

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: حل تمرین فصل سوم، ترکیبیات - ریاضیات کسسه دوازدهم ریاضی



کار در کلاس

صفحه ۶۱ ریاضیات گسسته

۱ معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

$$x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow y_i = x_i - 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) = 7 - 3 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$ .

$$x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow y_i = x_i - 1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \Rightarrow (x_1 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k \Rightarrow y_1 + \dots + y_k = n - k$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{(n-k) + k - 1}{k - 1} = \binom{n-1}{k-1}$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه های ریاضیات

۲ معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه  $x_1 > 1$  و  $x_2 > 3$  باشد؟

$$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 > 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2$$

$$x_2 > 3 \Rightarrow x_2 > 4 \Rightarrow x_2 - 4 > 0 \Rightarrow y_2 = x_2 - 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow (x_1 - 2) + x_2 + (x_2 - 4) + x_3 + x_4 + x_5 = 14 - 6$$

$$\Rightarrow y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



موضوع: ترکیب

۴ معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ( $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$ )

$$x_i > 1 \Rightarrow x_i - 1 > 0 \Rightarrow y_i = x_i - 1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11 \Rightarrow (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_5 - 1) = 11 - 5$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = \frac{1 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

۵ معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12$  چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه  $x_2 = 4$  و  $x_5 > 2$  باشد؟

$$x_5 > 2 \Rightarrow x_5 \geq 3 \Rightarrow x_5 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_5 = x_5 - 3$$

$$x_1 + x_2 + 4 + x_3 + (x_5 - 3) + x_4 = 12 - 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_5 + x_4 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

# بزه‌های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه‌های آموزشی

کاردو کلاس صفحه ۴۴ رو بنویسید

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

بنویسید ۲ تا و ۱ تا  
فقط دو مربع لاین  
که متعامدند

۱ چند مربع لاتین  $1 \times 1$  وجود دارد؟ بنویسید

۲ آیا دو مربع لاتین  $2 \times 2$  متعامد وجود دارد؟ بنویسید

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین  $3 \times 3$  روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲



۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

بنویسید

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

5 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه اسلایدها

۴ آیا دو مربع لاتین  $4 \times 4$  زیر متعامدند؟ بله

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 33 & 34 & 44 & 11 & 22 \\ 41 & 32 & 23 & 14 \\ 12 & 21 & 24 & 43 \\ 24 & 14 & 42 & 31 \end{bmatrix}$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

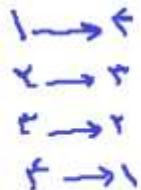
09176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



موضوع: ریاضیات گسسته

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای  $B$ ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را  $B'$  بنامید. بررسی کنید که آیا  $A$  و  $B'$  متعامدند؟

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$


$\Rightarrow B' =$

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$BB'$ :

$$BB' = \begin{bmatrix} 22 & 41 & 14 & 23 \\ 14 & 23 & 22 & 41 \\ 23 & 14 & 41 & 22 \\ 41 & 22 & 23 & 14 \end{bmatrix}$$

فرد متعامد نیست

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه تالیفات

تمرین

صفحه ۷۱، ریاضیات گسسته

۱ می خواهیم ۸ نفر را که دوهو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

$$4! \times (2!)^4$$

۲ اگر داشته باشیم  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از  $A$  و سه رقم از  $B$  باشد؟

$$5! \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{3}$$

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد:  $9!$

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند:  $4! \times 4!$

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند:  $4! \times 5!$

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند:  $7! \times 3!$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## بزه‌های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه‌های ریاضیات

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن  $7! \times 4!$  باشد. *دانش‌آموزان هر کس جواب درست بدهد، دانش‌آموزان دوازدهم همواره در کلاس جمع می‌شوند.*

$$\frac{7!}{2! \times 3!}$$

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف  $d, d, d, c, c, a, b, a, a$  از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 3!}$$

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!}$$

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دوفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

ریاضیات کسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



موضوع: ترکیب

۸ به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم:  $\binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4}$  ،  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم:  $\binom{11-5}{5-1} = \binom{6}{4}$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \rightarrow$  تعداد جوابها  $= \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$

ب) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم:

$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 - 2 > 0$  ،  $x_1 + (x_2 - 2) + x_3 + x_4 + (x_5 - 3) = 11 - 6$   
 $x_5 > 3 \Rightarrow x_5 - 3 > 0$  ،  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + (x_5 - 3) = 11 - 6$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

$x_3 = 0$  ،  $x_4 > 5 \Rightarrow x_4 - 5 > 0$

$x_1 + x_2 + 0 + (x_4 - 5) + x_5 = 11 - 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 6$

تعداد جوابها  $= \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه های ریاضی

۹ مطلوب است تعداد جواب های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط های داده شده :

الف)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$      $x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$

$$x_1 + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) + (x_5 - 1) = 10 - 4 = 6 \rightarrow \binom{6 + 5 - 1}{5 - 1} = \binom{10}{4}$$

ب)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12$      $x_1 > 2, x_5 \geq 4 \Rightarrow x_1 - 3 \geq 0$  و  $x_5 - 4 \geq 0$

$$(x_1 - 3) + x_2 + x_3 + x_4 + (x_5 - 4) + x_6 = 12 - 7 = 5 \Rightarrow \binom{5 + 6 - 1}{6 - 1} = \binom{10}{5}$$

پ)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$      $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0$

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) + (x_5 - 1) = 11 - 5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6, y_i \geq 0$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{6 + 5 - 1}{5 - 1} = \binom{10}{4}$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

11 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه های ریاضیات

ن)  $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2}$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2}$

$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2}$

ن)  $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2}$

$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2}$

$x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2}$

ریاضیات گسسته  
مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه های ریاضی

