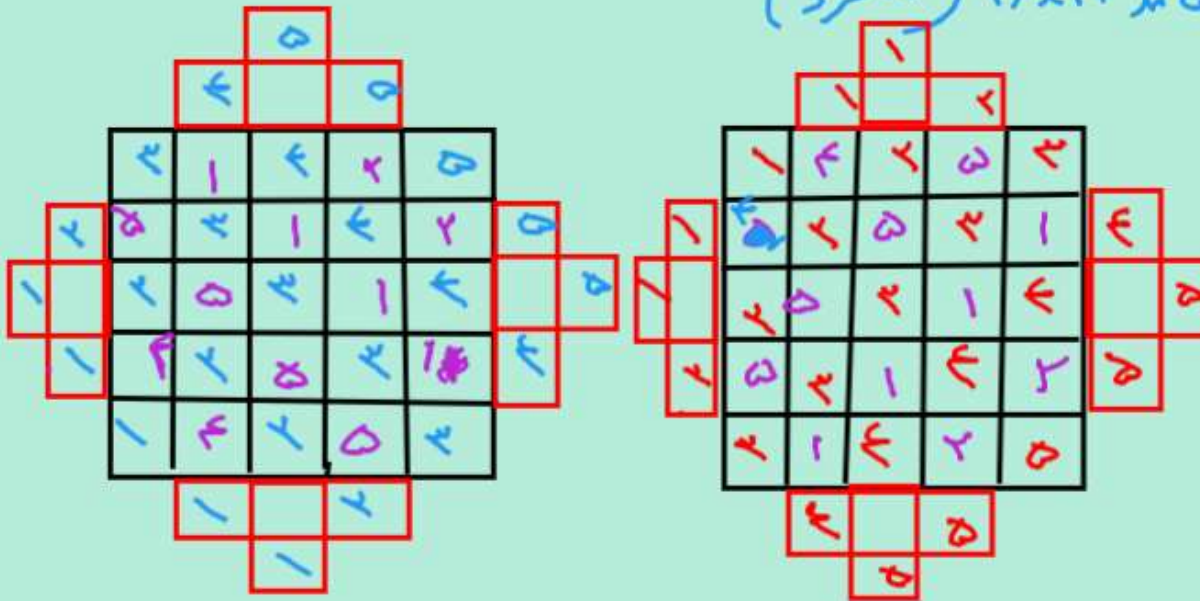
لوز ۱	۱۱	۲۲	۳۳
لوز ۲	۳۲	۱۳	۲۱
لوز ۳	۲۳	۳۱	۱۲

۱ ۲ ۳

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



ساخت مربع‌ها لاینزسته  $n \times n$  (نفرز)



۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵

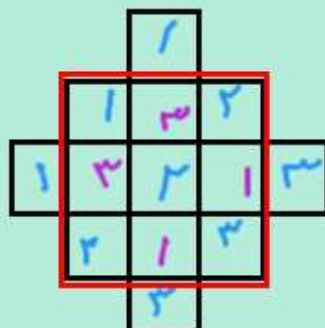
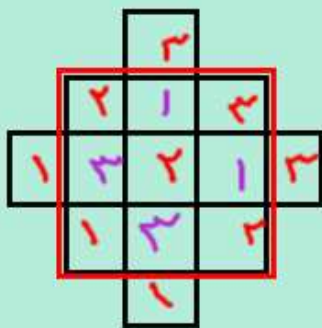
مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: سه مدرس هزاران در کلاس های A و B و C به درس متفاوت را در سه روز متفاوت تدریس کنند. کسیر سیرنا به مناسب برای اینکار بنویسید.



