سلام

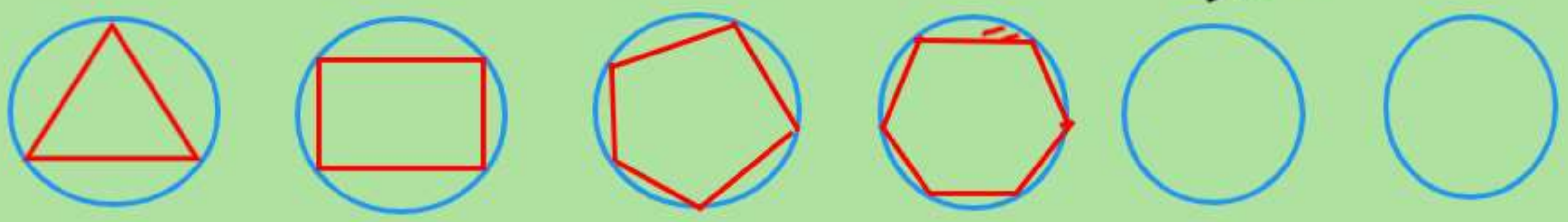
وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: تدریس و حل تمرین فصل پنجم، حد و پیوستگی- حسابان یک یازدهم ریاضی

مثال ۱: چندضلعی‌های منتظم که در دایره‌ای به شعاع یک واحد محاط شده‌اند را در نظر بگیرید.



π = محیط دایره > ... > محیط شش ضلعی > محیط پنج ضلعی > محیط چهارضلعی > محیط مثلث

در شکل قبل :

۱- هرچه n بزرگتر باشد، مساحت n ضلعی محدب محاط شده، بیشتر است .

۲- هرچه n بیشتر باشد، مساحت n-ضلعی محدب، به مساحت دایره نزدیکتر است .

۳- هرقدر بخواهیم می‌توانیم مساحت چندضلعی محاط شده را به عدد π (مساحت دایره) نزدیک کنیم به شرط اینکه n به اندازه کافی بزرگ باشد .

توجه: در مثال قبل به‌ازای $n=1000$ با شکل آ نگاه.

محیط ۱۰۰۰ ضلعی منتظم محاط در دایره $\simeq$ ۳٫۱۴۱۵۷

تذکر: این روش می‌تواند روش مناسبی برای محاسبه مقدار تقریبی عدد π باشد.

سوال: در مثال قبل آیا محیط چندضلعی‌ها با محیط دایره برابر می‌شود؟ خیر

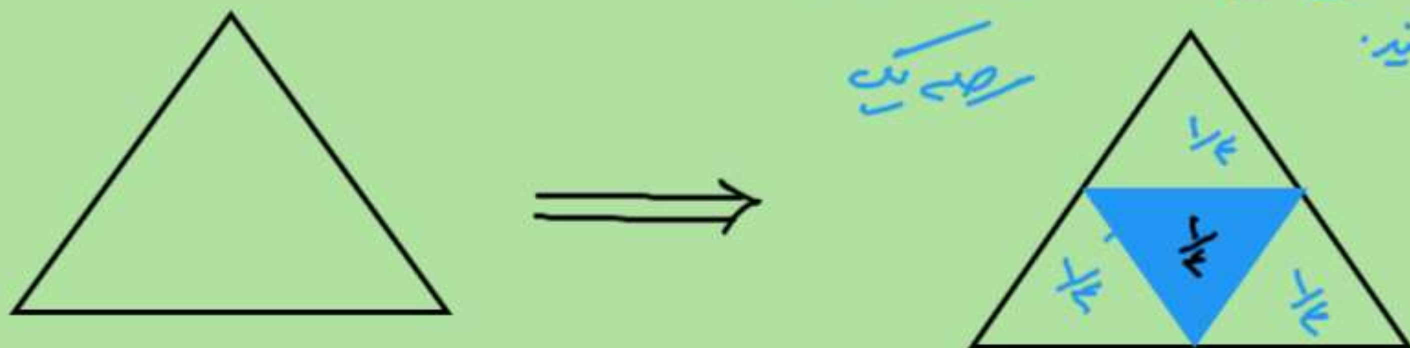
محیط دایره > محیط چندضلعی

مثال ۲: مثلث متساوی‌الاضلاعی با مساحت واحد را در نظر بگیرید.

مرحله شروع: مرحله صفر

وسط‌های اضلاع مثلث را به هم وصل کرده و مثلث میانی را حذف کنید:

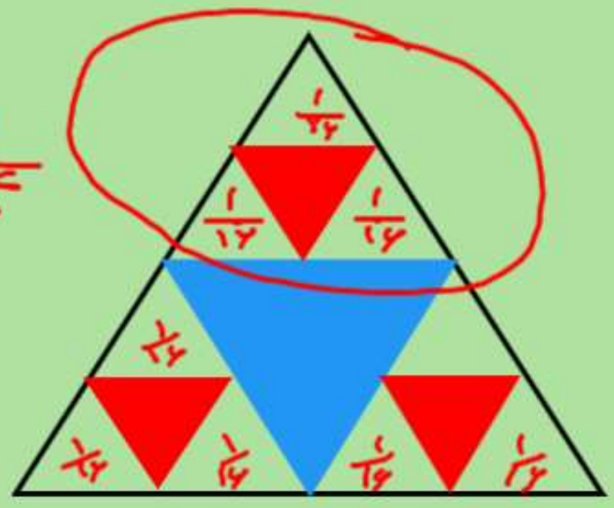
مرحله یک



$S = 1$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $S_1 = \frac{3}{4}$

مرحله دوم :

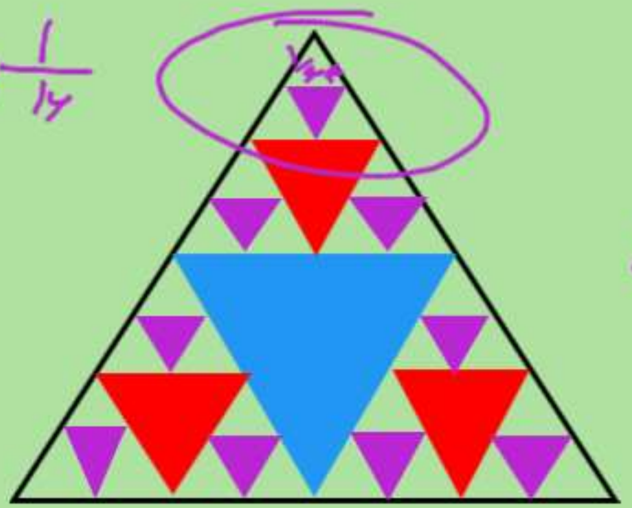
$\frac{1}{16} \Leftarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$



$S = 9\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

مرحله سوم :

$\frac{1}{64} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16}$



$S = 27\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

مرحله چهارم مساحت باقی‌مانده چقدر است؟

$S_4 = 81\left(\frac{1}{256}\right) = \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$

حل :

$S = (\frac{3}{4})^{4}$ مساحت در مرحله ۴ ام

آیا مساحت صفر خواهد شد؟ خیر

در مرحله هزارم مساحت چقدر است؟

$S = (\frac{3}{4})^{1000} \cong 0/\underbrace{000\ldots0}_{\text{۱۲۴ تا صفر}}1$

در مثال ۲ :

۱- هرچه شماره مرحله بیشتر شود، مساحت باقیمانده به صفر نزدیکتر است
و مساحت حذف شده به یک نزدیکتر است .

۲- هرچه بخواهیم می‌توانیم مساحت باقیمانده را به صفر نزدیک کنیم اما به شرط
اینکه شماره مرحله به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود.

مثال ۳: تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ را در نظر بگیرید. $(1\notin D_f)$

وقتی x به عدد یک نزدیک شود، رفتار تابع را بررسی کنید.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=x+1\,,\quad x\neq 1$$

$$f(x)=x+1\,,\quad x\neq 1$$

$f(x)=x+1 \quad , \quad x\neq 1$

حالت اول: $x>1$

x	۱ $\longleftarrow$	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۱	۱٫۰۱	۱٫۱	۱٫۵	۲	۵	۱۰
$f(x)$	? $\longleftarrow$	۲٫۰۰۰۱	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱	۲٫۵	۳	۶	۱۱

$f(x) \longrightarrow$ ۲

حالت دوم: $x<1$

۰	۰٫۵	۰٫۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹	۰٫۹۹۹۹	۰٫۹۹۹۹۹ $\longrightarrow$ ۱	x
۱	۱٫۵	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	۱٫۹۹۹۹	۱٫۹۹۹۹۹ $\longrightarrow$?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow$ ۲

در مثال قبل :

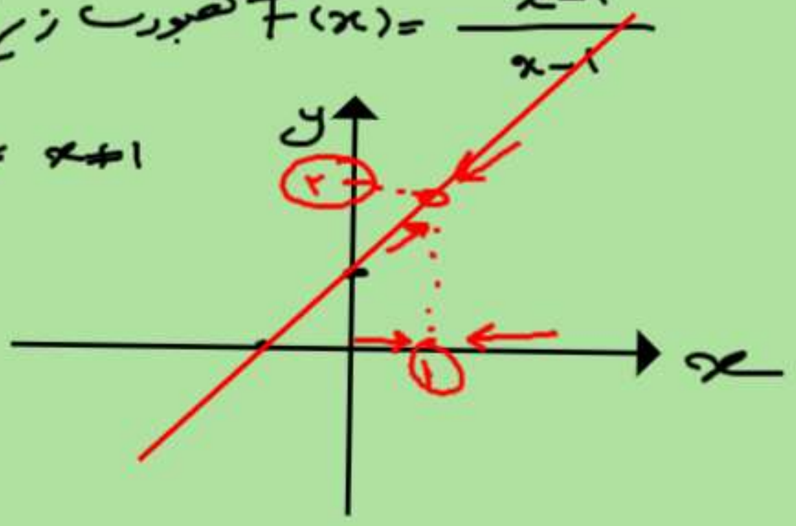
۱- مقادیر $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ ۲

۲- آیا مقادیر $f(x)$، برابر ۲ خواهد شد؟ خیر

۳- مقادیر $f(x)$، تا چه مقداری می‌توانند به ۲ نزدیک شوند؟ هر مقدار لازم

توجه: نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ بصورت زیر است:

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1 \ , \ x\neq 1$



مثال ۴: رفتار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 5 & x=3\end{cases}$ را در همسایگی $x=3$ بررسی کنید.

