

جزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

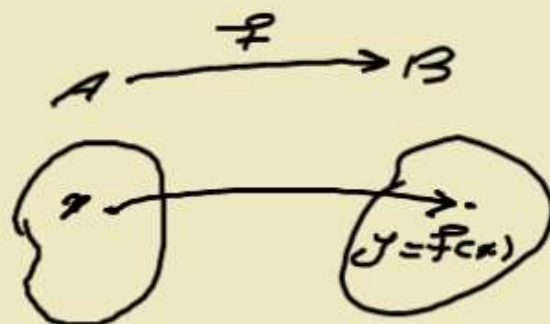
مدرس: مزبان حمیدی

موضوع: فصل دوم، تابع - حسابان یک یازدهم ریاضی



یادآوری

تعریف تابع:



رابطه های است از مجموعه

A به B که بزرگتر و عضو

از A در متعلقه یک عضو از B داشته باشد.

که تنها

بزرگی

صن بطه تابع \equiv حوله تابع \equiv دسکو تابع $y = f(x)$

مثال . $f(x) = x + \sqrt{x}$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2-2}$$

$$h(x) = x^2 - x + 1$$

$$k(x) = 2^{x-1}$$

مزبان حبیبی





تابع خاص:

$$y = ax + b$$

a = شیب خط

b = عرض از مبدا

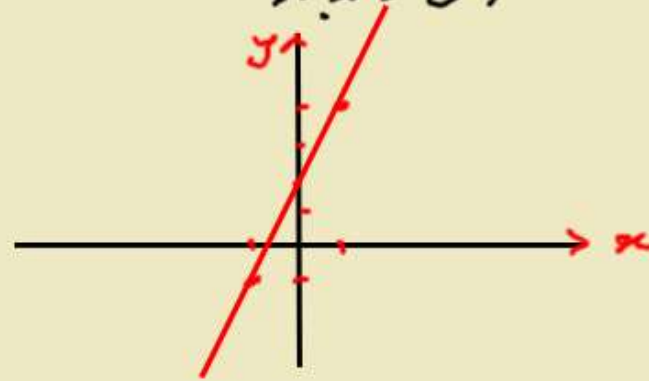
۱- تابع خطی

مثال:

$$y = 3x + 2$$

$3(-1) + 2$
 $3(1) + 2$

x	-1	1
y	-1	5



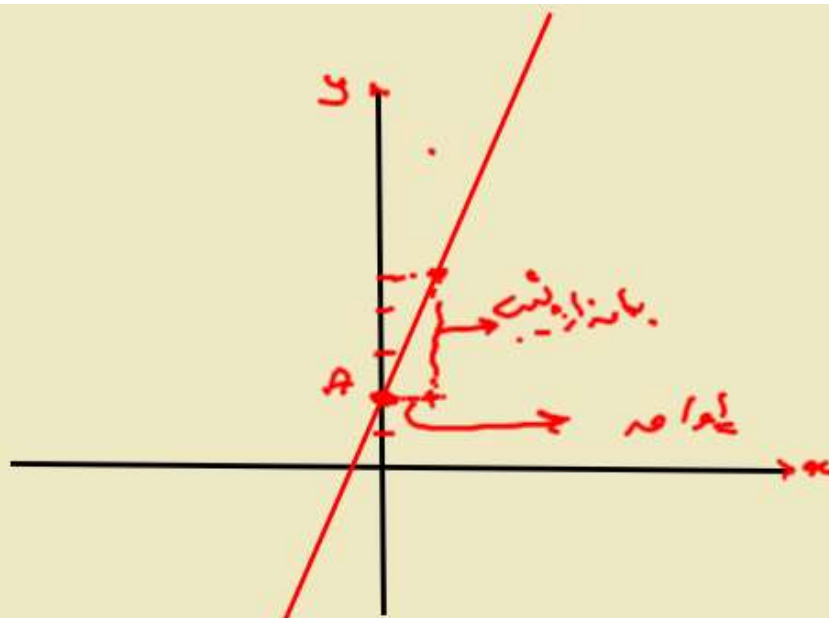
مزبان حبیبی



$$y = 3x + 2$$

$3 = \text{شیب}$ ✓

$2 = \text{ممن از شیب}$!



مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$y = 2x - 1 \quad \text{را رسم کنید}$$

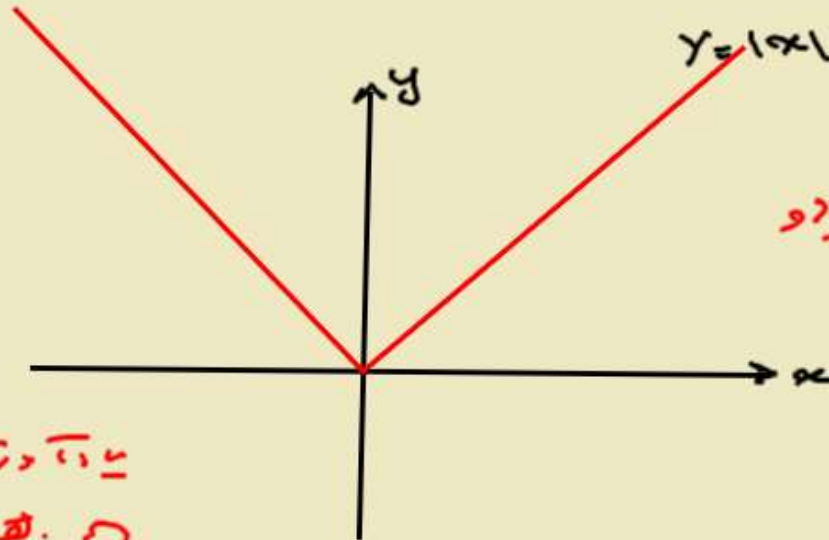
تگ های: حفظ

مزبان حبیبی



ع-۲

$$y = |x|$$



مجموع زندگانی است و دو

$$D_y = \mathbb{R}$$

$$R_y = [0, +\infty)$$

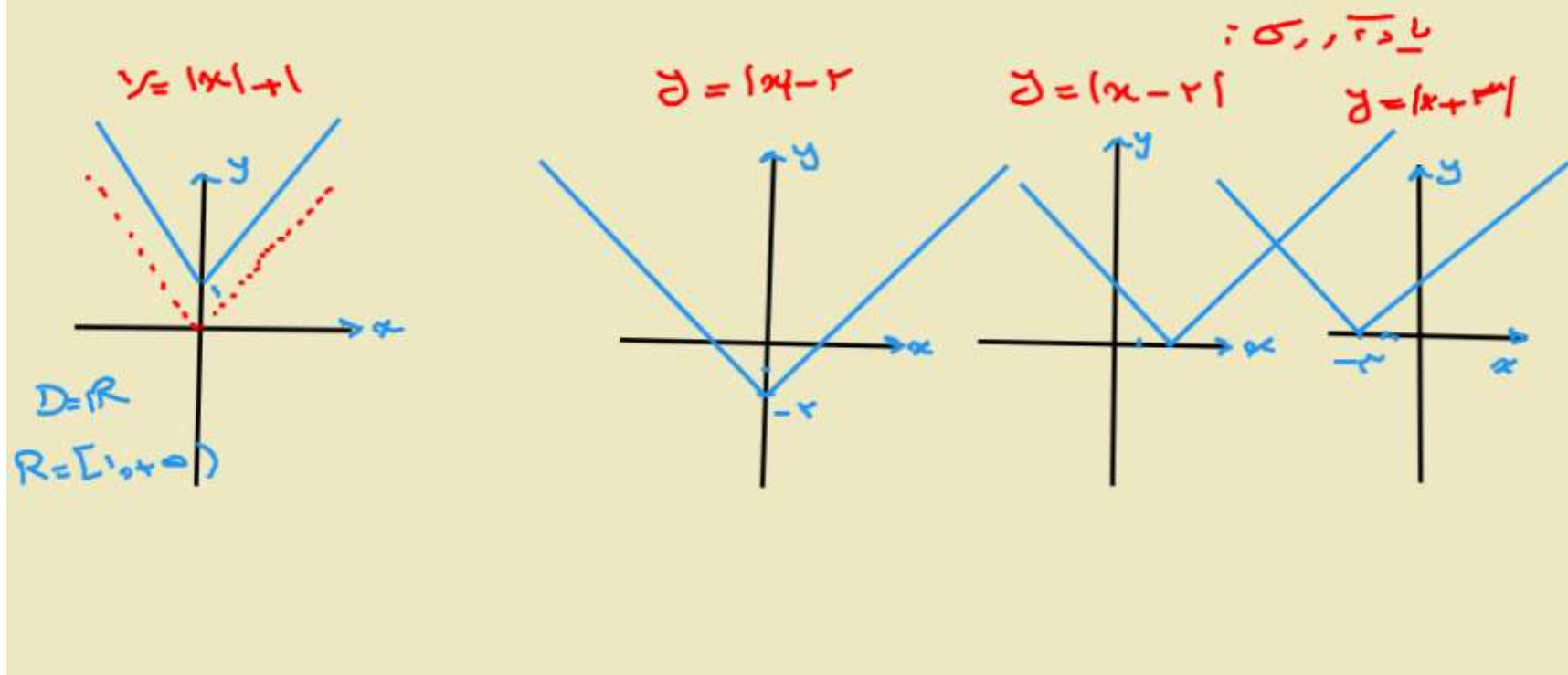
میان آردی :