	۱ع	۲ع	۳ع
کلاس A	۲۱	۱۳	۳۲
کلاس B	۳۲	۲۲	۱۱
کلاس C	۱۲	۳۱	۲۳

مدرس = ۱, ۲, ۳  
روز = ۱, ۲, ۳

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

ضربه نه گرا

۰۰

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، رحمت بخیر

ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی ۱

موضوع: اصول شمول و عدم شمول

دبیرستان بوعلی سینا از

تکلیف هفدهم اسفند نوروزی ساعت ۱۴:۱۵

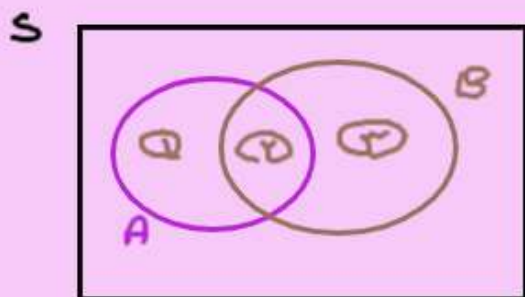
حبیبی

مزبان حبیبی





موضوع کنید A در B بعد زیر مجموعه از خود را بخانه از ستاهای S باشند.



$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\equiv A - B \\ \textcircled{2} &\equiv A \cap B \\ \textcircled{3} &= B - A \end{aligned}$$

تعداد اعضا در مجموعه A را با  $|A|$  یا  $n(A)$  نشان می دهیم

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مزبان حبیبی



یادآوری :

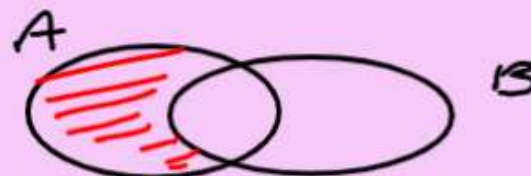
$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

$$A' = \{x \mid x \in S, x \notin A\}$$

$$A' = S - A$$

$$|A'| = |S| - |A|$$





$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

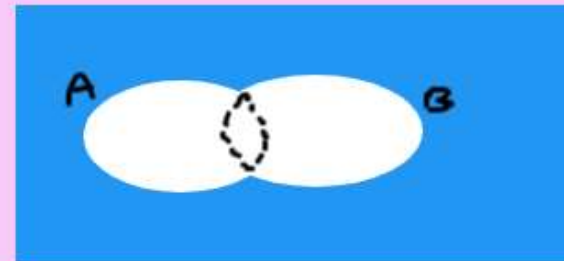
تعریف:

نه کفون A معشده ونه کفون B

$$(A \cup B)' = S - (A \cup B)$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B|$$

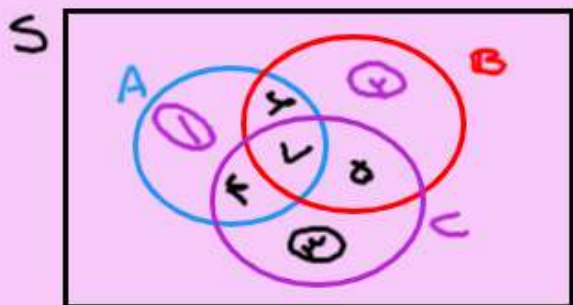
$$|(A \cup B)'| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$



مزبان حبیبی



اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه زیر مجموعه از فضای نمونه ای ستاهی  $S$  باشند آنگاه:



$$\alpha \equiv A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

$$\beta \equiv B - (A \cup C) = (B - A) - C$$

$$\gamma \equiv C - (A \cup B) = (C - A) - B$$

$$\delta \equiv (A \cap B) - C$$

$$\epsilon \equiv (B \cap C) - A$$

$$\zeta \equiv (A \cap B) - C$$

$$\eta \equiv A \cap B \cap C$$



و:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

و:

$$|(A \cup B \cup C)^c| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: در کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر برای ریاضی و ۱۷ نفر برای فیزیک و یازده نفر برای هر دو درس دلو طلب شده اند.