۱۰ به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$$

۱۱ به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \xrightarrow{x_i - 1} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 4$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3}$$

۱۲ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

ص: آره      ط: نه      ه: بدین کنیم آره      عد: طه      ق: قطعاً آره      ح: حوله جور

ریاضیات گسسته      مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه تالیفات

۱۲ مربع لاتین ۳ × ۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad AA_1 = \begin{bmatrix} 43 & 11 & 22 \\ 12 & 23 & 31 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix}$$

الف) سطر دوم و سوم مربع  $A$  را جابه جا کنید و مربع حاصل را  $A_1$  بنامید. آیا  $A$  و  $A_1$  متعامدند؟ بله  
 ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع  $A$  را جابه جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را  $A_2$  بنامید. آیا  $A$  و  $A_2$  متعامدند؟ خیر

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad AA_2 = \begin{bmatrix} 32 & 13 & 21 \\ 13 & 21 & 32 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix}$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

14 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

## بزه‌های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه‌های ریاضی

(پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سوالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۴ قرار است شش مدرس  $T_1, T_2, \dots, T_6$  و در شش جلسه متوالی در شش کلاس  $C_1, C_2, \dots, C_6$  به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$T_1$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$T_2$	۲	۳	۴	۵	۶	۱
$T_3$	۳	۴	۵	۶	۱	۲
$T_4$	۴	۵	۶	۱	۲	۳
$T_5$	۵	۶	۱	۲	۳	۴
$T_6$	۶	۱	۲	۳	۴	۵

عروضه  $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$  = شش جلسه

ریاضیات کسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

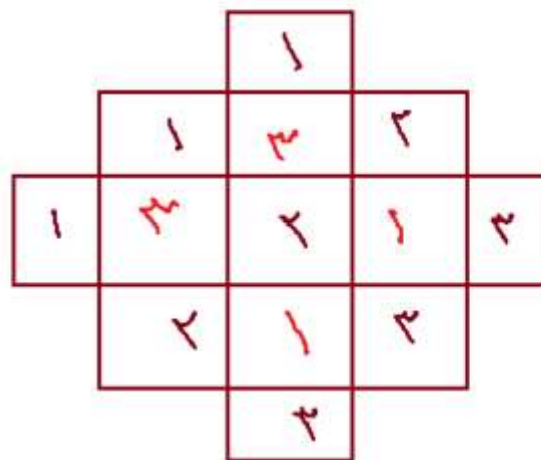
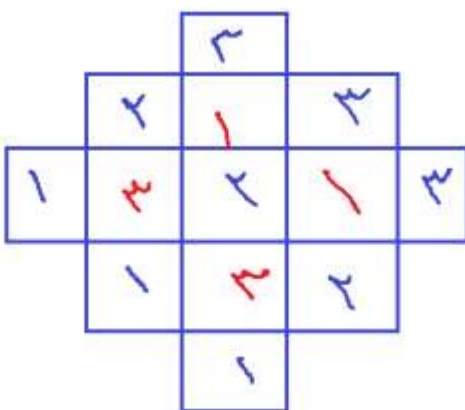
09176193511

بزه‌های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه‌های ریاضی

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.



ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

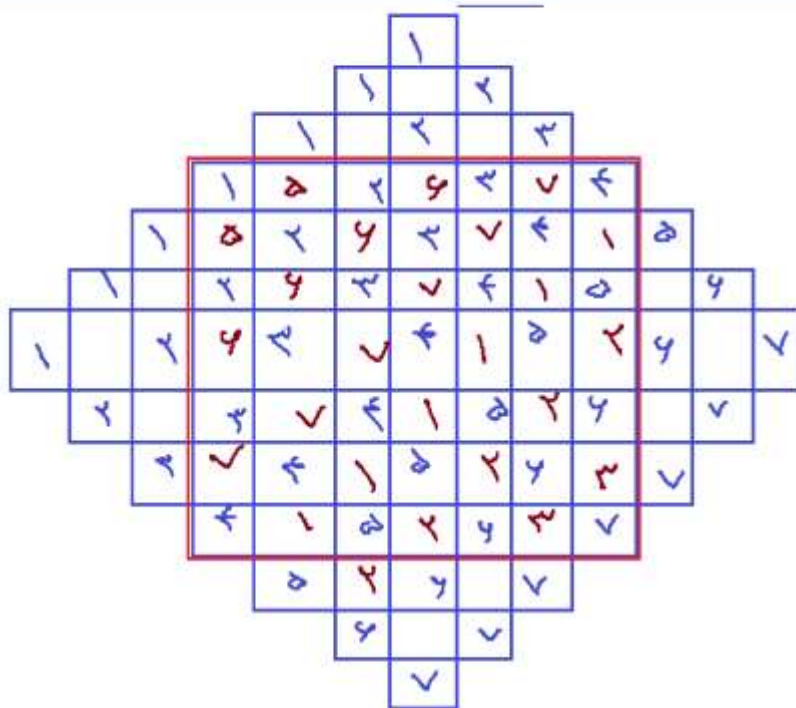
mezbanhabibi@gmail.com

09176193511





# بزوہ ہی آموزشی، ریاضیات کستہ دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$\Rightarrow B =$

1	5	2	6	3	7	4
5	2	6	3	7	4	1
2	6	3	7	4	1	5
6	3	7	4	1	5	2
3	7	4	1	5	2	6
7	4	1	5	2	6	3
4	1	5	2	6	3	7

ریاضیات کستہ مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه آزمون‌ها

۱۶ در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛  
ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛  
پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛  
ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

— برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

دو مربع لایس  $۷ \times ۷$  مستطای رسم کنینم - (مربع A و B در تکرین ۱۵)