حل:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & x\neq 3\\ 5 & x=3\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\neq ۳ \\ ۵ & x=۳ \end{cases}$$

x	۳	←	۳,۰۰۰۰۱	۳,۰۰۰۱	۳,۰۰۱	۳,۰۱	۳,۱	۳,۵	۴
$f(x)$	?	←	۶,۰۰۰۰۱	۶,۰۰۰۱	۶,۰۰۱	۶,۰۱	۶,۱	۶,۵	۷

$f(x) \longrightarrow ۶$

۲	۲,۵	۲,۹	۲,۹۹	۲,۹۹۹	۲,۹۹۹۹	→	۳	x
۵	۵,۵	۵,۹	۵,۹۹	۵,۹۹۹	۵,۹۹۹۹	→	?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow ۶$

مثال ۵: رفتار تابع $f(x)=\begin{cases} x+4 & x>2 \\ 2x & x<2 \end{cases}$ را در همسایگی $x=2$ بررسی کنید.

x	۲	←	...	۲٫۰۰۰۱	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱	۲٫۵	۳
$f(x)$	?	←		۶٫۰۰۰۱	۶٫۰۰۱	۶٫۰۱	۶٫۱	۶٫۵	۷

$f(x) \longrightarrow 6$

۱	۱٫۵	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	۱٫۹۹۹۹	→	۲	x
۲	۳	۳٫۸	۳٫۹۸	۳٫۹۹۸	۳٫۹۹۹۸	→	?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow 4$

تعریف:

lim ≡ limit

فرض کنیم f یک تابع حقیقی است که در همسایگی $x=a$ تعریف شده است.

می‌گوییم وقتی x به سمت a میل می‌کند، تابع f حدی برابر l دارد و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

هرگاه مقادیر $f(x)$ بتوانند به اندازه کافی به l نزدیک شوند به شرط اینکه x به اندازه کافی به a نزدیک شود.

در مثال ۳:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

در مثال ۴:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

در شکل ۵ :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

تمرین ۶: با رسم جدول، بررسی کنید $\lim_{x\to ۳} x^۲$ وجود دارد یا خیر؟

x	۳	←	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴
$f(x)$	?	←	۹/۰۰۰۶۰۰۰۱	۹/۰۰۶۰۰۱	۹/۰۶۰۱	۹/۶۱	۱۲/۲۵	۱۶

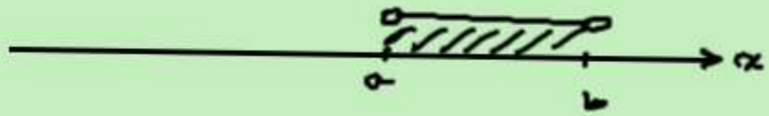
$f(x) \longrightarrow ۹$

۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	→	۳	x
۴	۶/۲۵	۸/۴۱	۸/۹۴۰۱	۸/۹۹۴۰۰۱	→	?	$f(x)$

$f(x) \longrightarrow ۹$

$\lim_{x\to ۳} x^۲ = ۹$

یادآوری:



$(a,b)=\{x\in \mathbb{R} : a<x<b\}$

مثال:

$(2.1\,,\,2.5)=\{x : x\in \mathbb{R},\ 2.1<x<2.5\}$

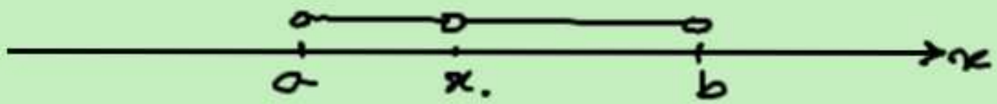
$2.2\in(2.1\,,\,2.5)$ و $2.8\notin(2.1\,,\,2.5)$

اگر $x_0\in(a,b)$ آنگاه بازه (a,b) را یک همسایگی برای x_0 می‌گویند.

مثال: $(2.1\,,\,2.5)$ یک همسایگی برای $x_0=2.2$ است.

$(2.1\,,\,2.5)$ همسایگی برای $x_0=2.8$ نیست.

یادآوری :



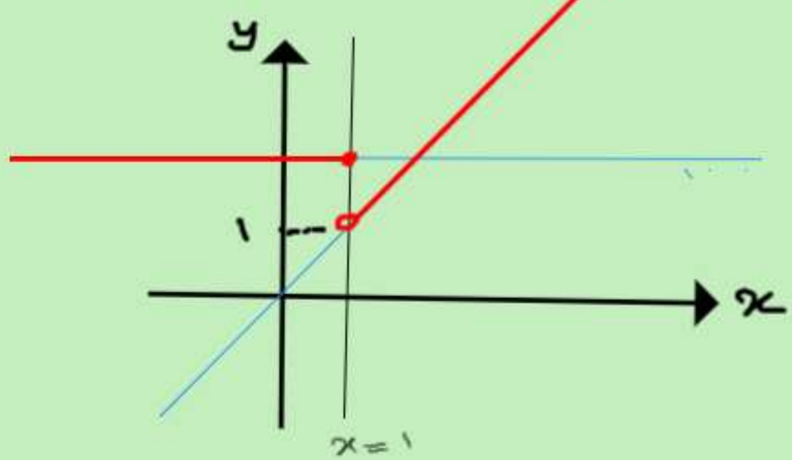
فرض کنیم (a,b) یک همسایگی برای x_0 باشد. $\left(x_0 \in (a,b)\right)$

مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را یک همسایگی محذوف برای x_0 می‌گویند.

$$\begin{cases} \text{همسایگی چپ} & (a,x_0) \\ \text{همسایگی راست} & (x_0,b) \end{cases}$$

توجه : $(a,b)-\{x_0\} = (a,x_0)\cup(x_0,b)$

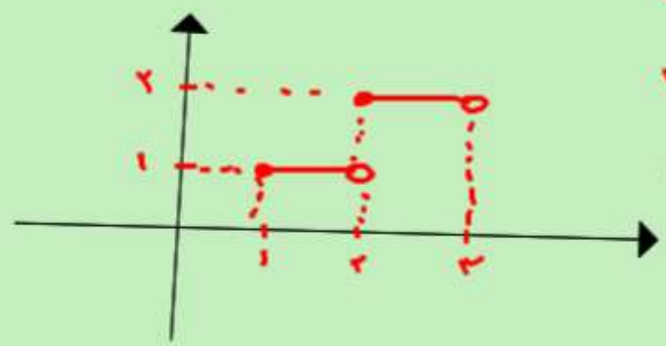
مثال ۱: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x\le 1 \end{cases}$ را در همسایگی $x=1$ رسم کنید.



$x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \longrightarrow 1$

$x \to 1^- \rightarrow f(x) \longrightarrow 2$

مثال ۲: حد و رفتار تابع $f(x)=[x]$ را در همسایگی $x=2$ بررسی کنید.



$1 \le x < 2 \Rightarrow [x]=1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow [x]=2$

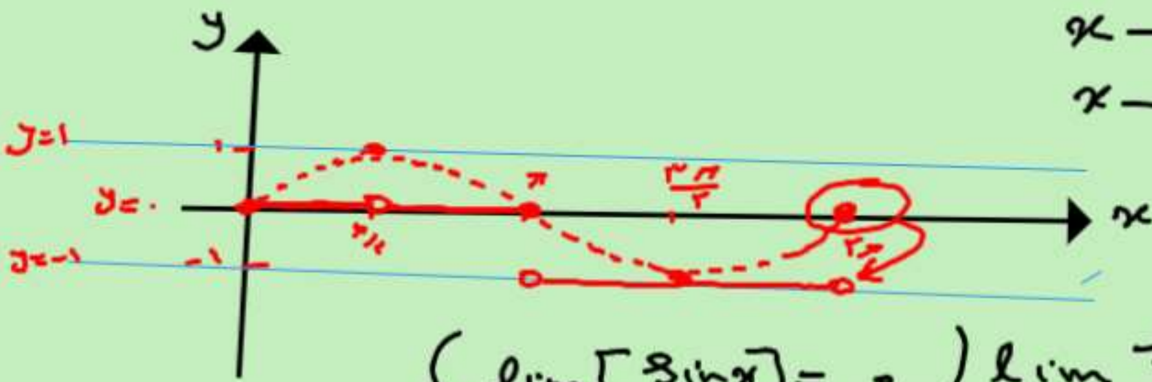
$$\begin{cases} x \to 2^+ \Rightarrow f(x) \to 2 \\ x \to 2^- \Rightarrow f(x) \to 1 \end{cases}$$

یادآوری: $m \in \mathbb{Z}$:

$m \le x < m+1 \Rightarrow [x]=m$

$[7.9]=7 \,,\; [\pi]=3 \,,\; [-4]=-4 \,,\; [5]=5$

مثال ۳: رفتار مرزی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید



$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ \Rightarrow f(x) \to 0$

$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow f(x) \to 0$

یعنی: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=0 \quad \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x]=0\right)$

تعریف حد چپ و حد راست :

۱- فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست $x = a$ تعریف شده باشد.

می‌گوییم حد راست تابع f در $x = a$ برابر l است و می‌نویسیم $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$

هرگاه مقادیر $f(x)$ به هر اندازه دلخواه بتوانند به l نزدیک شوند به شرط اینکه

x به اندازه کافی از راست $(x>a)$ به a نزدیک شود.

