سلام

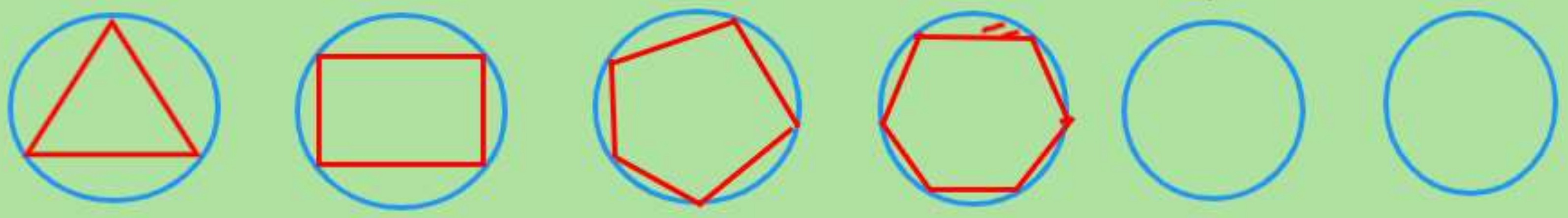
وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: فصل پنجم، حد و پیوستگی- حسابان یک یازدهم ریاضی

مثال ۱: چندضلعی‌های منتظم که در دایره‌ای به شعاع یک واحد محاط شده‌اند را در نظر بگیرید.



محیط مثلث < محیط چهارضلعی < محیط پنج‌ضلعی < محیط شش‌ضلعی < ... < محیط دایره = π

در شکل قبل :

۱- هرچه n بزرگتر باشد، مساحت n ضلعی محدب محاط شده، بیشتر است.

۲- هرچه n بیشتر باشد، مساحت n-ضلعی محدب، به مساحت دایره نزدیکتر است.

۳- هرچقدر بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی محاط شده را به عدد π (مساحت دایره) نزدیک کنیم به شرط اینکه n به اندازه کافی بزرگ باشد.

توجه: در مثال قبل، اگر $n=1000$ باشد آنگاه

$3{,}14157 \simeq$ محیط ۱۰۰۰ ضلعی منتظم محاطی در دایره

تذکر: این روش می‌تواند روش مناسبی برای محاسبه مقدار تقریبی عدد π باشد.

سوال: در مثال قبل آیا محیط چندضلعی‌ها با محیط دایره برابر می‌شود؟ خیر

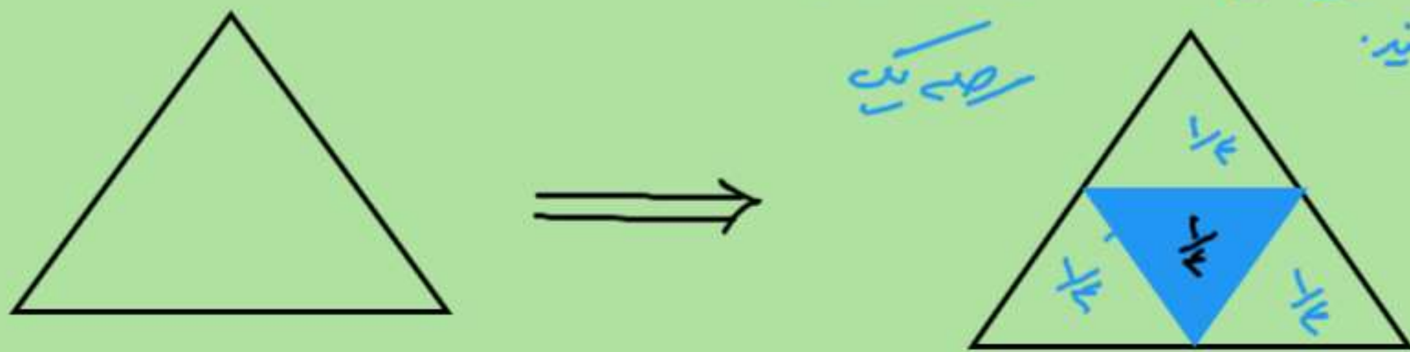
محیط دایره > محیط چندضلعی

مثال ۲: مثلث متساوی الاضلاعی با مساحت واحد را در نظر بگیرید.

مرحله شروع: مرحله صفر

وسط های اضلاع مثلث را به هم وصل کرده و مثلث میانه را حذف کنید:

مرحله یک

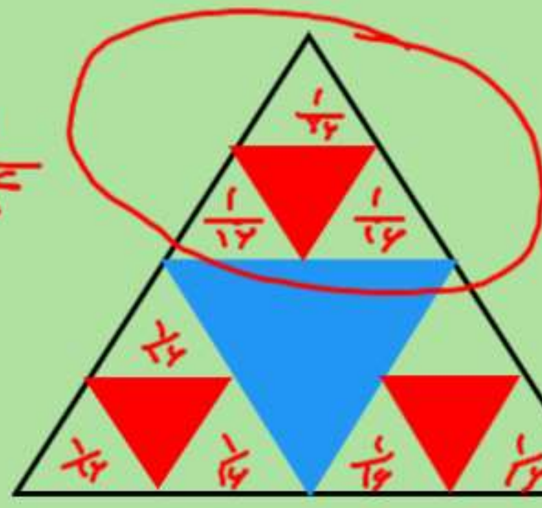


$S = 1$

$S_1 = \frac{3}{4}$

مرحله دوم :

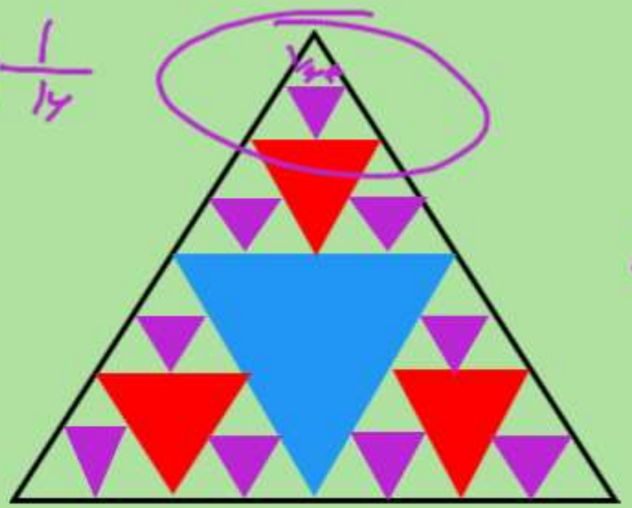
$\frac{1}{16} \Leftarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$



