سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: حل تمرینات فصل اول حسابان دو دوازدهم ریاضی، تابع

دکتر مزبان حبیبی

1 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین

صفحه ۱۱ حسابان ۲

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$

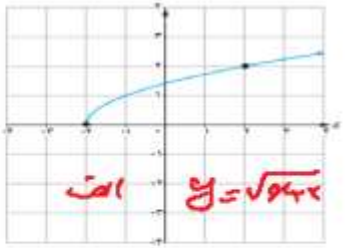
ب) $y=۲+\sqrt{x}$

پ) $y=-۲\sqrt{x}$

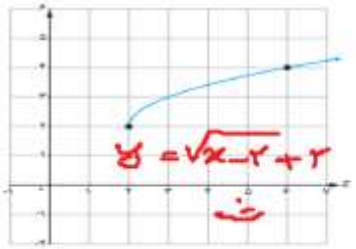
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$

ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$

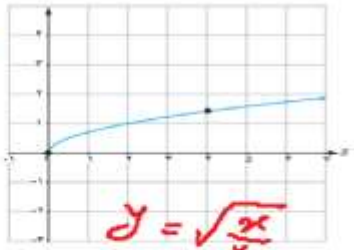
ج) $y=\sqrt{-۲x}$



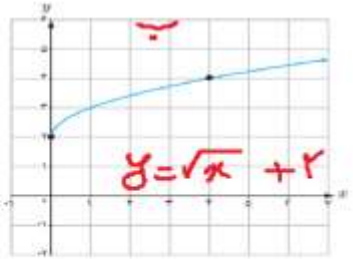
(a)

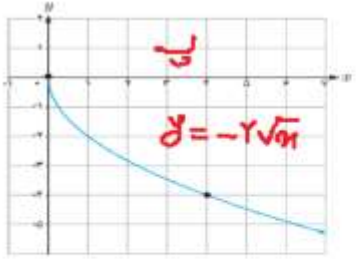


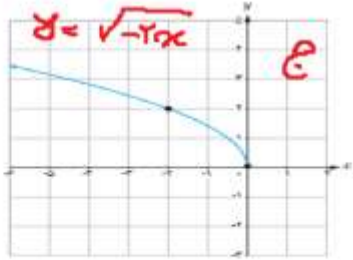
(b)



(c)







حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

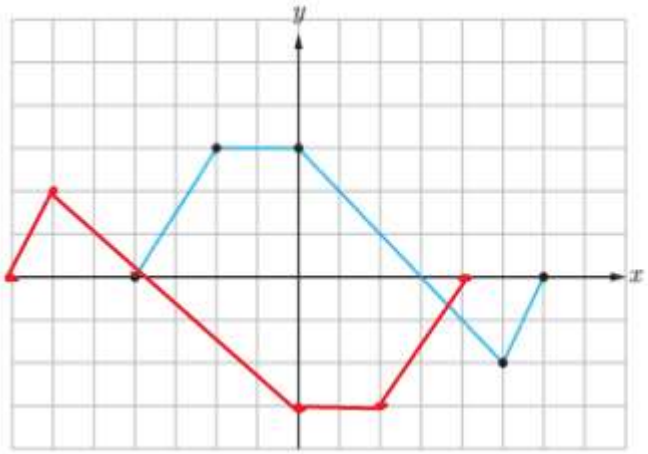
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

2 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(-x)$



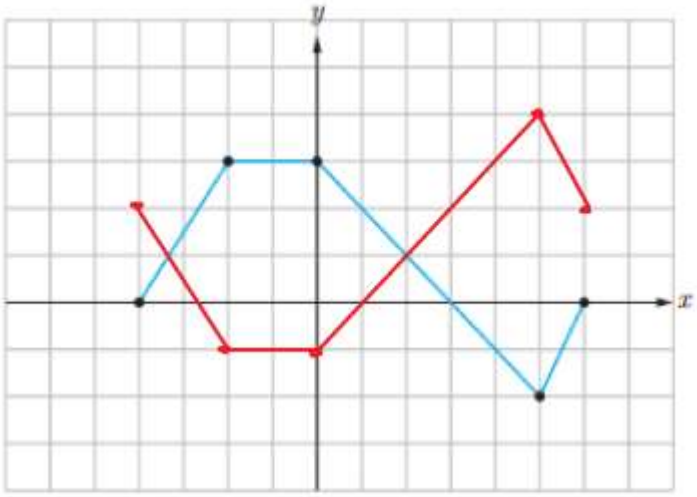
حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

