

جزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حمیدی

موضوع: حل تمرین فصل پنجم، حد و پیوستگی - حسابان یک یازدهم ریاضی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

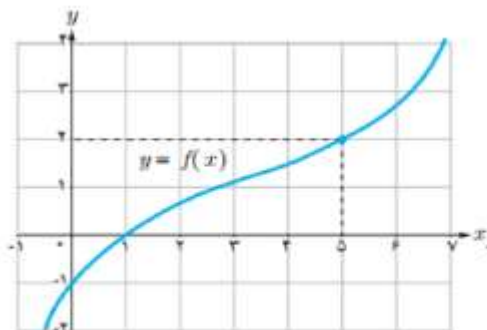


بسم الله الرحمن الرحيم

صحنه ۱۲۰ حسابان یک

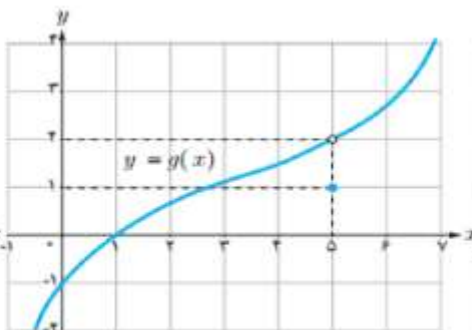
تمرین

۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه $x=5$ ، مشخص کنید.



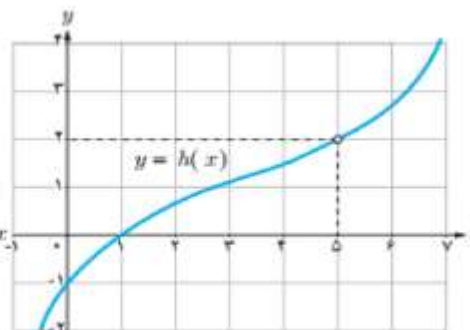
$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots ۲$$

$$f(5) = ۲$$



$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \dots ۲$$

$$g(5) = ۱$$



$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = \dots ۲$$

$$5 \notin D_f$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

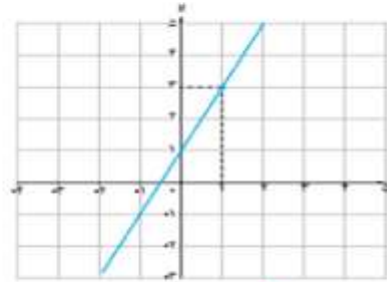
09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

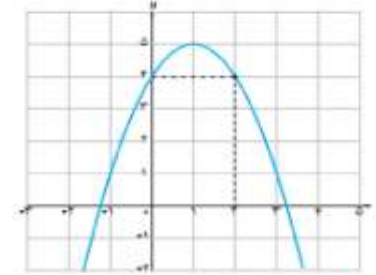


بسم الله الرحمن الرحيم

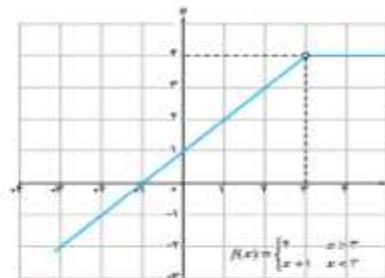
با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



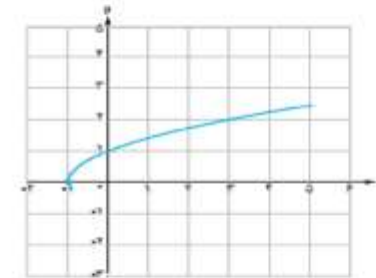
$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1) = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$$

مزبان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۲ با تکمیل هر یک از جدول های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x+4) = \dots$ **۴**

| | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|------|-------|-----------------|--------------------|------|-----|-----|---|
| x | -1 | -0/9 | -0/1 | -0/01 | $\rightarrow 0$ | $\leftarrow 0/001$ | 0/01 | 0/1 | 0/5 | 1 |
| $f(x)$ | ۷ | ۳٫۷ | ۳٫۷ | ۳٫۳ | $\rightarrow ?$ | $\leftarrow ۳٫۹۹۷$ | ۳٫۹۷ | ۳٫۷ | ۳٫۵ | ۳ |

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$ **-۵** . $f(x) = \begin{cases} x-4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

| | | | | | | | | | | |
|--------|----|------|------|-------|--------|------------------|---------------------|-------|------|------|
| x | -2 | -1/5 | -1/1 | -1/01 | -1/001 | $\rightarrow -1$ | $\leftarrow -0/999$ | -0/99 | -0/9 | -0/1 |
| $f(x)$ | -۶ | -۴٫۵ | -۵ | -۵٫۰۱ | -۵٫۰۰۱ | $\rightarrow ?$ | $\leftarrow -۴٫۹۹۹$ | -۴٫۹۹ | -۴٫۹ | -۴٫۱ |

مدرس: مزبان حبیبی **حسابان یک**

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



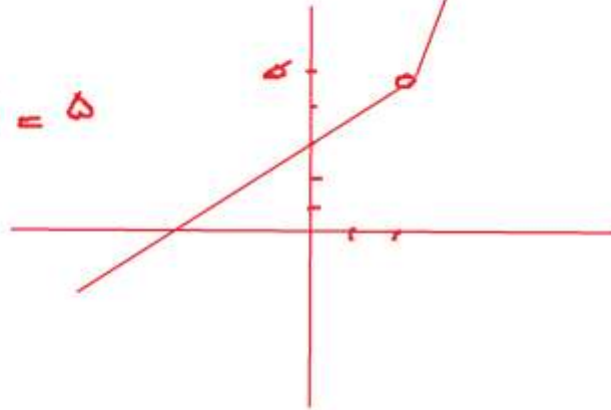
بسم الله الرحمن الرحيم

۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ ، تعریف شده است؟ خیر $2 \notin D_f$