$S = 9\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

مرحله سوم :

$\frac{1}{64} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16}$



$S = 27\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

مرحله چهارم سهم باقیمانده چقدر است؟

$S_4 = 81\left(\frac{1}{256}\right) = \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$

حل :

$S=\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$ مساحت در مرحله ۴ام

آیا مساحت صفر خواهد شد؟ خیر

در مرحله هزارم مساحت چقدر است؟

$$S=\left(\frac{3}{4}\right)^{1000}\simeq 0/\underbrace{000\ldots0}_{\text{۱۲۴ تا صفر}}1$$

در مثال ۲ :

۱- هرچه شماره مرحله بیشتر شود، مساحت باقیمانده به صفر نزدیکتر است و مساحت حذف شده به یک نزدیکتر است.

۲- هرچه بخواهیم می‌توانیم مساحت باقیمانده را به صفر نزدیک کنیم، به شرط اینکه شماره مرحله به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود.

مثال ۳: تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ را در نظر بگیرید. $(1 \notin D_f)$

وقتی x به عدد یک نزدیک شود، رفتار تابع را بررسی کنید.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=x+1 \ , \ x\neq 1$$

$$f(x)=x+1 \ , \ x\neq 1$$

$f(x) = x+1 \quad , \quad x \neq 1$

حالت اول: $x>1$

x	۱ ←	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۱	۱٫۰۱	۱٫۱	۱٫۵	۲	۵	۱۰
$f(x)$	? ←	۲٫۰۰۰۱	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱	۲٫۵	۳	۶	۱۱

$f(x) \longrightarrow$ ۲

حالت دوم: $x<1$

۰	۰٫۵	۰٫۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹	۰٫۹۹۹۹	۰٫۹۹۹۹۹	→ ۱	x
۱	۱٫۵	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	۱٫۹۹۹۹	۱٫۹۹۹۹۹	→ ?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow$ ۲

در مثال قبل :

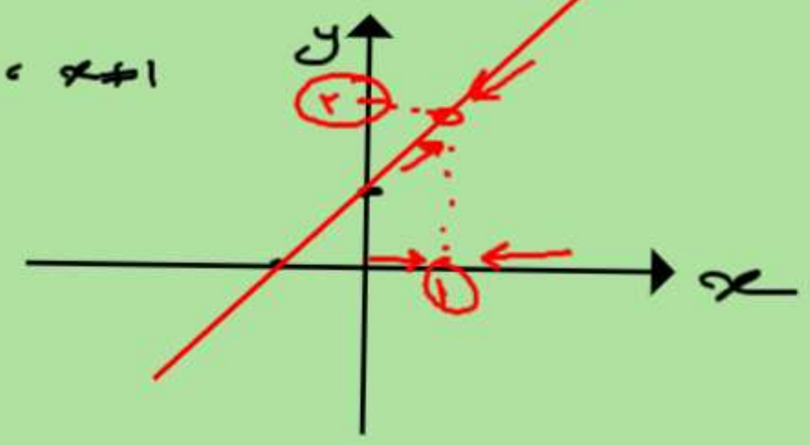
۱- مقادیر $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ ۲

۲- آیا مقادیر $f(x)$، برابر ۲ خواهد شد؟ خیر

۳- مقدارهای $f(x)$، تا چه مقدار می‌توانند به ۲ نزدیک شوند؟ هر مقدار لازم

توجه: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ بصورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1 \quad , \quad x\neq 1$$



مثال ۴: رفتار تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 5 & x=3\end{cases}$ را در همسایگی $x=3$ بررسی کنید.

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

حل:

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & x\neq 3\\ 5 & x=3\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\neq ۳ \\ ۵ & x=۳ \end{cases}$$

x	۳	←	۳,۰۰۰۰۱	۳,۰۰۰۱	۳,۰۰۱	۳,۰۱	۳,۱	۳,۵	۴
$f(x)$	?	←	۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱	۶,۵	۷

$f(x) \longrightarrow ۶$

۲	۲,۵	۲,۹	۲,۹۹	۲,۹۹۹	۲,۹۹۹۹	→	۳	x
۵	۵,۵	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	→	?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow ۶$

مثال ۵: رفتار تابع $f(x)=\begin{cases} x+4 & x>2 \\ 2x & x<2 \end{cases}$ را در همسایگی $x=2$ بررسی کنید.

x	۲	←	...	۲٫۰۰۰۱	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱	۲٫۵	۳
$f(x)$	؟	←		۶٫۰۰۰۱	۶٫۰۰۱	۶٫۰۱	۶٫۱	۶٫۵	۷

$f(x) \longrightarrow 6$

۱	۱٫۵	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	۱٫۹۹۹۹	→	۲	x
۲	۳	۳٫۸	۳٫۹۸	۳٫۹۹۸	۳٫۹۹۹۸	→	؟	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow 4$

$\lim \equiv \text{limit}$

تعریف:

فرض کنیم f یک تابع حقیقی است که در همسایگی $x=a$ تعریف شده است.

می‌گوییم وقتی x به سمت a میل می‌کند، تابع f حدی برابر l دارد و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

هرگاه مقادیر $f(x)$ بتوانند به اندازه کافی به l نزدیک شوند به شرط اینکه x به اندازه کافی به a نزدیک شود.