تصویر روی محور y ها

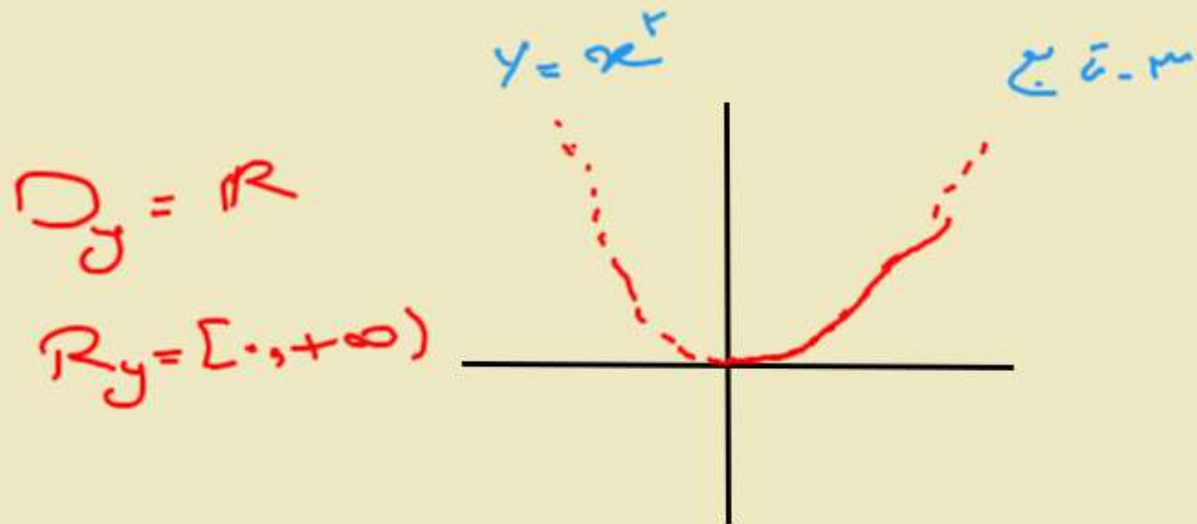
تصویر روی محور x ها

بزرگی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



توجه منی!؛ محو مدارتدابع زیر را رسم کنید -

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 - 2$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-2)^2 - 1$$

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



معلمین! خود را تابع $y = x^2 - 2x$ را رسم کنید

مزبان حبیبی



۴- تابع $y = \frac{1}{x}$ (تابع گوی) (

حره تابع کبره که صورت و مخارج آن چند وجهی باشد را تابع گوی می گویند:

$$y = \frac{3x-1}{x+2} \quad \text{نمونه}$$

$$y = \frac{1+x^2}{x^5-1} \quad \left(y = \frac{1}{x} \right)$$

$$y = \frac{2x-1}{5}$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+x+5}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}x+2}{\frac{1}{5}x-\sqrt{2}}$$

بزرگی



ناتش: ۱) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2}$ ✓

۲) $y = \frac{\sqrt{3}x-1}{\pi x+2}$ ✓

۳) $y = \frac{\sqrt{3}x-1}{x+2}$ ✗

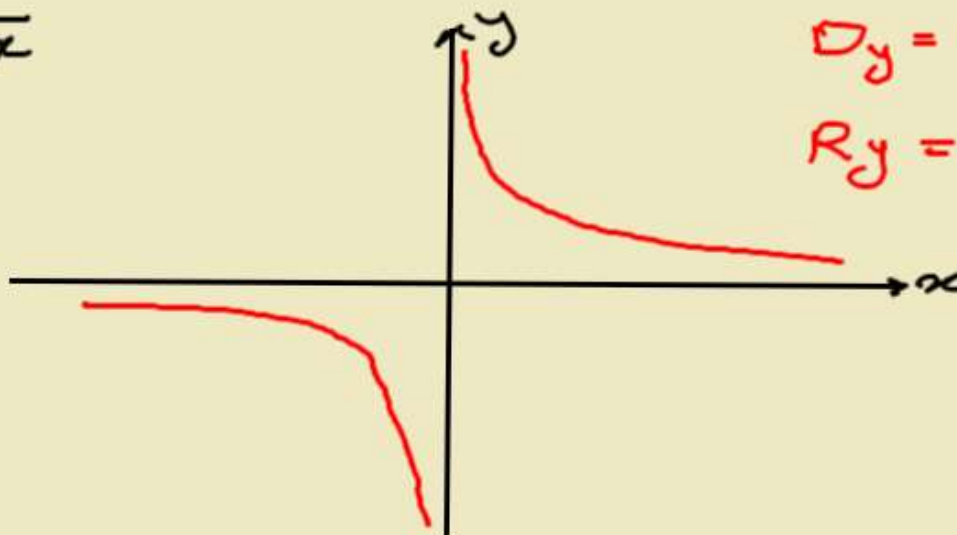
۴) $y = \frac{x^2-1}{2x+1}$ ✗

بزرگی



مثال: $y = \frac{1}{x}$

$$y = \frac{1}{x}$$



$$D_y = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_y = \mathbb{R} - \{0\}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تذکره:

معمولاً تابع را بصورت

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \dots \\ D_f = \dots \end{array} \right.$$

نمایش می دهیم.

اما؛ محدود کردن دامنه می توان تابع دیگری را صرفاً (تجزیه و تحلیل)

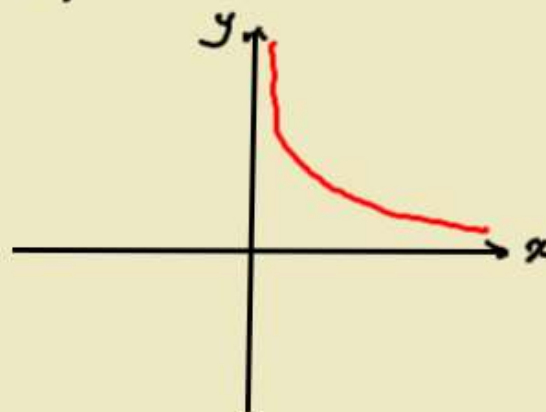
بیدی



مثال : تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ D = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ D = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \end{array} \right.$$

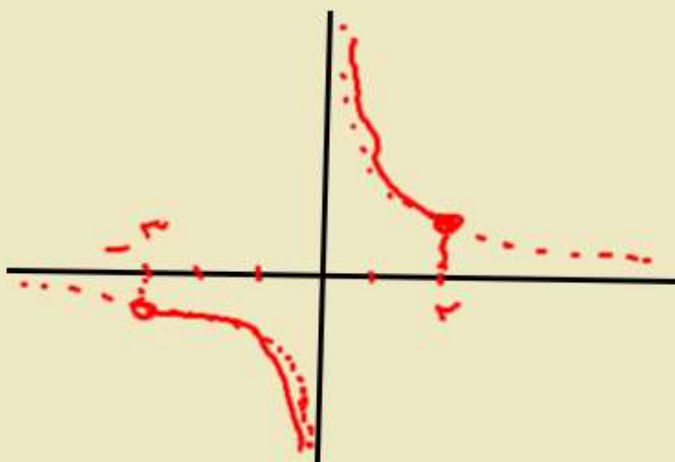


مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نشانده: $f(x) = \frac{1}{x}$
 $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



مزبان حبیبی

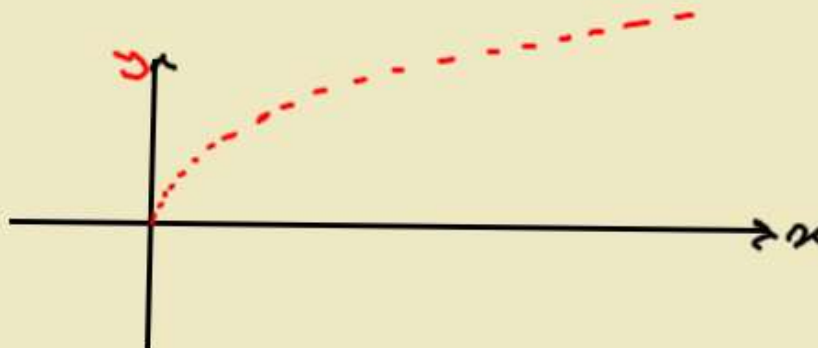


۵- تابع رادیکالی:

$$y = \sqrt{x}$$

$$D = [0, +\infty)$$

$$R = [0, +\infty)$$

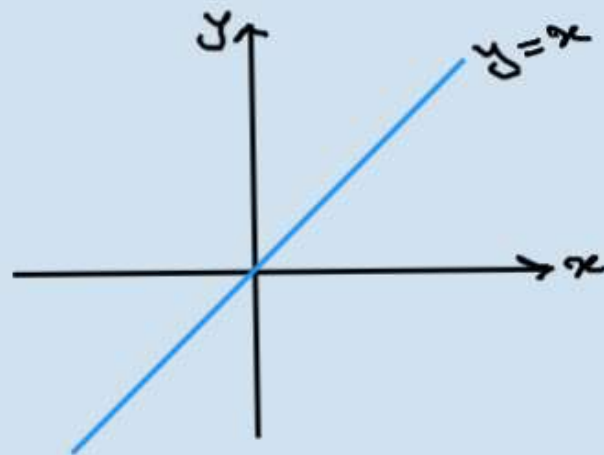


مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$y = x$
یعنی: نقطه اول و سوم