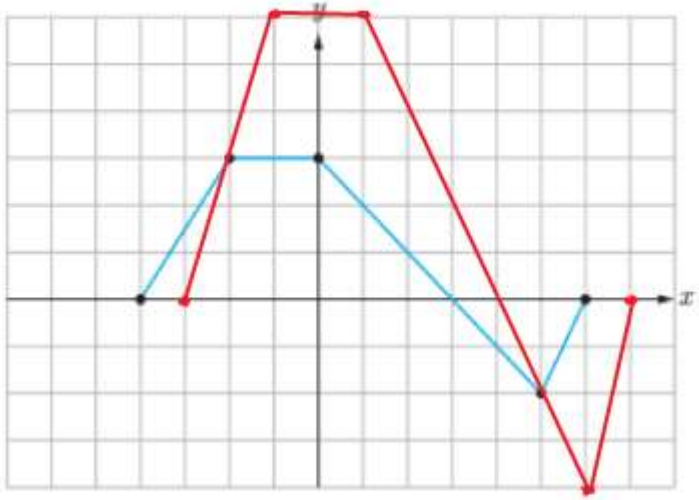
3 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

ب) $y = -f(x) + ۲$



ب) $y = ۲f(x-۱)$



حسابان دو

مدرس: مزبان حبیبی

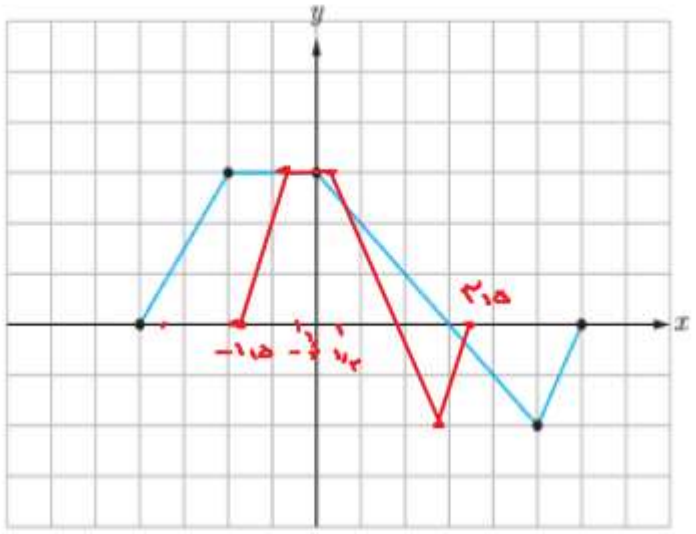
mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

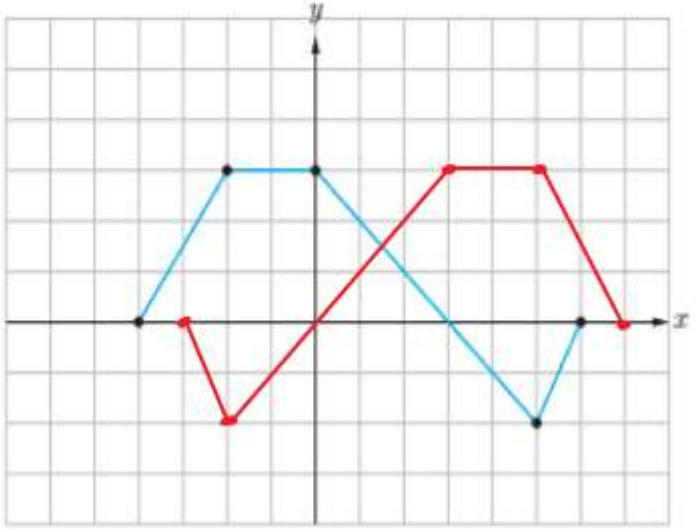
4 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