۲- فرض کنیم f در یک همسایگی چپ $x=a$ تعریف شده است.
می‌گوییم حد چپ f در $x=a$ برابر l_2 است و می‌نویسیم $\lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$
هرگاه مقادیر $f(x)$ بتوانند به اندازه دلخواه به l_2 نزدیک شوند به شرط اینکه
x به اندازه کافی از چپ ($x<a$) به a نزدیک شود.

مثال۴: با توجه به شکل ۱

$$f(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

با توجه به شکل ۲:

$$f(x)=[x]$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

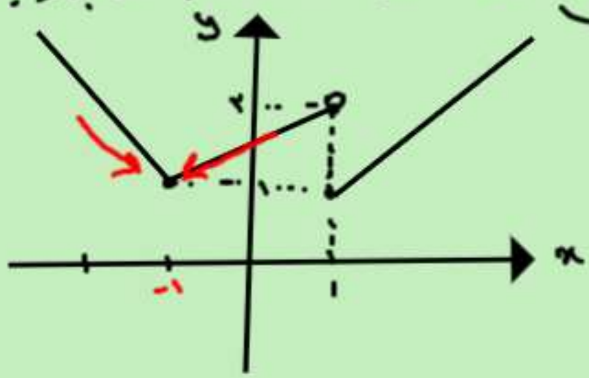
با توجه به مثال ۳:

$$f(x)=[\sin x]$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}[\sin x]=0 \ , \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}[\sin x]=0$$

تذکر: اگر حد چپ و حد راست تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند آنگاه تابع f در آن نقطه حد دارد و برعکس.

مثال ۵ : نمودار تابع f بصورت زیر است. حدهای خواسته شده را در صورت وجود بیابید.



$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

تذکر:

اگر در یک همسایگی راست $x=a$ دو تابع f و g برابر باشند آنگاه حد راست آنها در $x=a$ در صورت وجود با هم برابرند.

اگر در یک همسایگی چپ $x=a$ دو تابع f و g با هم برابر باشند آنگاه حد چپ آنها در $x=a$ در صورت وجود برابرند.

مثال ۶: مقدار $\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x}$ را در صورت وجود بیابید.

$$x\to 0^+ : \quad 0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow \quad f(x)=\frac{[x]}{x}=0 \quad 0<x<1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=0$$

مثال ۷: $g(x)=\frac{|x|}{x}$:

$$x>0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow g(x)=\frac{x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow g(x)=\frac{-x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=$ وجود ندارد

یادآوری:

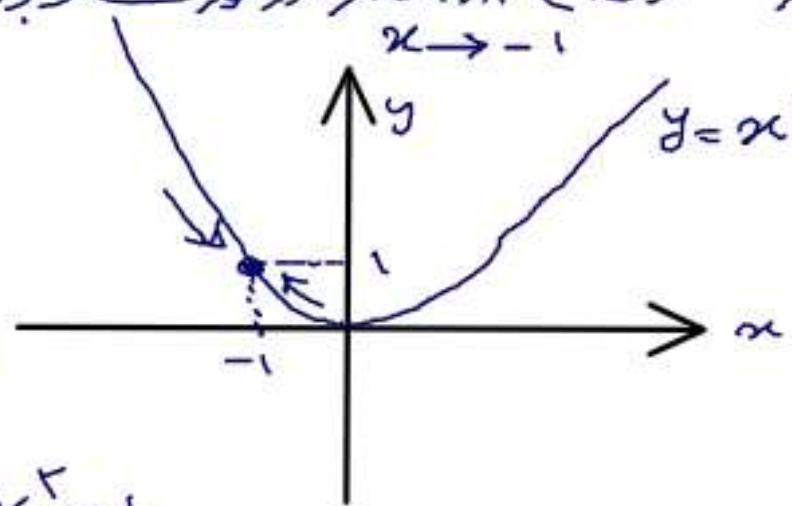
اگر تابع f در همسایگی $x=a$ حد راست و حد چپ برابر داشته باشد،
آنگاه می‌گوییم در این نقطه حد دارد.

مثال: مقدار $\lim_{x\to -1}(x^2)$ را از صورت نمودار بیابید.

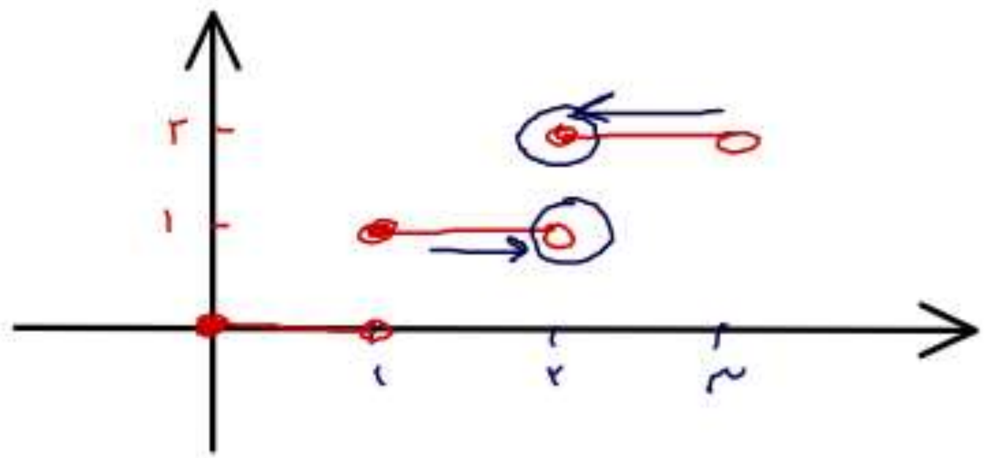
$$\lim_{x\to(-1)^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to -1} x^2 = 1$$



مثال: حد $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ را در صورت وجود بیابید.



$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1$

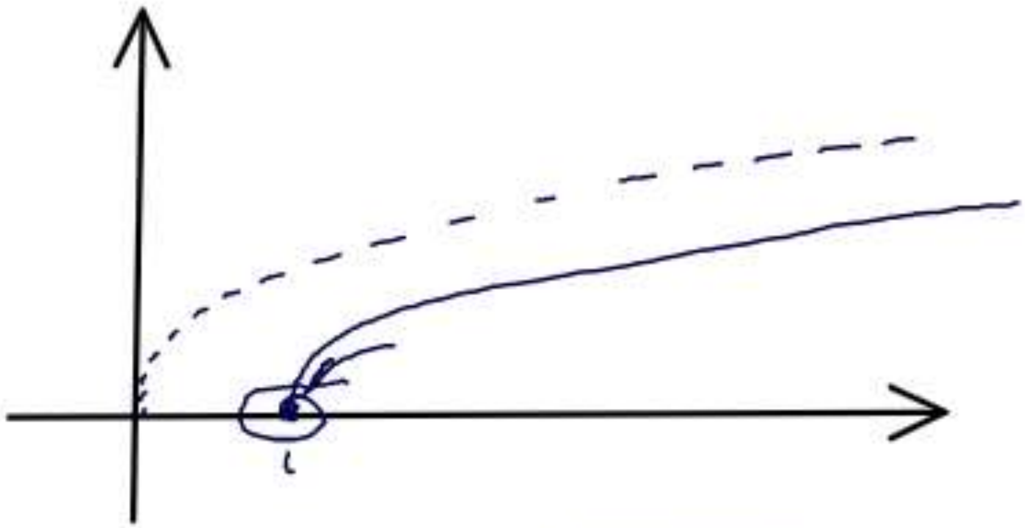
$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^+}[x] = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-}[x] = 1$

$\lim\limits_{x\to 2}[x] =$ وجود ندارد

مثال: حد $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ را در صورت وجود تعیین کنید.



$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=\text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}=\text{وجود ندارد}$$

قضیه :

الف) اگر $c \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه $\lim_{x \to a} c = c$

یعنی: حد تابع ثابت، همان عدد ثابت است.

مثال: $\lim_{x \to 2} 5 = 5$ و $\lim_{x \to \pi} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

ب) حد تابع همانی: اگر $f(x) = x$ یک تابع همانی روی اعداد حقیقی باشد آنگاه $\lim_{x \to a} x = a$

مثال: $\lim_{x \to 2} x = 2$ و $\lim_{x \to \sqrt{5}} x = \sqrt{5}$

قضیه: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=M$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=M+L$

ب) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=M-L$

ج) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=M\cdot L$

د) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{M}{L}\quad\left(L\neq 0\ ,\ g(x)\neq 0\right)$

مثال :

1) $\lim\limits_{x\to 5} 3x^2 = \lim\limits_{x\to 5} 3 \times \lim\limits_{x\to 5} x^2 = 3\times 25 = 75$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)} = \dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x^3+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)} = \dfrac{4}{9}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} (x - x^3) = \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2 - 8 = -6$

مثال :

1) $\lim\limits_{x \to 5} 3x^2 = \lim\limits_{x \to 5} 3 \times \lim\limits_{x \to 5} x^2 = 3 \times 25 = 75$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(2x+1)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+1)} = \dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x^3+1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x^2}{\lim\limits_{x \to 2}(x^3+1)} = \dfrac{4}{9}$

4) $\lim\limits_{x \to 2} (x - x^3) = \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} x^3 = 2 - 8 = -6$

تذکر ۱: اگر $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

مثال:

1) $\lim_{x\to 3}(x^3+2x-1)=3^3+2(3)-1=27+6-1=32$

2) $\lim_{x\to 1}(2x^2-7x+1)=2(1)^2-7(1)+1=-4$

تذکر ۲: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه:

۱) $\lim_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$

۲) $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt{L} \quad (L>0)$

(توجه: اگر $L=0$ و $f(x)\geq 0$ رابطه بالا برقرار است.)