ریاضیات کسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511





۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ( $1 \leq n \leq 90$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

$$S = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ و } 1 \leq x \leq 90\}, |S| = 90.$$

$$A = \{x : x \in S, 2 | x\}, |A| = \left[ \frac{90}{2} \right] = 45$$

$$B = \{x : x \in S, 3 | x\}, |B| = \left[ \frac{90}{3} \right] = 30 \text{ و } |A \cap B| = \left[ \frac{90}{2 \times 3} \right] = 15$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه‌های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه‌های ریاضیات

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ( $1 \leq n \leq 200$ ) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

$$A = \{x: x \in \mathbb{N}, 4 \mid x\} \text{ و } |A| = \left[ \frac{200}{4} \right] = 50$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{N}, 7 \mid x\} \text{ و } |B| = \left[ \frac{200}{7} \right] = 28$$

$$\left[ \frac{200}{28} \right] = 7 \Rightarrow |A \cap B| = \left[ \frac{200}{28} \right] = 7$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه های

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:

فوتبال = A      والیبال = B      بسکتبال = C

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

$$|A| = 15 \text{ و } |B| = 11 \text{ و } |C| = 9$$

$$|(A \cup B \cup C)^c| = 10$$

$$|A \cap B| = 5 \text{ و } |B \cap C| = 6 \text{ و } |A \cap C| = 3$$

$$\begin{cases} |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ \Rightarrow 34 - 10 = 15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |A \cap B \cap C| \\ |A \cap B \cap C| = 3 \end{cases}$$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

$$|A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

ب) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

$$|B - C| = |B| - |B \cap C| = 11 - 6 = 5$$

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

$$|A - (B \cup C)| + |B - (A \cup C)| + |C - (A \cup B)|$$

$$= |A \cup B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 24 - 5 - 6 - 3 + 3 = 13$$

ریاضیات گسسته  
مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

23 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه های توان

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

$$n(S) = 9^5$$

$$A = \text{رمزهای با قدر ۷}$$

$$|A| = |B| = |C| = 8^5$$

$$B = \text{رمزهای با قدر ۲}$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 7^5$$

$$C = \text{رمزهای با قدر ۳}$$

$$|A \cap B \cap C| = 6^5$$

$$|A \cup B \cup C| = 8^5 + 8^5 + 8^5 - 7^5 - 7^5 - 7^5 + 6^5$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 9^5 - 3 \times 8^5 + 3 \times 7^5 - 6^5$$

$$= 59049 - 3 \times 32768 + 3 \times 16807 - 7776 = 3393$$

$$جواب = 3393 \times 6 = 20358$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه ریاضیات

۵ چه تعداد تابع چون  $f: A \rightarrow B$  می توان تعریف کرد اگر بدانیم  $|A|=5$  و  $|B|=4$  است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

همه  $=$  تعداد توابع از  $A$  به  $B$   
چون  $|A| > |B|$  پس هیچکدام یک به یک نیست.

۶ به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

$$\underbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}_{65} = \frac{8!}{3!}$$

۷ به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه ریاضیات

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.  
 آذر روزهای سی و نهم را لانه و امروز را کبوتر می نامیم بنا به اهل لانه کبوتر می نامیم، لانه ای  
 هست که حداقل ۲ کبوتر در آن هرگز ندارد یعنی صد و پنجاه نفر در آن کبوتر می نامیم متولد شده اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه  
 تولدشان یکسان است.

$$۷ \times ۷۲ = ۵۰۴$$

آذر هر روز هفته در هر ماه را لانه مرض می نامیم و دانش آموزان را کبوتر مرض می نامیم

$$۵۰۵ > ۵۰۴ \text{ پس طبق اصل لانه کبوتری، لانه ای وجود دارد}$$

که بیش از ۲ کبوتر در آن هرگز در روزی صد و پنجاه نفر لانه کبوتر می نامیم و صد و پنجاه نفر لانه کبوتر می نامیم  
 ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه آزمون

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟  
تعداد افراد  $n =$

$$n > 19 \times 365 \Rightarrow \text{Min}(n) = 19 \times 365 + 1 = 6936$$

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

مزن میسوم در لانه حصرت  $\square$  و  $\square$  دانه  $\square$  که هر سه حر لانه باقی میماند

تقسیم آن عدد بر ۲ می باشد  
آز سه عدد معدد نظر را کیو تر فرض کنیم، طبق اصل لانه کیو تری، لانه آن عدد در لانه  
اصل کیو تر در آن قرار دارد که در این صورت مجموع آنها زوج است.

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۲ مجموعه اعداد  $A = \{1, 2, \dots, 84\}$  را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از  $A$  دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۴۲ لانه به هر سبب زیر در نظر می آید.

$$\boxed{1, 84} \cup \boxed{2, 83} \cup \boxed{3, 82} \cup \dots \cup \boxed{42, 43}$$

از ۴۳ عضو زیر مجموع ۸۵ را کم می کنیم، نگاه کنید که لانه ها وجود دارند که حداقل

دو عضو در آن هر یک دارند که جمع این نوع در ۸۵ حواله بود.

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه اعداد

۱۲ مجموعه اعداد  $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$  را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد. **۱۲ لانه، برهید، زیر در نظر بگیریم:**

۴۵ و ۴۱، ۴۹ و ... و ۱۳ و ۷۷ و ۵، ۸۱ و ۵، ۸۵ و ۱

اگر ۱۳ عدد مورد نظر را کتورت مرتب کنیم، طبق اصل لانه کتورتی، لانه در وجود دارد که حداقل ۲ کتورت در آن قرار دارد. از این لانه، لانه اول و آخری را در نظر بگیرید. جمع آنها ۹۰ خواهد بود.