ت) $y = f(2x-1)$



ث) $y = f(3-x)$



حسابان دو

مدرس: مزبان حبیبی

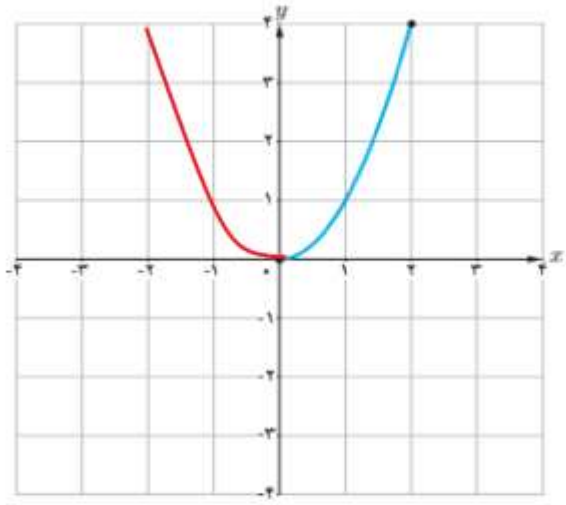
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

5 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

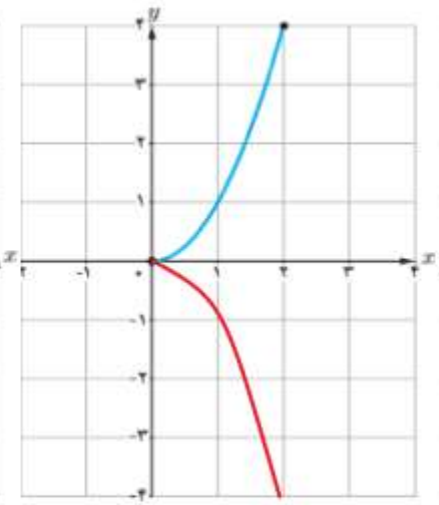
بسم الله الرحمن الرحیم

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

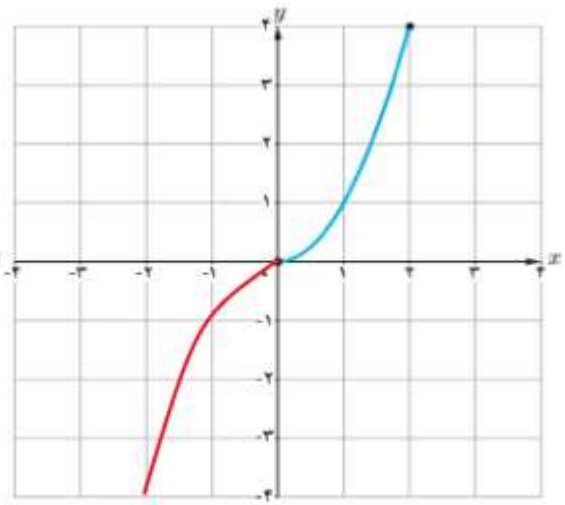
الف) $y = f(-x)$



ب) $y = -f(x)$



پ) $y = -f(-x)$

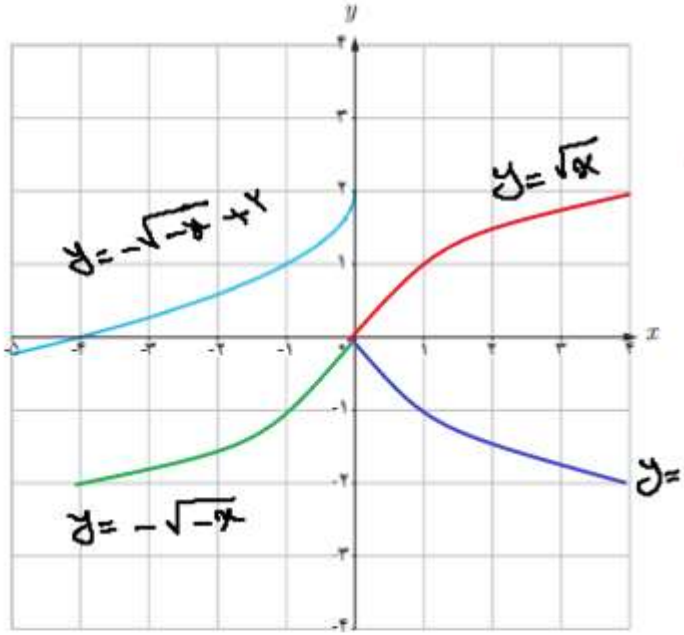


حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

6 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم



۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

۱) $y=\sqrt{x}$

۲) $y=-\sqrt{x}$

۳) $y=-\sqrt{-x}$

۴) $y=-\sqrt{-x}+2$

حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