ب) با رسم نمودار f و با نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$



مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

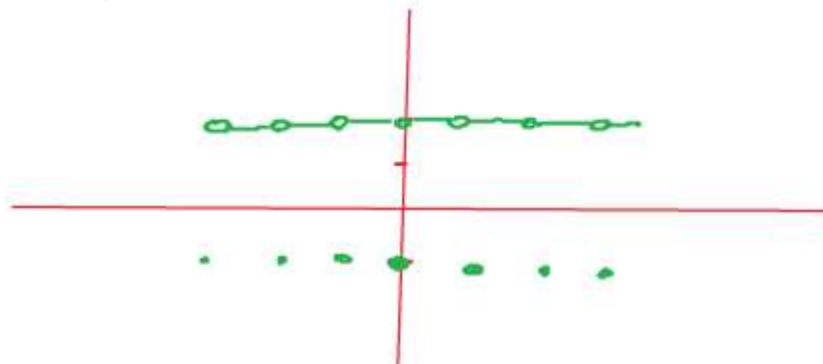
۵ تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$



حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۶ تابع f یا ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید :
 الف) دامنه تابع f را به دست آورید. $D_f = [-1, 1] - \{0\}$
 ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ $x = 0$
 پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ $بله$
 ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چگونه؟
 $خیر$

۷ اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow \begin{cases} 2 < 2x+3 \Rightarrow -1 < 2x \Rightarrow -\frac{1}{2} < x & \text{①} \\ x-1 < 2 \Rightarrow x < 3 & \text{②} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, 3)$$

حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

کارد در کلاس

صفحه ۱۲۵ حسابان یک

۱ با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$$

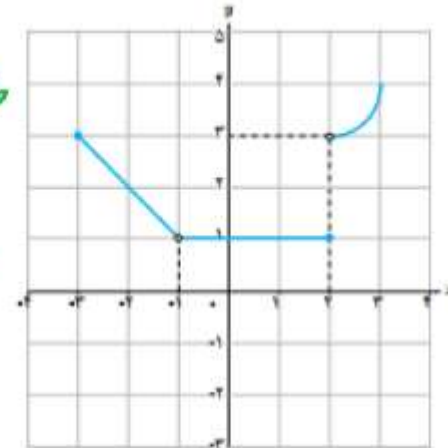
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

کارد ر کلاس

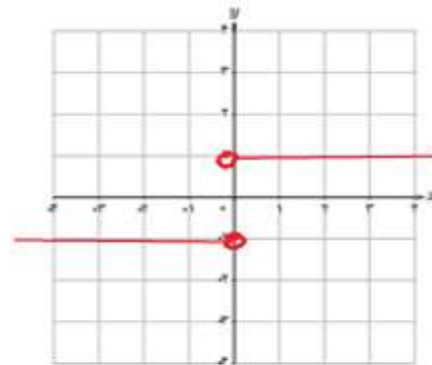
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

1 تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید :

(الف) با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع f را به صورت دوضابطه ای بنویسید.
(ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

(پ) با استفاده از نمودار f ، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به دست آورید.

(ت) آیا تابع f در نقطه صفر حد دارد؟ چرا؟ نه



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

صنعت ۱۳۷ حسابان یک

تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

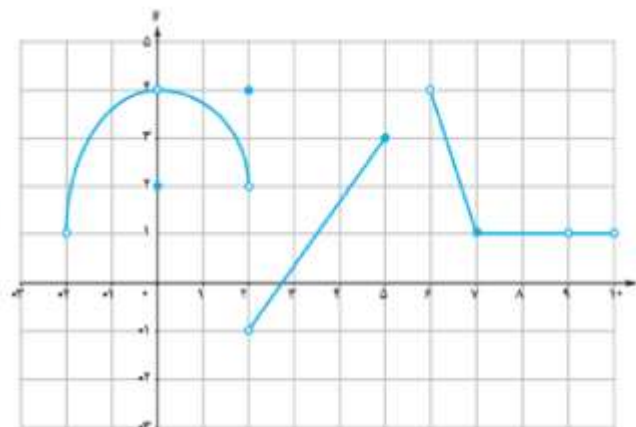
ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ وجود ندارد

ن) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) =$ وجود ندارد

ن) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 1$



مزبان حبیبی
مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ x^2+2x & x < 0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد 0 نزدیک می شوند، بنابراین :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

ب) حد راست تابع f در نقطه $x=0$ را به دست آورید .

پ) آیا تابع f در نقطه $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

برای $x \rightarrow 0^+$ $f(x) = 1$
چون حد چپ و راست برابر نیستند.

حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

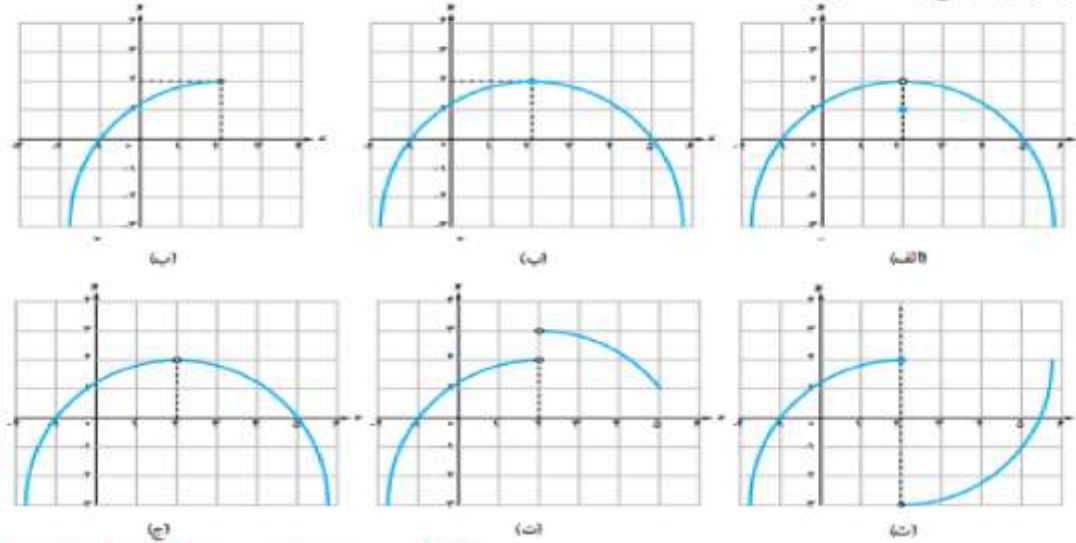
09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۲ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



- تابع در همسایگی محدوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. **الف - ب - پ - ت - ج**
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. **الف - ج**
- تابع در همسایگی جب ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. **ب - ت - ج**
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. **ب**
- تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. **ج**
- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. **ت - ج**

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x=1$ چه می توان گفت؟ *صبر کنید*

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x=0, 1$$

| | | | | |
|-----------|-----------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $x^2 - x$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ |

$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ *صبر کنید*

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می توان گفت؟

$$[x]-2 = 0 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

تابع در $x=2$ تعریف نمی شود پس در $x=2$ صبر کنید

حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



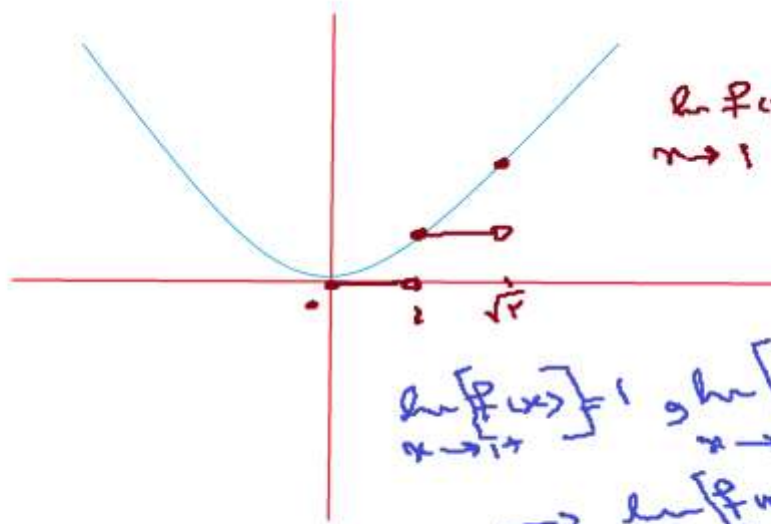
بسم الله الرحمن الرحيم

با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

([] نماد جزء صحیح است)



$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right] = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = 2$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$ (چون مقدار رار)

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

14 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



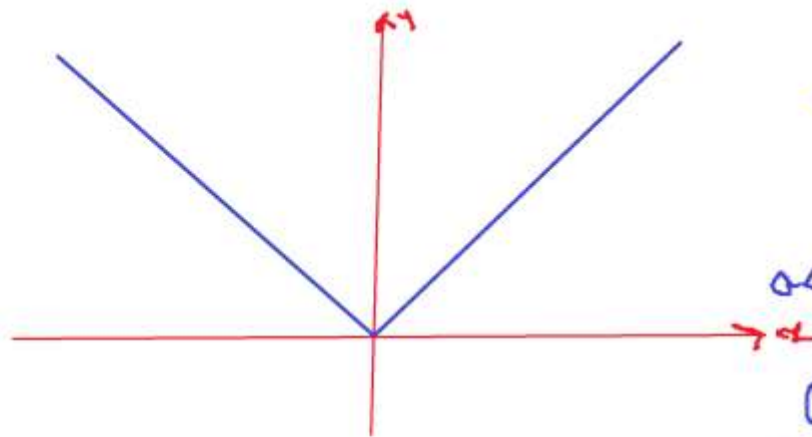
بسم الله الرحمن الرحيم

✓ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ را به دست آورید.

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ برقرار است؟

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$



$a > 0 \Rightarrow |x| = x$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |x| = \lim_{x \rightarrow a} x = a = |a|$

$a < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$\lim_{x \rightarrow a} |x| = \lim_{x \rightarrow a} (-x) = -a = |a|$

مزبان حبیبی مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



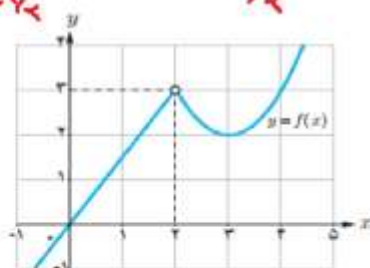
الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} x^4 = (\lim_{x \rightarrow -1} x)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1)^3 - 6|1| + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 4}{4x^2 - 7x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 7x + 1)} = \frac{4 + 8 + 4}{16 - 14 + 1} = \frac{16}{1}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - [x]}{1 - x} = \frac{\frac{1}{2} - [\frac{1}{2}]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = 1$$



ب) نمودار تابع f در شکل روبه رو رسم شده است.

مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} x f(x)$ را بیابید.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک



مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \pi \cos x}{\lim_{x \rightarrow -\pi} x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi(-1)}{-\pi} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



صحنه ۱۳۹ صحنه یک

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^2 = (\sqrt{9} - 9)^2 = (-2)^2 = 4 \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} (-6x^5 - 4x^2 + 5) = -6(-1)^5 - 4(-1)^2 + 5 = 6 - 4 + 5 = 7$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^2 + 1)} = \frac{0}{1 \times 6} = 0 \quad \text{ن) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 2} = \frac{1 - 2}{2 - 2} = \frac{-1}{0} = -\infty \quad \text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 0} = \frac{2}{\pi} \quad \text{ح) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

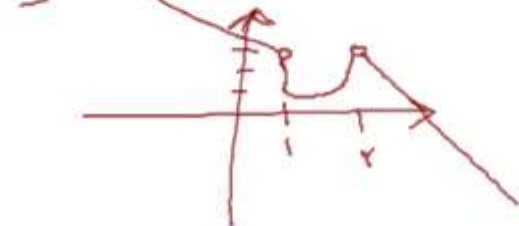
09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟



تابع g را به گونه ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12$$

- $g(x) = x^2 + 4$
- $g(x) = 4x^2$
- $g(x) = x + 10$
- $g(x) = x^2 + 8$

نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$$

مزبان یک مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

$\lim_{x \rightarrow 1} (3x+2) = 3(1)+2=5$
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 1^2-1=0$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1) = -1$

$y = 3x+2$, $y = x^2-1$, $y = [x]-1$

$y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1} y = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 1} y = -2$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.
 ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

| | | | |
|--|--------------|---|---|
| $f(x)+g(x)=\dots$ | $g(x)=x^2-1$ | $f(x)=3x+2$ | هر سه تابع f ، g و $f+g$ در 1 حد دارند. |
| $f(x) \cdot g(x)=\dots$ | $g(x)=x^2-1$ | $f(x)=x-1$ | تابع $f \cdot g$ در 1 حد دارد اما تابع f در 1 حد ندارد. |
| $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{x^2-1}$ | $g(x)=x^2-1$ | $f(x)=3x+2$ | توابع f و g در 1 حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در 1 حد راست ندارد. |
| $f(x)=x+1$ | | $f(x)=\begin{cases} x-1 & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ | تابع f در 1 حد دارد اما تابع f در 1 حد ندارد. |
| $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x+1}$ | | $f(x)=x^2-1$ | تابع f در 1 حد دارد اما تابع \sqrt{f} در 1 حد ندارد. |

مزبان یک مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می توان گفت؟ همه اراد.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-1$ حد داشته باشد:

بعضی صفت: اگر f و g در a حد داشته باشند؛ نه

~~$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)+g(x)) - f(x) =$~~ ~~صورتها~~

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3(-1) + b = b - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{(-1) + \lfloor -1 \rfloor}{-1 - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

$$b - 3 = -1 \Rightarrow b = 2$$

حسابان یک مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

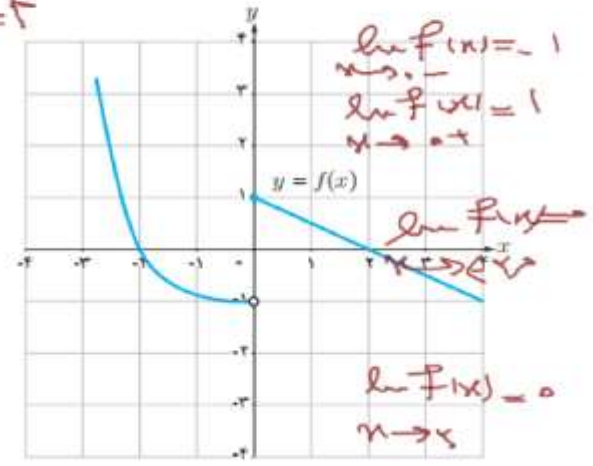
در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) - \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} -3\sqrt{g(x)} = -3\sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} g(x)} = -3\sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\Lambda g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} \Lambda g(x)} = \sqrt[3]{\Lambda \cdot 2} = \sqrt[3]{2\Lambda}$$



mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

22 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



صفحه ۱۴۱ حسابان یک

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{4 - 8 + 4}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$$

$x \rightarrow 2 \Rightarrow$ عامل $(x-2)$ را حذف می‌کنیم

$x \rightarrow 2 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow (x-2) \neq 0$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

کاردکلاس

ص ۱۴۲ حاصل کن

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x - 5} - 2} \times \frac{\sqrt{3x - 5} + 2}{\sqrt{3x - 5} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{(3x-5) - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3(x-3)} = \frac{6 \times 7}{3} = 14$$

مثال:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times 0 = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



صفحه ۱۴۳ کتاب کیند

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x} = \frac{2}{2} = 1$$

نکته: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

❖ حل: قرار می دهیم: $t = \sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می شود و داریم $x = t^2 - 1$ و بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

