

جزوه های آموزشی، ریاضی دویازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: **مزبان حبیبی**

موضوع: **حل تمرین فصل چهارم محاسبه نسبت های مثلثاتی - ریاضی دویازدهم تجربی**



تمرین : اگر اندازه زاویه ای بر حسب رادیان $\frac{2\pi}{5}$ باشد

اندازه زاویه بر حسب درجه کجاست؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{2}{5} \Rightarrow D = \frac{2 \times 180}{5} = 72$$

$$\text{پس } \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$$



تمرین ۱: نسبت سینوس های زوایای 2α را حساب کنید.

$$\sqrt{2} \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad 45^\circ = 2(22.5^\circ)$$

$$\cos 45^\circ = 2 \cos^2 22.5^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \checkmark$$

مزبان حبیبی



$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \xrightarrow{\text{نشان دارد}} \sin 22.5^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 22.5^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin 22.5^\circ = \sqrt{1 - \frac{r + \sqrt{r}}{r}} = \frac{\sqrt{r - \sqrt{r}}}{r}$$

$$\tan 22.5^\circ = \frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{r - \sqrt{r}}}{r}}{\frac{\sqrt{r + \sqrt{r}}}{r}} = \sqrt{\frac{r - \sqrt{r}}{r + \sqrt{r}}}$$

$$\cot 22.5^\circ = \sqrt{\frac{r + \sqrt{r}}{r - \sqrt{r}}}$$

مزبان حبیبی



$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

تمرین: ثابت کنید

$$\text{پیدا کنید: } \cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha}$$

مزبان حبیبی



$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

تمرین: ثابت کنید

ثابت کنید: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

مزبان حبیبی



تمرین: اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ ، در ضلع اول α و در ضلع دوم β ،
 مقادیر $\cos(\alpha - \beta)$ ، $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\tan 2\alpha$ را حساب کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + \frac{144}{169} = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \beta = +\sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65}$$

مزبان حبیبی



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-24}{65} + \frac{3}{65} = \frac{-21}{65}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

مزبان حبیبی



کمترین درجه قبل، $\alpha + \beta$ در کسرها صحیح است.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} \\ &= -\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) < 0 &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{دوم یا سوم} \\ \text{سوم یا چهارم} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta \text{ در ناحیه سوم است} \\ \sin(\alpha + \beta) < 0 &\Rightarrow \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



تمرین: مقادیر زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} 1) \quad \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \dots$$

$$\sin(15^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dots$$

مزبان حبیبی



$$\begin{aligned} 2) \tan 110^\circ &= \tan(40^\circ + 70^\circ) = \frac{\tan 40^\circ + \tan 70^\circ}{1 - \tan 40^\circ \times \tan 70^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4 + 4\sqrt{3}}{-2} \\ &= -(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



$$\begin{aligned} 4) \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{12} = \frac{180}{12} = 15^\circ$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \dots$$

مزبان حبیبی



$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \sin 12^\circ &= \sin (4^\circ + 4^\circ) = \sin 4^\circ \cos 4^\circ + \cos 4^\circ \sin 4^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \sin 12^\circ &= \sin (9^\circ + 3^\circ) = \sin 9^\circ \cos 3^\circ + \cos 9^\circ \sin 3^\circ \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{h)} \quad \sin 12^\circ = \sin (180^\circ - 4^\circ) = \dots$$

مزبان حبیبی



$$\begin{aligned} 5) \cos 135^\circ &= \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = \dots$$

مزبان حبیبی



تقریباً مقدار $\sin 75^\circ$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \therefore$$

مزبان حبیبی



صفحه ۷۶ کتاب، و صفحه ۷

۱ هریک از زاویه های -۱۲° ، ۳۶° ، ۷۲° ، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi D}{180} \quad ۱۲^\circ = \frac{\pi(12)}{180} = \frac{2\pi}{15}$$

$$-۱۲^\circ = \frac{\pi(-12)}{180} = -\frac{\pi}{15} \quad -۱۰۵^\circ = \frac{\pi(-105)}{180} = -\frac{7\pi}{12}$$

$$۳۶^\circ = \frac{\pi(36)}{180} = \frac{\pi}{5} \quad ۳۱۵^\circ = \frac{\pi(315)}{180} = \frac{7\pi}{4}$$

۲ هریک از زاویه های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = \frac{180 \cdot R}{\pi} \quad \frac{3\pi}{4} = \frac{180 \cdot (\frac{3\pi}{4})}{\pi} = 135$$

$$-\frac{\pi}{18} = \frac{180 \cdot (-\frac{\pi}{18})}{\pi} = -10 \quad \frac{7\pi}{8} = \frac{180 \cdot (\frac{7\pi}{8})}{\pi} = 157.5$$

$$\frac{-2\pi}{5} = \frac{180 \cdot (-\frac{2}{5}\pi)}{\pi} = -72 \quad \frac{6\pi}{5} = \frac{180 \cdot (\frac{6\pi}{5})}{\pi} = 216$$

بزه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی

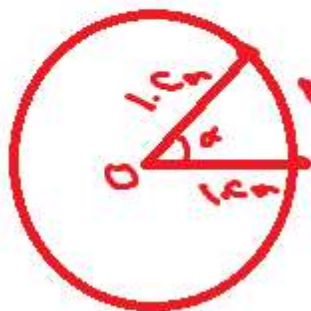


۳ زاویه D برابر با $\frac{\pi}{4}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{(\frac{\pi}{4})}{\pi} \Rightarrow D = 9$$