۳) $\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{L} \quad (L\neq 0)$

۴) $\lim_{x\to a} (-f(x)) = -\lim_{x\to a} f(x) = -L$

مثال :

1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)^5 = \left(\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)\right)^5 = 2^5 = 32$

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{3x-1} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 7}(3x-1)} = \dfrac{1}{20}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5x-1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(5x-1)} = \sqrt{9} = 3$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\sqrt{5x}\right) = -\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x} = -\sqrt{5}$

حد توابع مثلثاتی :

قضیه :

۱) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$

۲) $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

۳) $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \qquad a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

۴) $\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a \qquad a \neq k\pi$

مثال :

1) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{\sin x}{2\sin x+1} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}+1} = \dfrac{1}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \sin^3 x = \left(\lim\limits_{x\to \pi/6} \sin x\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

3) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\sin x - \cos x) = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to \pi/3} 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$= \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین صفحه ۱۳۹ حسابان یک

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = (\sqrt{9}-9)^3 = -216$

ب) $\lim_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = 6-4+5 = 7$

پ) $\lim_{x\to -\frac{5}{3}}\frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)} = \frac{(-\frac{5}{3}+\pi)(3(-\frac{5}{3})+5)}{(3(-\frac{5}{3})+6)((-\frac{5}{3})^3+1)} = 0$

ت) $\lim_{x\to \sqrt{2}^+}\frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{x-\pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi} = 0$

ج) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{0}{0+1} = 0$

ث) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})+6(\frac{1}{2})} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

آماده‌حال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x\to 1} f(x)=3$ و $\lim_{x\to 2} f(x)=3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x^2-1}=4$.

$$\frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{3}=4 \Rightarrow \lim_{x\to 3} g(x)=12$$

ت۱: $g(x)=12$

ت۲: $g(x)=3x^2$

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}\big(f(x)-L\big)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} L \rightarrow \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\big(f(x)-L\big)=0$$

آماده و حال — مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

یادآوری:

اگر f یک چندجمله‌ای باشد و $f(a)=0$ آنگاه

در تجزیه f عامل $(x-a)$ ظاهر می‌شود.

مثال:

$$f(x)=x^2-5x+6$$

$$f(2)=2^2-5(2)+6=4-10+6=0$$

$$f(2)=0$$

$$f(x)=(x-2)(x-3)$$

یادآوری:

هر عبارت چندجمله‌ای درجه n، حداکثر n عامل درجه اول در تجزیه آن وجود دارد.

مثال: $x^5 - 13x^3 + 36x = x.(x^4 - 13x^2 + 36)$

ضرب جمع

$= x.(x^2 - 4).(x^2 - 9)$

$= x.(x-2).(x+2).(x-3).(x+3)$

مثال :

$$x^{4} + x^{2} - 20 = (x^{2} - 4) \cdot (x^{2} + 5)$$

جمع   ضرب

$$= (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^{2} + 5)$$

تذکر:

اگر f و g چندجمله‌ای باشند و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$

آنگاه با تجزیهٔ f و g حتماً عامل $(x-a)$ هم در صورت

و هم در مخرج ظاهر خواهد شد.

مثال ۱:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3^2-3}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{1}=6$$

$$x\to 3 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow x-3\neq 0$$

توجه: $\frac{a.b}{a.c}=\frac{b}{c}\ ,\ a\neq 0$

مثال ۲:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{1^2+1-2}{1^2-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\overset{\text{جمع}}{+x}\overset{\text{ضرب}}{-2}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

$$x\to 1 \Rightarrow x\neq 1 \Rightarrow x-1\neq 0$$

مثال ۳:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-x-20}=\frac{5^2-25}{5^2-5-20}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-x-20}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)\cdot(x+4)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x+4}=\frac{10}{9}$$

$$x\to 5 \overset{\text{جمع}}{\Rightarrow} \overset{\text{ضرب}}{x\neq 5} \Rightarrow x-5\neq 0$$

مثال ۴:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2-20}{x^4-16}=\frac{2^4+2^2-20}{2^4-16}=\frac{16+4-20}{16-16}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2-20}{x^4-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5)(x^2-4)}{(x^2-4).(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5).\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}(x^2+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2+4}=\frac{9}{8}$$

$x\longrightarrow 2 \Rightarrow x\neq 2 \Rightarrow (x-2)\neq 0$ عامل ابهام

مثال ۶ :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\frac{3^2-6(3)+9}{3^2-9}=\frac{9-18+9}{9-9}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-3)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+3}=\frac{0}{6}=0$$

$$x\to 3 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow x-3\neq 0$$

تذکر: اگر حد مسئله رادیکالی بوده و $\frac{0}{0}$ شود، ابتدا باید تکلیف رادیکال را روشن کرد (گویا کنیم)

مثال ۷:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{\sqrt{1+3}-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

$$x\longrightarrow 1\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow x-1\neq 0$$

تمرین:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}=\frac{2^2-4}{\sqrt{2(2)+5}-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}\times\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\cdot(\sqrt{2x+5}+3)}{\underbrace{(2x+5)-9}_{2x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2}$$

$$=\frac{4\times 6}{2}=12$$

$$x\to 2\Rightarrow x\neq 2\Rightarrow (x-2)\neq 0$$

توجه: اگر x برحسب رادیان باشد آنگاه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

مثال ۹:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\frac{\sin(0)}{5(0)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3x}{5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=1\times\frac{3}{5}=3/5$$

نکته:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{(nx)}=\frac{m}{n}$$

$\cos 0 = 1$ و $1 - \cos u = 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\lim_{x\to}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

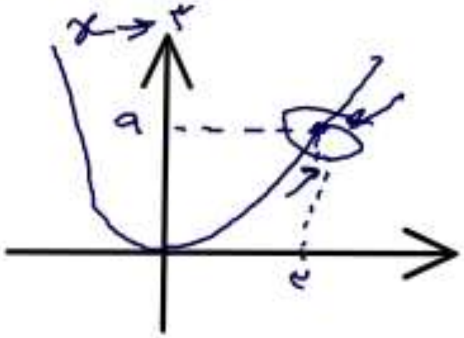
یادآوری ۱ :

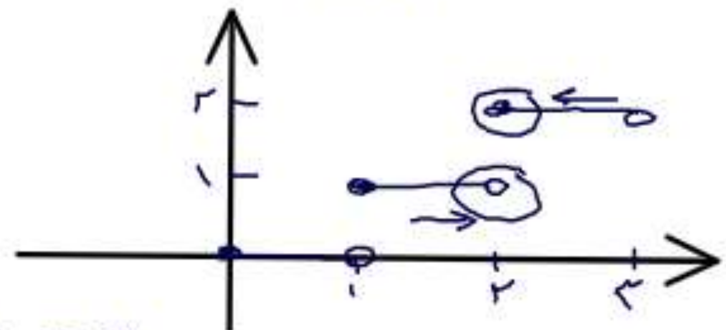
اگر تابع f در $x=a$ حدهای چپ و راست برابر داشته باشد آنگاه در این نقطه حد دارد.

مثال - حدهای زیر را در صورت وجود، تعیین کنید.

۱) $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$

۲) $\lim_{x\to 2} [x] =$ وجود ندارد



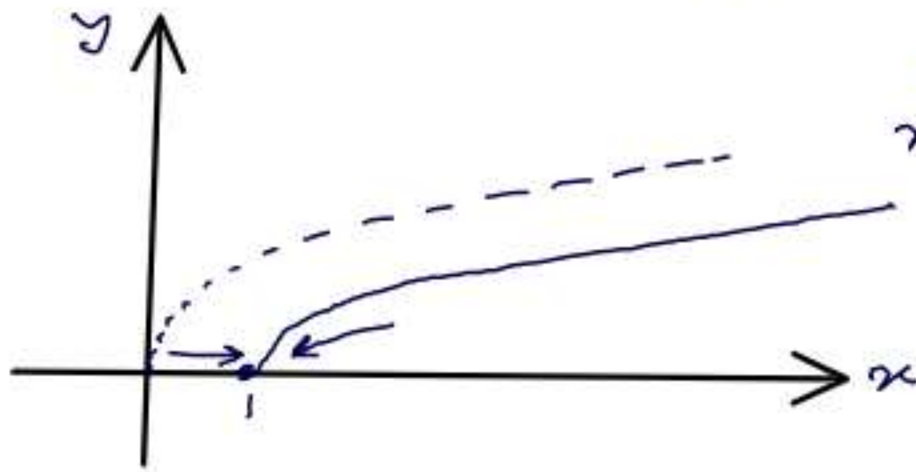


$\lim_{x\to 2^+} [x] = 2$, $\lim_{x\to 2^-} [x] = 1$

یادآوری ۲:

اگر تابع f در همسایگی راست یا چپ $x=a$ تعریف نشده باشد آنگاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: حد $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ را در صورت وجود بیابید.



$\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ وجود ندارد

یادآوری ۳ :

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و f و g چندجمله‌ای باشند آنگاه

برای رفع ابهام باید f و g را تجزیه کرد و در این حالت

عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج ظاهر می‌شود.

مثال :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{4-4}{4+2-6} = \frac{0}{0}$$ مبهم

(رفع ابهام) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

$$x\to 2 \Rightarrow x\neq 2 \Rightarrow x-2\neq 0$$

تعریف پیوستگی:

تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌گویند اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

و $f(a)$ موجود و باهم برابر باشند.

یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

توجه: اگر تابعی پیوسته نباشد آنگاه تابع را ناپیوسته می‌نامیم.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=(x-2)[x]$ را در $x=2$ و $x=1$ بررسی کنید.

$x=2$:

$f(2)=(2-2)[2]=0\times 2=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=(2^+-2)\times[2^+]=0\times 2=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=(2^--2)\times[2^-]=0\times 1=0$

تابع $f(x)=(x-2)[x]$ در $x=2$ پیوسته است.