در مثال ۳:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

در مثال ۴:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

در شکل ۵ :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

تمرین ۶: با رسم جدول، بررسی کنید $\lim\limits_{x \to ۳} x^{۲}$ وجود دارد یا خیر؟

x	۳	$\longleftarrow$	۳,۰۰۰۱	۳,۰۰۱	۳,۰۱	۳,۱	۳,۵	۴
$f(x)$	?	$\longleftarrow$	۹,۰۰۰۶۰۰۰۱	۹,۰۰۶۰۰۱	۹,۰۶۰۱	۹,۶۱	۱۲,۲۵	۱۶

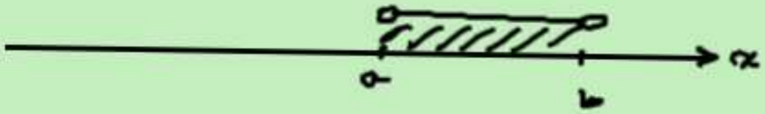
$f(x) \longrightarrow ۹$

۲	۲,۵	۲,۹	۲,۹۹	۲,۹۹۹	$\longrightarrow$	۳	x
۴	۶,۲۵	۸,۴۱	۸,۹۴۰۱	۸,۹۹۴۰۰۱	$\longrightarrow$	?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow ۹$

$\lim\limits_{x \to ۳} x^{۲} = ۹$

یادآوری:



$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$

مثال:

$(2.1,2.5)=\{x : x\in\mathbb{R},\ 2.1<x<2.5\}$

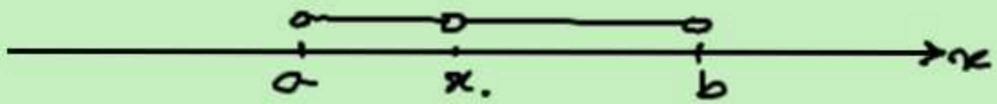
$2.2\in(2.1,2.5)$ و $2.8\notin(2.1,2.5)$

اگر $x_0\in(a,b)$ آنگاه بازه (a,b) را یک همسایگی برای x_0 می‌گویند.

مثال: $(2.1,2.5)$ یک همسایگی برای $x_0=2.2$ است.

$(2.1,2.5)$ همسایگی برای $x_0=2.8$ نیست.

یادآوری :



فرض کنیم (a,b) یک همسایگی برای x_0 باشد. $(x_0 \in (a,b))$

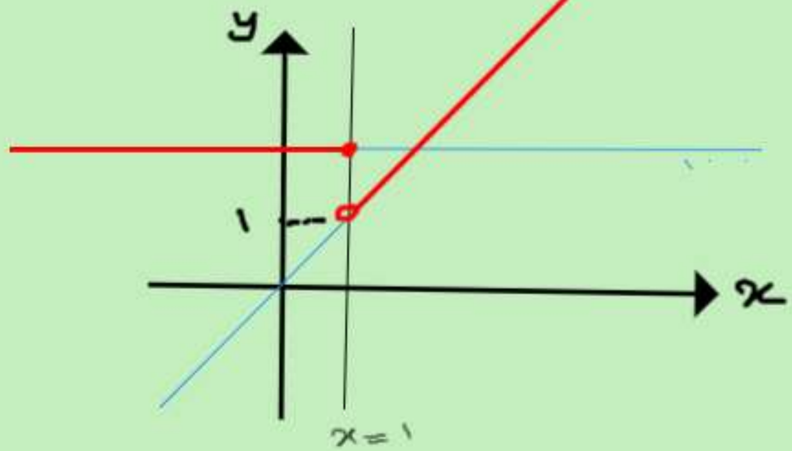
مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را یک همسایگی محذوف برای x_0 می‌گویند.

همسایگی چپ (a,x_0)

همسایگی راست (x_0,b)

توجه : $(a,b)-\{x_0\} = (a,x_0)\cup(x_0,b)$

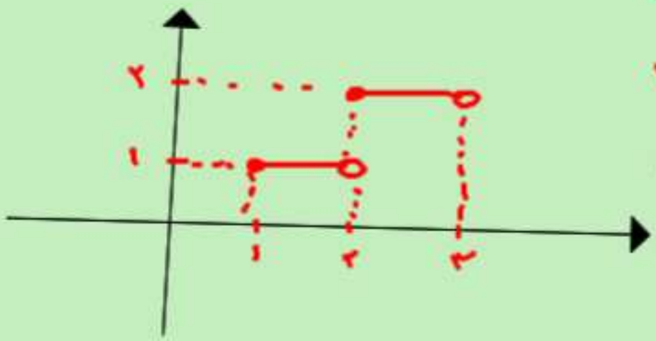
مثال ۱: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x\leq 1 \end{cases}$ و اطراف همسایگی $x=1$ رسم کنید:



$x\to 1^{+} \Rightarrow f(x)\longrightarrow 1$

$x\to 1^{-} \Rightarrow f(x)\longrightarrow 2$

مثال ۴: حد و پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در همسایگی $x=2$ بررسی کنید.



$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1$

$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2$

$$\begin{cases} x\to 2^+ \Rightarrow f(x)\to 2 \\ x\to 2^- \Rightarrow f(x)\to 1 \end{cases}$$

یادآوری: $m\in \mathbb{Z}$:

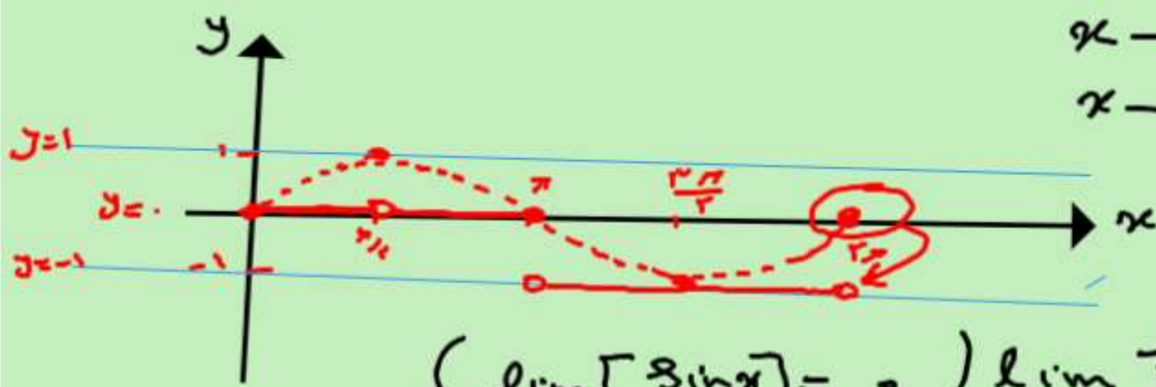
$m\le x<m+1 \Rightarrow [x]=m$

$[7.9]=7\ ,\ [\pi]=3\ ,\ [-4]=-4\ ,\ [5]=5$

مثال ۳: رفتار حد تابع $f(x)=[\sin x]$ را در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید

$$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ \Rightarrow f(x) \to 0$$

$$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow f(x) \to 0$$



یعنی: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x]=0\right)$

تعریف حد چپ و حد راست :

۱- فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست $x=a$ تعریف شده است.