۴ دایره ای به شعاع 10 سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول

8 سانتی متر از این دایره چند رادیان است؟



$$\text{اندازه زاویه مرکزی برابر است با} = \frac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع دایره}}$$

$$\alpha = \frac{8}{10} R = 0.8 R$$

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



۵) درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هر یک از ساق های آن است. \times

ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان روبه روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $\frac{3}{14}$ سانتی متر است. \checkmark

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد. \times $\frac{2\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5} > 180^\circ$

ت) زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند. \times

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \neq 180^\circ$$

مزبان حبیبی



$D \equiv$ درجه $\quad R \equiv$ رادیان $\quad G \equiv$ گراد $\quad \pi \approx 3.14$

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{90}$$

مگرین: اگر اندازه زاویه ای 12° به π ، اندازه آن درجه

رادیان و گراد، چقدر است؟

$$\frac{12}{360} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{90}$$

$$\frac{12}{360} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{12\pi}{360} = \frac{\pi}{30} \quad \text{رادیان}$$

$$\frac{12}{360} = \frac{G}{90} \Rightarrow G = \frac{12 \times 90}{360} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} \quad \text{گراد}$$



$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{D\pi}{180}$$

اندازه
درجه = $\frac{\pi}{180}$ کبیانه

$$30^\circ = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ رادیان}$$

$$45^\circ = \frac{45 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان}$$

$$60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ رادیان}$$

$$90^\circ = \frac{90 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{2} \text{ رادیان}$$

$$135^\circ = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ رادیان}$$

$$170^\circ = \frac{170 \cdot \pi}{180} = \frac{17\pi}{18}$$



برعکس:

$$\frac{36}{4} \text{ رادیکان} \equiv \frac{36 \times 180}{4} = 1350^\circ$$

$$\frac{7}{2} \text{ رادیکان} \equiv \left(\frac{180}{2}\right)^\circ = 90^\circ$$

$$\frac{22}{15} \equiv \left(\frac{22 \times 180}{15}\right)^\circ \equiv 36^\circ$$

$$\left(\frac{7\pi}{15}\right) \text{ رادیکان} \equiv \left(\frac{7 \times 180}{15}\right)^\circ \equiv 84^\circ$$

$$2 \text{ رادیکان} \equiv \left(\frac{2 \times 180}{\pi}\right) \text{ رادیکان} \equiv \left(\frac{2 \times 180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$$

$$1 \text{ رادیکان} \equiv \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$$



مکزی: اگر $\sin \theta = \frac{1}{3}$ و انتگرال زاید θ در ناحیه سوم باشد آنرا
 سیربندی حاصل زاویه θ را بیان کنید.

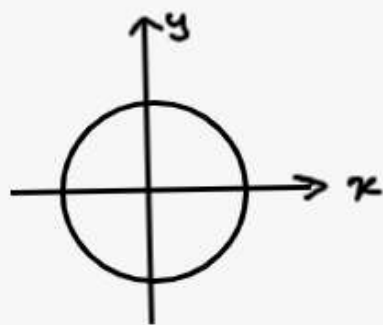
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{1}{\frac{8}{9}} - 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sqrt{8}}{1} = 2\sqrt{2}$$



مکرمین: نسبت‌های مترسده حتی زاویه ۳۰۰° را با بکنید.

فقط کینوسر نسبت \Rightarrow نه صیه صیه $\Rightarrow ۳۰۰^\circ$

$$۳۰۰^\circ = ۳(۹۰^\circ) + ۳۰^\circ$$

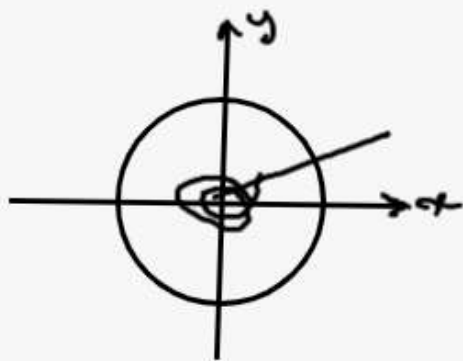
$$\sin ۳۰۰^\circ = \sin (۳(۹۰^\circ) + ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos ۳۰۰^\circ = \cos (۳(۹۰^\circ) + ۳۰^\circ) = +\sin ۳۰^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan ۳۰۰^\circ = \tan (۳(۹۰^\circ) + ۳۰^\circ) = -\cot ۳۰^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot ۳۰۰^\circ = \cot (۳(۹۰^\circ) + ۳۰^\circ) = -\tan ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مزبان حبیبی



مگرین: مقدار $\cot 75^\circ$ احاب کنید.
همه تبت \Rightarrow نهمارن $\Rightarrow 75^\circ$

$$\frac{75^\circ}{\frac{75^\circ}{\sqrt{3}}}$$

$$\cot 75^\circ = \cot(1(90^\circ) + 15^\circ) = + \cot 15^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{1}{\cot 75^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مزبان حبیبی



صفحه ۸۷ کتاب ریاضی ۲

تمرین

۱) حاصل هر یک از عبارات های زیر را به دست آورید:

الف) $\tan 135^\circ + \cot 12^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot(180^\circ - 18^\circ) = -\tan 45^\circ - \cot 18^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $\cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ) = \cos(-18^\circ - 3^\circ) + \cot(18^\circ + 6^\circ) = -\cos 3^\circ + \cot 18^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

پ) $\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ) = \sin(90^\circ - 27^\circ) + \tan(90^\circ - 36^\circ) = \sin 27^\circ + \tan 36^\circ = -1$

ت) $\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-60^\circ) = \cos(-72^\circ + 12^\circ) + \cot(-72^\circ + 12^\circ) + \tan 72^\circ - \tan(-60^\circ)$