$x=1$: $f(1)=(1-2)[1]=-1\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=(1^+-2)\times[1^+]=-1\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=(1^--2)\times[1^-]=-1\times 0=0$

ناپیوسته است

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 2 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنند.

مقدار تابع: $f(2)=2^2-1=3$

حد راست: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \overset{x>2}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-1)=3$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} (2x-1)=3$

تابع f در $x=2$ پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>2 \\ 3 & x=2 \\ x^3-5 & x<2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f(2)=3$$

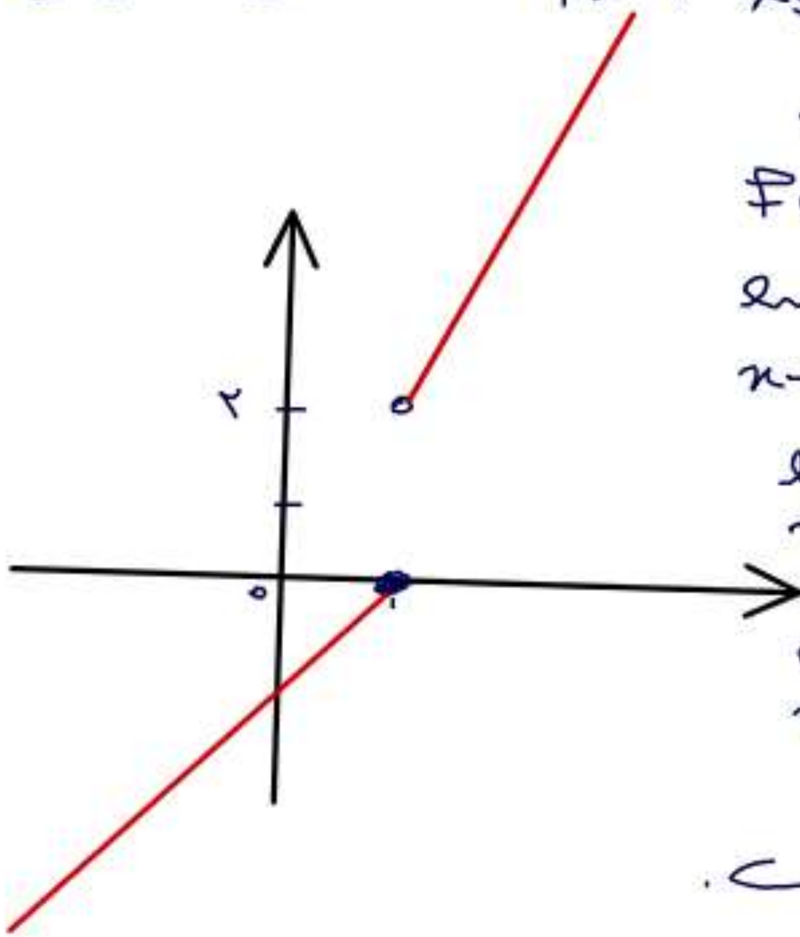
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} (x^3-5) = 8-5=3$$

تابع f در $x=2$ ناپیوسته است.

توجه: تابع f در $x=2$ ناپیوسته است اما از چپ پیوسته است.
(پیوستگی چپ دارد)

تمرین: با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ x-1 & x\le 1\end{cases}$ ، پیوستگی این تابع را در $x=1$ بررسی کنید.



$f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ وجود ندارد

تابع در $x=1$ ناپیوسته است.

تعریف :

۱) تابع f را در $x=a$ از راست پیوسته می‌گویند اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

۲) تابع f را در $x=a$ از چپ پیوسته می‌گویند اگر

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f(2)=[2]=2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=[2^+]=2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=[2^-]=1$$

تابع f در $x=2$ ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد.

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ 2 & ,\ x=1\end{cases}$$

، $x=1$

$$f(1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

تابع در $x=2$ نه پیوسته است و نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

توجه:

$$|x-1|=\begin{cases}(x-1) & x\to 1^+\\ -(x-1) & x\to 1^-\end{cases}$$

تعریف: پیوستگی در بازه

۱) تابع f را در بازه (a,b) پیوسته می‌گوییم اگر در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

۲) تابع f را در بازه $[a,b]$ پیوسته می‌گوییم هرگاه در بازه (a,b) پیوسته باشد و در $x=a$ از راست و در $x=b$ از چپ پیوسته باشد.

تذکر ۱: توابع چندجمله‌ای همیشه پیوسته‌اند.

۲) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برای $x>0$ پیوسته است.
در $x=0$ فقط پیوستگی راست دارد.

۳) تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ فقط در $x=-\frac{d}{c}$ ناپیوسته است.

۴) دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ همواره پیوسته‌اند.

تذکر:

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و تابع f در همه نقاط پیوسته باشد آنگاه

می‌گوییم f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

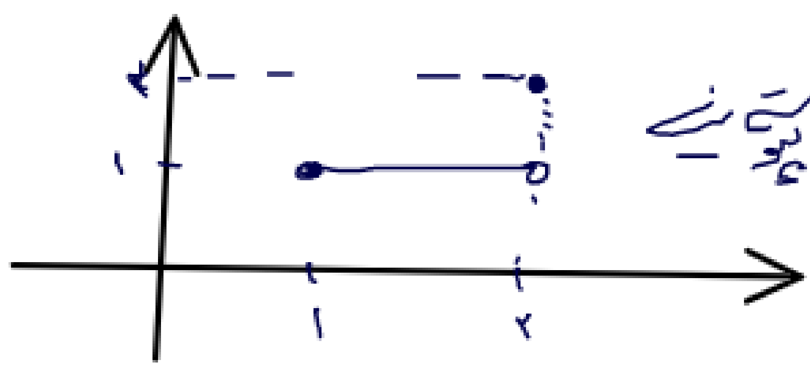
مثال: توابع $y=x^2$ و $y=\sin x$ و $y=\cos^2 x$

روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

تذکر: اگر تابع f در یک نقطه از بازه ناپیوسته باشد می‌گوییم روی آن بازه ناپیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=[x]$ روی بازه $(1,2)$ پیوسته است

اما روی بازه $[1,2]$ ناپیوسته است



در $x=2$ از چپ پیوسته نیست

تمرینات کتاب ریاضی ۲ صفحه ۱۴۲ حل شود.

تمرین: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+3 & x>2 \\ 5 & x=2 \\ x^2+b & x<2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد

آنگاه a و b را بیابید

$$f(2)=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2a+3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4+b$$

$$\xRightarrow{\text{در } x=2 \text{ پیوسته}} 5 = 2a+3 = 4+b$$

$$4+b=5 \Rightarrow b=1$$

$$2a+3=5 \Rightarrow a=1$$

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین صفحه ۱۴۳ ریاضی دو

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x)=2x+1 \ , \quad g(x)=2x+1 \quad x\neq 2 \ , \quad h(x)=\begin{cases} 2+x & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$f(2)=2(2)+1=5$ ، $g(2)=$ وجود ندارد ، $h(2)=3$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x+1) = 4+1=5$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}(2x+1) = 4+1=5$$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}(2+x) = 4$$

چون $g(2)$ وجود ندارد پس g در ۲ ناپیوسته است.

چون $\lim_{x\to 2} h(x)\neq h(2)$ پس h در $x=2$ ناپیوسته است.

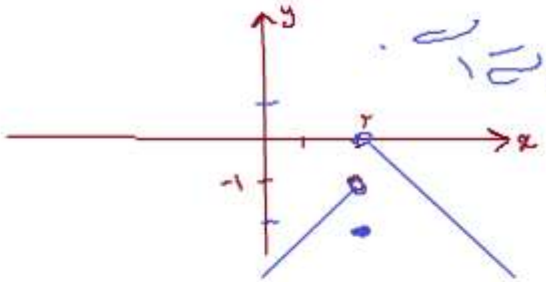
پ) کدام تابع در $x=2$ پیوسته است؟ تابع f چون $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-3 & x<2 \\ -2 & x=2 \\ -x+2 & x>2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در $x=2$ ناپیوسته است و در بقیه نقاط پیوسته است.

۳ توابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3 \\ 6 & x=3 \end{cases}$ و $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=3$ بررسی کنید

چون $g(3)$ وجود ندارد پس g در $x=3$ ناپیوسته است.

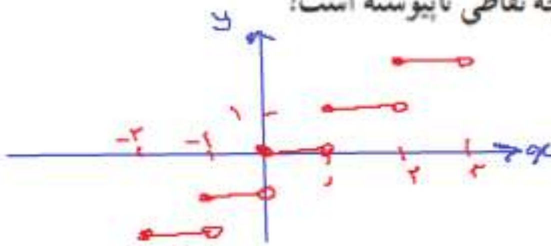
$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 = f(3) \Rightarrow$ در $x=3$ پیوسته است f

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در نقاط صحیح ناپیوسته است (پیوستگی راست دارد)

در نقاط غیر صحیح پیوسته است.

۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-2x+2 & x\le 0\\ x^2+2 & x>0\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

$$f(0)=-2(0)+2=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-2x+2)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+2)=2$$

$\Rightarrow$ تابع f در $x=0$ پیوسته است

در نقاط دیگر پیوسته است چون چندجمله‌ای‌ها روی R پیوسته‌اند.