می‌گوییم حد راست تابع f در $x=a$ برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ ،

هرگاه مقادیر $f(x)$ به هر اندازهٔ دلخواه بتوانند به l نزدیک شوند به شرط آنکه

x به اندازهٔ کافی از راست $(x>a)$ به a نزدیک شود.

۲- فرض کنیم f در یک همسایگی چپ $x=a$ تعریف شده است.
می‌گوییم حد چپ f در $x=a$ برابر l_2 است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x)=l_2$
هرگاه مقادیر $f(x)$ بتوانند به اندازه دلخواه به l_2 نزدیک شوند به شرط اینکه
x به اندازه کافی از چپ ($x<a$) به a نزدیک شود.

مثال ۴: با توجه به شکل ۱

$$f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

با توجه به شکل ۲:

$$f(x)=[x]$$

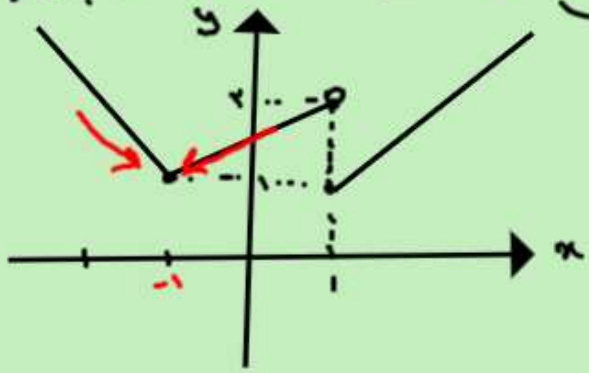
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

با توجه به مثال ۳: $f(x)=[\sin x]$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}[\sin x]=0 \quad , \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}[\sin x]=0$$

تذکر: اگر حد چپ و حد راست تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند آنگاه تابع f در آن نقطه حد دارد و برعکس.

مثال ۵ : نمودار تابع f بصورت زیر است. حدهای خواسته شده را در صورت وجود بیابید.



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = ۱$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = ۲$$

$\lim_{x\to 1} f(x) =$ وجود ندارد

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = 1 \ , \ \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

تذکر:

اگر در یک همسایگی راست $x=a$ دو تابع f و g برابر باشند آنگاه حد راست آنها در $x=a$ در صورت وجود با هم برابرند.

اگر در یک همسایگی چپ $x=a$ دو تابع f و g با هم برابر باشند آنگاه حد چپ آنها در $x=a$ در صورت وجود برابرند.

مثال ۶: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$ را در صورت وجود بیابید.

$$x\to 0^+ :\quad 0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Longrightarrow f(x)=\frac{[x]}{x}=0 \quad 0<x<1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=0$$

مثال ۷: $g(x)=\frac{|x|}{x}$:

$$x>0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow g(x)=\frac{x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

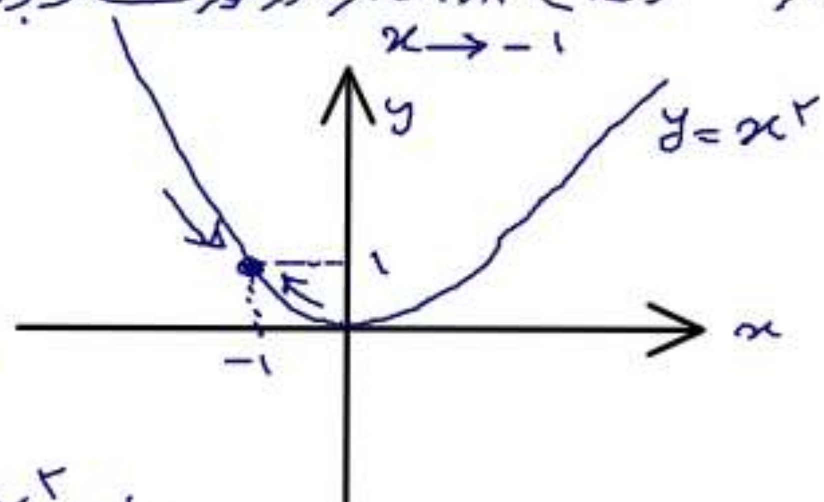
$$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow g(x)=\frac{-x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=$$ وجود ندارد

یادآوری:

اگر تابع f در همسایگی $x=a$ حد راست و حد چپ برابر داشته باشد،
آنگاه می‌گوییم در این نقطه حد دارد.

مثال: مقدار $\lim_{x\to -1}(x^2)$ را در صورت وجود بیابید.

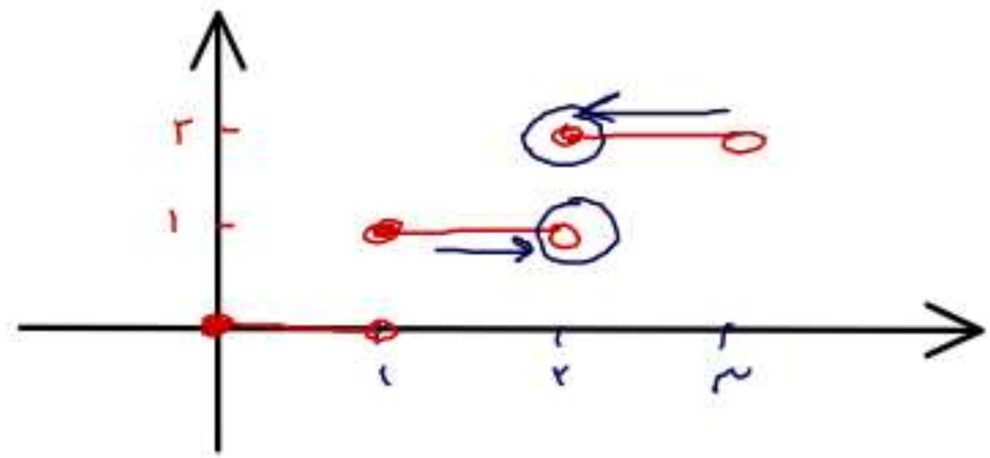


$\lim_{x\to(-1)^+} x^2=1$

$\lim_{x\to(-1)^-} x^2=1$

$\lim_{x\to -1} x^2=1$

مثال: حد $\lim_{x\to 2}[x]$ را در صورت وجود بیابید.