$A \equiv$  ریاضی  
 $B \equiv$  فیزیک  
 $S \equiv$  کل

اکنون چند نفر حداقل برای یک درس دلو طلب هستند؟

$$|A| = 21 \text{ و } |B| = 17 \text{ و } |A \cap B| = 11 \text{ و } |S| = 30.$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 21 + 17 - 11 = 27$$

ب) چند نفر برای هیچ درسی دلو طلب نشده اند؟

$$|(A \cup B)^c| = |S| - |A \cup B| = 30 - 27 = 3$$

مزبان حبیبی



ج) چند نفر فقط برای رویه می داوطلب هستند؟

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 21 - 11 = 10$$

د) چند نفر فقط برای فیزیک داوطلب هستند؟

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 17 - 11 = 6$$

ه) چند نفر دقیقاً برابر یک درس داوطلب هستند؟

$$|A - B| + |B - A| = 10 + 6 = 16$$

$|A - B| \equiv$  فقط ه می  
 $|B - A| \equiv$  فقط فیزیک

$$(\text{ج} \cup \text{د}): |A \cup B| - |A \cap B| = 27 - 11 = 16$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

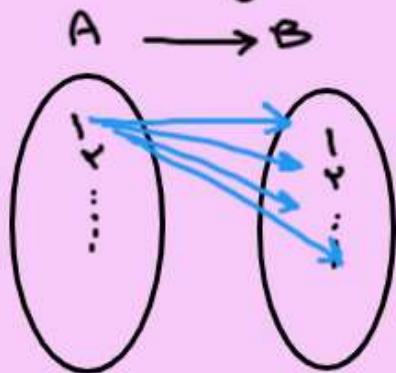


تمرین: صندلی ج. پوت از  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و مجری  $B = \{1, 2, 3\}$  وجود دارد؟

یادآوری: تعداد تابع  $f: A \rightarrow B$  برابر با  $|B|^{|A|}$

$n(B) \times n(B) \times \dots \times n(B) = |B|^{|A|}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n(A)}$



یا یادآوری: تابع  $f: A \rightarrow B$  را پوت می‌گویند

مزبان حبیبی



حل تمرین:  $S = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$ ,  $|S| = |B|^{|A|} = 2^4 = 16$

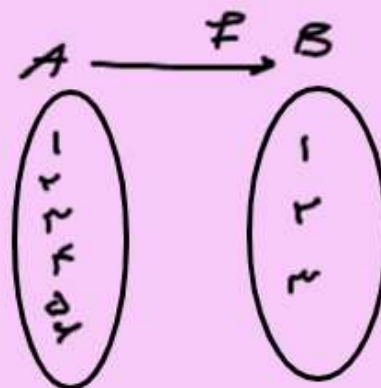
$A_1 = \{f \in S, 1 \notin R_f\}$ ,  $|A_1| = 2^4 = 16$

$A_2 = \{f \in S, 2 \notin R_f\}$ ,  $|A_2| = 2^4 = 16$

$A_3 = \{f \in S, 3 \notin R_f\}$ ,  $|A_3| = 2^4 = 16$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 2^4 = 16$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0^4 = 0$



مزبان حبیبی



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \equiv \text{توابع یکزیرو}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 44 + 44 + 44 - 1 - 1 - 1 + 0 = 192 - 3 = 189$$

$$\begin{aligned} \text{جواب} &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= 729 - 189 = 540 \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



تذکره: فرض کنید  $|A| = m$  و  $|B| = n$  ( $n \leq m$ )

$$f: A \rightarrow B \text{ تعداد کل توابع} \equiv n^m$$

$$f: A \rightarrow B \text{ تعداد توابع غیر پویش} = r \left( (n-1)^m - (n-2)^m + (n-3)^m - \dots \right)$$

$$f: A \rightarrow B \text{ تعداد توابع پویش} = n^m - r \left( (n-1)^m - (n-2)^m + (n-3)^m - \dots \right)$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: سه دهکده A و B و C قرار گرفته اند که توسط جاده ها به هم مرتبط شوند.  
به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟ در قرار، هر دهکده حداقل به  
یک دهکده وصل باشد.



$$S = \{ G : G \text{ یک گراف به صورت زیری از } \{A, B, C\} \text{ است} \}$$
$$|S| = 2^3 = 8$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$A_1 = \{G \in S, \text{ و } A \text{ راس } G \text{ است.}\}$$

$$A_2 = \{G \in S, \text{ و } B \text{ راس } G \text{ است.}\}$$

$$A_3 = \{G \in S, \text{ و } C \text{ راس } G \text{ است.}\}$$

⋮

مزبان حبیبی





تقریباً: به چند طریق می توان ۷ نفر را در یک خط قرار داد اگر در آن هیچ کس  
پشت از کسی نشاند؟

$$\frac{10}{1} \times \frac{9}{1} \times \frac{8}{1} \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} = (10)_7$$
$$= P(10, 7) = \frac{10!}{3!} = \dots$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: ۳ خودکار را به چند طریق می توان به هفت نفر داد که هیچ کدام بیش از یک خودکار نبردند.