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

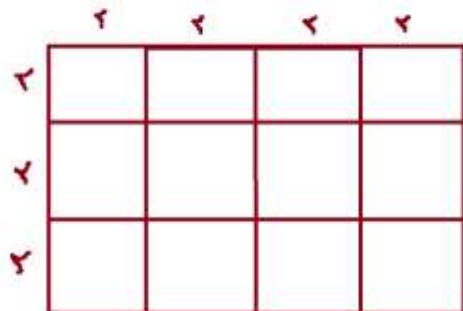
09176193511

بزه‌های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



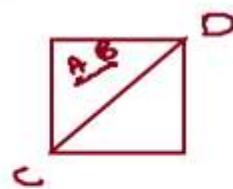
مجموعه‌های ریاضی

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل  $6 \times 8$  قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از  $\sqrt{8}$  باشد.



آز مستطیل را به ۱۳ مربع به ضلع ۲ تقسیم کنیم و این مربع‌ها را لایه و ریف و اصرد نظر را کبوتر سوزن می‌کنیم.

صوب اصل لایه کبوتری، لایه اص و وجود دارد که در هر دو حداقل ۲ کبوتر است.



$$AB < CD = \sqrt{2^2 + 2^2} \\ \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مجموعه ریاضیات

۱۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می باشد.

چهار لایه با برج ها از کرد در خط محور  $x$ : (بر حسب زوج رمز بود مختصات)

(رمز ۰، ۲)

(زوج ۰، ۲)

(رمز ۰، ۲)

(زوج ۰، ۲)

از نقطه ط را که محور  $x$  است، نقطه  $A$  را در  $x$  و  $y$  برداریم که مختصات آن هر دو عدد زوج باشد.

با توجه به این که  $A$  در  $x$  و  $y$  زوج رمز بود مختصات این دو نقطه

آنها مختصات نقطه وسط  $A$  و  $B$  صحیح است.

ریاضیات گسسته مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

31 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، ریاضیات کسسه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



# مسائلها و تمرینات تکسبیبی

دکتر مزبان حبیبی





مثال: به چند طریق می توان ۳ نفر را از بین ۷ نفر برای تشکیل تیم انتخاب کرد

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{3 \times 2 \times 1 \times \cancel{4!}} = 35$$

تعداد

مثال: به چند طریق می توان ۳ نفر از بین ۷ نفر را انتخاب کرد برای اهدای سه جایزه

$$P(7, 3) = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: از عدد یک که شش عدد ۵، هر عدد ۶، هر عدد ۱ است، سه عدد با هم خارج می کنیم.

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

الف) تعداد طرح ها ممکن کدام است؟

ب) در هند صاف، دو عدد بعین و یک عدد گسست است؟

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$$

ج) در هند صاف، هر دو عدد بعین هستند؟

$$\binom{6}{2} + \binom{5}{2} = 15 + 10 = 25$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



**تمرین:** ۵ جوان و ۶ نوجوان در یک یک صف کتت حجم، ایته ده اند.

انده ته ارکله حالت ها کتتد اده ؟

!!!

ب) چند حالت ممکن اده هه جوان کتتد حجم با کتتد ؟



$$6! \times 5!$$

ج) در چند حالت ، نوجوان ها در کتتد حجم کتتد ؟



$$5! \times 6!$$

د) در چند حالت هج دو نفری از کتتد گروه در کتتد حجم کتتد ؟

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} = 2! \times 5!$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مگر می بینیم که با این معنی در حالت اول با این ترتیب، راه دیگر گفته می شود (ب) .

۱۳!

الف) تعداد کل حالت ها که می تواند باشد؟

ب) در چند حالت، کتاب به چهار اوستی در آن جمع می شود؟

۱۱۱۱۱ ۱۱۱۱۱

۴

۵! × ۹!

۵ به ۵ می آید کتاب ۹

ج) در چند حالت، کتاب به چهار میزبک در آن جمع می شود؟

۱۱۱۱۱

۶! × ۸!

د) در چند حالت، همه کتاب به چهار میزبک، کتاب جمع می شود؟

$$13! - (9! \times 5! + 6! \times 8!) =$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



**تمرین:** با حروف «گ. پ. چ. ر.» و ارقام ۳، ۲، ۵، ۷، ۱، اینها تا ۷ تا به ترتیب اینها. مقدار کل اینها کدام است؟

- ب) درصده از این رمزها، حروف در کنار یکدیگر می آیند؟
- ج) درصده تا از این رمزها، ارقام در کنار یکدیگر می آیند؟
- د) درصده تا از این رمزها، هم حروف در کنار هم می آیند؟
- ۱) ۳۳۳
- ۲) ۳۳۳
- ۳) ۳۳۳
- ۴) ۳۳۳
- ۵) ۳۳۳
- ۶) ۳۳۳
- ۷) ۳۳۳

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: با رقم ۴، ۵ و ۳، ۲، ۲، ۲، ۲، چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

$$\text{تعداد حالت ها} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

تمرین: با رقم ۴، ۵ و ۳، ۲، ۲، ۲، چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟

$$\frac{4!}{2!} = 4 \times 3 \times 2 = 12.$$

مزبان حبیبی



جایگت با تکرار تعیین یافته :

اگر  $n$  تایی داشته باشی که  $r_1$  تا  $r_k$  تاها داشته و  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$  باشد

آنگاه تعداد جایگت‌ها این‌ها برابر است با :

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots}$$

مثال: با حروف ۵، ۵ و ۳ عدد ۲۲۲۵۵۵، چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت؟

$$\frac{6!}{2! \times 3!}$$

مزبان حبیبی

بزه‌های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تذکره: با حروف « گ گ گ گ گ » چه «وارق» « ۵ و ۵ و ۲ و ۲ » چند امز  
۹ تایی می‌توان ساخت؟

$$\frac{9!}{3! \times 2!}$$

مثال: د. نغمه که رایج چند امز می‌تواند در سه مکان ۲، ۳ و ۵ لغز ایستاد؟

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 5!} = \binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{5}$$

مزبان حبیبی





مثال: از بین ۴ نفع به ضد طریق سوال ۱۰ شغل انتخاب کرده

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ k &= 4 \\ \binom{n+k-1}{k-1} &= \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} \end{aligned}$$

مثال: به ضد طریق سوال ۷ شغل از بین ۵ نفع به انتخاب کرد.