$0 \le x < 1 \Rightarrow [x]=0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x]=1$

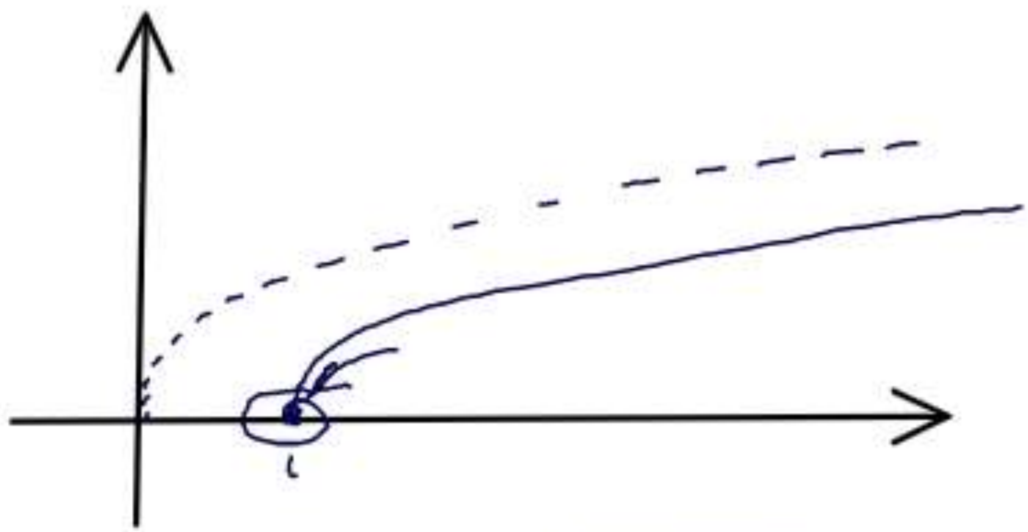
$2 \le x < 3 \Rightarrow [x]=2$

$\lim_{x\to 2^+}[x]=2$

$\lim_{x\to 2^-}[x]=1$

$\lim_{x\to 2}[x]=$ وجود ندارد

مثال: حد $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ را در صورت وجود تعیین کنید.



$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=$$ وجود ندارد

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}=$$ وجود ندارد

قضیه :

الف) اگر $c \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a} c = c$

یعنی: حد تابع ثابت، همان مقدار ثابت است.

مثال: $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$ و $\lim\limits_{x\to \pi} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

ب) حد تابع همانی: اگر $f(x)=x$ یک تابع همانی روی اعداد حقیقی باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$

مثال: $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ و $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} x = \sqrt{5}$

قضیه: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = M+L$

ب) $\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = M-L$

ج) $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = M\cdot L$

د) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{M}{L} \quad (L\neq 0 \,,\, g(x)\neq 0)$

مثال :

$$1)\ \lim_{x\to 5} 3x^2 = \lim_{x\to 5} 3 \times \lim_{x\to 5} x^2 = 3\times 25 = 75$$

$$2)\ \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x+1)}{\lim_{x\to 1}(x^2+1)} = \frac{3}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)} = \frac{4}{5}$$

$$4)\ \lim_{x\to 2} (x - x^3) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} x^3 = 2 - 8 = -6$$

مثال :

1) $\lim\limits_{x\to 5} 3x^2 = \lim\limits_{x\to 5} 3 \times \lim\limits_{x\to 5} x^2 = 3\times 25 = 75$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)} = \dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)} = \dfrac{4}{9}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} (x - x^3) = \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2 - 8 = -6$

تذکر ۱: اگر $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

مثال:

1) $\lim_{x\to 3}(x^3+2x-1)=3^3+2(3)-1=27+6-1=32$

2) $\lim_{x\to 1}(2x^2-7x+1)=2(1)^2-7(1)+1=-4$

تذکر ۲: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه:

۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$

۲) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt{L} \quad (L>0)$

(توجه: اگر $L=0$ و $f(x)\geq 0$ رابطه بالا برقرار است.)

۳) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \dfrac{1}{L} \quad (L\neq 0)$

۴) $\lim\limits_{x\to a} \left(-f(x)\right) = -\lim\limits_{x\to a} f(x) = -L$

مثال :

۱) $\lim_{x\to 1}(x^2+1)^5 = \left(\lim_{x\to 1}(x^2+1)\right)^5 = 2^5 = 32$

۲) $\lim_{x\to 7}\dfrac{1}{3x-1} = \dfrac{1}{\lim_{x\to 7}(3x-1)} = \dfrac{1}{20}$

۳) $\lim_{x\to 2}\sqrt{5x-1} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(5x-1)} = \sqrt{9} = 3$

۴) $\lim_{x\to 1}\left(-\sqrt{5x}\right) = -\lim_{x\to 1}\sqrt{5x} = -\sqrt{5}$

حد توابع مثلثاتی :

قضیه :

1) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$

2) $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

3) $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \qquad a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

4) $\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a \qquad a \neq k\pi$

مثال :

$$1)\ \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x}{2\sin x + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x \to \pi/6} \sin^3 x = \left(\lim_{x \to \pi/6} \sin x\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$3)\ \lim_{x \to \pi/4} (\sin x - \cos x) = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$4)\ \lim_{x \to \pi/4} 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین — صفحه ۱۳۹ حسابان یک

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = (\sqrt{9}-9)^3 = -216$

ب) $\lim_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = 6-4+5 = 7$

پ) $\lim_{x\to -\frac{5}{3}}\frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^2+1)} = \frac{(-\frac{5}{3}+\pi)(3(-\frac{5}{3})+5)}{(3(-\frac{5}{3})+6)((-\frac{5}{3})^2+1)} = 0$

ت) $\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{0}{0+1} = 0$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{x-\pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi} = 0$

ث) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})+6(\frac{1}{2})} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

آماده و ارسال مدرس: مزبان حبیبی
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x^2-1}=4$.

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{3}=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=12$$

ثابت: $g(x)=12$

$g(x)=3x^2$

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-L\big)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} L \rightarrow \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\big(f(x)-L\big)=0$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

یادآوری:

اگر f یک چندجمله‌ای باشد و $f(a)=0$ آنگاه

در تجزیه f عامل $(x-a)$ ظاهر می‌شود.