یادآوری:

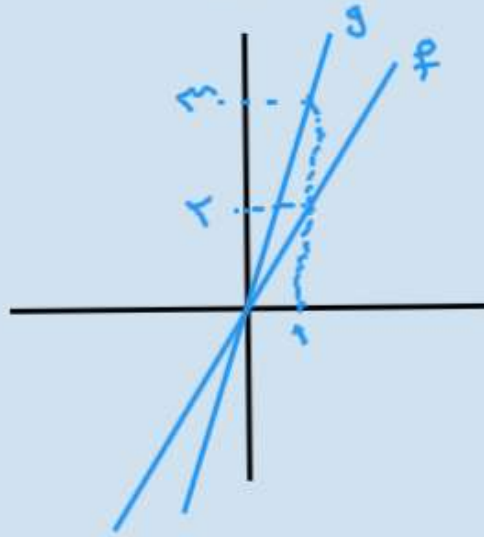
نقطه دوم $\Rightarrow x = a$
نقطه چهارم $\Rightarrow y = 0$

مزبان حبیبی



تذکر: توابع $f(x) = mx$ ، توابع خطی هستند که از مبدأ می‌گذرند.

مثال:



$$f(x) = mx \Rightarrow f(x) = 2x$$
$$g(x) = mx \Rightarrow g(x) = x$$

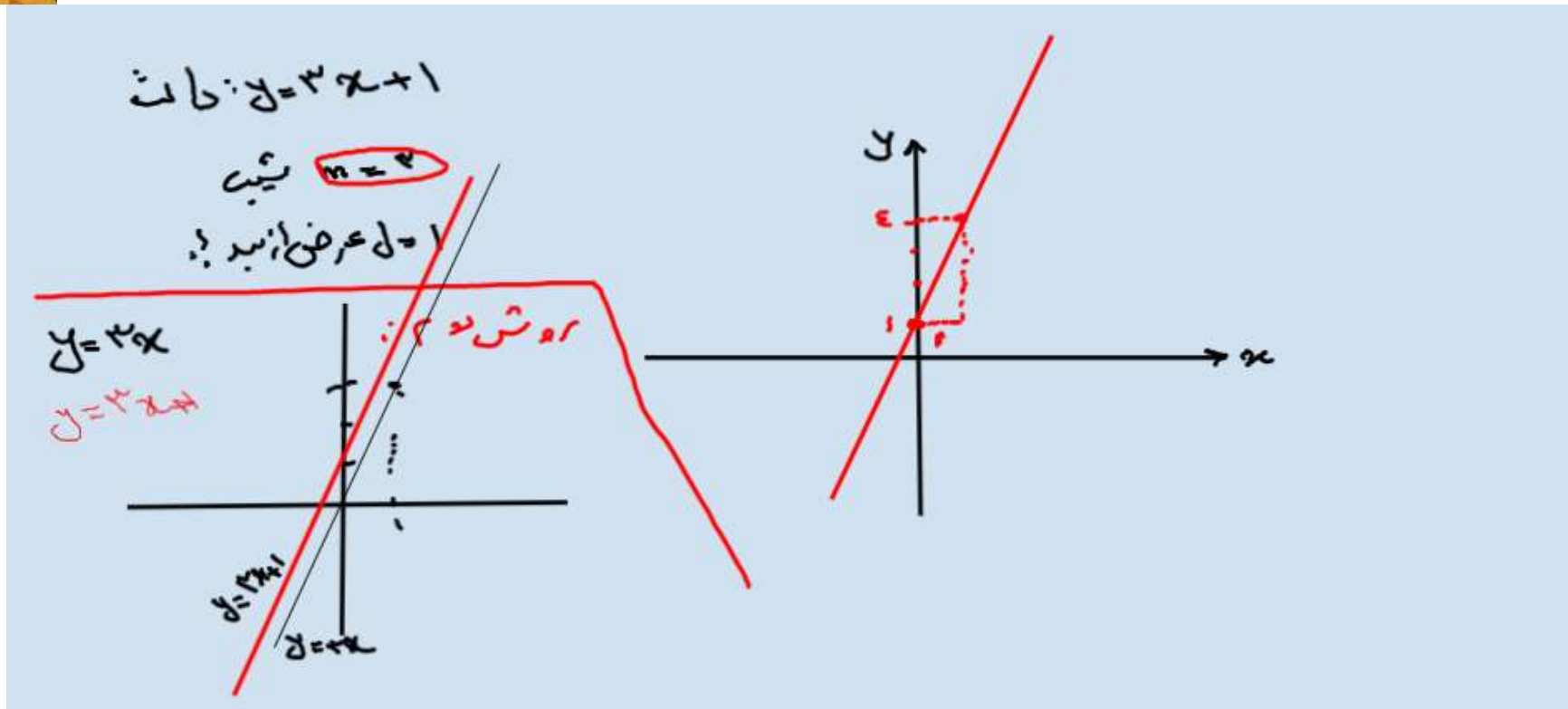
$$\text{مثال: } f(x) - g(x) = -x$$

$$y = -x$$

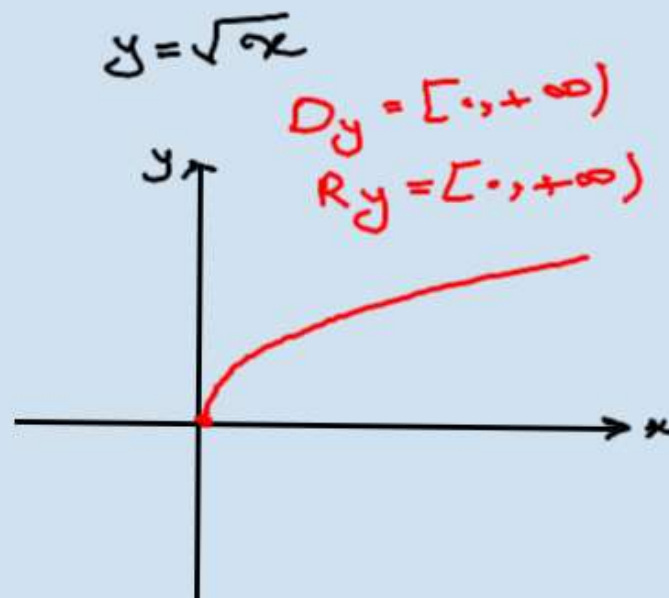
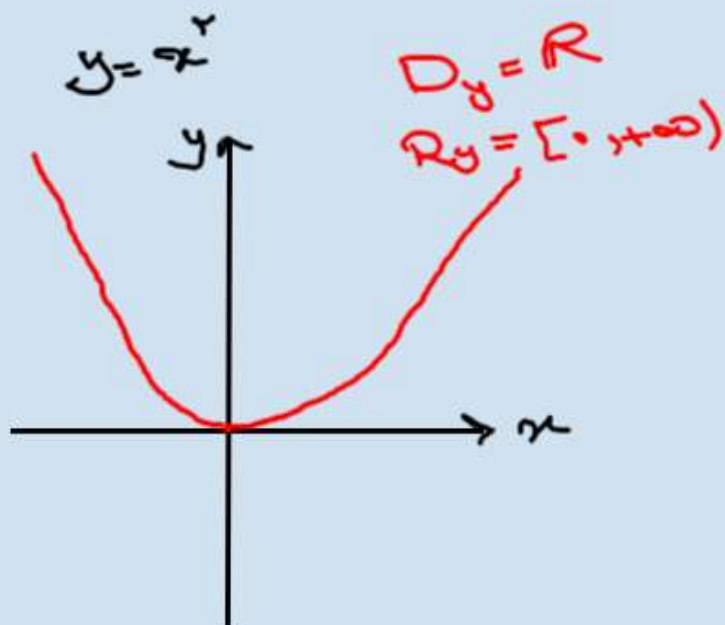
$$y = f(x) \cdot g(x) = 2x \cdot x = 2x^2$$