$= \cos(-60^\circ) + \cot 12^\circ + \tan 72^\circ - \tan 12^\circ = 1 - \sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} = 1$

ث) $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(4\pi - \frac{\pi}{4})$
 $= -\sin \frac{\pi}{3} - \cos(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

ج) $\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{3\pi}{4}) + \tan(-\frac{4\pi}{3})} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{\sin(-\pi + \frac{\pi}{4}) + \tan(-\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6}}{-\sin \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$



بزه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی

۲ جدول زیر را کامل کنید :

نسبت \ زاویه x	۱۲°	۱۳۵°	۱۵°	۲۱°	۲۲۵°	۲۴°	۳۰°	۳۳°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\frac{\sqrt{3}}{1}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{1}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{1}$	$-\frac{\sqrt{3}}{1}$	$-\frac{\sqrt{3}}{1}$
$\cot x$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{1}$	$-\frac{\sqrt{3}}{1}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴^\circ = \sin ۶^\circ$ ✓

ب) $\tan(-۱۰۰^\circ) = \tan ۸^\circ$ ✓

$-۱.۸. + ۸.$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$ ✓

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$ ✓

$۷۲. + ۱۵۵$

پپی



بزوه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



۲ در تساوی زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید :

$$\sin x = \cos (20^\circ + x)$$

آیا برای زاویه x تنها یک مقدار می توان یافت؟ جواب خود را با جواب های دوستان خود مقایسه کنید.

$$\sin 20^\circ = \cos (90^\circ - 20^\circ) = \cos 70^\circ$$

$$20^\circ + x = 70^\circ \Rightarrow \boxed{x = 50^\circ}$$

$$\text{پس } x = 2k\pi + 50^\circ = 2k\pi + 50^\circ$$

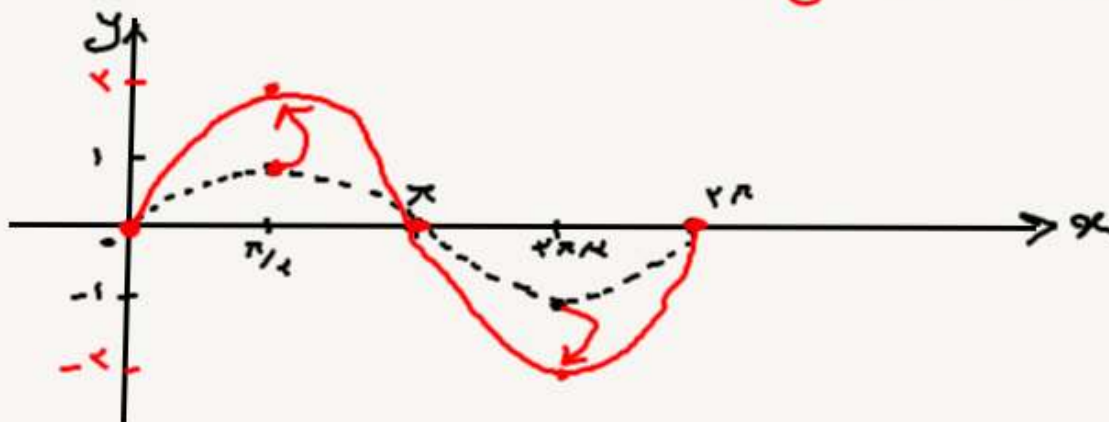
مزبان حبیبی



$$y = 2 \sin x$$

$$R_y = [-2, 2]$$

نتیجه:



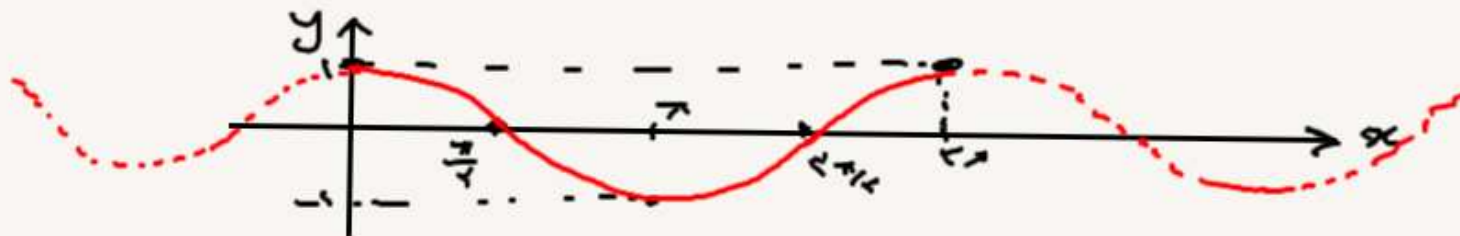
مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضی دو یازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



مغزدار ربع $y = \cos x$

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	...
$\cos x$	1	0	-1	0	1	...

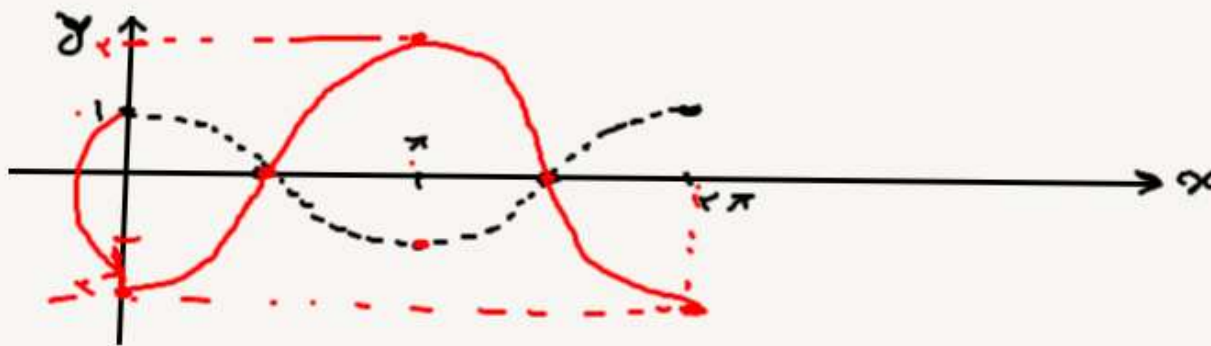


مزبان حبیبی



شکل :