مثال:

$$f(x)=x^2-5x+6$$

$$f(2)=2^2-5(2)+6=4-10+6=0$$

$$f(2)=0$$

$$f(x)=(x-2)(x-3)$$

یادآوری:

هر عبارت چندجمله‌ای درجه n، حداکثر n عامل درجه اول در تجزیه آن وجود دارد.

مثال: $x^5-13x^3+36x = x.(\underbrace{x^4-13x^2+36}_{\text{جمع}\ \ \text{ضرب}})$

$= x.(x^2-4).(x^2-9)$

$= x.(x-2).(x+2).(x-3).(x+3)$

مثال :

$$x^4 + x^2 - 20 = (x^2 - 4)\cdot(x^2 + 5)$$

جمع ضرب

$$= (x - 2)\cdot(x + 2)\cdot(x^2 + 5)$$

تذکر:

اگر f و g چندجمله‌ای باشند و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$

آنگاه با تجزیه f و g حتماً عامل $(x-a)$ هم در صورت

و هم در مخرج ظاهر خواهد شد.

مثال ۱:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3^2-3}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{1}=6$$

$$x\to 3 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow x-3\neq 0$$

توجه: $\frac{a.b}{a.c}=\frac{b}{c}\ ,\ a\neq 0$

مثال ۲:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{1^2+1-2}{1^2-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2\overset{\text{جمع}}{+x}\overset{\text{ضرب}}{-2}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

$$x\to1\Rightarrow x\neq1\Rightarrow x-1\neq0$$

مثال ۳:

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-x-20}=\frac{5^2-25}{5^2-5-20}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-x-20}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)\cdot(x+4)}=\lim_{x\to5}\frac{x+5}{x+4}=\frac{10}{9}$$

$$x\to5\Rightarrow x\neq5\Rightarrow x-5\neq0$$

مثال ۴:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2-20}{x^4-16}=\frac{2^4+2^2-20}{2^4-16}=\frac{16+4-20}{16-16}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2-20}{x^4-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5)(x^2-4)}{(x^2-4).(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5).\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}(x^2+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2+4}=\frac{9}{8}$$

$x\to 2 \Rightarrow x\neq 2 \Rightarrow (x-2)\neq 0$ عمل مجاز

مثال ۶:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{3^2 - 6(3) + 9}{3^2 - 9} = \frac{9 - 18 + 9}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x-3)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$$

$$x \to 3 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow x - 3 \neq 0$$

تذکر: اگر حد مسئله رادیکالی بوده و $\frac{0}{0}$ شود، ابتدا باید

تکلیف رادیکال را روشن کرد (گویا کنیم)

مثال ۷:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{\sqrt{1+3}-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{۱}{۴}$$

$$x\to 1\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow x-1\neq 0$$

حل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}=\frac{2^2-4}{\sqrt{2(2)+5}-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}\times\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}{\underbrace{(2x+5)-9}_{2x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2}$$

$$=\frac{4\times 6}{2}=12$$

$$x\to 2\Rightarrow x\neq 2\Rightarrow (x-2)\neq 0$$

تذکر : اگر x برحسب رادیان باشد آنگاه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

مثال ۹:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\frac{\sin(0)}{5(0)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3x}{5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

نکته:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{(nx)}=\frac{m}{n}$$

$\cos 0 = 1$ و $1-\cos u = 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}$$

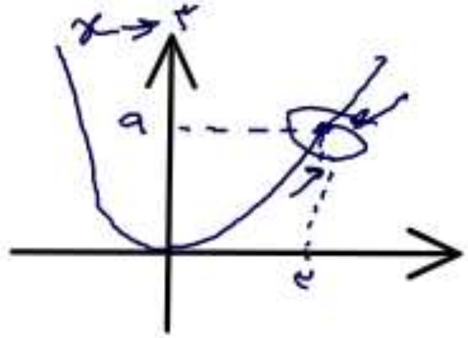
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\lim_{x\to}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

یادآوری ۱:

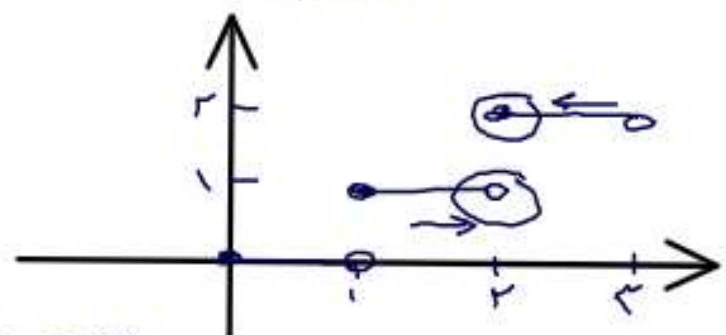
اگر تابع f در $x=a$ حدهای چپ و راست برابر داشته باشد آنگاه در این نقطه حد دارد.

مثال - حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

۱) $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$



۲) $\lim_{x\to 2} [x] =$ وجود ندارد

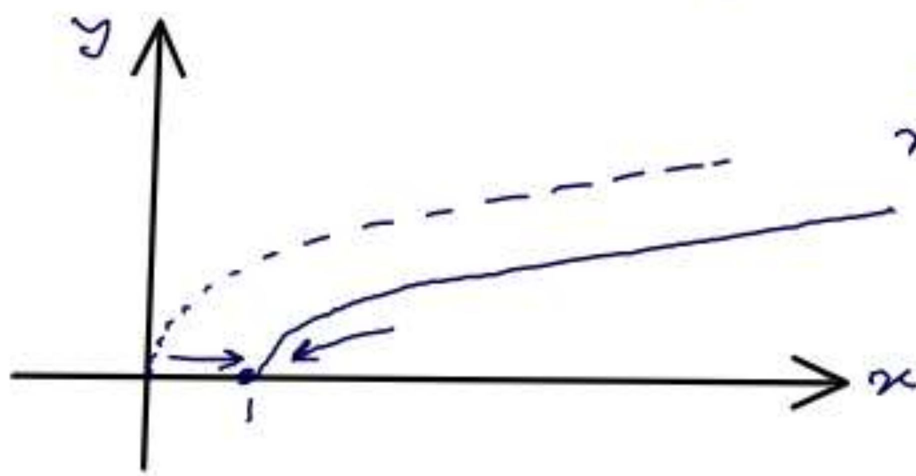


$\lim_{x\to 2^+} [x] = 2$, $\lim_{x\to 2^-} [x] = 1$

یادآوری ۲:

اگر تابع f در همسایگی راست یا چپ $x=a$ تعریف نشده باشد، آنگاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: حد $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ را در صورت وجود بیابید.