مزبان حبیبی

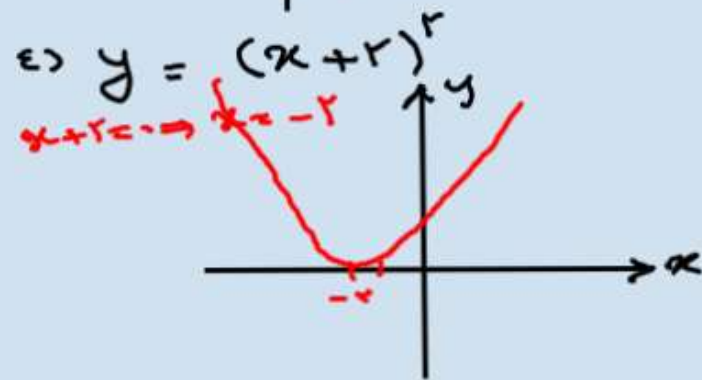
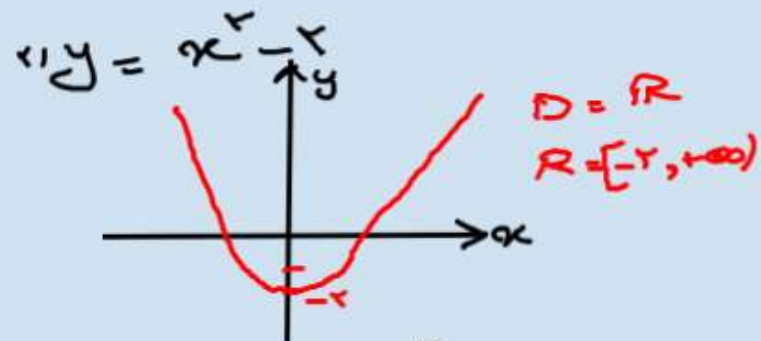
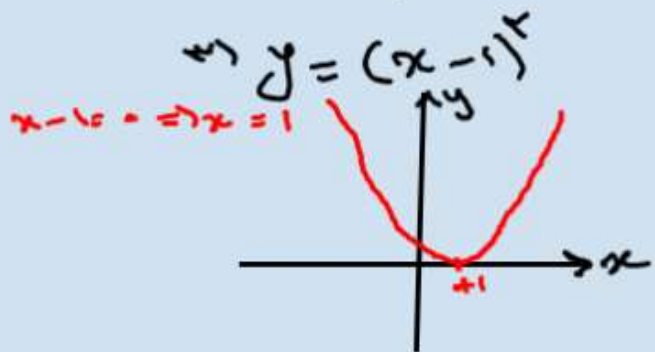
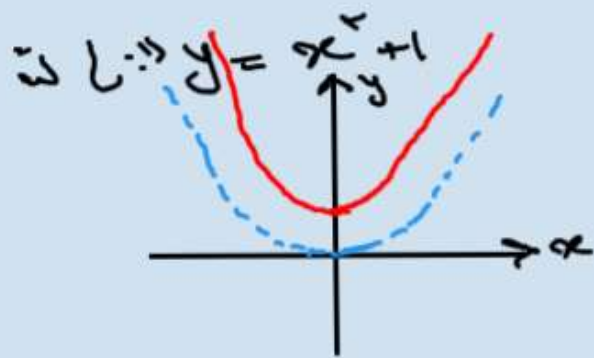
بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مزبان حبیبی





نات: $y = x^2 - 4x + 4$

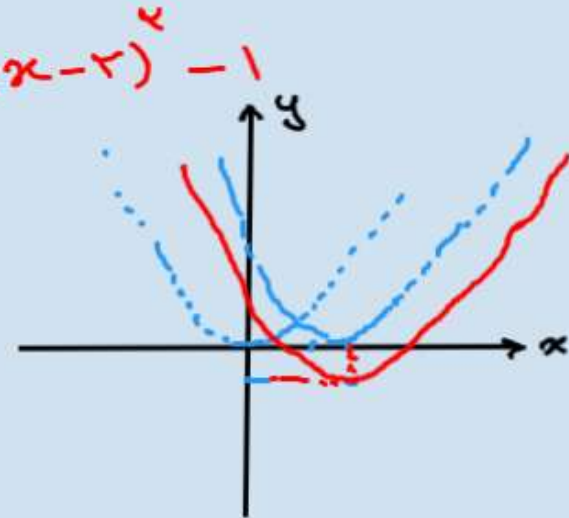
مربع کامل کردن: $x^2 - 4x + 4 + 4 = 4 = (x-2)^2 - 1$

توضیح: -4 را نصف می‌کنیم و به 4 می‌افزاییم.

$y = (x-2)^2 - 1$

$y = x^2 \rightarrow y = (x-2)^2 \rightarrow y = (x-2)^2 - 1$

$x-2 \rightarrow x=2$



مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



توجه: x^2

$$x^2 + mx = \frac{x^2 + mx + \frac{m^2}{4}}{4} - \frac{m^2}{4} = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}$$

توجه: x^2

$$x^2 + vx = \frac{x^2 + vx + \frac{v^2}{4}}{4} - \frac{v^2}{4} = \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{v^2}{4}$$

توجه: x^2



تمرین! محورهای تابع زیر را رسم کنید.

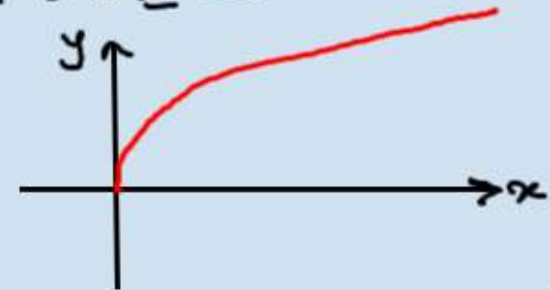
$$۱) y = \sqrt{x} + 2$$

$$۲) y = \sqrt{x} - 1$$

$$۳) y = \sqrt{x+2}$$

$$۴) y = -\sqrt{x-1}$$

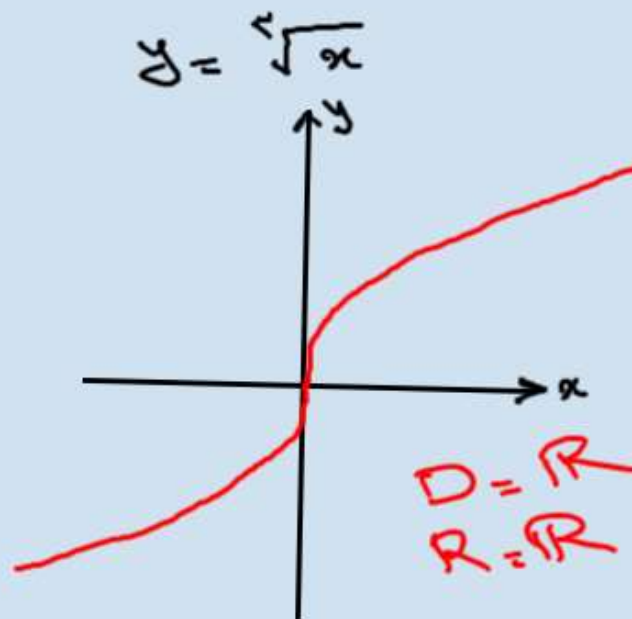
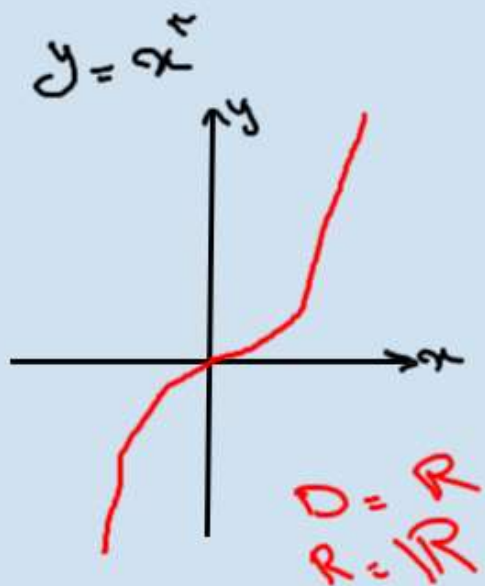
$$۵) y = \sqrt{x-2} + 1$$