7 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

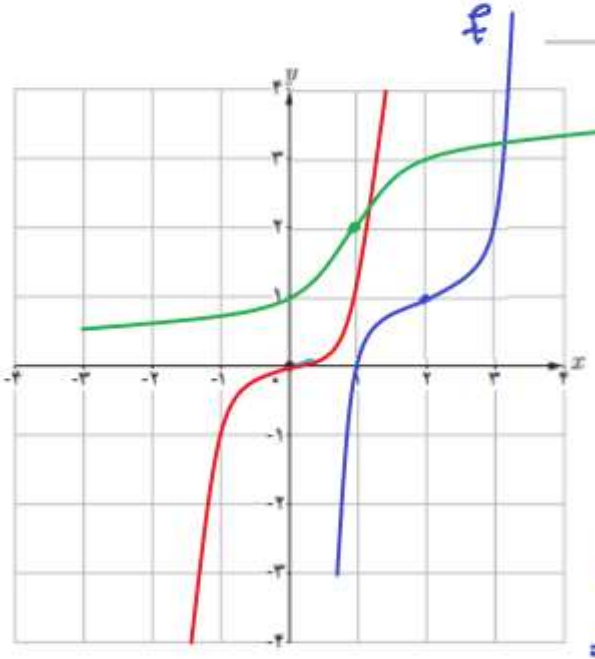
تمرین

صفحه ۲۱ حساب دو

۱ تابع $f(x) = (x-۲)^۳ + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.



چون f یک به یک است پس وارون پذیر است.

پ) ضابطه $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

$y = (x-۲)^۳ + ۱$ وارون $\Rightarrow x = (y-۲)^۳ + ۱$

$\Rightarrow x-۱ = (y-۲)^۳ \Rightarrow y-۲ = \sqrt[۳]{x-۱}$

$\Rightarrow y = \sqrt[۳]{x-۱} + ۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x-۱} + ۲$

حسابان دو

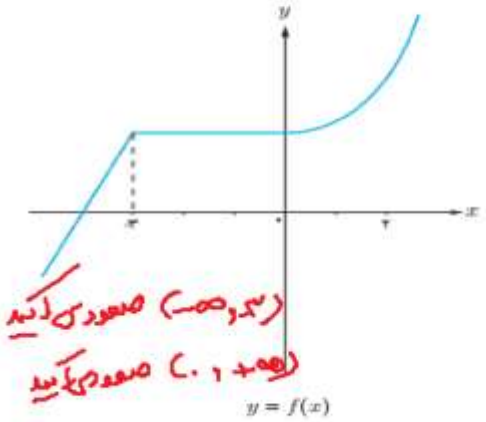
مدرس: مزبان حبیبی

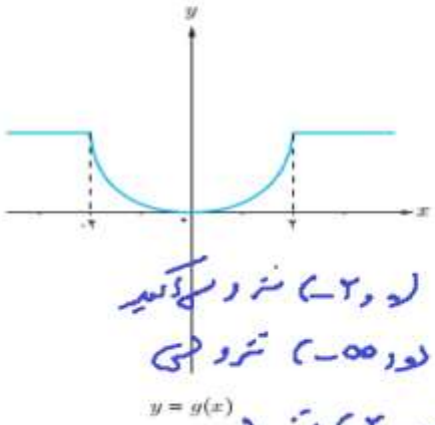
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

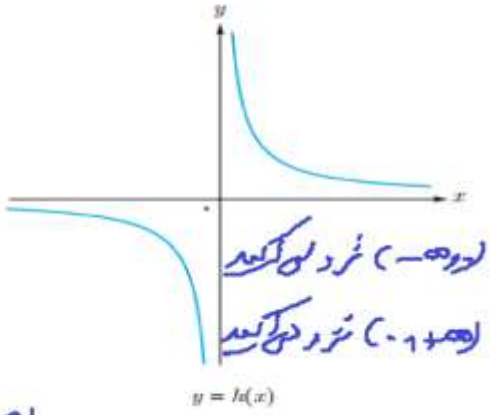
8 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.







الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

9 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

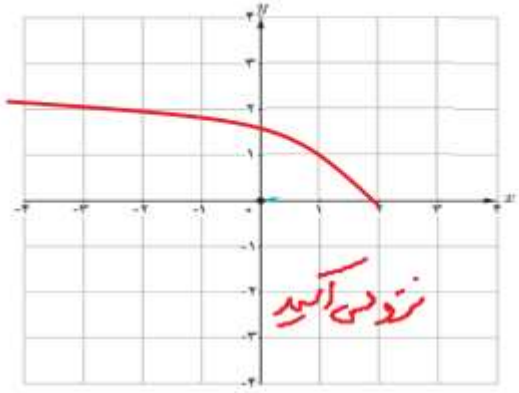
بسم الله الرحمن الرحیم

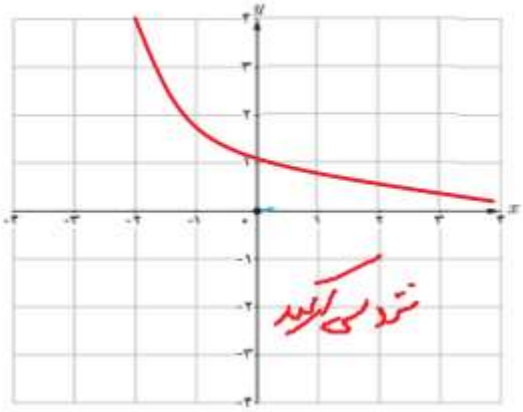
۲ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

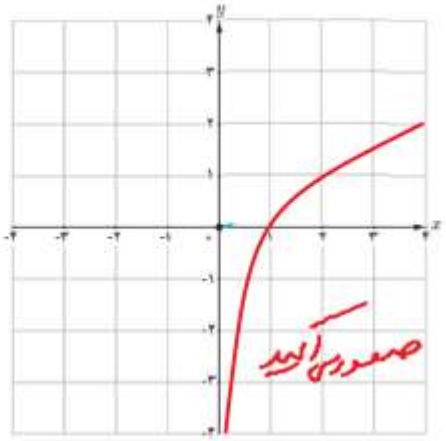
الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$

ب) $g(x)=۲^{-x}$

پ) $h(x)=\log_{۲} x$







حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

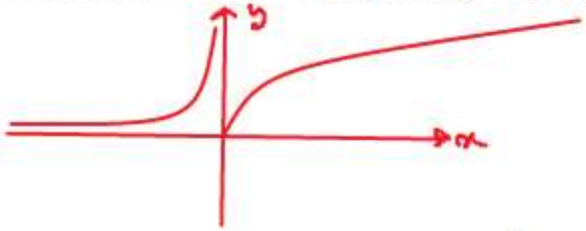
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

10 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۴ الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟ تابع ثابت

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هریک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.



$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$$

۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟ صرفاً کنید f و g روی I صعودی اکید هستند.

$a<b \Rightarrow f(a)<f(b), g(a)<g(b) \Rightarrow f(a)+g(a)<f(b)+g(b) \Rightarrow (f+g)(a)<(f+g)(b)$

در مورد $f-g$ حکم کلی وجود ندارد

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=6 \Rightarrow 8+4k+2=6 \Rightarrow 4k=-4 \Rightarrow k=-1$

حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

11 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=0 \Rightarrow 8+4a+2b+1=0$ ①

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=0 \Rightarrow -1+a-b+1=0 \Rightarrow a=b$ ②

$1,2 \Rightarrow 8+4a+2a+1=0 \Rightarrow 6a=-9 \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $x-1$

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

ب) x^6-1 با عامل $x+1$

$(x^6-1)=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

پ) x^5+32 با عامل $x+2$

$x^5+32=x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$.

$a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$ تناقض فرض خلف

ب) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}\le\frac{1}{64}$، حدود x را به‌دست آورید.

$2^{-(3x-2)}\le\frac{1}{2^6} \Rightarrow 2^{2-3x}\le 2^{-6} \Rightarrow 2-3x<-6$

$\Rightarrow 8<3x \Rightarrow \frac{8}{3}<x$

حسابان دو مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

12 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

1. تمرین: درجاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید:

الف)اگر باقی مانده تقسیم $f(x)=x^{۲}+k\,x-۱$ بر $(x+۱)$ برابر با ۲ باشد، مقدار k برابر ..... است.

ب)دوره تناوب تابع تانژانت برابر با ..... است.

پ) مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ در نقطه ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد ..... است.

ت) اگر تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه ..... است.

الف: 2 ب: π پ: 1 ت: مثبت یا صفر

2. تمرین: پاسخ کوتاه

الف) درجه تابع $f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۵}$ را مشخص کنید.

