

جزوه های آموزشی، حلان دو دوازدهم ریاضی و ریاضی سه تجربی، دکتر مزبان حبیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: **مزبان حبیبی**

موضوع: کاربرد مشتق، اکستریمهای تابع - دوازدهم ریاضی و تجربی



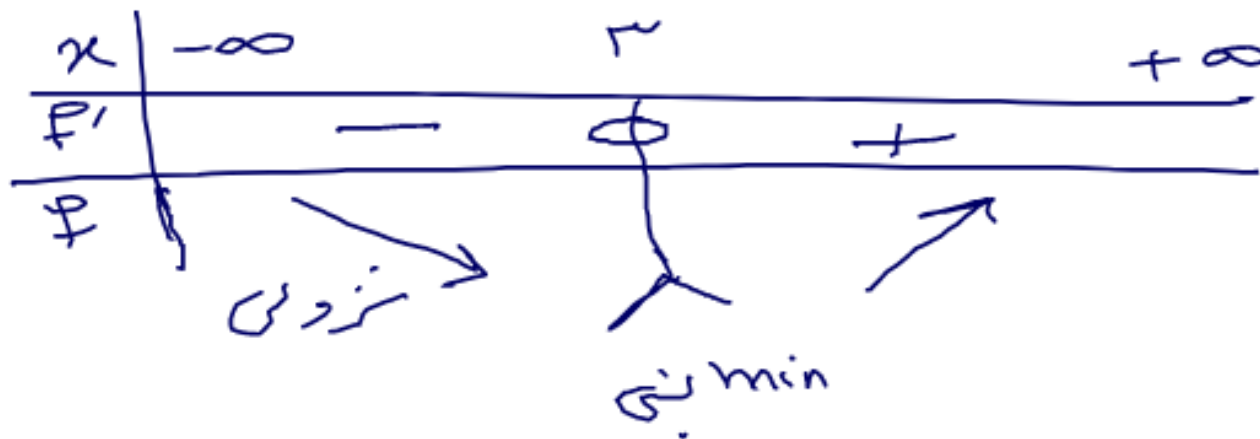
$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

∴ ∴ ∴

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1} \\ (x^0)' &= 0 \cdot x^0 \\ (x^2)' &= 2x \end{aligned}$$



بزه های آموزشی، حبلان دو دوازدهم ریاضی و ریاضی سه تجربی، دکتر مزبان حبیبی

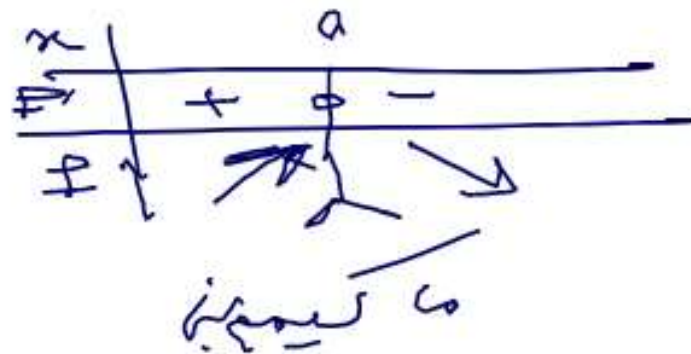
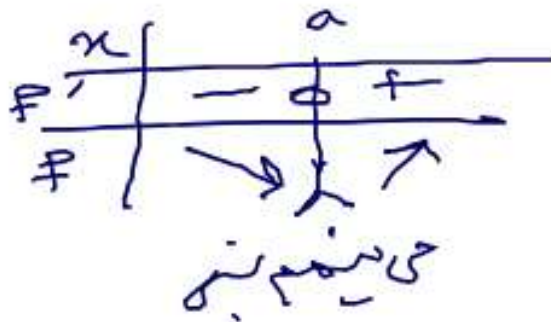


نقطه بحرانی = مشق وجود ندارد یا مشق صفر است.

توجه : f صعودی است $\Rightarrow f' > 0$

f نزولی است $\Rightarrow f' < 0$

ج : آزمون مشق اول





مثال: اکثر هم ها تابع $f(x) = x^3 - 3x$

رایج کنید.