$$y = -2\cos x$$



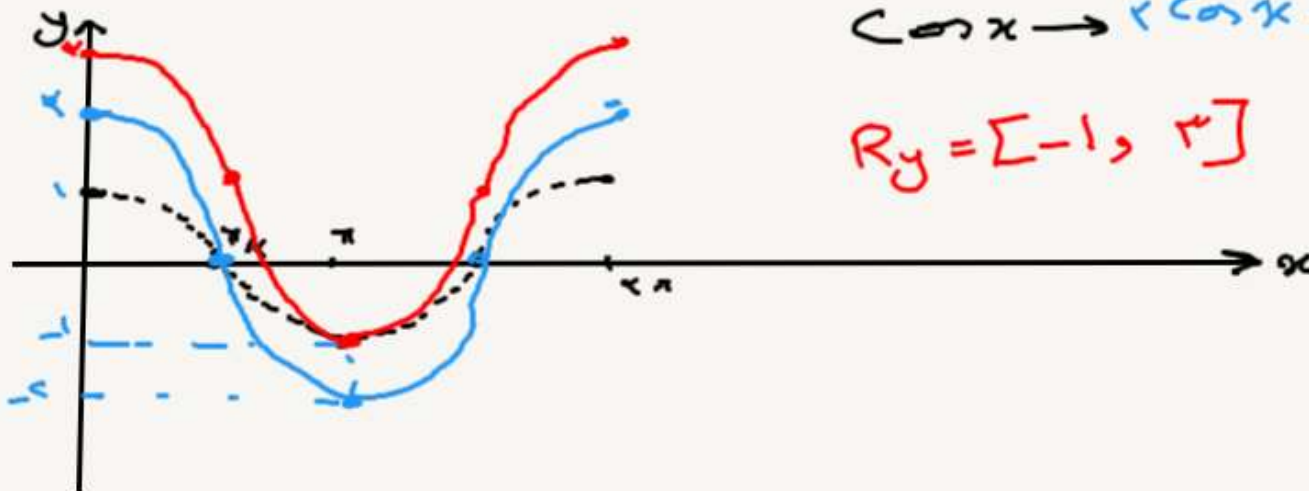
مزبان حبیبی

$$y = 2 \cos x + 1$$

مثال:

$$\cos x \rightarrow 2 \cos x \rightarrow 2 \cos x + 1$$

$$R_y = [-1, 3]$$

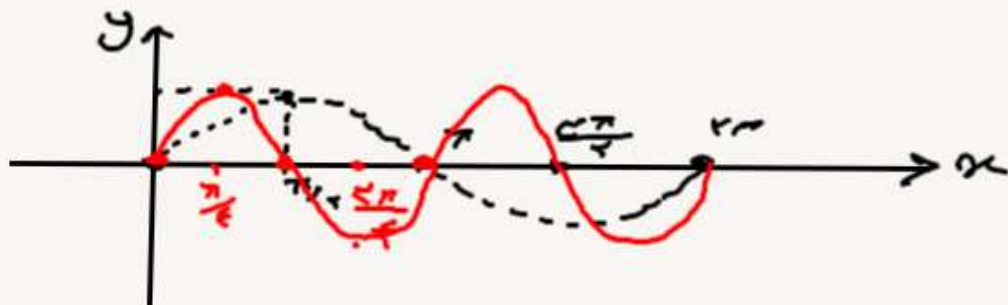


مزبان حبیبی



مثال:

$$y = 3 \sin \frac{1}{2} x$$





مثال : $f(x) = \cos(x - \pi/4)$

$$x - \pi/4 = 0 \Rightarrow x = \pi/4$$



مزبان حبیبی



ص ۹۳ کتاب ریاضی ۲

تمرین

۱ آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه های زیر بر هم منطبق اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ ✓

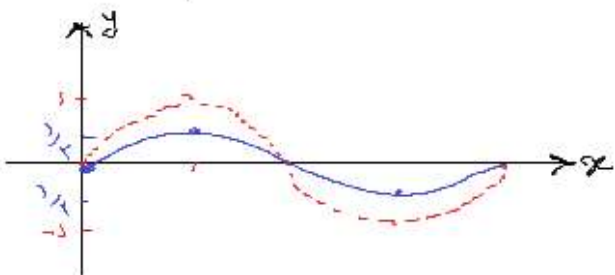
۳) $y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$ ✗

۲) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ ✓

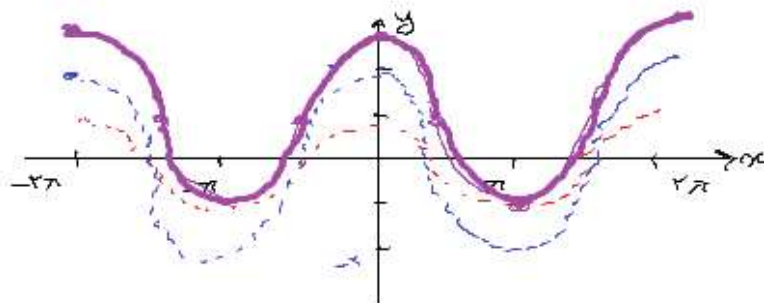
۴) $y = \sin x$, $y = \sin(5\pi - x)$ ✓

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه های زیر را در دستگاه مختصات در بازه های داده شده رسم کنید.