مقدار جدهای زیر را بیابید. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1 - \cos x}{|1 - \cos x|} = 1$ ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$

د) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + 1}{\frac{\pi}{2} + \pi} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$

ه) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} = \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})}{6 \cdot \frac{\pi}{6} - 2\pi} = \frac{\sin(-\frac{\pi}{6})}{\pi - 2\pi} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\pi} = \frac{1}{2\pi}$

و) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2\sqrt{x+1}}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{\sin^2 x} = 2$

$-1 < \cos x < 1$

Act

مدرس: مزبان حبیبی حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



بسم الله الرحمن الرحيم

صورتها صواب و نادرست

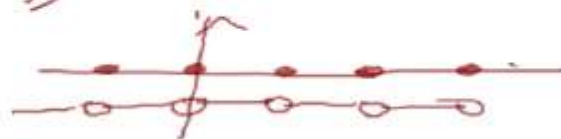
تمرین

1 با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = |x - 1| + 2$ $Q_1(a-1, 2) = |a-1| + 2$
 $x \rightarrow a$

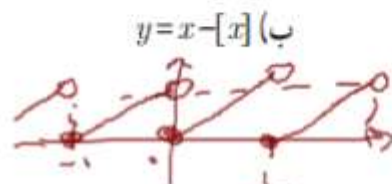
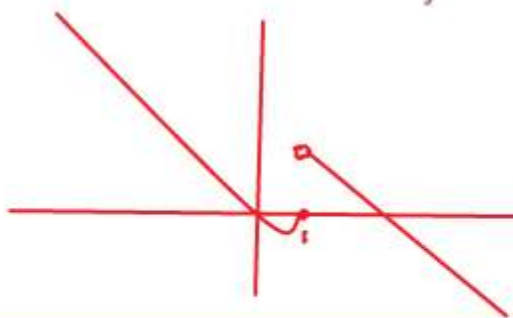
ب) $y = [x] + [-x]$

$Q_1([x] + [-x]) = -1$
 $x \rightarrow a$



ج) $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$

در $x=1$ ناپیوستگی دارد



$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

در نقاط صحیح صفرند و در نقاط صحیح دیگر -1

صورت نادرست: $Q_1(x - [x]) = a - [a]$
 $x \rightarrow a$

مزبان یک مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

28 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad \text{ب) } g(1) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases} \quad \text{الف) } f(1) = a$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow a = 1$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad \text{ب) } g(1) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases} \quad \text{الف)$$

$$f(1) = a$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow a = 1$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

30 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

$$h(1) = [1] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] + a) = [1^+] + a = 1 + a$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 < x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases} \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$k(x) = ([x] - a)[x] \quad (ت)$$

$$k(1) = (1 - a) \times 1 = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = (1 - a) \times 1 = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = (0 - a) \times 0 = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ و چون $1 \neq 0$ و $1 \neq a$ و $0 \neq a$

توابع در $x=0$ حد ندارد پس به اندازه ∞ ناپویج است.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

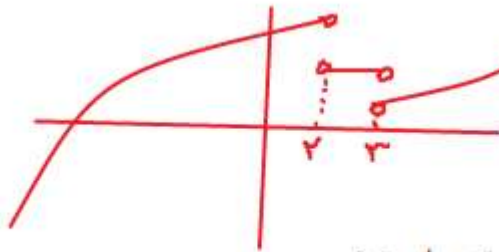
$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$

اگر $a=0$ حد دارد به 0 ناپویج است. اگر $a \neq 0$ حد ندارد پس به ∞ ناپویج است.

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک



- ۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.
ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.
پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.



- ۵ تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

دامنه پیوستگی در $x=2$ و $x=3$ است پس

$$(2, k) \subseteq [2, 3) \Rightarrow \text{Max } k = 3$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۶ بازه بسته ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

برای هر $a < b < 3$ مع f در بازه $[a, b]$ پیوسته است. [۲ ز]

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x > 0 \\ b-1 & x = 0 \\ x-2a & x < 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(0) = b-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 2a = -2a$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2} \times \frac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

مدرس: مزبان حبیبی
حسابان یک

$$b-1 = -2a = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$$

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



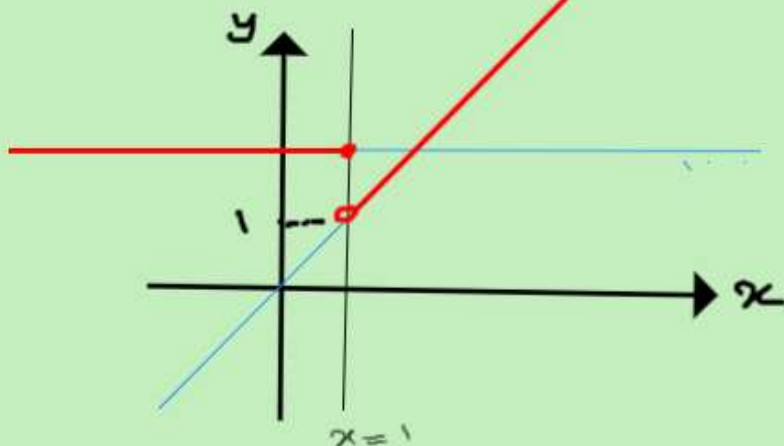
دکتر مزبان حبیبی
مزبان تکمیلی

35 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 2 & x \leq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.