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$  در مجموع اعداد صحیح منفی چند جواب دارد؟

$$\binom{10 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{12}{2}$$

مثال: معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$  چند جواب دارد. (در  $(-1, 1)$ )

$$\binom{3 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{6}{3}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: تعداد

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$  و  $x_1 > 2$  چند جواب دارد؟

$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0 \Rightarrow y_1 > 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow (x_1 - 2) + x_2 + x_3 = 10 - 2$

$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 8$

$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} =$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



گزینه: سه راه

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{با شرط } x_i \geq 1$$

چند جواب دارد؟

$$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 - 1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 - 1 \geq 0$$

$$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) = 1$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = -2 \quad (y_1, y_2, y_3 \geq 0)$$

$$\binom{-2+3-1}{3-1} = \binom{0}{2}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسره دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: مربعی  $3 \times 3$  بنویسید و اعداد  $1, 2, 3$  را چندین بار در آن بنویسید تا جمع هر ردیف

سه تایی، عدد یک کسره باشد.

A	B	C
C	A	B
B	C	A

1	2	3
2	3	1
3	1	2

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: در مربع لائین  $3 \times 3$  بنویسید  
تعداد ۲ در ۳

شکل اول رسم

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

→

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

⇒

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

بزه های آموزشی، ریاضیات کسره دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



کاربرد :

کلاس ها به بنویسید که به کلاس شده است در هر یک مختلف ، سه درس

مختلف را بخوانند.

	۱ج	۲ج	۳ج
کلاس A	۳	۲	۱
کلاس B	۱	۳	۲
کلاس C	۲	۱	۳

۱ یعنی  
۲ یعنی  
۳ یعنی

مزبان حبیبی



تعریف: دو مربع لایتن  $n \times n$  را نسبتاً مدعی گویند چنانچه اعداد آنها را درون یک مربع  $n \times n$  جدید درکنار هم بنویسیم، در مربع هیچ دو عدد تکراری نباشند.

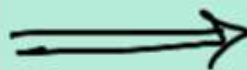
مثال:

A:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

B:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱



A.B:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: دو مربع زیر لایتن هستند اما متعامد نیستند.

۲	۳	۴	۱
۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲

۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳

۲۲	۳۲	۴۴	۱۱
۱۳	۲۴	۳۱	۴۲
۴۱	۱۲	۲۳	۳۴
۳۴	۴۱	۱۲	۲۳

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مکزی: شخصی مراکز در سه روز سه درس جداگانه را به سخنران جداگانه داد. با سه آزاد سه دست و شلواری به سه و بخواهد در هر دو سه سه سخنران بیرون بر نامه برای آن بگوید.

۱ ۲ ۳  
۴ ۳ ۲

روز ۱	۱	۲	۳
روز ۲	۳	۱	۲
روز ۳	۲	۳	۱

۱، ۲، ۳  
شکل سخنران

۱ ۲ ۳  
۴ ۳ ۲

روز ۱	۱	۲	۳
روز ۲	۲	۳	۱
روز ۳	۳	۱	۲

۱، ۲، ۳  
شکل دستوار

۱ ۲ ۳  
۴ ۳ ۲

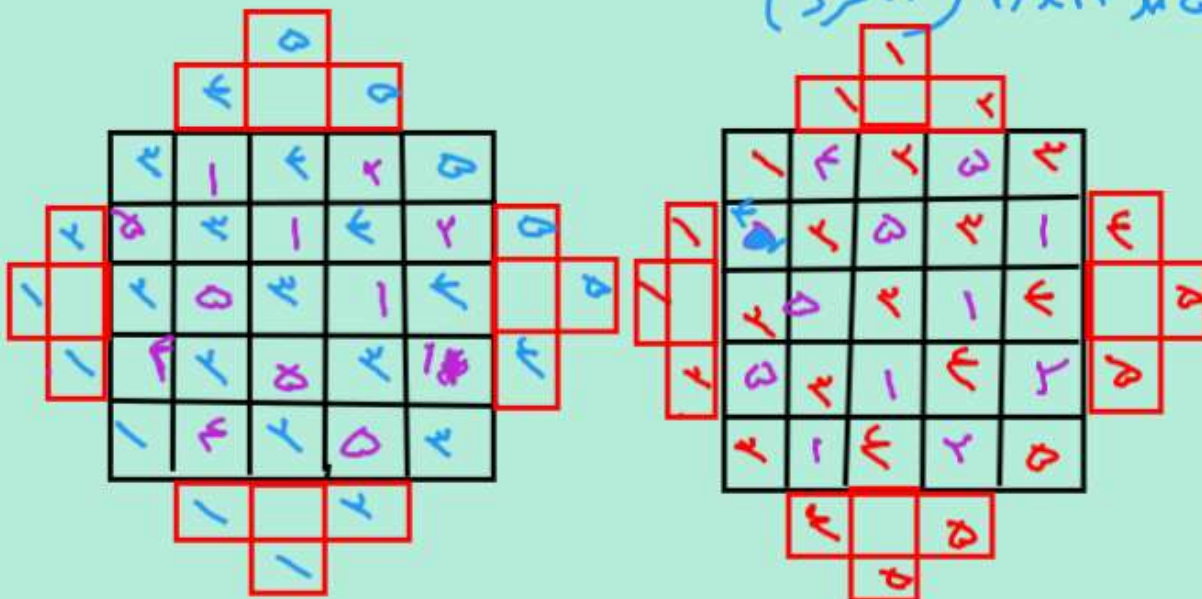
روز ۱	۱۱	۲۲	۳۳
روز ۲	۳۲	۱۳	۲۱
روز ۳	۲۳	۳۱	۱۲