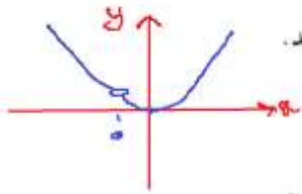
مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

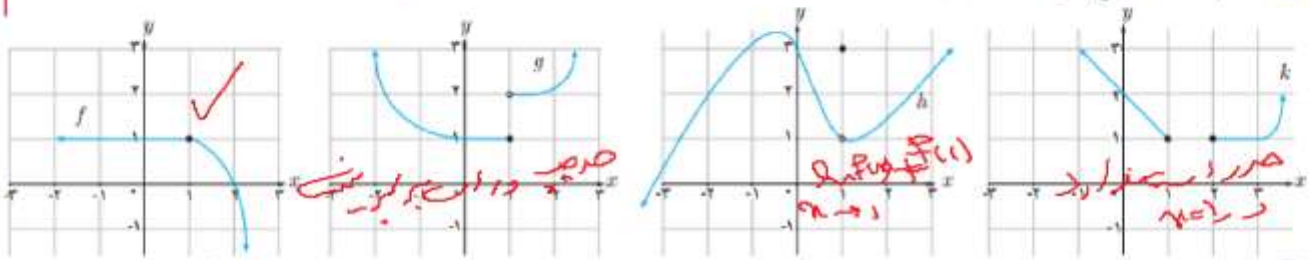
بسم الله الرحمن الرحیم

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x=1\\ x^2 & x\neq 1\end{cases}$$



۷ کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟



۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases}6t+4 & 0\leq t<1\\ 2t+10 & 1\leq t\leq 10\end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$f(\tfrac{1}{2})=6\times(\tfrac{1}{2})+4=7 \qquad \text{ماه } 6 \longrightarrow \frac{6}{12}=\frac{1}{2} \text{ سال}$$

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

$f(2)=14$

$f(5)=20$

ب) آیا f در بازهٔ $[0,10]$ پیوسته است؟ خیر – در $x=1$ ناپیوسته است

$\lim_{t\to 1^+} f(t) = 12 \neq \lim_{t\to 1^-} f(t) = 10$

مدرس: مزبان حبیبی

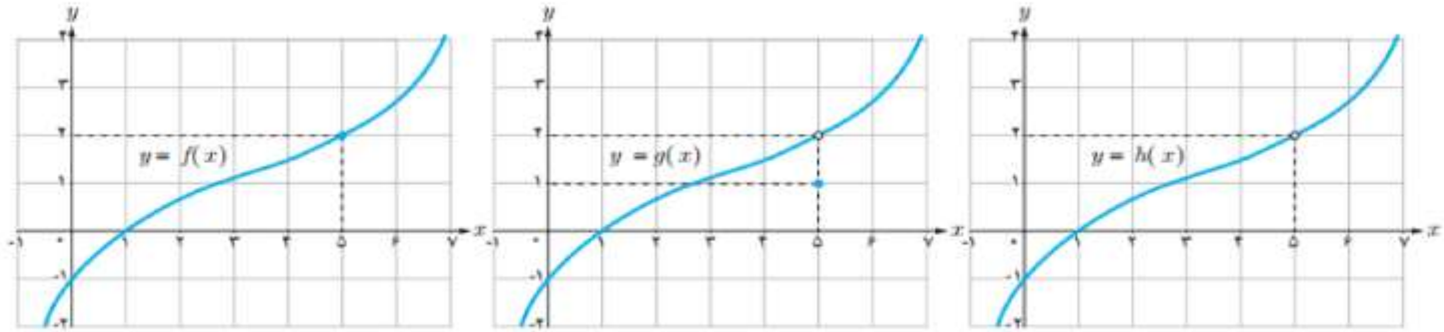
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین

صفحه ۱۲۰ حسابان یک

۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=5$، مشخص کنید.



$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\ldots 2$

$f(5)=2$

$\lim\limits_{x\to 5} g(x)=\ldots 2$

$f(5)=1$

$\lim\limits_{x\to 5} h(x)=\ldots 2$

$5 \notin D_f$

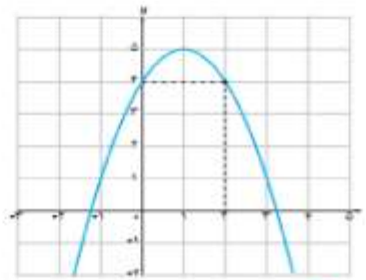
حسابان یک

مدرس: مزبان حبیبی

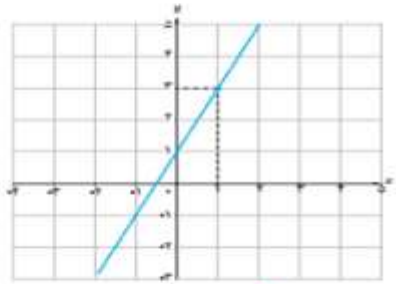
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

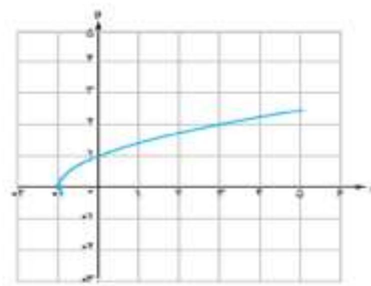
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



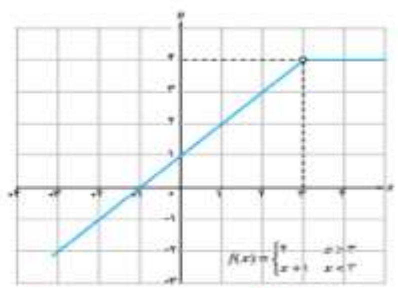
$\lim_{x\to ۲} (-x^۲ + ۲x + ۴) =$ ۴



$\lim_{x\to ۱} (۲x + ۱) =$ ۳



$\lim_{x\to -۱} \sqrt{x+۱} =$ وجود ندارد



$\lim_{x\to ۳} f(x) =$ ۴

حسابان یک

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} (-۳x+۴) = ۴$

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = -۵$ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	$-۵/۵$	$-۵/۱$	$-۵/۰۱$	$-۵/۰۰۱$	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	$-۴/۹۹۹$	$-۴/۹۹$	$-۴/۹$	$-۴/۸$

حسابان یک

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

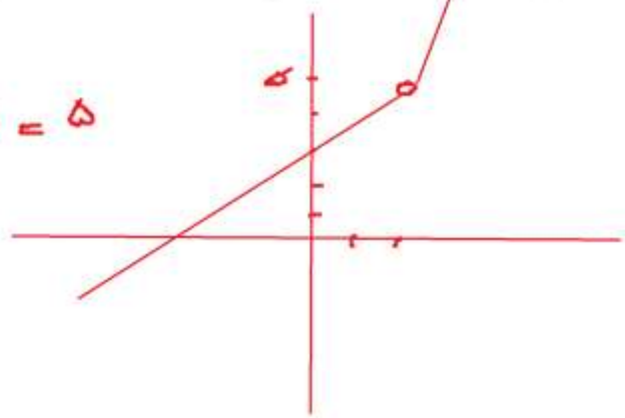
بسم الله الرحمن الرحیم

۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x>2 \\ x+3 & x<2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$، تعریف شده است؟ خیر. $2 \notin D_f$

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$



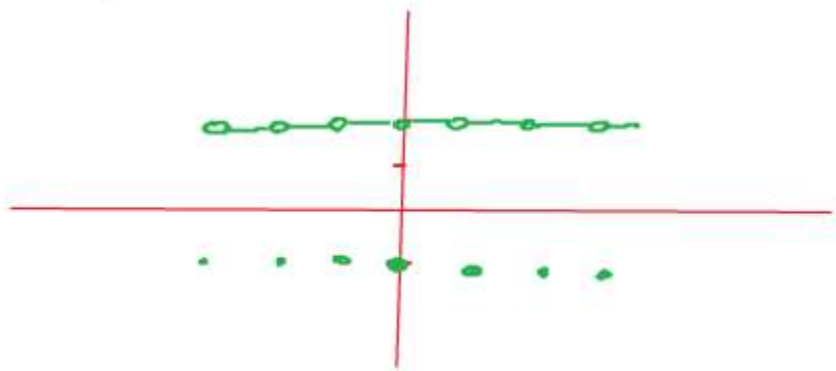
بسم الله الرحمن الرحیم

۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-۱ & x\in\mathbb{Z}\\ ۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار g را در فاصله $[-۴,۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)=۲$ $\qquad$ $\lim_{x\to ۱} g(x)=۲$



مدرس: مزبان حبیبی $\qquad$ حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com $\qquad$ 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید. $1-x^2\geq 0 \Rightarrow 1\geq x^2 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]-\{0\}$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ $x=0$

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟ خیر

خیر

۷ اگر بازهٔ $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$2\in(x-1,2x+3)\Rightarrow\begin{cases}2<2x+3 \Rightarrow -1<2x \Rightarrow -\frac{1}{2}<x & (1)\\ x-1<2 \Rightarrow x<3 & (2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<3 \Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},3\right)$$

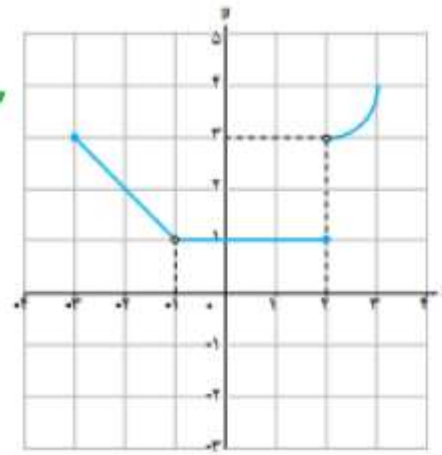
حسابان یک   مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com   09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس — صفحه ۱۲۵ حسابان یک

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ — $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ — $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$ — $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$ — $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 3$ — $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$ وجود ندارد — $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ — $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ — $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

حسابان یک — مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

جزوه‌های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس

۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید :

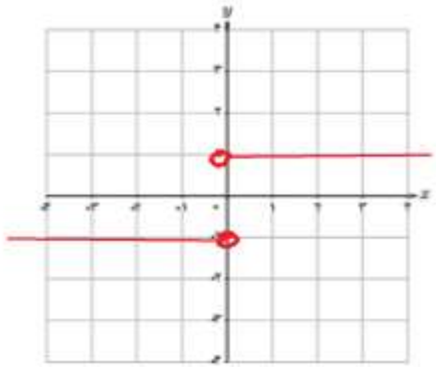
الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}=1 & x>0\\ \frac{-x}{x}=-1 & x<0\end{cases}$$

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟ خیر



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=$$ وجود ندارد

حسابان یک   مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین صفحه ۱۲۷ حسابان یک

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد

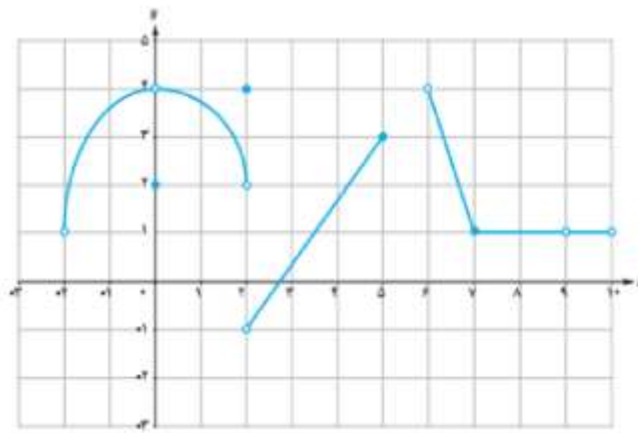
پ) $\lim_{x\to 5} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to 6^-} f(x) =$ وجود ندارد

ث) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x\to 8} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x\to 9} f(x) = 1$



حسابان یک — مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۰ نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

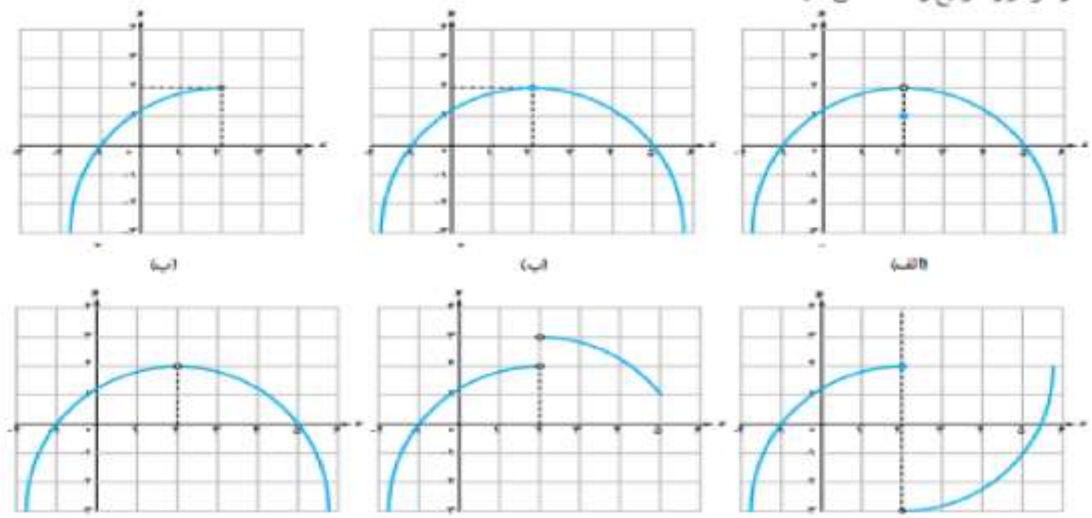
خیر چون حد چپ و راست برابر نیستند.

حسابان یک　　مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com　　09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



(الف) (ب) (پ)

(ت) (ث) (ج)

ـ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. الف ـ ب ـ پ ـ ث ـ ت ـ ج

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. الف ـ ج

ـ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. ب ـ ت ـ ث

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. ب

ـ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. ج

ـ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. ت ـ ث

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^{2}-x}$ در نقطهٔ $x=1$ چه می‌توان گفت؟

وجود ندارد

$x^2-x\geq 0 \Rightarrow x(x-1)\geq 0 \Rightarrow x=0,1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ وجود ندارد

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می‌توان گفت؟

$[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\leq x<3 \Rightarrow D_f=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$

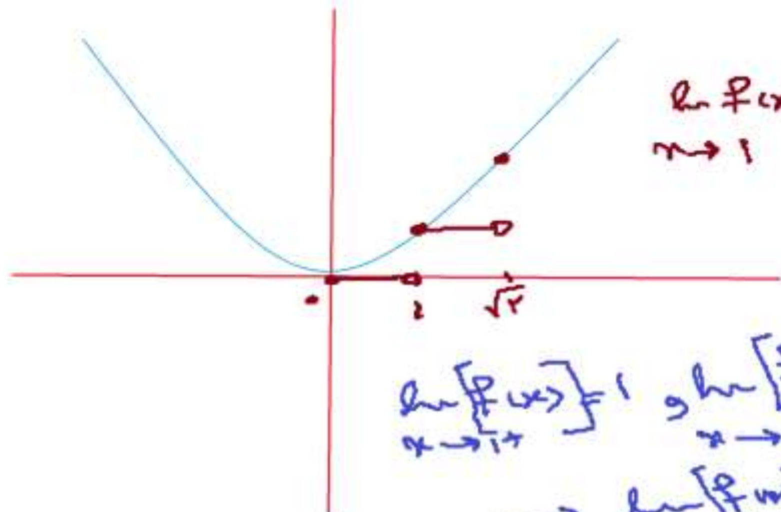
تابع در همسایگی راست $x=2$ تعریف نمی‌شود، پس در $x=2$ حد ندارد.

بسم الله الرحمن الرحیم

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]$ ب) $\left[\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)



$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \to \left[\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right] = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)] = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)] = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1}[f(x)] =$ وجود ندارد

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

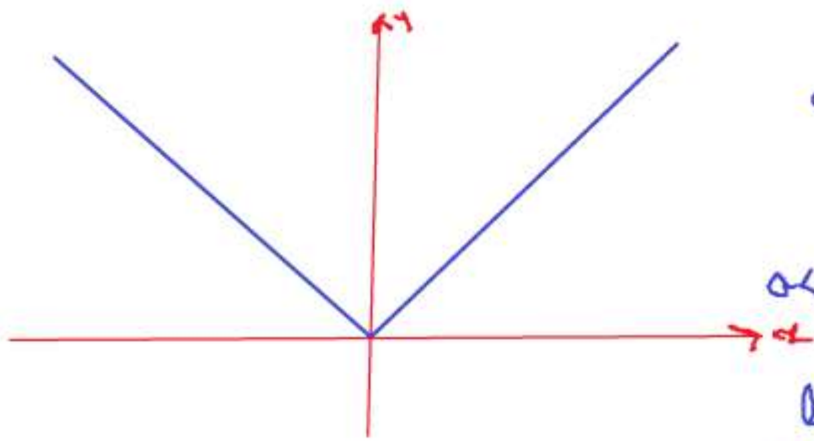
۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟

بله.



$a>0 \Rightarrow |x|=x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}|x|=\lim\limits_{x\to a}x=a=|a|$

$a<0 \Rightarrow |x|=-x$

$\lim\limits_{x\to a}|x|=\lim\limits_{x\to a}(-x)=-a=|a|$

حسابان یک   مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com   09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس

صفحه ۱۳۴ حسابان یک

الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to -1} x^{4} = (\lim\limits_{x\to -1} x)^{4} = (-1)^{4} = 1$

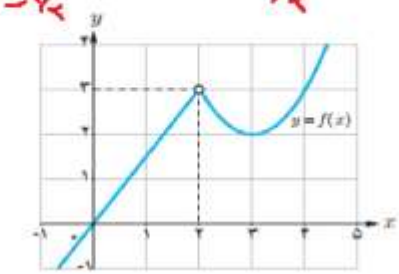
۲) $\lim\limits_{x\to 10} (5x^{3} - 6|x| + 1) = 5(10)^{3} - 6|10| + 1 = 5000 - 60 + 1 = 4941$

۳) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^{2}+4x+4}{4x^{3}-7x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^{2}+4x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(4x^{3}-7x+1)} = \frac{4+8+4}{32-14+1} = \frac{16}{19}$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x-[x]}{1-x} = \frac{\frac{1}{2}-[\frac{1}{2}]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}} = 1$

ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $\lim\limits_{x\to 2} xf(x)$ را بیابید.