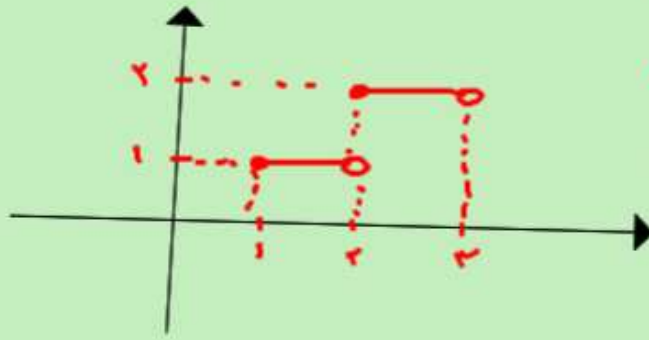
$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2$$

مزبان حبیبی



مثال: نمودار و رسم رتبع $f(x) = [x]$ را در هم گسسته $x=2$ بررسی کنید.



$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow [x] = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

معماری: $m \in \mathbb{Z}$

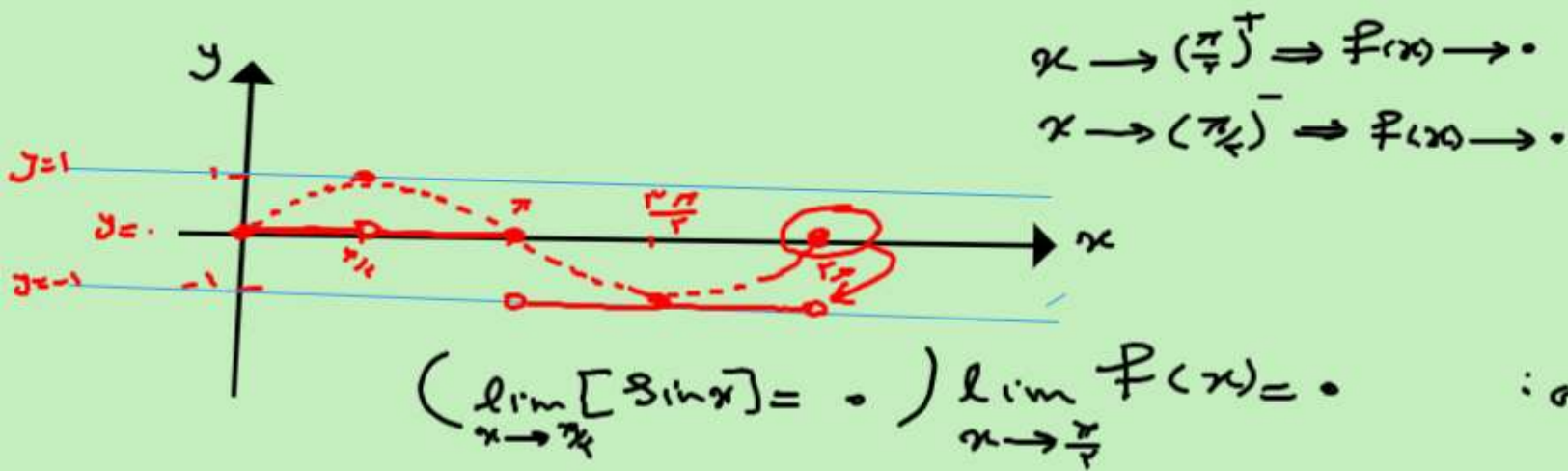
$$m \leq x < m+1 \Rightarrow [x] = m$$

$$[7,4] = 7, [2,3] = 2, [-3] = -3, [5] = 5$$

مزبان حبیبی

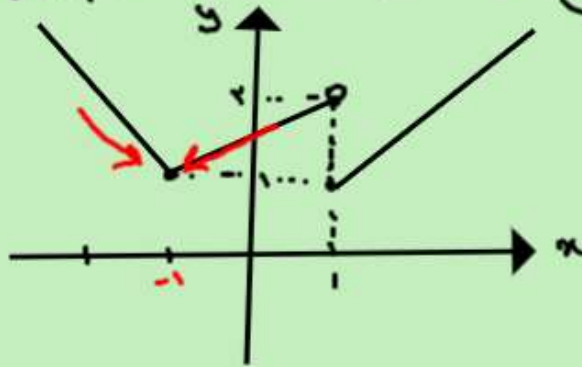


مثال ۳: رفتار و نمودار تابع $f(x) = [\sin x]$ را در همایگی $x = \frac{\pi}{4}$ بررسی کنید





مثال ۵: کونار تابع f بصورت زیر است. حد و خواجه شد را در صورت وجود بیویس.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

مزبان حبیبی



مثال ۶: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$ را در حد اول و دوم بیابید.

$$x \rightarrow 0^+ : - < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{[x]}{x} = 0 \cdot < x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$$

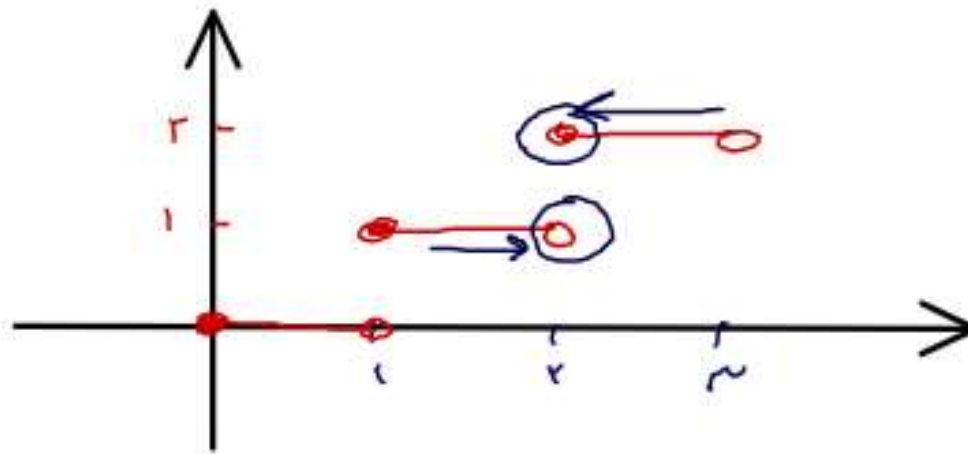
مثال ۷: $g(x) = \frac{|x|}{x}$

$$\begin{aligned} x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \text{وجود ندارد}$$