۱ ۲ ۳  
۴ ۳ ۲

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



ساخت مربع‌ها لاینزسته  $n \times n$  (نفرز)



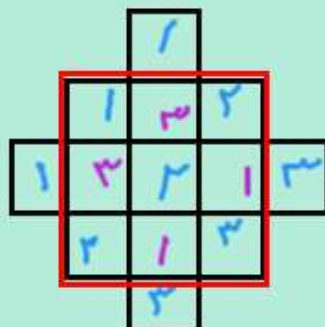
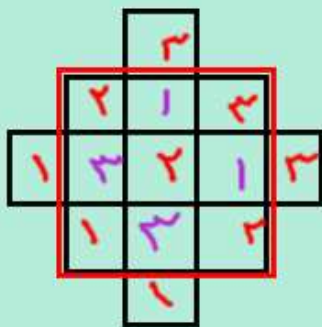
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: سه مدرس هزاران در کلاس های A و B و C به درس متفاوت را در سه روز متفاوت تدریس کنند. کسیر سیرنا به مناسب برای اینکار بنویسید.

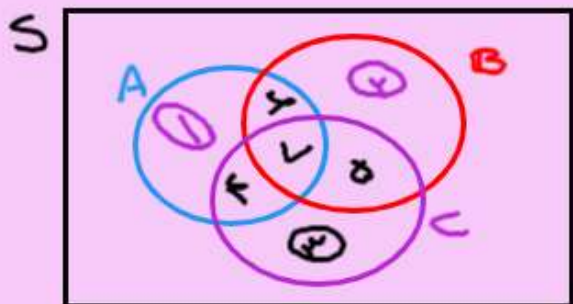


	۱ع	۲ع	۳ع
کلاس A	۲۱	۱۳	۳۲
کلاس B	۳۲	۲۲	۱۱
کلاس C	۱۲	۳۱	۲۳

مدرس = ۱, ۲, ۳  
روز = ۱, ۲, ۳



اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه زیر مجموعه از فضای نمونه ای ستاهی  $S$  باشند آنگاه:



$$\alpha \equiv A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

$$\beta \equiv B - (A \cup C) = (B - A) - C$$

$$\gamma \equiv C - (A \cup B) = (C - A) - B$$

$$\delta \equiv (A \cap B) - C$$

$$\epsilon \equiv (B \cap C) - A$$

$$\zeta \equiv (A \cap C) - B$$

$$\eta \equiv A \cap B \cap C$$

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: در کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر برای ریاضی و ۱۷ نفر برای فیزیک و یازده نفر برای هر دو درس دلوطلب شده اند.

$A \equiv$  ریاضی  
 $B \equiv$  فیزیک  
 $S \equiv$  کل

اکنون چند نفر حداقل برای یک درس دلوطلب هستند؟

$$|A| = 21 \text{ و } |B| = 17 \text{ و } |A \cap B| = 11 \text{ و } |S| = 30.$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 21 + 17 - 11 = 27$$

چند نفر برای هیچ درسی دلوطلب شدند؟

$$|(A \cup B)^c| = |S| - |A \cup B| = 30 - 27 = 3$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



ج) چند نفر فقط برای رویه های داوطلب هستند؟

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 21 - 11 = 10$$

د) چند نفر فقط برای فیزیک داوطلب هستند؟

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 17 - 11 = 6$$

ه) چند نفر دقیقاً برابر یک درس داوطلب هستند؟

$$|A - B| + |B - A| = 10 + 4 = 14$$

$|A - B| \equiv$  فقط ه می  
 $|B - A| \equiv$  فقط بزرگه

$$(\text{ج. د. ه.}: |A \cup B| - |A \cap B| = 27 - 11 = 14)$$

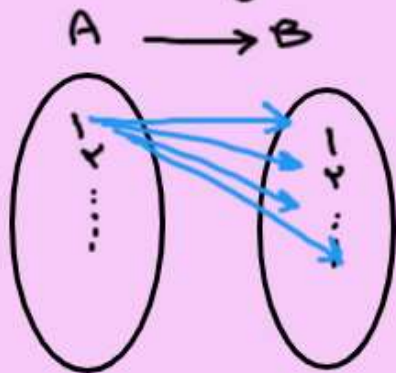
مزبان حبیبی



تمرین: صندلی ج. ب. ب. از  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $B = \{1, 2, 3\}$  وجود دارد؟

یادآوری: تعداد تابع  $f: A \rightarrow B$  برابر با  $|B|^{|A|}$

$n(B) \times n(B) \times \dots \times n(B) = |B|^{|A|}$



یا یادآوری: تابع  $f: A \rightarrow B$  را به صورت  $R_f = B^A$  می‌نویسند

مزبان حبیبی





حل تمرین:  $S = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$ ,  $|S| = |B|^{|A|} = 2^4 = 16$

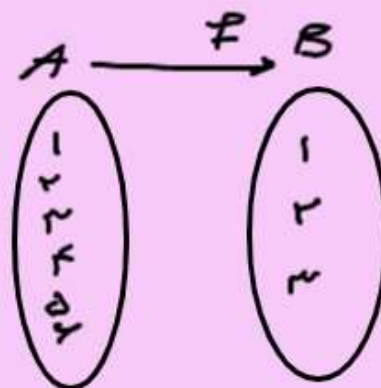
$A_1 = \{f \in S, 1 \notin R_f\}$ ,  $|A_1| = 2^4 = 16$

$A_2 = \{f \in S, 2 \notin R_f\}$ ,  $|A_2| = 2^4 = 16$

$A_3 = \{f \in S, 3 \notin R_f\}$ ,  $|A_3| = 2^4 = 16$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 2^4 = 16$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^0 = 0$