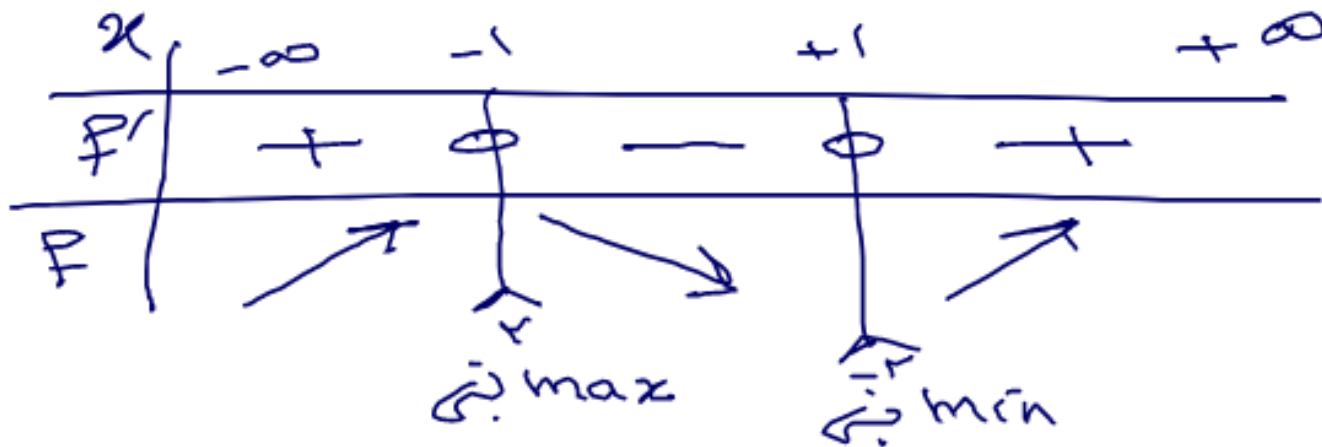
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f(x))' = 0 \\ (f(x))'' = 0 \end{cases}$$

$$3(-1)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$$



فصل پنجم: کاربرد مشتق

اکثر مسائل تابع:

مضرب کنیم تابع f داله ندره است.

برای تعیین اکثر مسائل بنویس تابع $f(x)$ را بدست

آورد و مقدار $f'(x) = 0$ را بیابیم، بقول f'

را تعیین علامت کرد.





مثال : $f(x) = x - x^2 + 5$

$f'(x) = 1 - 2x$

$1 - 2x = 0 \Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0
f	\swarrow	\searrow	\swarrow	\searrow

حداکثر

حداقل

$1 - 2(1) = 1 - 2 = -1$

بزه های آموزشی، حبلان دو دوازدهم ریاضی و ریاضی سه تجربی، دکتر مزبان حبیبی



کمترین: دکتر مزبان حبیبی

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x}{x^2}$$

را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

$$f'(x) = 4x^2 + 4x - 12$$

$$4x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \notin [-1, 3] \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \checkmark \end{cases}$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) = -2 + 3 + 12 = 13$$