۱) $y = \frac{1}{2} \sin x$, $[0, 2\pi]$



۲) $y = 2 \cos x + 1$, $[-2\pi, 2\pi]$

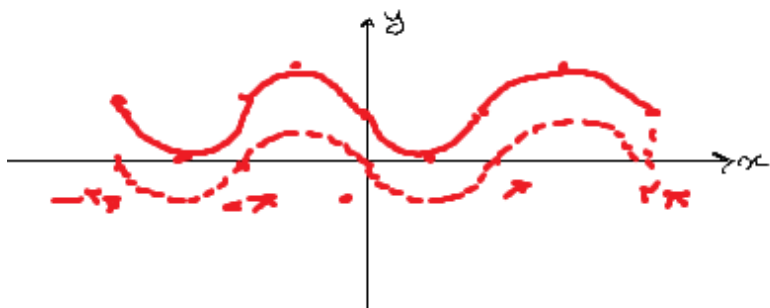


پی

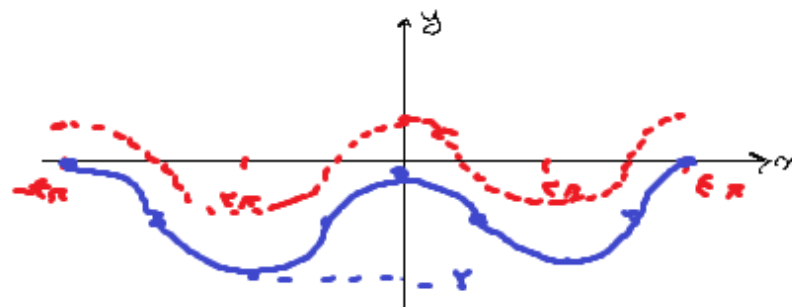
بزوہ های آموزش، ریاضی دو یازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



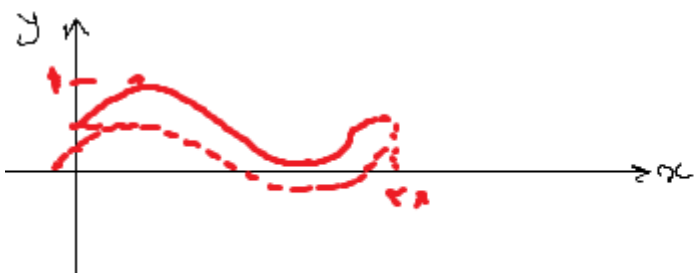
۳) $y = 1 - \sin x$, $[-2\pi, 2\pi]$



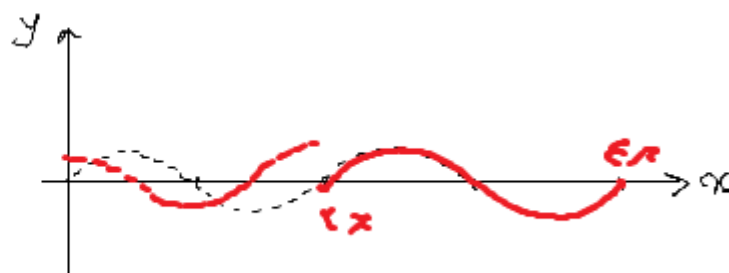
۴) $y = -1 + \cos x$, $[-4\pi, 4\pi]$



۵) $y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $[0, 2\pi]$



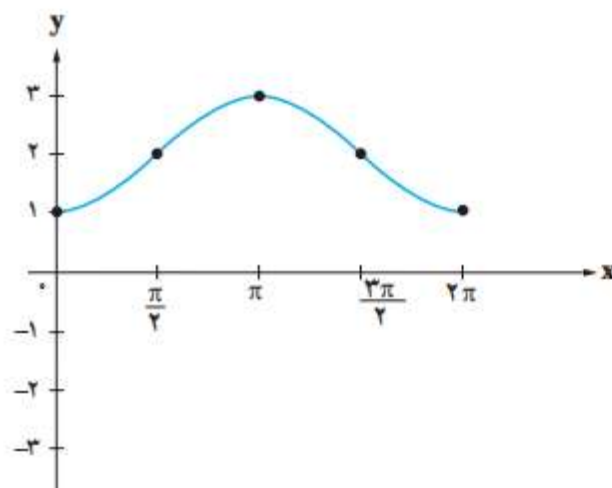
۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$, $[2\pi, 4\pi]$



پری

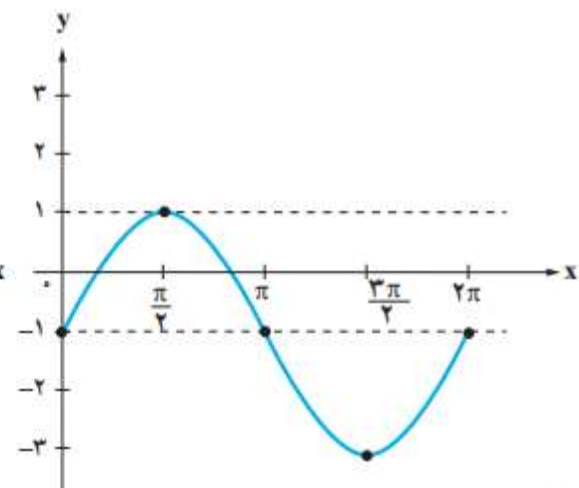
بزه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی

۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه های داده شده را دارند. نمودار تابع با سایر ضابطه ها را نیز رسم کنید.