$$(۷)_۳ = \frac{۷}{۱} \times \frac{۶}{۱} \times \frac{۵}{۱} = ۲۱۰$$

مزبان حبیبی



تمرین: چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که:

الف) مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشد؟  
 $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ ,  $|S| = 1000$

$$A = \{x \in S : 3|x\}, \quad |A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

$$B = \{x \in S : 5|x\}, \quad |B| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 5} \right\rfloor = 66$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 333 + 200 - 66 = 467$$

مزبان حبیبی



ب) ضمیمه نه عضو ۳ هشتاد و نه عضو ۵ ؟

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 1000 - 447 = 553$$

ج) ضمیمه ۳ هشتاد و نه عضو ۵ هستند ؟

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 333 - 44 = 247$$

د) ضمیمه ۳ هشتاد و نه عضو ۵ هستند ؟

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 200 - 44 = 134$$

و) ضمیمه ۳ هشتاد و نه عضو ۵ (دقیقاً عضو یکی آنها)

$$|A - B| + |B - A| = 247 + 134 = 381$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرینات اخرفضل سوم کتاب گسسته از کیت تا هفت صورت

حالت بنابر

این

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

ایضیات گسسته دوازدهم ریاضی

دبیرستان بوعلی شیراز

موضوع:

اصل لانه کیوتری (عجبر حصا)

حساب  
تعداد  
تعداد

کتابخانه بیت و چهارم اسفند خودونه ساعت ۱۴:۱۵

مزبان حبیبی



مثال ۱۰۰:

اگر  $n < ۲$ ، بجواییم ۲ تایی را بین  $n$  نفر چندان تقسیم کنیم که هر نفر حداقل یک تایی داشته باشد، تعداد حالت ها را با  $(n)_۲$  نشان می دهیم:

$$(n)_۲ \equiv \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots}_{\text{عدد } ۲}$$

$$\text{مثال: } (۷)_۲ = ۷ \times ۶ \times ۵ = ۲۱۰$$

مزبان حبیبی



مثال: به چند طریق می توان چهار اسب را در ۹ جای پارک، قرار داد؟

$$(9)_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

مثال: ۳ اسب را به چند طریق می توان بین ۵ نفر تقسیم کرد اگر بخواهیم هر نفر

حداکثر یک اسب را بگیرد؟

$$(5)_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

مزبان حبیبی





اصل لانه کیوتری :

اگر  $m$  کیوترا در  $n$  لانه مراد هم و  $m > n$ ، آنگاه لانه وجود دارد که  
صداقت کیوترا در آن مراد دارد. (لانه هر چه که بیش از یک کیوترا در آن باشد.)

توجه: در ادامه از اصل لانه کیوتری باید موارد زیر را مشخص کرد:

- ۱- لانه ها
- ۲- تعداد لانه ها
- ۳- کیوترا ها
- ۴- تعداد کیوترا ها

مبانی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

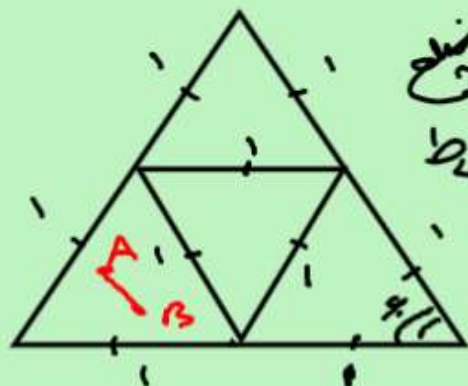


تمرین ۱: در یک خانواده ۵ نفری، ثابت کنید حداقل ۲ نفر فصل تولد یکسانی دارند.  
جواب: اگر فصل سال را لانه مزن کنیم (۱۲ لانه) و افراد خانواده را کیوטר (۵ کیوטר) نگاه  
چون  $5 > 12$  بنابراین اصل لانه کیوتری، لانه هر حجت که حداقل ۲ کیوטר در آن باشد یعنی  
حداقل ۲ نفر از افراد خانواده دارای فصل تولد یکسان هستند.