$$f(3) = 2(3)^3 + 3(3)^2 - 12(3) = 54 + 27 - 36 = 45 \Rightarrow$$

مهمترین: $(-7, 45) \equiv$ ماکسیمم $(1, -7)$ مینیمم

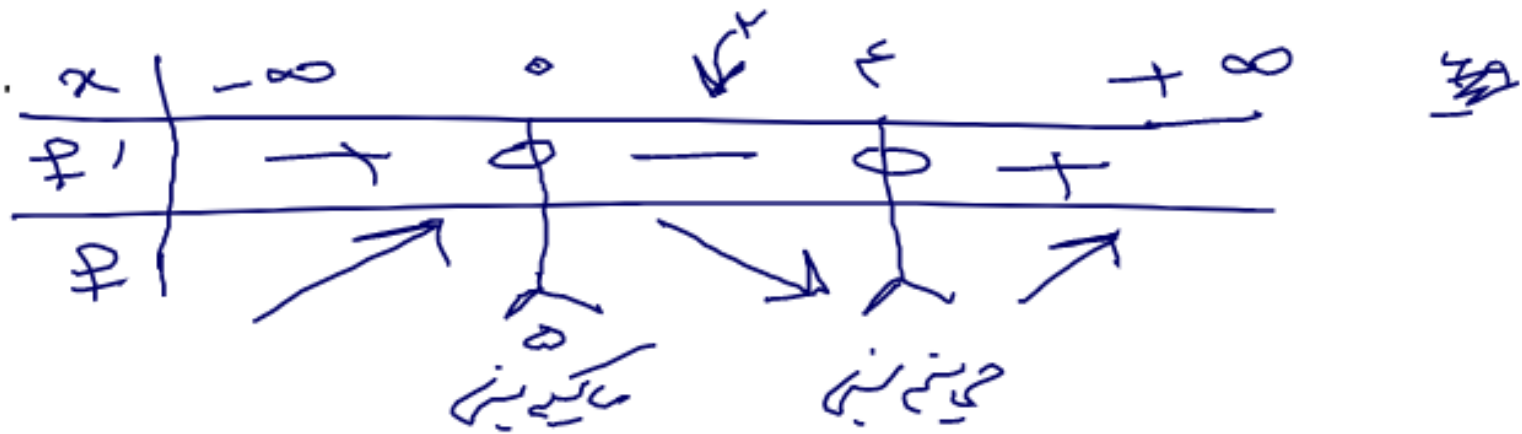


مثال: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

$3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 8) = 0$

$\nearrow x = 0$
 $\searrow x = \frac{8}{3}$



$3\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{8}{3}\right) = 12 - 24 = -12$



صفحه ۱۱۲ کتاب:

تمرین ۱: بزرگترین و کمترین را بیابید که مجموع زیر در آن به زره نزدیک است.

$$f(x) = x^2 - 12x + 4$$

حل: $f'(x) = 2x - 12$

$$2x - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow x = \pm 6$$

x	$-\infty$	-6	0	6	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	↗	↘	↘	↗	↗
		max		min	

$$f'(0) = 2(0) - 12 = -12 \quad \text{حوا = } (-6, 6)$$



تمرین ۳: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad \text{الف)}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark$$

$$4-x^2 = 0 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 &\Rightarrow y = \sqrt{4-0} = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x=2 &\Rightarrow y = \sqrt{4-4} = 0 \rightarrow (2, 0) \\ x=-2 &\Rightarrow y = \sqrt{4-4} = 0 \rightarrow (-2, 0) \end{aligned} \right\} \text{نقاط بحرانی}$$



$$ب) f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x + 6) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4 \Rightarrow (0, -4)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (-2, 0)$$

نقطه های بحرانی: $(0, -4)$ و $(-2, 0)$



$$ج) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{x^{-2/3}}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$x^2 = 0 \implies x = 0 \implies y = \sqrt[3]{0} = 0$$

نتیجه بحرانی: $(0, 0)$



صفحه ۱۱۲ کتاب

گرفتن ۲:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x(x^2 + 1) - (2x) \cdot (1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{جواب ندارد}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	\emptyset	$-$
f		\nearrow	\searrow

max

$$f'(1) = \frac{-2}{4}$$

معمولی $(-\infty, 0)$

نزدیکی $(0, +\infty)$



$$\therefore f(x) = -x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = -3x^2 - 3$$

$$-3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow -3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{جواب ندارد}$$

تا هیچ اکسترمم ندارد.



صفحه ۱۱۲ کتاب

۵) اگر چه ریشه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad \text{،} \quad [-1, 2] \text{ (الف)}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 18x$$

$$-6x^2 + 18x = 0 \Rightarrow x \cdot (-6x + 18) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 18 = 0 \Rightarrow -6x = -18 \Rightarrow x = 3 \notin [-1, 2] \end{cases}$$

$$f(0) = 0 + 0 - 13 = -13 \Rightarrow (0, -13) \quad \text{نقطه محلی}$$

$$f(-1) = 2 + 9 - 13 = -2$$

$$f(2) = -14 + 36 - 13 = 9 \Rightarrow (2, 9) \quad \text{نقطه محلی}$$



۴) اگر همکاران را ببینید

صفحه ۱۱۳ کتاب

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0 \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f		\nearrow	\searrow	\nwarrow	\nearrow
		max		min	