$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$$

$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ وجود ندارد

یادآوری ۳:

اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ و f و g چندجمله‌ای باشند آنگاه

برای رفع ابهام باید f و g را تجزیه کرد و در این حالت

حتماً $(x-a)$ در صورت و مخرج ظاهر می‌شود.

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{4-4}{4+2-6}=\frac{0}{0}$$ مبهم

(رفع ابهام) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}=\frac{4}{5}$$

$$x\to 2 \Rightarrow x\neq 2 \Rightarrow x-2\neq 0$$

تعریف پیوستگی :

تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌گویند اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

و $f(a)$ موجود و باهم برابر باشند.

یعنی :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

توجه: اگر تابعی پیوسته نباشد آنگاه تابع را ناپیوسته می‌نامیم.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=(x-2)[x]$ را در $x=2$ و $x=1$ بررسی کنید.

$x=2$:

$$f(2)=(2-2)[2]=0\times 2=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=(2^+-2)\times[2^+]=0\times 2=0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=(2^--2)\times[2^-]=0\times 1=0$$

تابع $f(x)=(x-2)[x]$ در $x=2$ پیوسته است.

$x=1$: $f(1)=((1-2)[1]=-1\times 1=-1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=(1^+-2)\times[1^+]=-1\times 1=-1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=(1^--2)\times[1^-]=-1\times 0=0$$

ناپیوسته است

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 2 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

مقدار تابع: $f(2)=2^2-1=3$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \overset{x>2}{=} \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1)=3$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-1)=3$

تابع f در $x=2$ پیوسته است.

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>2 \\ 3 & x=2 \\ x^3-5 & x<2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f(2)=3$$

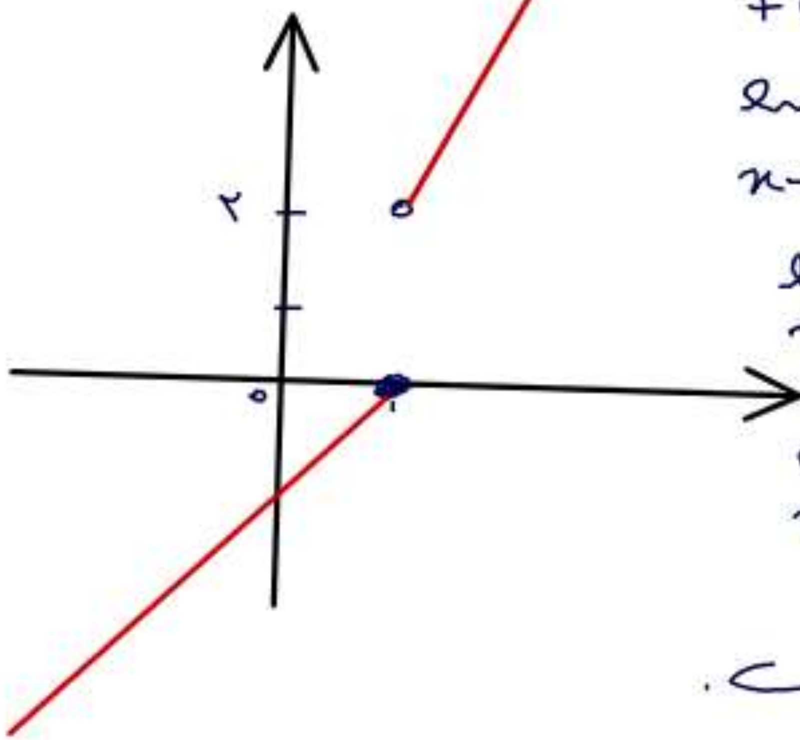
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} (x^3-5) = 8-5=3$$

تابع f در $x=2$ ناپیوسته است.

توجه: تابع f در $x=2$ ناپیوسته است اما از چپ پیوسته است.
(پیوستگی چپ دارد)

تمرین: با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ x-1 & x\le 1\end{cases}$ ، پیوستگی این تابع را در $x=1$ بررسی کنید.



$f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ وجود ندارد

تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

تعریف:

۱) تابع f را در $x=a$ از راست پیوسته می‌گویند اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

۲) تابع f را در $x=a$ از چپ پیوسته می‌گویند اگر

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f(2)=[2]=2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=[2^+]=2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=[2^-]=1$$

تابع f در $x=2$ ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد.

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & , \quad x\neq 1 \\ 2 & , \quad x=1 \end{cases} \qquad , \ x=1$$

$$f(1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

تابع در $x=2$ نه پیوسته است و نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

توجه

$$|x-1|=\begin{cases} (x-1) & x\to 1^+ \\ -(x-1) & x\to 1^- \end{cases}$$

تعریف: پیوستگی در بازه

۱) تابع f را در بازه (a,b) پیوسته می‌گوییم اگر در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

۲) تابع f را در بازه $[a,b]$ پیوسته می‌گوییم هرگاه در بازه (a,b) پیوسته باشد و در $x=a$ از راست و در $x=b$ از چپ پیوسته باشد.

ت.ج ۱: توابع چندجمله‌ای همیشه پیوسته‌اند.

۲) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برای $x>0$ پیوسته است.
در $x=0$ فقط پیوستگی راست دارد.

۳) تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ فقط در $x=-\dfrac{d}{c}$ ناپیوسته است.

۴) دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ همواره پیوسته‌اند.