$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \equiv \text{توابع یکپارچه}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 44 + 44 + 44 - 1 - 1 - 1 + 0 = 192 - 3 = 189$$

$$\begin{aligned} \text{جواب} &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= 229 - 189 = 54 \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



تذکره: فرض کنید  $|A| = m$  و  $|B| = n$  ( $n \leq m$ )

$$f: A \rightarrow B \text{ تعداد توابع} \equiv n^m$$

$$f: A \rightarrow B \text{ تعداد توابع غیر پویش} = n - (n-1)^m - (n-2)^m + (n-3)^m - \dots$$

$$f: A \rightarrow B \text{ تعداد توابع پویش} = n^m - n - (n-1)^m + (n-2)^m - (n-3)^m + \dots$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: سه دهکده A و B و C قرار گرفته اند که توسط جاده ها به هم مرتبط شوند.  
به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟ در قرار، هر دهکده حداقل به  
یک دهکده وصل باشد.



$$S = \{ G : G \text{ یک گراف به صورت زیری از } \{A, B, C\} \text{ است} \}$$
$$|S| = 2^3 = 8$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تقریباً: به چند طریق می توان ۷ نفر را در یک خط قرار داد اگر در آن هیچ کس  
پشت از کسی نشاند؟

$$\frac{10}{1} \times \frac{9}{1} \times \frac{8}{1} \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} = (10)_7$$
$$= P(10, 7) = \frac{10!}{3!} = \dots$$

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: ۳ خودکار را به چند طریق می توان به هفت نفر داد که هیچ کدام بیش از یک خودکار نبردند.

$$(۷)_۳ = \frac{۷}{۱} \times \frac{۶}{۱} \times \frac{۵}{۱} = ۲۱۰$$

مزبان حبیبی



تمرین: چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ وجود دارد که:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}, \quad |S| = 1000$$

الف) مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشد؟

$$A = \{x \in S : 3|x\}, \quad |A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

$$B = \{x \in S : 5|x\}, \quad |B| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 5} \right\rfloor = 66$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 333 + 200 - 66 = 467$$

$$-66 = 467$$

مزبان حبیبی



ب) ضمیمه نه عضو ۳ هستند و نه عضو ۵؟

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 1000 - 447 = 513$$

ج) ضمیمه ۳ عضو اما عضو ۵ نیستند؟

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 333 - 44 = 247$$

د) ضمیمه ۵ عضو اما عضو ۳ نیستند؟

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 200 - 44 = 134$$

و) ضمیمه ۳ یا عضو ۳ یا عضو ۵ (دقیقاً عضو یکی آنها)

$$|A - B| + |B - A| = 247 + 134 = 401$$

مزبان حبیبی





مثال: به چند طریق می توان چهار اتوبوس را در ۹ جای پارک، قرار داد؟

$$(9)_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

مثال: ۳ شهگل را به چند طریق می توان بین ۵ نفر تقسیم کرد اگر بخواهیم هر نفر

حداکثر یک شهگل گیرد؟

$$(5)_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

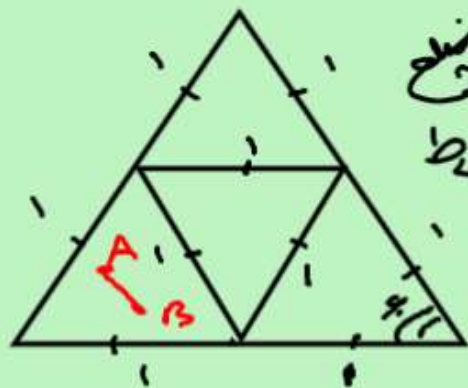


تمرین ۱: در یک خانواده ۵ نفری، ثابت کنید حداقل ۲ نفر فصل تولد یکسانی دارند.  
جواب: اگر فصل هر سال را لانه مزره کنیم (۱۲ لانه) و افراد خانواده را کیوטר (۵ کیوטר) انتخاب کنیم  $5 > 12$  بنا بر اصل لانه کیوتری، لانه هر حتماً که حداقل ۲ کیوטר در آن باشد پس حداقل ۲ نفر از افراد خانواده دارای فصل تولد یکسان هستند.

مزبان حبیبی



ترین: ۵ نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع به ضلع دو واحد انتی می کشیم. تا بکشند  
موازی ۲ نقطه از این پنج نقطه، تا مثلث متساوی الاضلاع یک واحد دارند.

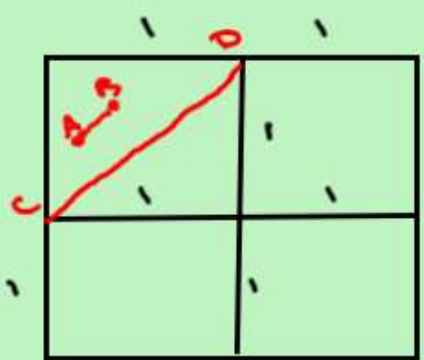


۱-۲: وسطها اضلاع مثلث را به هم وصل می کنیم تا ۴ مثلث کوچک تر به ضلع  
یک واحد در فیه شود. بنابراین، ۴ مثلث کوچک را لایه و نقاط  
را که برقرار می باشد بنیاب اصل لایه کوچکتری، لایه ۱ است که موازی  
دو نقطه در آن، بر سر  
 $ABC < 1$



تمرین ۳: پنج نقطه در یک مربع به ضلع ۲ واحداتی به هم وصل کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از این نقاط،

فاصله کمتر از  $\sqrt{3}$  دارند.



جواب: با وصل کردن دو ضلع اضلاع مربع، ۴ مربع کوچکتر به ضلع یک واحد فته می شود.