مزبان حبیبی



ترین: ۵ نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع به ضلع دو واحد انتی می کشیم. تا بکشند  
موازی ۲ نقطه از این پنج نقطه، تا مثلث متساوی الاضلاع یک واحد دارند.



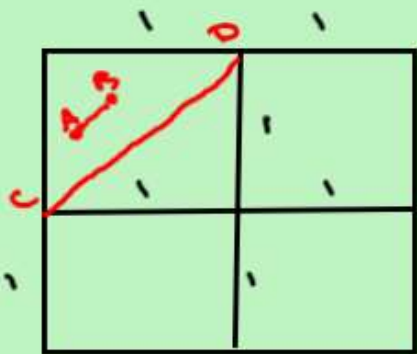
۱-۲: وسطها اضلاع مثلث را به هم وصل می کنیم تا ۴ مثلث کوچک تر به ضلع  
یک واحد فی مابین، بنا بر این، ۴ مثلث کوچک را لایه و نقاط  
را که بر طرفه می کشیم بنا به اصل لانه کوچکتری، لایه ۱ است که موازی  
دو نقطه در آن، بر سر

ABC 1



تمرین ۳: پنج نقطه در یک مربع به ضلع ۲ واحداتی به هم وصل کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از این نقاط،

فاصله کمتر از  $\sqrt{3}$  دارند.



جواب: با وصل کردن دو ضلع اضلاع مربع، ۴ مربع کوچکتر به ضلع یک واحد ساخته میشود.

آرتی و راکبوتر (خاکجوترا) و مربع کوچک را لانه مربعی (۱ لانه) آنگه

بنام اصل لانه کوچکتری، لانه ارس و عهد داد که حداقل ۲ نقطه در آن مرکز دارد.

$$AB < CD = \sqrt{1^2 + 1^2} \rightarrow AB < \sqrt{2}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مهربان حبیبی



تمرین ۴: شش عضو از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  انتخاب می‌کنیم ثابت کنید

حداقل عدد از اعداد انتخاب شده ۲۰ را در مجموع می‌تواند

حاصل شود. این نتیجه را با بررسی زیر در نظر بگیرید.

۱ و ۹

۲ و ۸

۳ و ۷

۴ و ۶

۵

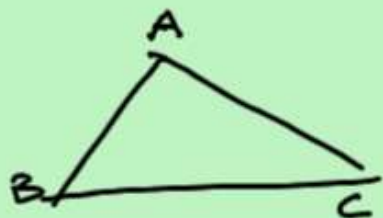
۳ از اعداد انتخاب شده را کمی مرتب می‌کنیم، بنابر اصل لانه کبوتری، دانستیم وجود دارد که حداقل

دو کبوتر در آن لانه قرار دارند که مجموع آنها ۱۰ خواهد بود. (این لانه، لانه آخر نیست)

مهربان حبیبی



تمرین ۵: اضلاع مثلث را با رنگ سبز، زرد، زنگنه ایما ثابت کنید حداقل ۲ ضلع آن هم رنگ هستند.



اثبات: دو لانه با بریب زرد و بنر در نظر آید.

سبز

زرد

اگر ضلعها را بگوئیم و فرض کنیم (۳ گویورد ۲ لانه) ۱ گفطه طبق اصل لانه بگوئری، لانه وجود دارد که هر دو اقل ۲ گویورد ۱ ضلع مثلث هم رنگ هستند.

مزبان حبیبی

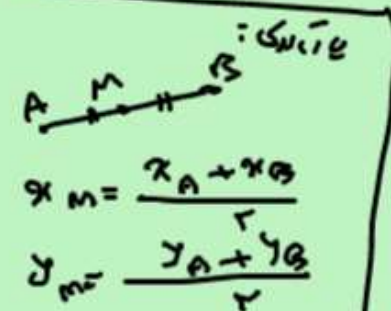
بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۶: ۵ نقطه با مختصات صحیح در صفحه انشباع کرده ایم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از این پنج نقطه در جهه دایره که مختصات نقطه وسط آنها صحیح باشد.