تذکر :

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و تابع f در همه نقاط پیوسته باشد آنگاه

می‌گوییم f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

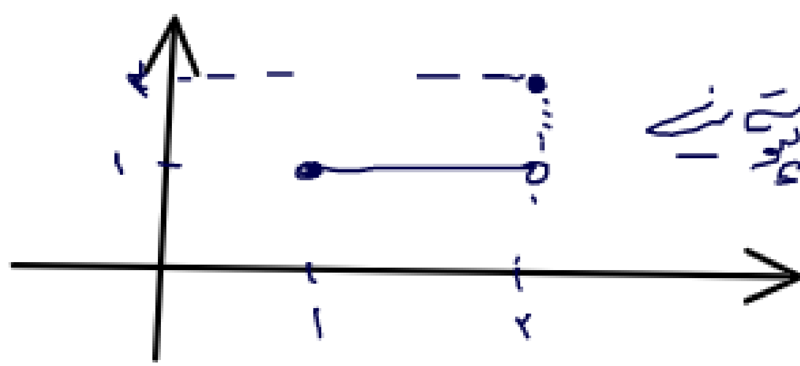
مثال: توابع $y=x^2$ و $y=\sin x$ و $y=\cos^2 x$

روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

تذکر: اگر تابع f در یک نقطه از بازه ناپیوسته باشد می‌گوییم روی آن بازه ناپیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=[x]$ روی بازه $(1,2)$ پیوسته است

اما روی بازه $[1,2]$ ناپیوسته است



در $x=2$ از چپ پیوسته نیست

تمرینات کتاب ریاضی ۲ صفحه ۱۴۲ حل شود.

تمرین: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+3 & x>2 \\ 5 & x=2 \\ x^2+b & x<2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد

آنگاه a و b را بیابید

$$\left.\begin{aligned} & f(2)=5 \\ & \lim_{x\to 2^+} f(x)=2a+3 \\ & \lim_{x\to 2^-} f(x)=4+b \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{در } x=2 \text{ پیوسته}} 5=2a+3=4+b$$

$$4+b=5 \Rightarrow b=1$$

$$2a+3=5 \Rightarrow a=1$$

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین

صفحه ۴۳ ریاضی دو

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x)=2x+1 \ , \quad g(x)=2x+1 \quad x\neq 2 \ , \quad h(x)=\begin{cases} 2+x & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$f(2)=2(2)+1=5$ ، $g(2)=$ وجود ندارد ، $h(2)=3$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 4+1=5$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 4+1=5$

$\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2+x) = 4$

چون $g(2)$ وجود ندارد پس g در $x=2$ ناپیوسته است.

چون $\lim\limits_{x\to 2} h(x) \neq h(2)$ پس h در $x=2$ ناپیوسته است.

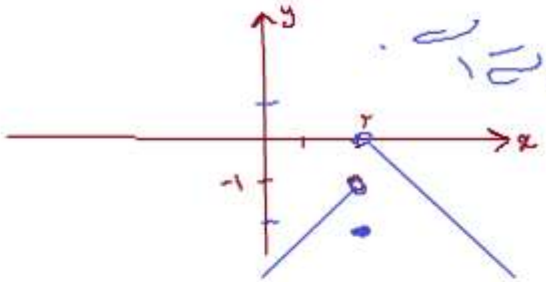
پ) کدام تابع در $x=2$ پیوسته است؟ تابع f چون $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در $x=۲$ ناپیوسته است و در بقیه نقاط پیوسته است.

۳ توابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳ \\ ۶ & x=۳ \end{cases}$ و $g(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=۳$ بررسی کنید

چون $g(۳)$ وجود ندارد پس g در $x=۳$ ناپیوسته است.

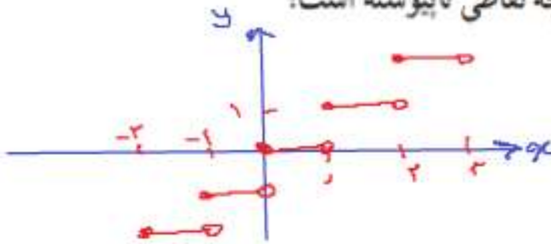
$$\lim_{x\to ۳} f(x) = \lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶=f(۳)$$ پس f در $x=۳$ پیوسته است

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در نقاط صحیح ناپیوسته است (پیوستگی راست دارد)

در نقاط غیر صحیح پیوسته است.

۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & x\le 0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

$$f(0) = -2(0)+2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-2x+2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+2) = 2$$

$\Rightarrow$ تابع f در $x=0$ پیوسته است

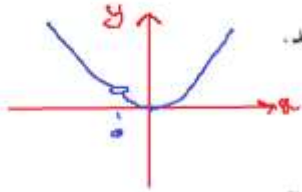
در نقاط دیگر پیوسته است چون چندجمله‌ای‌ها روی R پیوسته‌اند.

مدرس: مزبان حبیبی

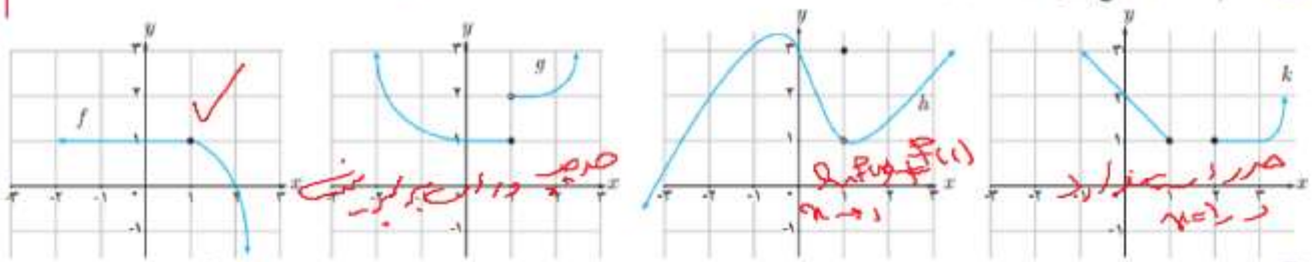
بسم الله الرحمن الرحیم

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x=1\\ x^2 & x\neq 1\end{cases}$$



۷ کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟



۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases}6t+4 & 0\le t<1\\ 2t+10 & 1\le t\le 10\end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$f(\tfrac{1}{2})=6\times(\tfrac{1}{2})+4=7 \qquad \text{۶ ماه} \longrightarrow \tfrac{6}{12}=\tfrac{1}{2}\ \text{سال}$$

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

$f(2)=14$

$f(5)=20$

ب) آیا f در بازهٔ $[0,10]$ پیوسته است؟

خیر — در $x=1$ ناپیوسته است

$\lim_{t\to 1^+} f(t)=12 \neq \lim_{t\to 1^-} f(t)=10$

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

پایان