الف) $y = 2\cos x + 1$

ب) $y = 2 - \cos x$ ✓



ب) $y = 2\sin x - 1$ ✓

ت) $y = \sin x - 2$

حبیبی



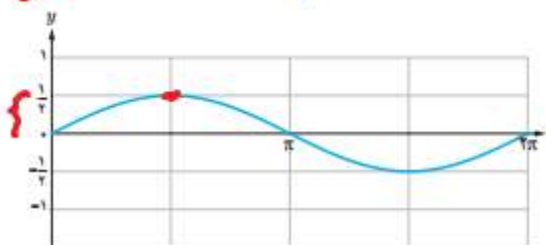
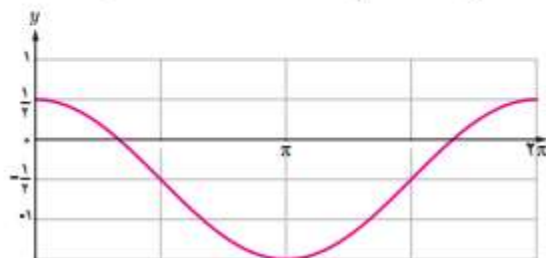
جزوه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند.

الف) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{4} \sin x$ را نشان می دهد. ✓

ب) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را نشان می دهد. ✓



ب) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه

یک واحد در راستای محور x ها انتقال دهیم. ✗

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به

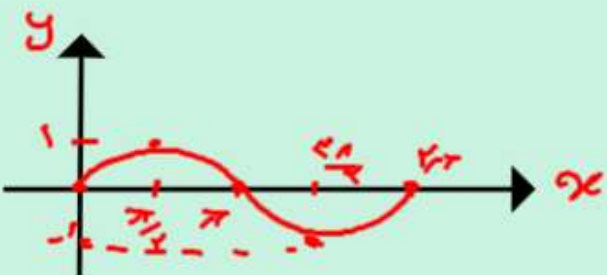
محور x ها قرینه کنیم. ✓

ریاضی دوازدهم تجربی

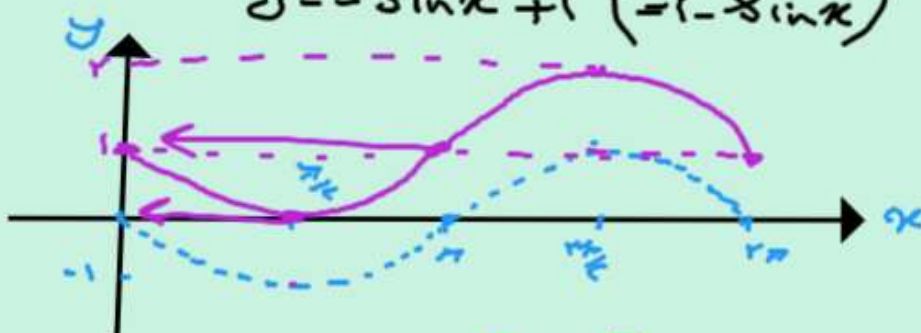


تمرین ۱: نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin x$ را رسم کنید.

$$y = \sin x$$



$$y = -\sin x + 1 \quad (= 1 - \sin x)$$



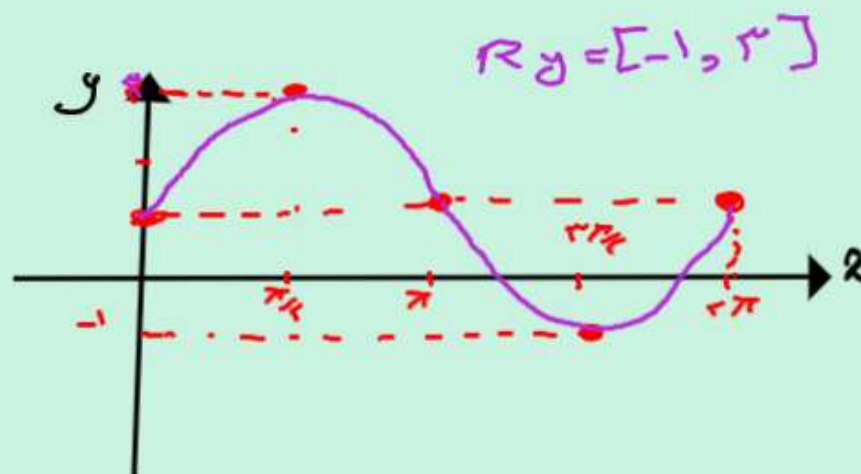
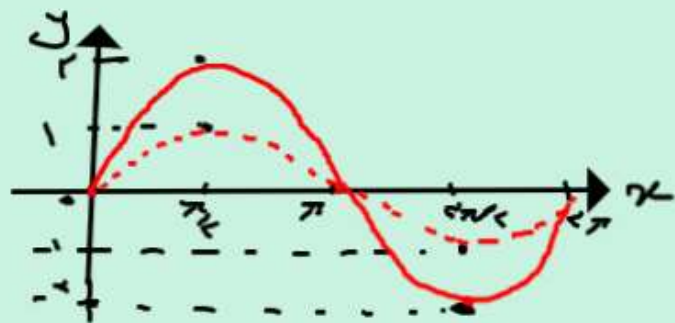
$$R_y = [0, 2]$$

مزبان حبیبی



تمرین ۲: محورنا، تابع $y = 2\sin x + 1$ را رسم کنید.