تکلیف شد

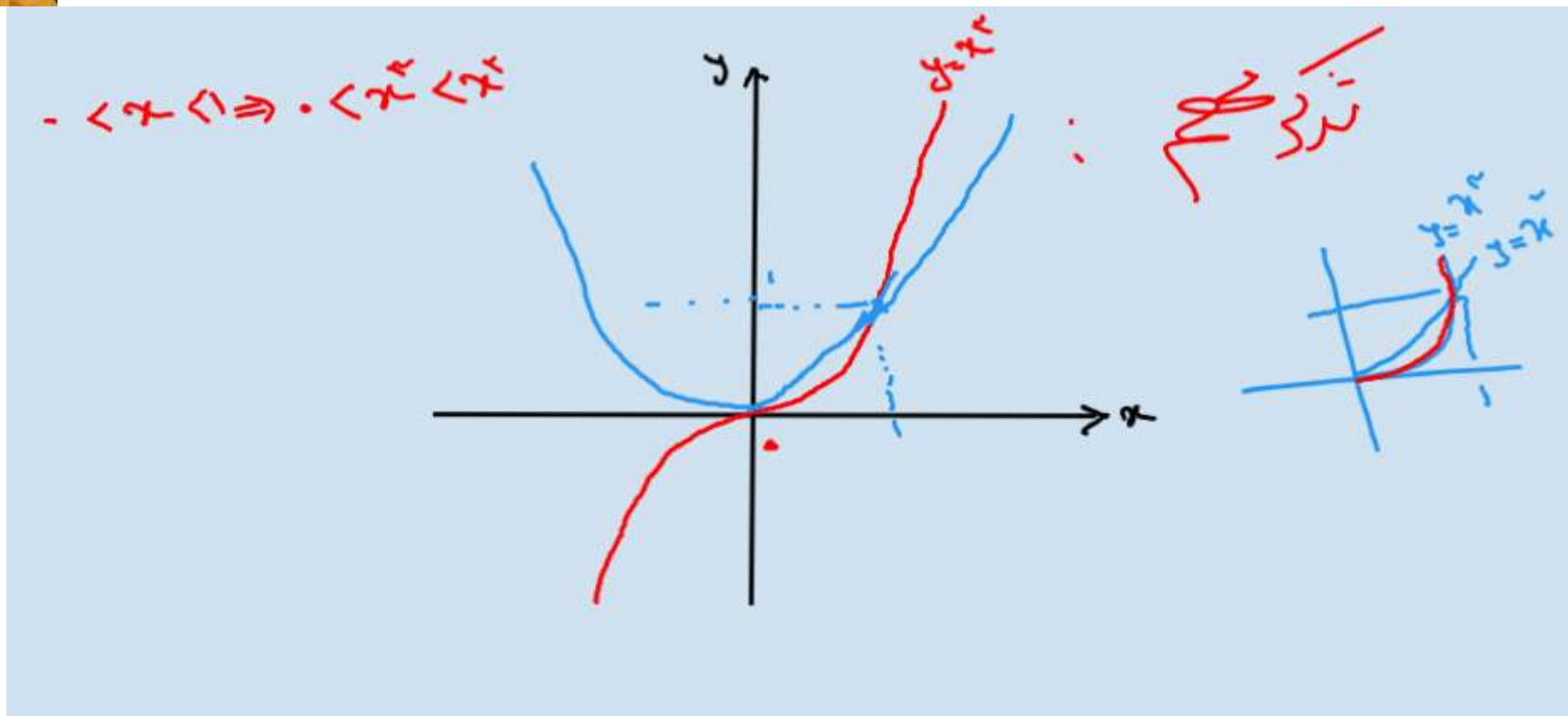
مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



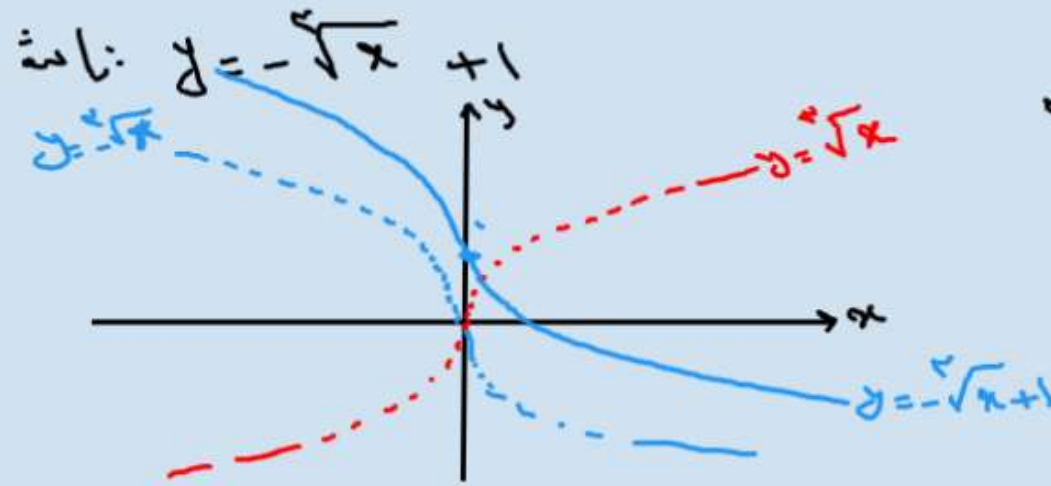
مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی





تذکره: برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ ، نمودار تابع f را بنویسید، محور x را
نگینید.



$$\sqrt{x} \rightarrow -\sqrt{x} \rightarrow -\sqrt{x} + 1$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$y = -\sqrt{x-2} + 1$$

تمرین ۲:

تطبیق د

مزبان حبیبی



تذکر: برای رسم نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ ، ابتدا نمودار f را رسم کنید و سپس آن بخش که در بالا محور x ها قرار دارد را به بالا مرتب کنید.

$$y = |x^2 - 1| \text{ داشته}$$

$$\downarrow y = x^2$$

$$y = x^2 - 1$$

$$y = |x^2 - 1|$$

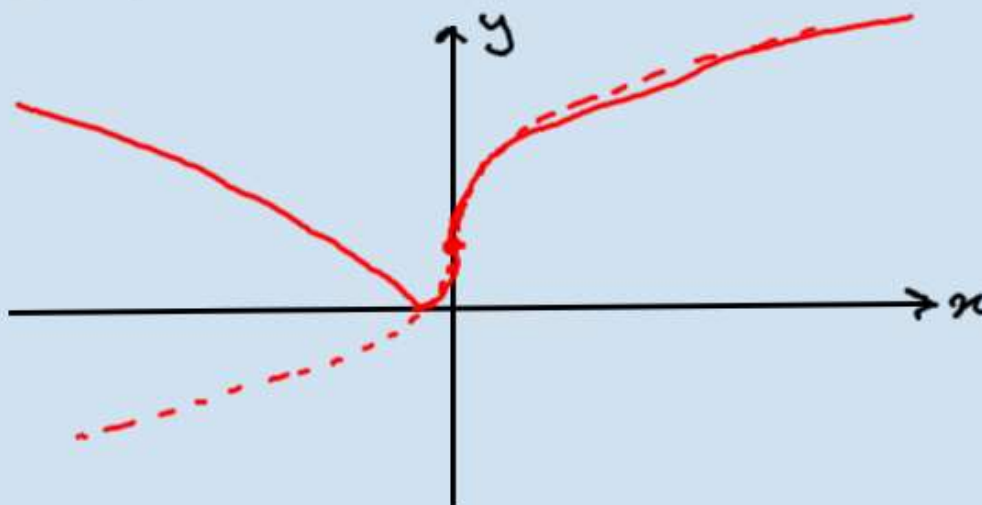


مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$\text{مثال: } y = |\sqrt[3]{x} + 1|$$

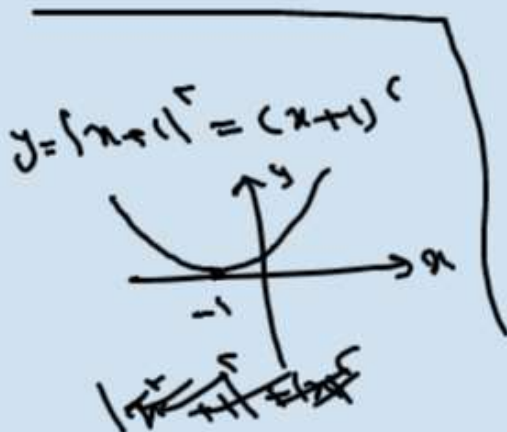


مزبان حبیبی



$$f(x) = |x^2 - 2| + 1 \text{ را رسم کنید}$$

تمرین ۳: نمودار تابع



تکلیف ۳



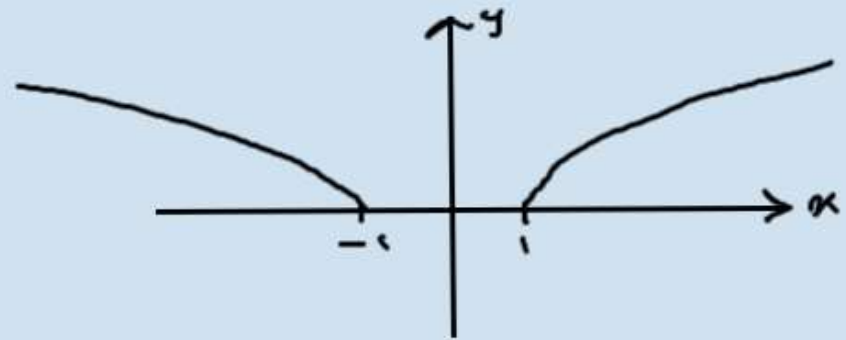
نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ ، ابتدا نمودار تابع f را در ربع اول

مختصات (x, y) رسم کنید و سپس قرینه نمودار را بنویسید به محورها، به

نمودار اصل نه کنید.