جواب: ۴ لانه بصورت زیر تویف کنیم:

- (مرد، فرد)
- (مرد، زوج)
- (زوج، فرد)
- (زوج، زوج)



اگر نقطه را کبوتر فرض کنیم (ک بوتر و ۴ لانه) پس بنا به اصل لانه کبوتری، لانه حتماً حداقل ۲ عضو دارد و نقطه وسط این دو عضو، مختصات صحیح دارد.

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پرتین ۷: سه عدد طبیعی است با هم می کنیم. تا بت کنید حداقل ۲ عدد از آنها را  
مجموع زوج است .

جواب: سه لانه بهر چه هر یک از اینها زوج یا فرد است.

زوج

فرد

آرنتا و آرا لوبو مرض نیست، گفته بنده به اصل (لانه کیوتری) ، لانه ا حریه است پس دو عدد  
به سه که مجموع آنها زوج خواهد بود.

مزبان حبیبی





تقسیم اصل لانه کبوتری :

اگر  $m k + 1$  کبوتر را در  $m$  لانه قرار دهیم، انگاه لانه را وجود دارد که حداقل  $(k+1)$  کبوتر در آن قرار دارد. (یا: لانه ای که بیش از  $k$  کبوتر در آن قرار دارد.)

$$n = \text{تعداد کبوترها} : \text{توجه}$$

$$m = \text{تعداد لانه ها}$$

$$n > m k \Rightarrow \text{لانه ای که صد اصل } (k+1) \text{ کبوتر در آن باشد.}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۹: در یک مهمانی  $\frac{۳۷}{۱۰۰}$  نفر حضور دارند. ثابت کنید حداقل ۴ نفر از آنها را  
ماه تولد یکسان هستند.

جواب: اگر ما هر سال را لانه فرض کنیم (۱۲ لانه) و مهمانان را کبوتر فرض کنیم (۳۷ کبوتر)

$$۳۷ > ۱۲ \times ۳$$

بنابراین اصل لانه کبوترها، لانه ای هست که حداقل ۴ کبوتر را در آن  
ماه تولد یکسان دارند.

مزبان حبیبی



چین: در یک مهمانی ضیافتی حضور دارد. بابت آن مطمئن شویم حداقل  $\frac{1}{3}$  نفر ماه

تولدی که دارند؟

$$12 = \text{لانه} = \text{طول سال}$$
$$m = \text{کیوتتر} = \text{مهمان}$$

$$m > 12 \times 4 \Rightarrow m > 48 \Rightarrow \text{Min}(m) = 49$$

مزبان حبیبی



چین ۱:  $\frac{4}{3}$  ت خطگی را صدگسرا، ضدگلدان قله بزینم تا صغیمن: با سیم صافل یک گلدان  
بیش از ۳ گلی دارد؟

$$m = \text{گلدان} \equiv \text{لانہ صفا}$$

$$f. \equiv \text{گلی صفا} \equiv \text{کبوتر}$$

$$f. > mx(3) \Rightarrow f. > 3m \Rightarrow m < \frac{f.}{3} = 13.33$$

$$\Rightarrow \text{Max}(m) = 13$$

مزبان حبیبی



تمرین: چند نفر از یک مدرسه حضور داشته باشند که مشخص باشد هر فردی با نفر ماه تولد  
او از تولد آنها در هفته یکبار ملاقات؟

$$\begin{aligned} 365 \text{ ماه} &\equiv 3 \text{ سال} \\ 7 \text{ روز} &\equiv 1 \text{ هفته} \end{aligned} \Rightarrow 12 \times 7 = 84$$

$$\begin{aligned} m > 84 \times 9 &\Rightarrow m > 756 \\ \Rightarrow \text{Min}(m) &= 757 \end{aligned}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

تمرینات تستی - فصل ۸۳ اصول و روش

حقیقتاً بنام

پایه

مزبان حبیبی