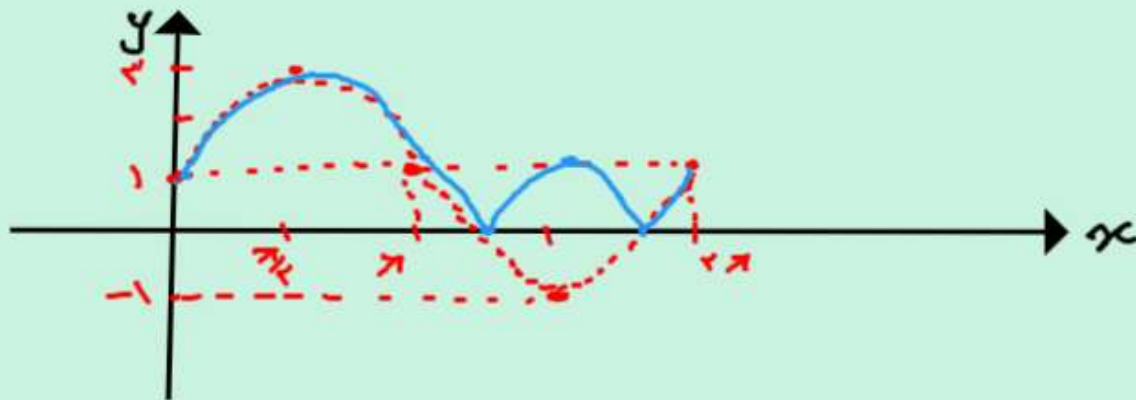
$$y = \sin x \rightarrow y = 2\sin x \rightarrow y = 2\sin x + 1$$



مزبان حبیبی

بزوہ های آموزش، ریاضی دو یازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی

تمرین ۳: نمودار تابع $y = |2.8 \sin x|$ را رسم کنید.

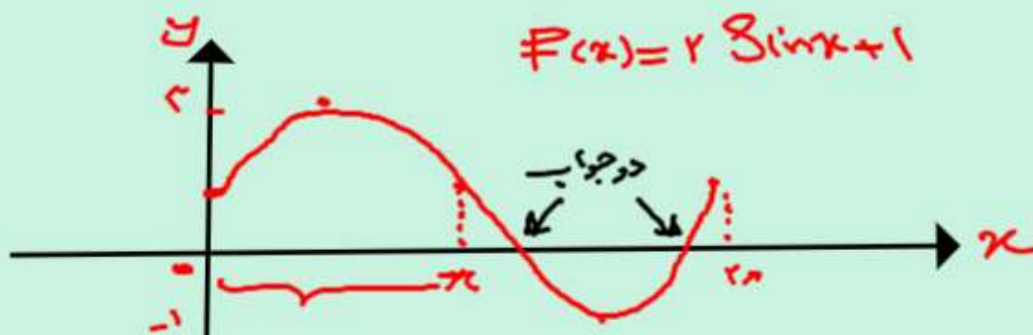


مزبان حبیبی





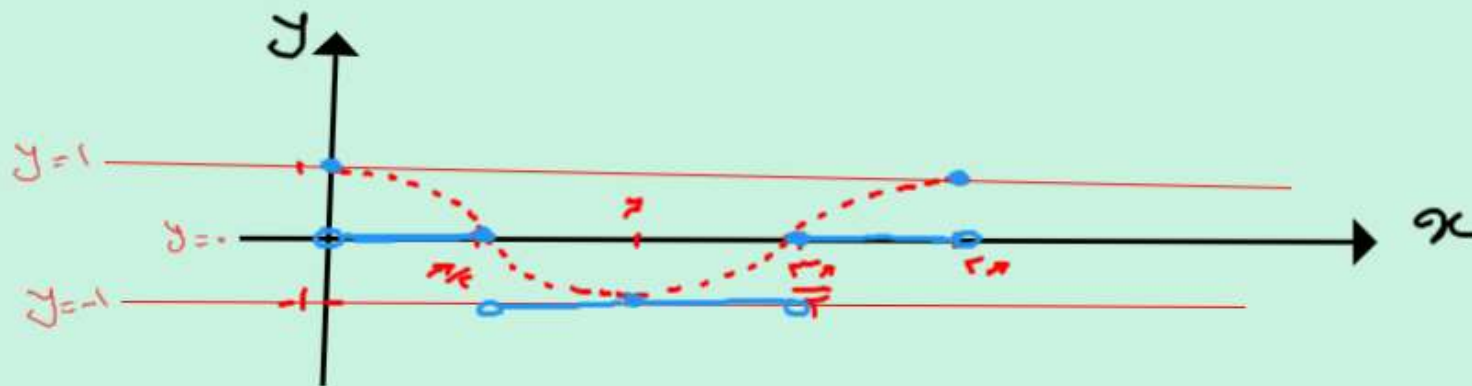
تمرین ۴: معادله $2 \sin x + 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟



تذکر: طول نقطه ها را برحسورد نمودار تابع f ، ریشه های معادله $f(x) = 0$ هستند.