ب) در فاصله $]۰,۱[$ از بین دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=x^{۳}$ ، نمودار کدام تابع پایین تر قرار دارد؟

پ) نمودار تابع $y=-f(x)$ ، قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به کدام محور است؟

ت) تابع $h(x)=|x+۲|$ در چه بازه ای اکیداً صعودی است؟

الف: 7 ب: f پ: y ت: $[-2,+\infty)$

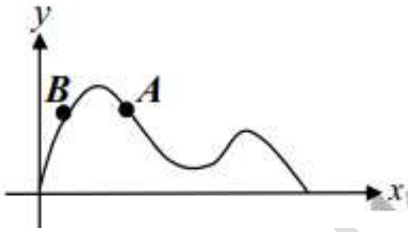
13 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

14 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

3. تمرین: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.

ب) نقاطی به فرم $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$ در دامنه تابع تانژانت قرار ندارند.



پ) حاصل $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.

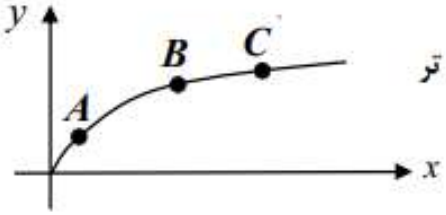
ت) در شکل رو به رو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.

الف: نادرست ب: درست پ: درست ت: نادرست

4. تمرین: درجاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید:

الف) دوره تناوب تابع $y=3\cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با ..... است.

ب) حاصل حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-2}$ برابر با ..... است.



پ) با توجه به شکل رو به رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ..... بزرگ تر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.

ت) نقطه ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است، نقطه ..... نام دارد.

5. تمرین: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیدا نزولی نیز می باشد.

ب) سرعت لحظه ای در $t=2$ برای متحرکی با معادله حرکت $f(t)=t^2+3t$ برابر ۷ است.

الف: نادرست ب: درست

6. تمرین: درجاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید:

الف) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر ..... است.

ب) حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x-5x^2)$ برابر با ..... است.

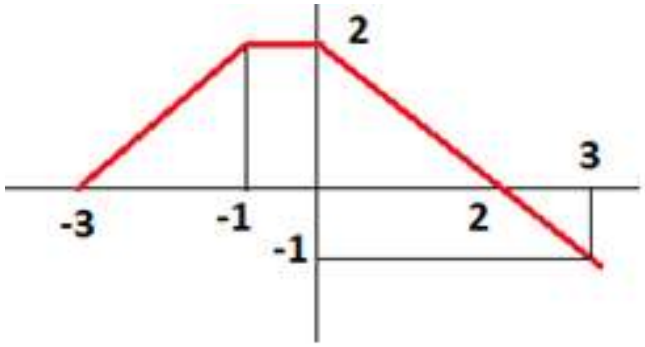
پ) اگر $f'(2)=-1$ و $g'(2)=3$، در این صورت $(2f+3g)'(2)$ برابر با ..... است.

ت) طول نقطه عطف تابع $f(x)=x^3-6x^2$ برابر ..... است .

الف: $\frac{8}{3}$ ب: $-\infty$ پ: 7 ت: 2

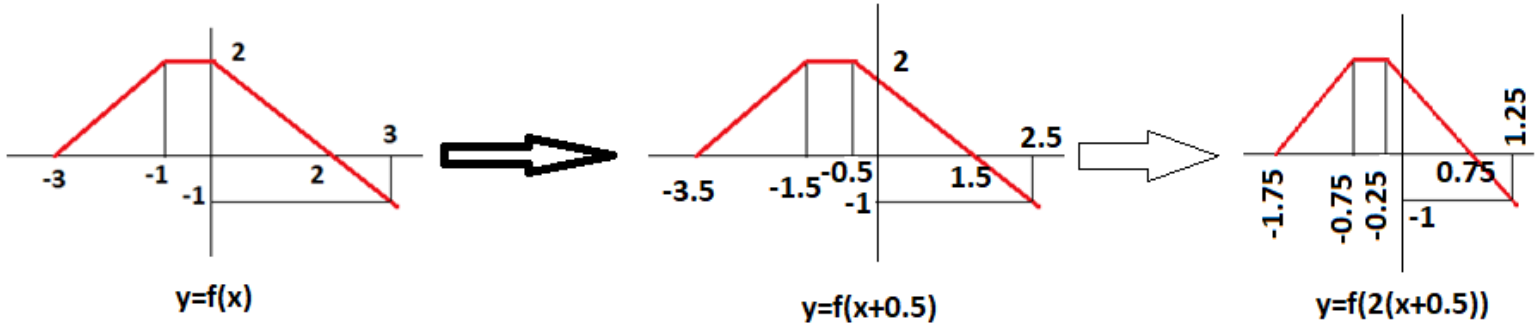
15 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

7. تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر است، نمودار تابع $y=f(2x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آنرا بیابید.