$$\text{مثال: } y = \sqrt{|x| - 1}$$

$$y = \sqrt{x - 1}, \quad x \geq 1, 0$$



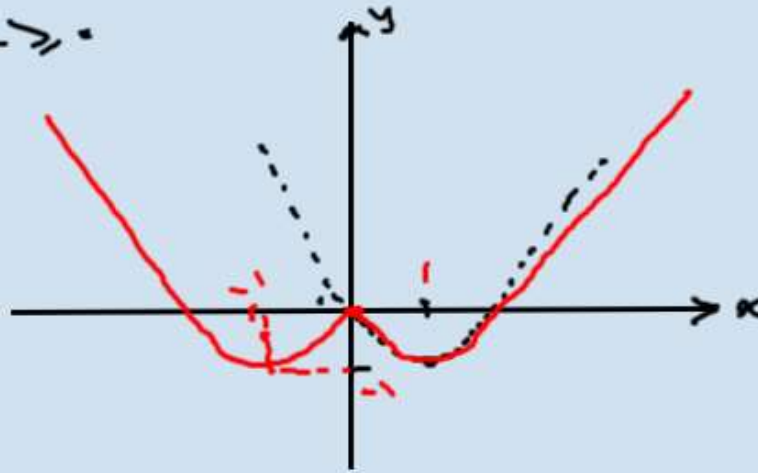
مزبان حبیبی



مثال: $y = (|x| - 1)^2 - 1 = x^2 - 2|x|$

$y = (x-1)^2 - 1, x \geq 0$

$x^2 \rightarrow (x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2 - 1$



نکته: $x > 0 \Rightarrow$ (معا)

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

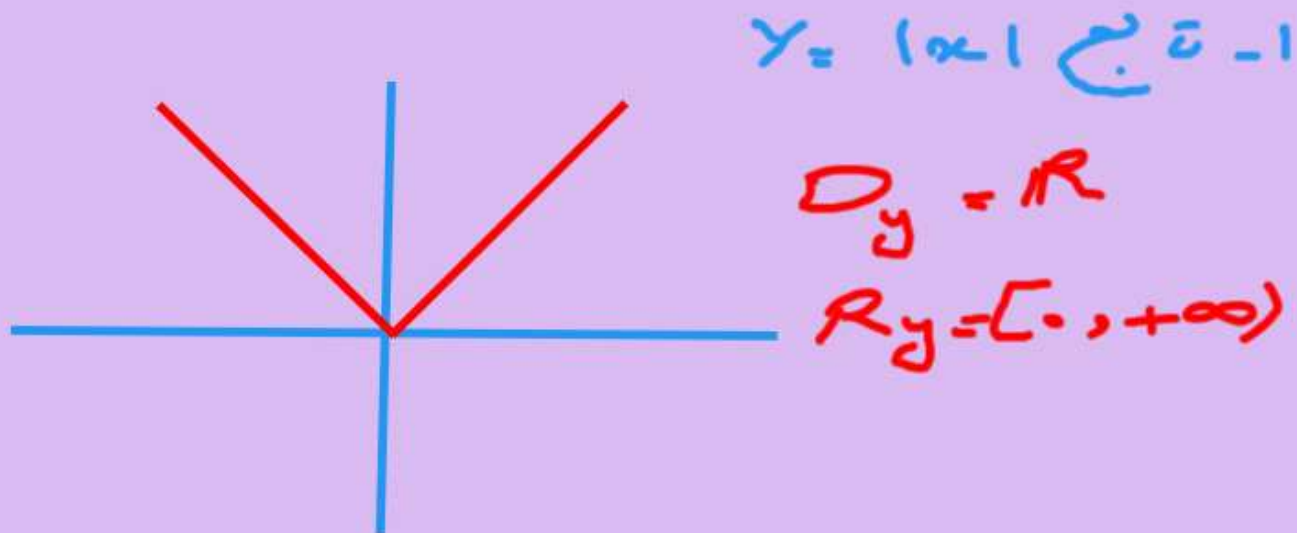


حسب بنام

باید درس

مزبان حبیبی

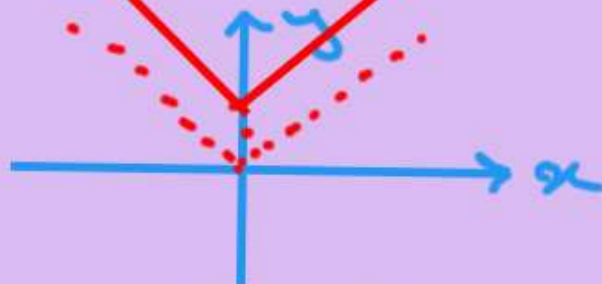
بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



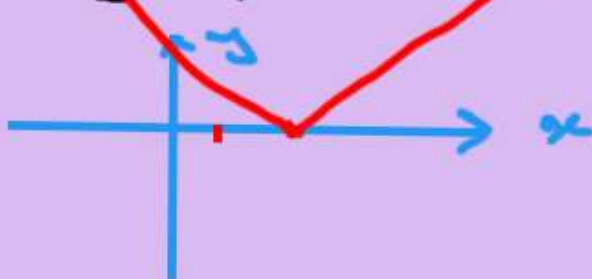


مثال ۱:

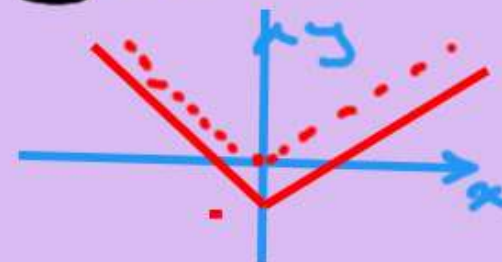
$$y = |x| + 2$$



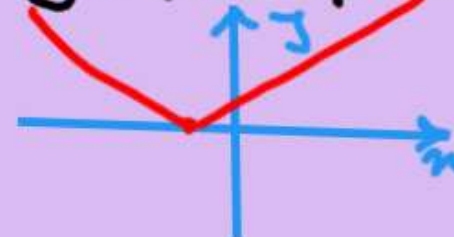
$$y = |x - 2|$$



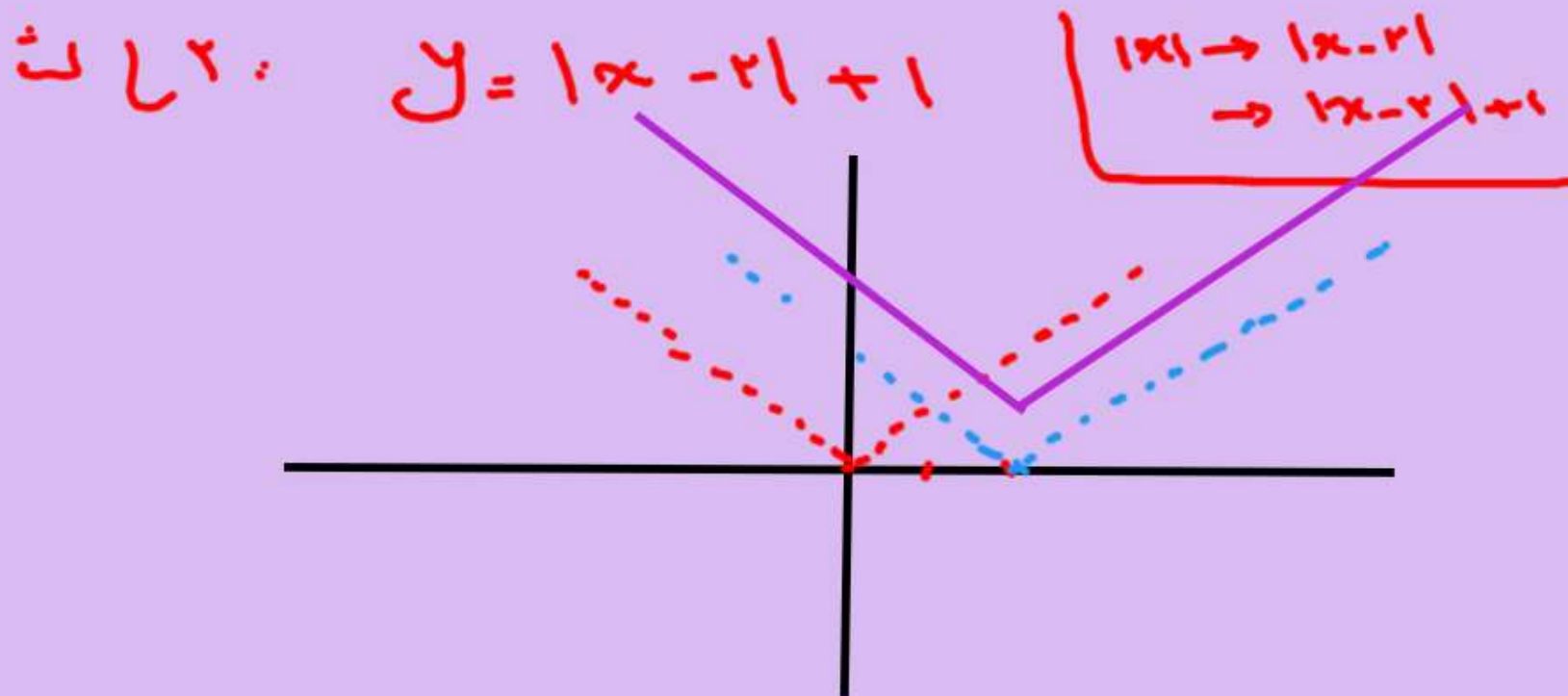
$$y = |x| - 1$$



$$y = |x + 1|$$



مزبان حبیبی



مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲- رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$.