تمرین ۵: نمودار تابع $f(x) = [\cos x]$ را رسم کنید. ($x \in [0, \pi]$)

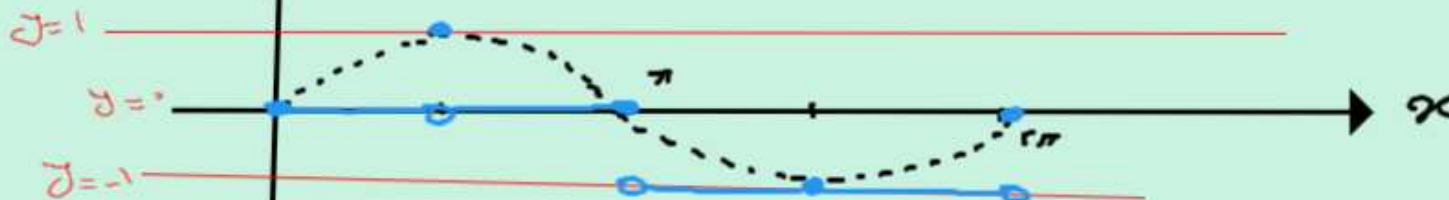


مزبان حبیبی



تمرین: بارسم بخوار، نقاره و $\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x]$ را تعیین کنید.

$$f(x) = [\sin x]$$



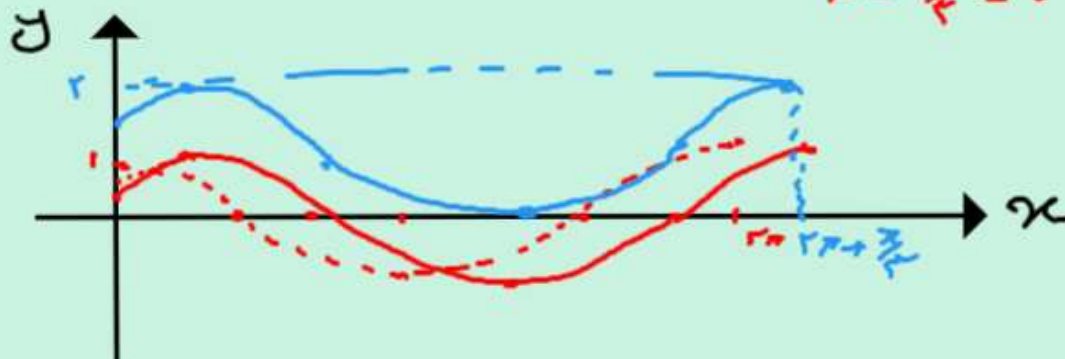
$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x] = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x] = \text{وجود ندارد}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضی دو یازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی

تمرین: ^v نمودار تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ را رسم کنید.

$$x - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



مزبان حبیبی





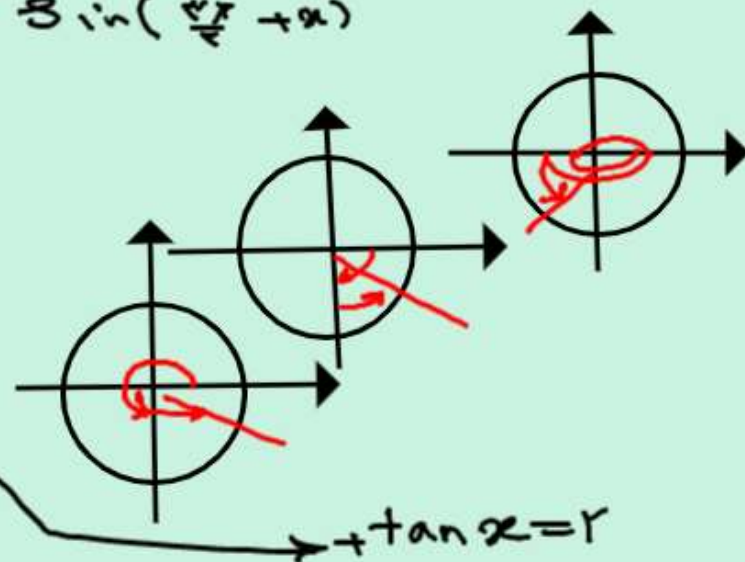
تمرین ۸: آر = ۲، $\frac{2 \sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{5\pi}{4} + \alpha)}$ ؛ نام مقدار، $\rho < 1$ و $\tan \alpha$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin(-\frac{3\pi}{4} + \pi) = -\sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4} + \pi) = +\sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\frac{5\pi}{4} + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{-2 \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}}{-\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{-\sin \frac{3\pi}{4}}{-\cos \alpha} = 2$$



$$\rightarrow +\tan \alpha = 2$$

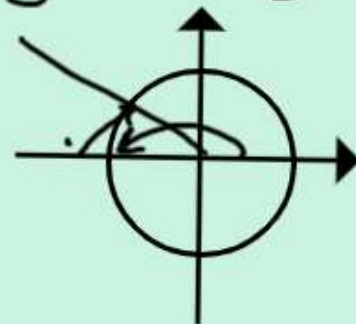
مزبان حبیبی

تمرین ۹: حاصل $\tan 135^\circ + \cos 120^\circ$ را حساب کنید.

$$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 135^\circ + \cos 120^\circ = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$



مزبان حبیبی



تثبت کنید: $\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

مکملین: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\tan(21^\circ) \cdot \cos(21^\circ) + \tan(4^\circ) \sin(14^\circ) = ?$$

$$\tan 21^\circ = \tan(18^\circ + 3^\circ) = -\tan 3^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 21^\circ = \cos(18^\circ + 3^\circ) = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 4^\circ = \tan(18^\circ + 12^\circ) = \tan 12^\circ = \tan(18^\circ - 6^\circ) = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 14^\circ = \sin(2(7^\circ) + 12^\circ) = \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = +\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = (-\sqrt{3}) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

مزبان حبیبی



تمرین « : آر » $\sin x \cdot \cos x < 0$. اگر که از این صیغه اس .

$$\sin x \cdot \cos x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 , \cos x < 0 \Rightarrow \text{نیمه دوم} \\ \sin x < 0 , \cos x > 0 \Rightarrow \text{نیمه چهارم} \end{cases}$$

∴ $\sin x \cdot \cos x < 0 \Rightarrow$ ^{العلا} \sin و \cos مختلف \Rightarrow ^{العلا} x در Q_2 و Q_4 .
نیمه دوم و چهارم

مزبان حبیبی