مزبان حبیبی



مثال: حد $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ را در صورت وجود بیابید.

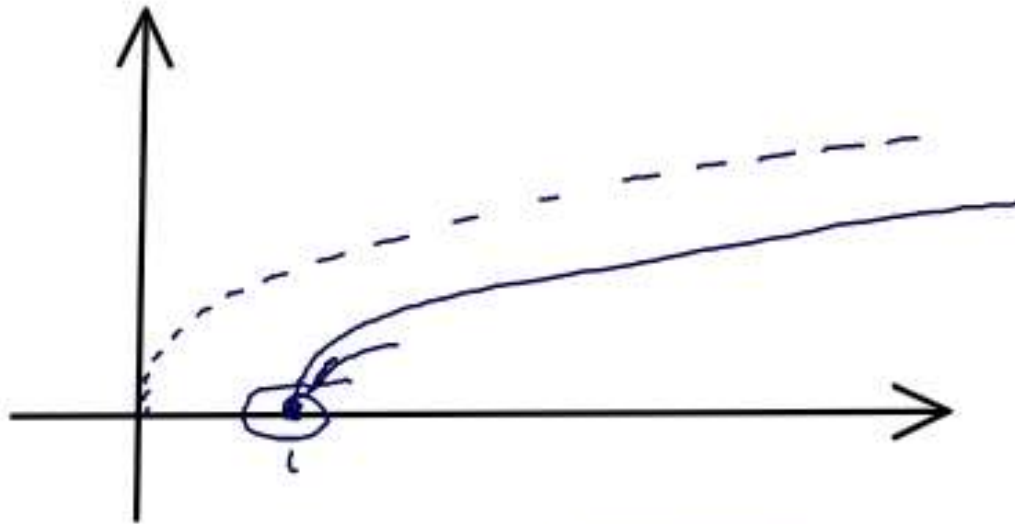


$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2} [x] &= \text{وجود ندارد} \end{aligned}$$



مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1}$ را در صورت وجود تعیین کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \text{وجود ندارد}$$



مثال:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = \lim_{x \rightarrow 2} 3 \times \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 3 \times 2^2 = 12$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)} = \frac{3}{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1)} = \frac{4}{5}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (x - x^2) = \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2 - 4 = -2$$



نتیجه:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} r x^r = \lim_{x \rightarrow a} r \times \lim_{x \rightarrow a} x^r = r \times r a = r a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{r x + 1}{x^r + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (r x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^r + 1)} = \frac{r}{r}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r}{x^r + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow r} x^r}{\lim_{x \rightarrow r} (x^r + 1)} = \frac{r}{r}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow r} (x - x^r) = \lim_{x \rightarrow r} x - \lim_{x \rightarrow r} x^r = r - r = 0$$



مثال :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)^5 = \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) \right)^5 = 2^5 = 32$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1)} = \frac{1}{5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x-1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)} = \sqrt{3} = 3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (-\sqrt{2x}) = - \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x} = -\sqrt{2}$$



سؤال :

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{r \sin x + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{r \sin \frac{\pi}{4} + 1} = \frac{1}{r}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin^r x = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \right)^r = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) &= \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} r \sin^r x - \sin x + 1 &= r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^r - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ &= \frac{r}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



دکتر مزبان حبیبی

47 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 2} = \frac{2^2 - 9}{2^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

صفر

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{1} = 5$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow x - 2 \neq 0$$

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \quad a \neq 0$$

توجه:



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

مسئله ۲:
بصورت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 20}{x^2 - x - 20} = \frac{0^2 - 20}{0^2 - 0 - 20} = \frac{0}{0}$$

مسئله ۳:
بصورت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 20}{x^2 - x - 20} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-0)(x+0)}{(x-0)(x+20)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+0}{x+20} = \frac{0}{20} = \frac{1}{9}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x - 0 \neq 0$$



نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2^2 + 2 - 2}{2^2 - 4} = \frac{14 - 2}{14 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) \cdot \cancel{(x-2)} \cdot \cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)} \cdot \cancel{(x+2)} \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+2} = \frac{4}{4} = 1$$

عوامل یکسان $x \rightarrow 2 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow (x-2) \neq 0$



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 9}{x^2 - 9} = \frac{3^2 - 4(3) + 9}{3^2 - 9} = \frac{9 - 12 + 9}{9 - 9} = \frac{0}{0} = \text{نیل}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 9}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$$

$$x \rightarrow 3 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow x - 3 \neq 0$$



تذکر: اگر حد دراریکول بود و $\frac{0}{0}$ شود، ابتدا باید
کطیف راریکول را روشن کرد (گویا کنیم)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{\sqrt{1+3} - 2}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{نقشه ۷}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 0$$