ابتدا نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را رسم می کنیم و سپس بخش هایی

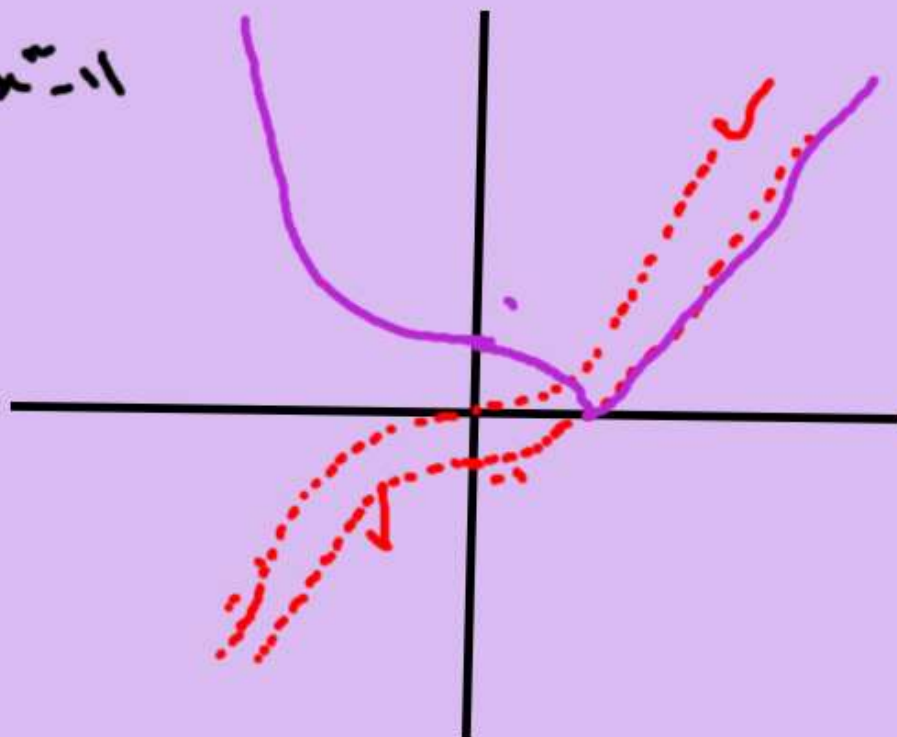
که در پایین محور x قرار دارد را به بالا ، قرین می کنیم .

مبانی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$|x-1| = 2 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$$



مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$-21 - \sqrt{x} = 2$$

عزیزان:

یا بح به تطیف ۱

مزبان حبیبی



$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

۳- رسم نمودار تابع $y = f(x)$:

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را سمت راست محور y ها رسم کنید (مثلاً)

سپس قرینه نمودار نسبت به محور y ها را به آن اضافه کنید.



مزبان حبیبی

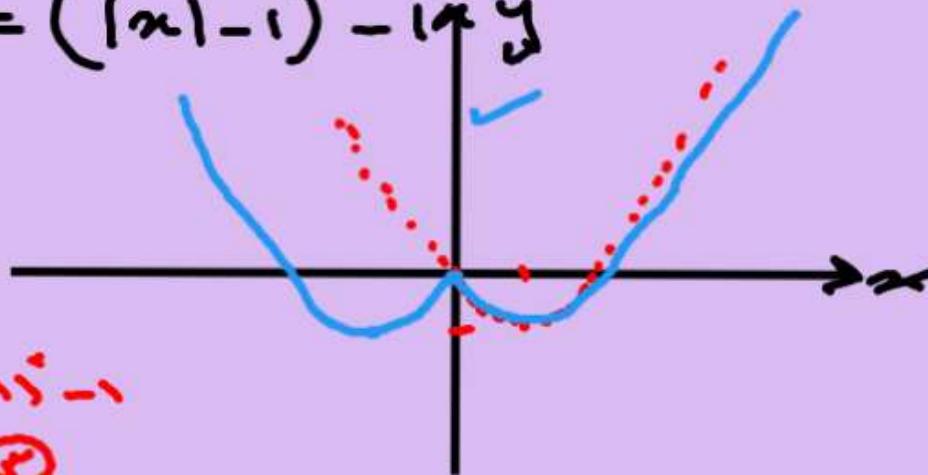


$$\text{مثال: } y = x^2 - 2|x| = \underbrace{(x+1)^2 - 1}_{\text{اینجا دایره}}$$

$$x^2 - 2|x| = \underbrace{|x|^2 - 2|x| + 1}_{\text{اینجا دایره}} - 1 = (|x| - 1)^2 - 1$$

$$y = (x-1)^2 - 1 \quad x \geq 0$$

$$\theta = x^2 \rightarrow \begin{matrix} \text{⊕} & \text{⊖} & \text{⊕} \\ \text{⊖} & \text{⊕} & \text{⊖} \end{matrix}$$



مبانی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

$$y = \sqrt{|x-1|} - 2$$

مجموعه x :

تکلیف $x >$

مزبان حبیبی



بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۴ - رسم نمودار رابطه $|y| = f(x)$.

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را در بالای محور x ترسیم کنید. ($0 > y$)

سپس قرینه نمودار نسبت به محور x را ترسیم کنید. افزافه کنید.

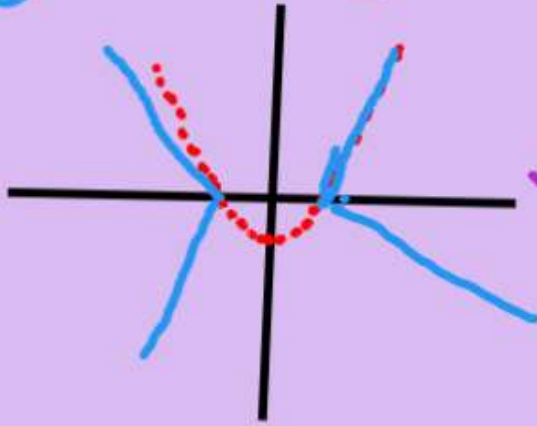
مربی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

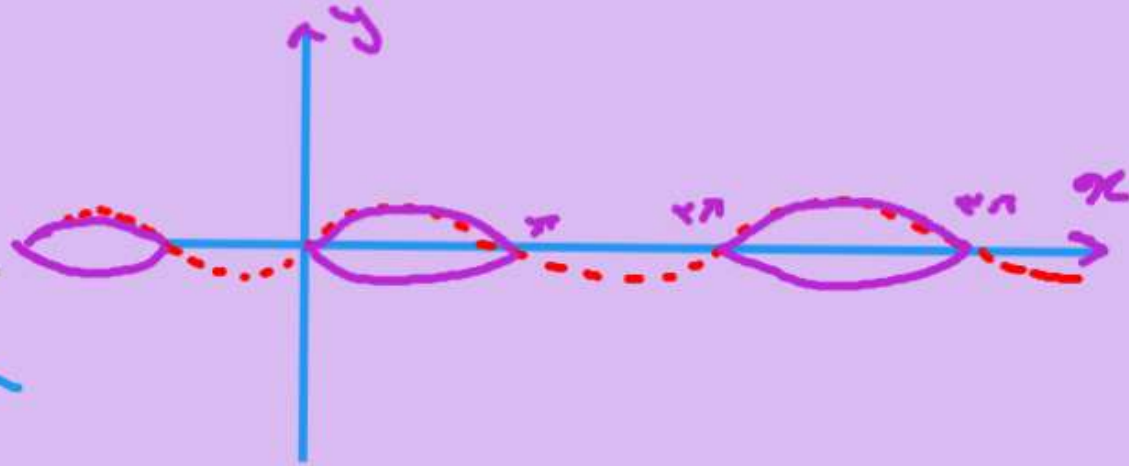


رابطه: $|y| = x^2 - 1$

رنگ: $x = 1$ و $x = -1$



$|y| = \sin x$



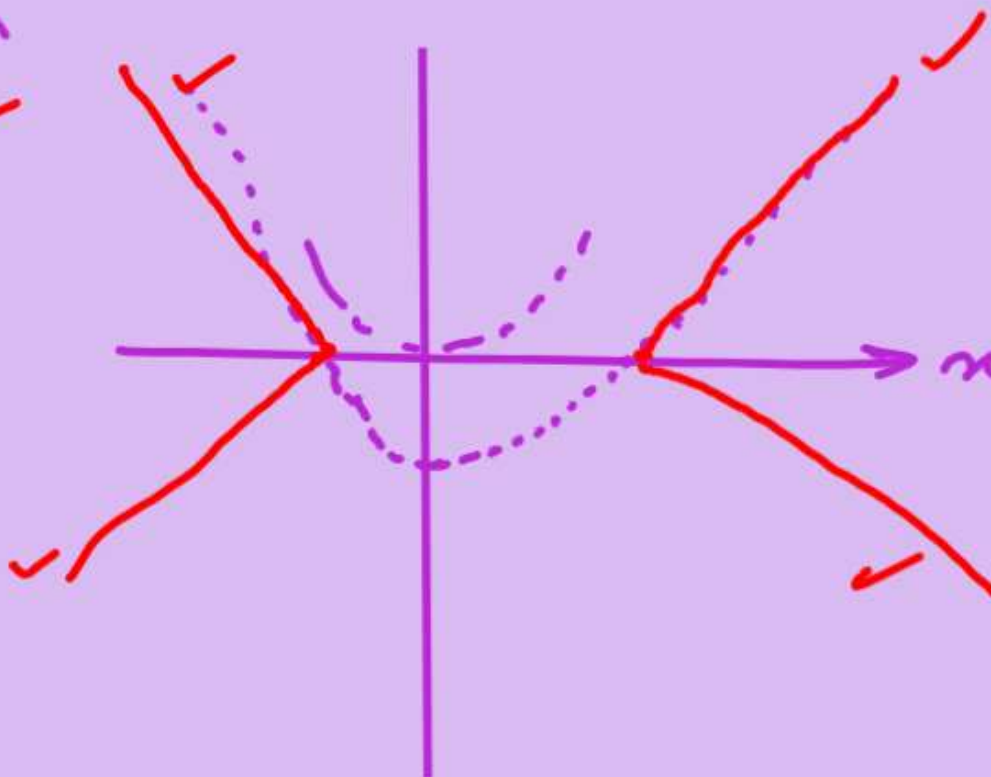
مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$1 - x^2 = 1 - x^2$$