آرتی و راکبوتر (خاکبوتر) و مربع کوچک را لانه مربعی (۱ لانه) آنگه

بنام اصل لانه کبوتری، لانه هر دو هم داده که حداقل ۲ نقطه در آن مرکز دارد.

$$AB < CD = \sqrt{1^2 + 1^2} \rightarrow AB < \sqrt{2}$$

مبانی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۴: شش عضو از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  انتخاب می‌کنیم ثابت کنید

حداقل عدد از اعداد انتخاب شده ۲۰ را در مجموع می‌توانیم داشته باشیم.

حداکثر عدد از اعداد انتخاب شده ۲۰ را در مجموع می‌توانیم داشته باشیم.

۱ و ۹

۲ و ۸

۳ و ۷

۴ و ۶

۵

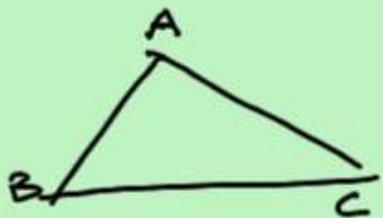
۳ از اعداد انتخاب شده را انتخاب کرده و مجموع آن‌ها را می‌توانیم داشته باشیم، بنابراین اصل لانه کبوتری، (اینجا وجود دارد که حداقل دو کبوتر در آن لانه قرار دارند که مجموع آن‌ها ۱۰ خواهد بود.) (این لانه، لانه آخر نیست)

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۵: اضلاع متشی را با رنگ سبز زرد، رنگ کرده ایم ثابت کنید حداقل ۲ ضلع آن هم رنگ هستند.



اثبات: دو لانه با بریب زرد و سبز در نظر آید.

سبز

زرد

اگر ضلعها را بگوئیم رنگ کنیم (۳ گویورد ۲ لانه) ۱ کفه طبق اصل لانه بگوئیم، لانه وجود دارد که هر دو اقل ۲ گویورد ۲ ضلع متشی هم رنگ هستند.

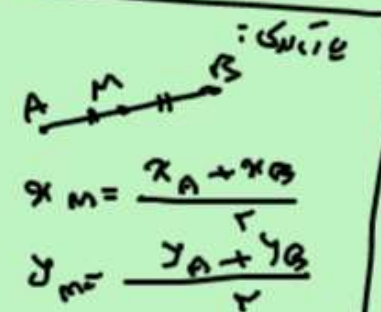
مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۶: ۵ نقطه با مختصات صحیح در صفحه انشباع کرده ایم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از این پنج نقطه در جهه دایره که مختصات نقطه وسط آنها صحیح باشد.

جواب: ۴ لانه بصورت زیر تویف کنیم:



- (زوج، زوج)
- (فرد، زوج)
- (زوج، فرد)
- (فرد، فرد)

اگر نقطه را کسوتتر فرض کنیم (ک کسوتتر و ۴ لانه) پس بنا به اصل لانه کسوتی، لانه حتماً حداقل ۲ عضو دارد و نقطه وسط این دو عضو، مختصات صحیح دارد.

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پرتین ۷: سه عدد طبیعی است که مجموع آنها ۲۰۰ است. اگر از آن‌ها ۲ عدد را انتخاب کنیم، مجموع زوج است.

چرا: سه لانه به هر چه از زیر در چشم بگیرد.

زوج

فرد

آرنتها و آرالو متر منضم است که لانه بن به اصل لانه کیوتری، لانه احر که است پس دو عدد به سه که مجموع آن‌ها زوج خواهد بود.

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۹: در یک مهمانی  $\frac{۳۷}{۲}$  نفر حضور دارند. شایب کتبی صد اقل  $\frac{۳۷}{۲}$  نفر از آنها را  
ماه تولد یک نفر می شناسد.

چوب: اگر ماه سال را لانه فرض کنیم (۱۲ لانه) و مهمانان را کبوتر فرض کنیم (۳۷ کبوتر)

$$۳۷ > ۱۲ \times ۳$$

بنابراین اصل لانه کبوترها، لانه ای هست که صد اقل  $\frac{۳۷}{۲}$  نفر  
ماه تولد یک نفر دارند.

مزبان حبیبی



سوال: در یک مهمانی ضیافتی حضور دارد ۱۲ نفر. با اینکه ۱۲ نفر در آنجا هستند، اما هیچکس از آنها با هیچکس از آنها دست نمی‌دهد. آیا این ممکن است؟

$$12 = 12 \times 1$$
$$m = m \times 1$$

$$m > 12 \times 1 \Rightarrow m > 12 \Rightarrow \text{Min}(m) = 13$$

مزبان حبیبی



چین ۱۰ = ۴۰ ت خطگی را صدگه را صدگه ان قله بزینم تا صغیرن با سیم صافل یک گله  
بیش از ۳ گله دارد؟

$$m = \text{گله ان} \equiv \text{لان حکا}$$

$$f. \equiv \text{گله صا} \equiv \text{کبوتر}$$

$$f. > mx(3) \Rightarrow f. > 3m \Rightarrow m < \frac{f.}{3} = 13.3$$

$$\Rightarrow \text{Max}(m) = 13$$

مزبان حبیبی



تقریباً: چند نفر از این مدرسه حضور داشته باشند که مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر ماه تولد  
و اوز تولد آنها در هفته یکبار؟

$$\begin{aligned} ۱۳ ماه \equiv ۳۷۸ \text{ روز} \\ ۷ روز \equiv ۱۲ هفته \end{aligned} \Rightarrow ۱۲ \times ۷ = ۸۴$$

$$\begin{aligned} m > ۸۴ \times (۹) \Rightarrow m > ۷۵۶ \\ \Rightarrow \text{Min}(m) = ۷۵۷ \end{aligned}$$

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پاپان

دکتر مزبان حبیبی

77 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511

+989166161828 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511