$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{x^2 - f}{\sqrt{rx+d} - r} = \frac{r^2 - f}{\sqrt{r(r)+d} - r} = \frac{0}{0} \quad \text{شکل ۰/۰}$$

$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{x^2 - f}{\sqrt{rx+d} - r} \times \frac{\sqrt{rx+d} + r}{\sqrt{rx+d} + r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{(x^2 - f) \cdot (\sqrt{rx+d} + r)}{(rx+d) - r^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow r} \frac{(x-r)(x+r)(\sqrt{rx+d} + r)}{r(x-r)} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{(x+r)(\sqrt{rx+d} + r)}{r}$$

$$= \frac{f \times 9}{r} = 12$$

$$x \rightarrow r \Rightarrow x \neq r \Rightarrow (x-r) \neq 0$$



شماره ۹:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin(0)}{2(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x} = 1 \times \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = \frac{n}{n}$$

شماره ۱۰:

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

$$\cos 0 = 1 \quad \text{و} \quad 1 - \cos u = 2 \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right)$$

سؤال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} \times \frac{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$





مثال: پیوستگی تابع $F(x) = (x-2)[x]$ در $x=2$

و $x=1$ بررسی کنید.

$x=2$:

$$F(2) = (2-2)[2] = 0 \times 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = (2^+ - 2) \times [2^+] = 0 \times 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = (2^- - 2) \times [2^-] = 0 \times 1 = 0$$

تابع $F(x) = (x-2)[x]$ در $x=2$ پیوسته است.

$x=1$: $F(1) = (1-2)[1] = -1 \times 1 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = (1^+ - 2) \times [1^+] = -1 \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = (1^- - 2) \times [1^-] = -1 \times 0 = 0$$

ناپیوسته است



مثال: بیست و ششم

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 2 \\ 2x - 1 & x < 2 \end{cases}$$

را در $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = x^2 - 1 = 3$$

عکس از تابع

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

صورت

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 1) = 3$$

صورت

تابع f در $x = 2$ پیوسته است.



مثال: بیرونی تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 4 & x = 2 \\ x^2 - 5 & x < 2 \end{cases}$$

را در $x=2$ بررسی کنید.

$$f(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 5) = 4 - 5 = -1$$

تابع f در $x=2$ ناپیوسته است.

حرف: تابع f در $x=2$ ناپیوسته است اما از چپ پیوسته است.
(پیوستگی چپ دارد)

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: بار رسم نمودار تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ x-1 & x \leq 1 \end{cases}$$
 پیوستگی این تابع

برای $x=1$ بررسی کنید.

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

$$x \rightarrow 2^+$$

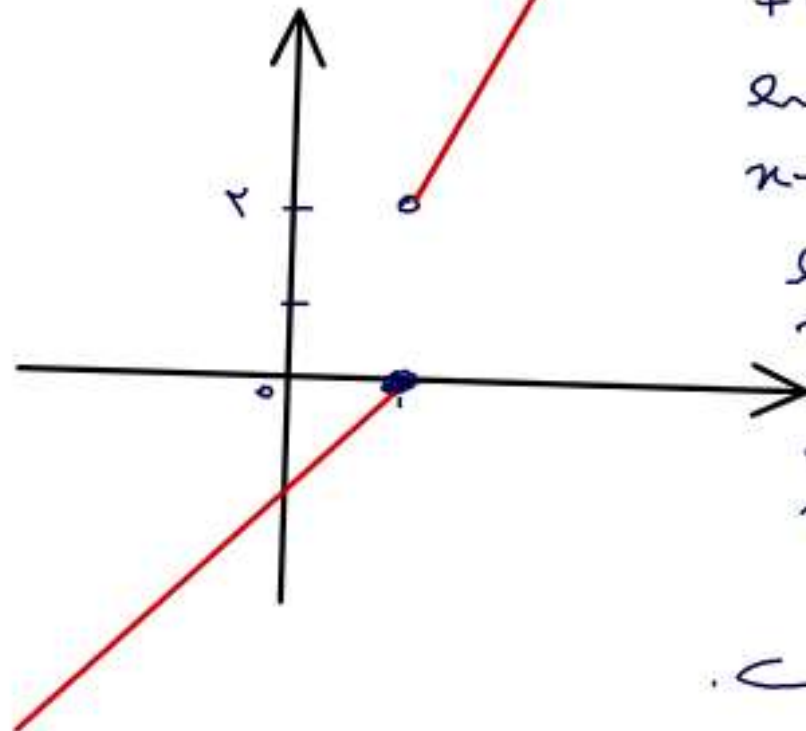
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$x \rightarrow 1$$

تابع در $x=1$ پیوسته است.





$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases} \quad \text{مثال}$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

نتیجه در $x=2$ نیز یونیک است و نه بی یونیک است و نه هیچ.

$$|x-1| = \begin{cases} (x-1) & x \rightarrow 1^+ \\ -(x-1) & x \rightarrow 1^- \end{cases} \quad \text{موجب}$$



تمرینات کت - ریاضی صحنه ۱۴۲ حل شود.

تمرین: آر تیج ۲ در $x=2$ پیوسته است

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ x^2 + b & x < 2 \end{cases}$$

آر تیج ۲، a و b را بیابید.

$$f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + b$$

در $x=2$ پیوسته است

$$\Rightarrow 2a + 2 = 4 + b$$

$$4 + b = 2a + 2 \Rightarrow b = 2a - 2$$

$$2a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پایان

دکتر مزبان حبیبی