$f'(0) = 0 + 0 - 9$



۶-۲ (۱) نقطه آکس هم نیمی به $f(x) = x^3 + bx^2 + d$

نقطه طولد ساید -

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 1 \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4b + d = 1 \\ 12 + 4b = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx$$

$$f'(2) = 12 + 4b = 0 \Rightarrow 4b = -12 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

$$8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

صنعتی ۱۱۲

بزه های آموزشی، سلمان دو دوازدهم ریاضی و ریاضی سه تجربی، دکتر مزبان حبیبی



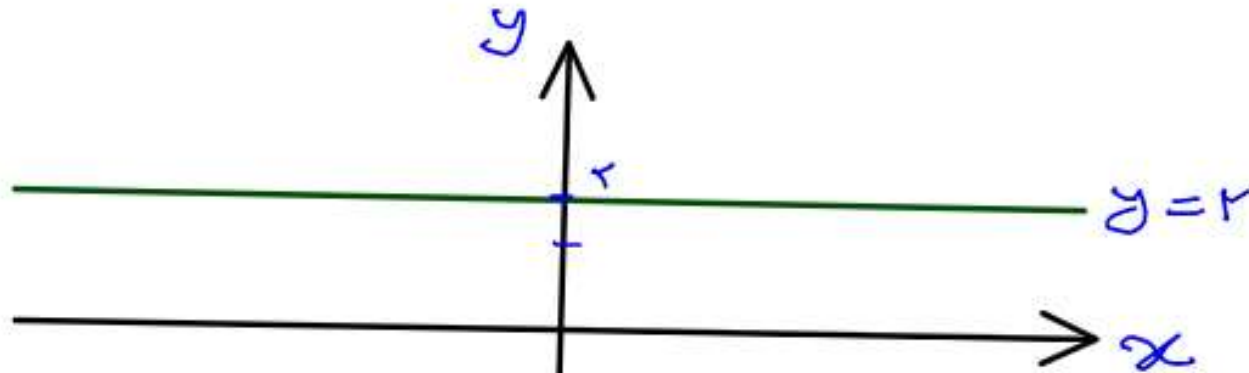
نکته: اگر نقطه (a, b) بر روی گره تابع f باشد
آنگاه $f(a) = b$ و $f'(a) = 0$

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f'(a) = 0 \end{cases}$$



۷۰- کویاره f به F : R را رسم کنید که در هر نقطه D_f و f : F باشد.

نقطه D_f یک نقطه بحرانی f : F است.

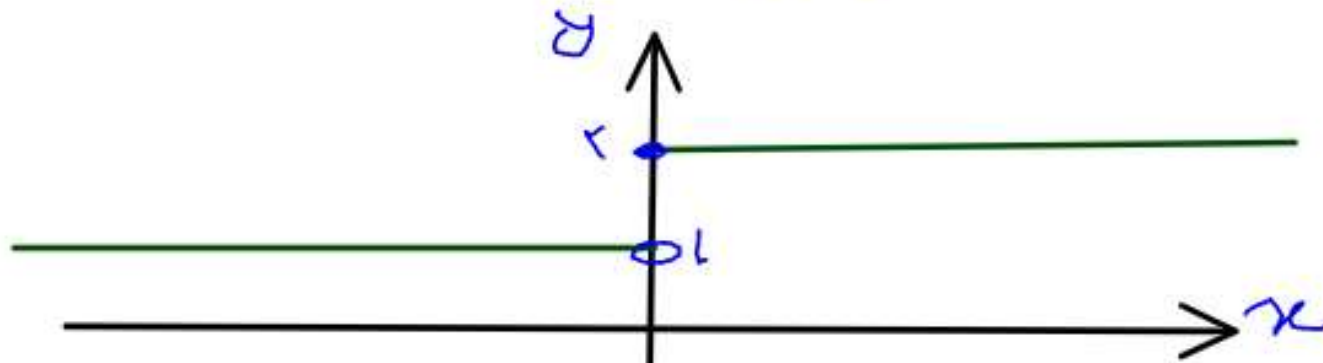


$$f(x) = 2 \implies f'(x) = 0$$

همه نقاط بحرانی هستند.

در هر سینه قبلی: تا به غیرنا بسته است ل ترصد

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$





$$\text{ب) } f(x) = x^3 + 2x - 5, \quad [-2, 1]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3} \quad \text{خوب نیست!}$$

$$f(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \Rightarrow (-2, -17) \quad \text{حداقل}$$

$$f(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \Rightarrow (1, -2) \quad \text{حداکثر}$$

بزه های آموزش، سلمان دو دوازدهم ریاضی و ریاضی سه تجربی، دکتر مزبان حبیبی



دکتر مزبان حبیبی
سلمان

22 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511