$\lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x) = 3$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

حسابان یک

مدرس: مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس

مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\pi\cos x}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to-\pi}\pi\cos x}{\lim\limits_{x\to-\pi}x} = \dfrac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \dfrac{\pi(-1)}{-\pi} = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\pi/3}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pi/3}\cos x} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

مدرس: مزبان حبیبی

حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین — صفحه ۱۳۹ حسابان یک

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3=(\sqrt{9}-9)^3=-216$

ب) $\lim\limits_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5)=-6(-1)^7-4(-1)^2+5=6-4+5=7$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}}\frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)}=\frac{0}{1\times(\ )}=0$

ت) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\frac{1-2}{2-4}=\frac{1}{2}$

ث) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+6x}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x+\cos x}=\frac{0}{0+1}=\frac{0}{1}=0$

چ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{x-\pi}=\frac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi}=\frac{0}{-\pi/2}=0$

مدرس: مزبان حبیبی

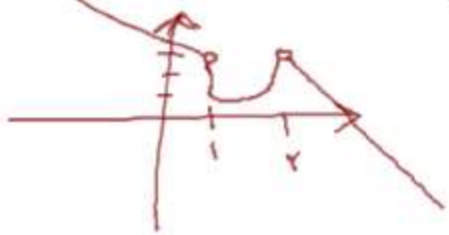
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x\to 1} f(x)=3$ و $\lim_{x\to 2} f(x)=3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟ خیر



۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x^2-1}=4$.

$$\frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}=4 \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{3}=\cancel{4} \Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x)=12 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{g(x)=x^2+8} \\ g(x)=3x^2 \\ g(x)=x+10 \\ g(x)=x^2+8 \end{cases}$$

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$$

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

$\lim_{x \to 1} (3x+2) = 3(1)+2 = 5$

$\lim_{x \to 1} (x^2-1) = 1^2-1 = 0$

$\lim_{x \to 1^+} ([x]-1) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} ([x]-1) = -1$ $\Rightarrow$ $\lim ([x]-1)$ وجود ندارد

$\lim_{x \to 1^+} y = 2$, $\lim_{x \to 1^-} y = -2$ → حد وجود ندارد

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید:

$y=3x+2 \quad , \quad y=x^2-1 \quad , \quad y=[x]-1 \quad , \quad y=\begin{cases} -2 & x<1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=3x+2$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)+g(x)=\dots$ x^2+3x+1
تابع $g.f$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-1$	$g(x)=x^2-1$	$f(x).g(x)=\cdots$ $(x^2-1)([x]-1)$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=3x+2$	$g(x)=x^2-1$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+2}{x^2-1}$
تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases} -2 & x<1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$		$f^2(x)=4$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^2-1$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$

$x=1$ در تعریف نمی‌شود، در همسایگی چپ ۱ منفی

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟ حد ندارد.

برهان خلف: اگر $f+g$ حد داشته باشد.

$$= \lim_{x \to a} \left(f(x)+g(x)\right) - f(x) = \text{موجود است } g \ \times$$

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-1$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+[x]}{|x|} & x<-1 \\ 3x+b & x>-1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = 3(-1)+b = b-3$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \frac{(-1)^2 + [(-1)^-]}{|-1|} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$b-3=-1 \Rightarrow b=2$$

حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

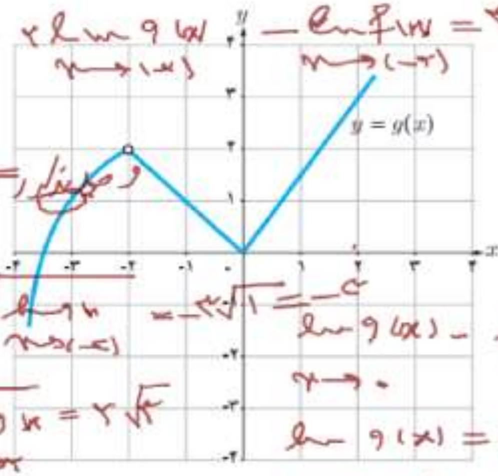
۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

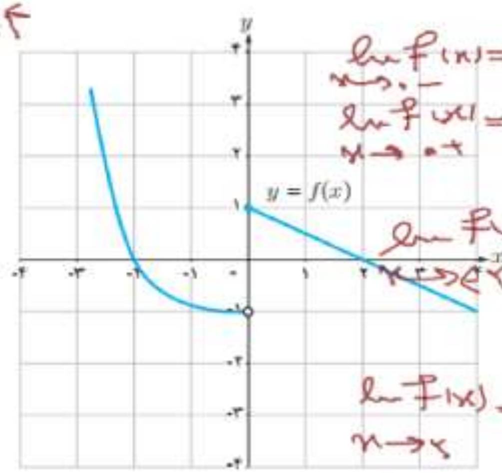
$\lim_{x\to -2}(2g(x)-f(x)) = 2\lim_{x\to(-2)} g(x) - \lim_{x\to(-2)} f(x) = 4-0=4$

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} g(x)}{\lim_{x\to 0} f(x)} =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to -3} -3\sqrt{g(x)} = -3\sqrt{\lim_{x\to(-3)} g(x)} = -3\sqrt{1} = -3$

$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8g(x)} = 2\sqrt[3]{\lim_{x\to 2} g(x)} = 2\sqrt[3]{4}$





$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$\lim_{x\to(-2)} g(x) = 2$

$\lim_{x\to 2} g(x) = 4$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

حسابان یک   مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com   09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس

صفحه ۱۴۱ حسابان یک

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{4-8+4}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{0}{4}=0$$

$x\longrightarrow 2 \Rightarrow (x-2)$ عامل ابهام

$x\longrightarrow 2 \Rightarrow x\neq 2 \Rightarrow (x-2)\neq 0$

حسابان یک — مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس — صفحه ۱۴۲ حسابان یک

مقدار حد زیر را بیابید.

مثال:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}\times\frac{\sqrt{۳x-۵}+۲}{\sqrt{۳x-۵}+۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{(۳x-۵)-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳\cancel{(x-۳)}}=\frac{۶\times ۴}{۳}=۸$$

۱) $$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\cos x}{x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x(۱+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=۱\times ۰=۰$$

۲) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حسابان یک — مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

کار در کلاس صفحه ۱۴۳ حسابان یک

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

نکته. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$

مثال : مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

حل : قرار می‌دهیم : $t=\sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x=t^2-1$ و بنابراین،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t+1)}=\frac{1}{2}$$

حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین

صفحه ۱۴۴ حسابان یک

$x \to -1 \Rightarrow$ عامل ابهام $x+1$

$[2^-]=1$

$[2^+]=2$

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x} = \frac{2(-1)^2+(-1)-1}{3(-1)^2+3(-1)}=\frac{0}{0}$

ب) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8$

$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+2x-x-1}{3x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{2x(x+1)-(x+1)}{3x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{3x} = 1$

پ) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$

ت) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

ث) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

۲ اگر $f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x}$، حاصل $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x).g(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{x}\times\frac{x+1}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

مدرس: مزبان حبیبی

حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۴ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=0$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

پ) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{|1-\cos x|}$

ت) $\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{x\sin x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{x\sin x}=\lim\frac{2\times 2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{x}=4$

ث) $\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}$

ج) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}$

ح) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

$-1<\cos x<1$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|1-\cos x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}}\times\frac{1+\cos x}{1}=2$

مدرس: مزبان حبیبی

حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com
09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین

صفحه ۱۲۵ حسابان یک

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$

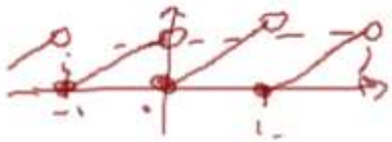
$\lim_{x\to a}(|x-1|+2)=|a-1|+2$

ب) $y=[x]+[-x]$

$\lim_{x\to a}([x]+[-x])=-1$

$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

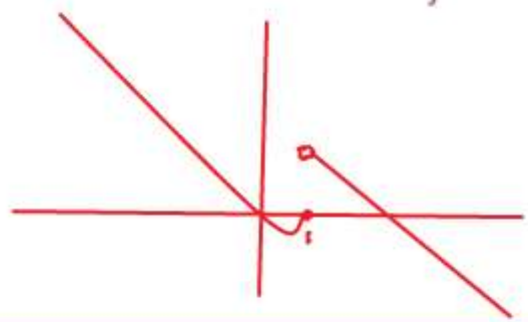
پ) $y=x-[x]$



در نقاط صحیح حد ندارد و در نقاط

$\lim_{x\to a}(x-[x])=a-[a]$ غیر صحیح

ت) $y=\begin{cases}x(x-1) & x\le 1\\ -x+2 & x>1\end{cases}$



در $x=1$ حد ندارد

مدرس: مزبان حبیبی — حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$

$g(1)=a$

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} (x+2) = 3$

$g(1) = \lim_{x\to 1} g(x) \Rightarrow a = 3$

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ a & x=1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

$f(1)=a$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x+2) = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x-1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$

$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow a=1$

مدرس: مزبان حبیبی   حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com   09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

ب) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$

$g(1)=a$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$

$g(a)=\lim\limits_{x\to 1} g(x) \Rightarrow a=3$

الف) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ a & x=1\\ -x+2 & x>1\end{cases}$

$f(1)=a$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x+2)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\Rightarrow a=1$

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

پ) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1\\ [x]+a & x\geq 1\end{cases}$

$h(1)=[1]+a=1+a$

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+a)=[1^+]+a=1+a$

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

$1+a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

$k(1)=(1-a)\times 1=1-a$

$\lim\limits_{x\to 1^+} k(x)=(1-a)\times 1=1-a$

$\lim\limits_{x\to 1^-} k(x)=(0-a)\times 0=0 \Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ وجود ندارد

تابع در $x=0$ حد ندارد پس به ازای هیچ a ناپیوسته است.

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax}{x} = a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ax}{-x} = -a$

اگر تابع در $x=0$ حد داشته باشد باید $a=0$ در نتیجه ناپیوسته است.

حسابان یک

مدرس: مزبان حبیبی

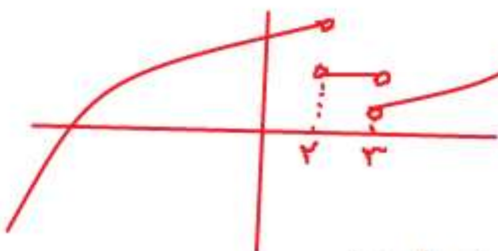
mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.



۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

تابع جزء صحیح در بازه $[۲, ۳)$ پیوسته است و در $x=۳$ و $x=۲$ ناپیوسته است. پس

$(۲, k) \subseteq [۲, ۳) \Longrightarrow \text{Max } k = ۳$

مدرس: مزبان حبیبی — حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com 09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$3-x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$

برای هر $a<b<3$ تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است مانند $[0,2]$.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0\\ b-1 & x=0\\ x-2a & x<0\end{cases}$$

در $x=0$ پیوسته باشد.

$f(0)=b-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0-2a = -2a$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2} \times \dfrac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$b-1 = -2a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

مدرس: مزبان حبیبی   حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com   09176193511

پایان