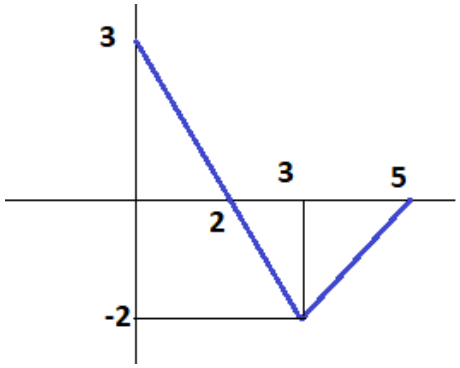
$$y=f(2x+1)=f(2(x+0.5))$$

$$y=f(x)\Rightarrow y=f(x+0.5)\Rightarrow y=f(2(x+0.5))$$



نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ ابتدا نمودار تابع f را با توجه به علامت کسر $\frac{b}{a}$، به اندازه $\frac{b}{a}$ به سمت راست یا چپ منتقل می کنیم و سپس طول های نقاط را بر a تقسیم می کنیم.

8. تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر است، نمودار تابع $y=f(3-x)+1$ را رسم کرده و دامنه و برد آنرا بیابید.

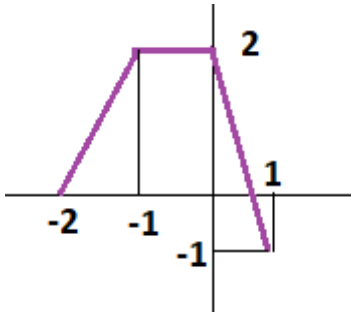


راهنمایی:

$$y=f(3-x)+1=f(-(x-3))+1$$

$$y=f(x)\Rightarrow y=f(x-3)\Rightarrow y=f(-(x-3))\Rightarrow y=f(-(x-3))+1$$

9. تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر است، نمودار تابع $y=2f(x-1)-1$ را رسم کرده و سپس دامنه و برد آنرا بیابید.

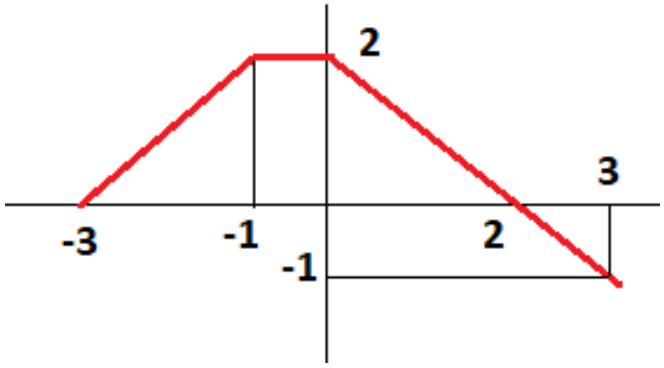


دکتر مزبان حبیبی

17 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

18 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

10. تمرین: نمودار تابع f به صورت زیر است، نمودار تابع $y=-2f(x-1)+1$ را رسم کرده و دامنه و برد آنرا بیابید.



11. تمرین: مقادیر a,b را چنان بیابید که چندجمله ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.

یادآوری: باقیمانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$

$$R=P(-1)=-1+a-b+1=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b\,(*)$$

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$R=P(2)=8+4a+2b+1=0\Rightarrow 4a+2b=-9\overset{*}{\Rightarrow}4a+2a=-9\Rightarrow a=\frac{-3}{2}\overset{*}{\Rightarrow}b=\frac{-3}{2}$$

12. اگر چندجمله ای x^2+ax-3 بر $x-2$ بخش پذیر باشد، باقیمانده تقسیم آن را بر $x+1$ بیابید.

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$R=P(2)=4+2a-3=0\Rightarrow 2a=-1\Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$

$$R=P(-1)=1-\frac{1}{2}(-1)-3=-\frac{3}{2}$$

13. تمرین: اگر چندجمله ای x^2+ax-3 بر $x+1$ بخش پذیر باشد، باقیمانده تقسین آن را بر $x-2$ بیابید.

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$

$$R=P(-1)=1-a-3=0\Rightarrow a=-2$$

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$R=P(2)=4+(-2)(2)-3=-3$$

دکتر مزبان حبیبی

19 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

14. تمرین: مقادیر a,b را چنان بیابید که چندجمله ای x^3+ax^2+b بر $x+1$ بخش پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x+2$ برابر 4 باشد.

$$x+1=0\Rightarrow x=-1$$

$$R=P(-1)=1+a+b=0\,(*)$$

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

$$R=P(2)=8+4a+b=4$$

$$\begin{cases}1+a+b=0\\8+4a+b=4\end{cases}\Rightarrow 7+3a=4\Rightarrow 3a=-3\Rightarrow a=-1\overset{(*)}{\Rightarrow}b=0$$

دکتر مزبان حبیبی

20 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

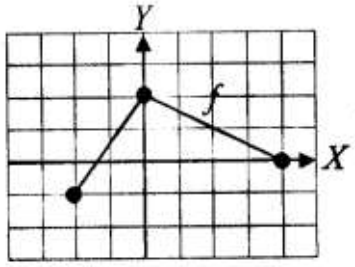
21 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

15. تمرین: نامعادله $\log(x+1)\le\log(2x-3)$ را حل کنید.

یادآوری: تابع $\log(x+1)\le\log(2x-3)$ را یک تابع لگاریتمی می گویند که صعودی و یا نزولی بودن آن به مقدار $\log(x+1)\le\log(2x-3)$ بستگی دارد. اگر $a>1$ آنگاه تابع صعودی اکید و اگر $0<a<1$ تابع نزولی اکید است.

$$\log(x+1)\le\log(2x-3)\Rightarrow\log_{10}(x+1)\le\log_{10}(2x-3)\overset{10>1}{\Rightarrow}(x+1)>(2x-3)\Rightarrow 4>x$$

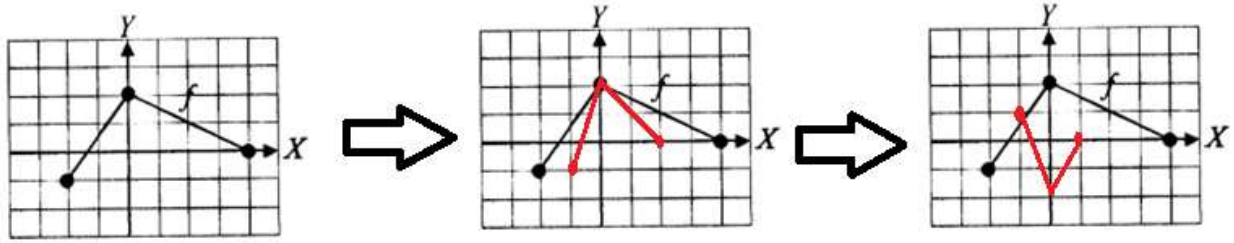
16. تمرین:



نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=-f(2x)$ را رسم کنید.

سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



y=f(x) y=f(2x) y=-f(2x)

$D_y=[-1,2], R_y=[-2,1]$

17. تمرین: چندجمله ای x^6-1 را بر حسب $x+1$ تجزیه کنید،

یادآوری:

$$x^n-y^n=(x-y).\left(x^{n-1}y^0+x^{n-2}.y^1+\cdots+x^0.y^{n-1}\right)$$

$$x^n-y^n=(x+y).\left(x^{n-1}y^0-x^{n-2}.y^1+\cdots+(-1)^{n+1}x^0.y^{n-1}\right)$$

و اگر n فرد باشد آنگاه

$$x^n+y^n=(x+y).\left(x^{n-1}y^0-x^{n-2}.y^1+\cdots+x^0.y^{n-1}\right)$$

جواب:

$$x^6-1=x^6-1^6=(x+y).\left(x^5y^0-x^4.y^1+x^3.y^2-x^2.y^3+x^1.y^4-x^0.y^5\right)$$

پایان

دکتر مزبان حبیبی

22 www.mezbanhabibi.ir +989176193511