نتیجه



مزبان حبیبی



۵- اسم کنون را توابع لیبورس زیر :

$$D = |x \pm a| \pm |x \pm b| \pm |x \pm c| \pm \dots$$

اینها را چه میگویند

$$x \pm a = 0 \rightarrow x = +a \text{ یا } -a$$

...



مزبان حبیبی



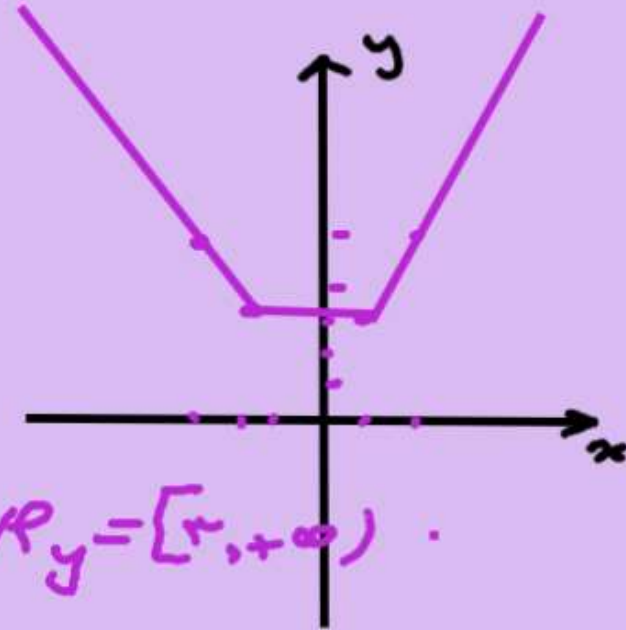
مثال: $y = |x-1| + |x+2|$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$1+4$
 $0+4$
 $2+0$

x	-2	-2	1	2
y	5	2	2	5



دامنه: $P_y = [2, +\infty)$

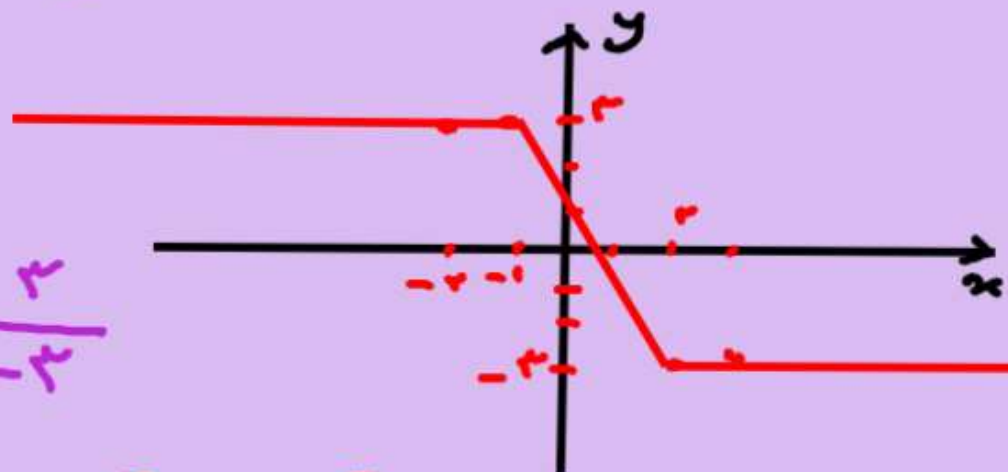


$$f(x) = |x+1| - |x-2|$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x	-2	-1	2	3
y	3	3	-3	-3



$$R_y = [-3, 3]$$

مزبان حبیبی



باشد $y = |x-1| + |x+2| - |x+1|$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$1+4-2$

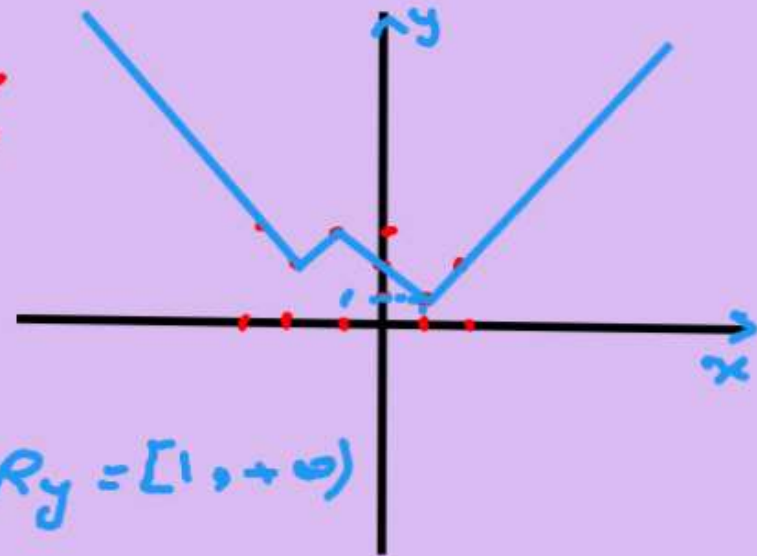
$0+2-2$

$2+1-0$

$2+0-1$

$4+1-2$

x	-2	-1	1	2
y	2	2	2	2



$R_y = [1, +\infty)$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۳: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$۱) y = |x - ۲| - |x + ۳|$$

$$۲) y = |x - ۱| + |x + ۵|$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۴: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = |x - 2| - |x + 2| + |x - 1| + |x + 1|$$

مزبان حبیبی

اسم خود را در تدریس مد نظر با همین علامت :

$$g = |x-2| - |x+1|$$

حالت اول:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x > 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ -(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

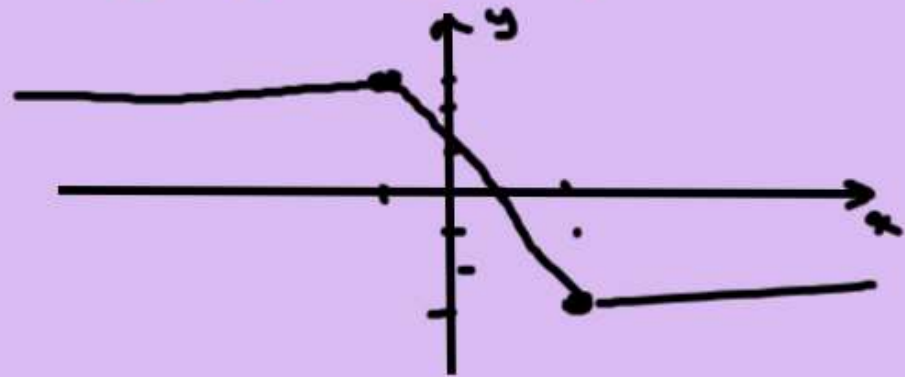
مزبان حبیبی





$$y = |x-2| - |x+1| = \begin{cases} -(x-2) - (-(x+1)) & x < -1 \\ -(x-2) - (x+1) & -1 \leq x \leq 2 \\ (x-2) - (x+1) & x > 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x & x < -1 \\ -2x+1 & -1 \leq x \leq 2 \\ -2 & x > 2 \end{cases}$$

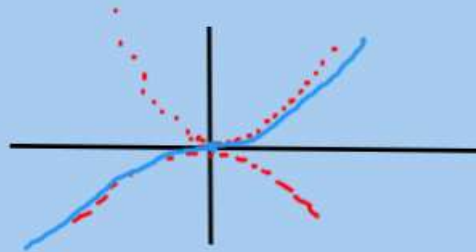


مبانی



تمرین ۱: با تعین علامت، نمودار تابع $f(x) = x \cdot |x|$ را رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot x = x^2 & x \geq 0 \\ x \cdot (-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



برای $x \geq 0$ سمت راست نمودار
برای $x < 0$ سمت چپ نمودار

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

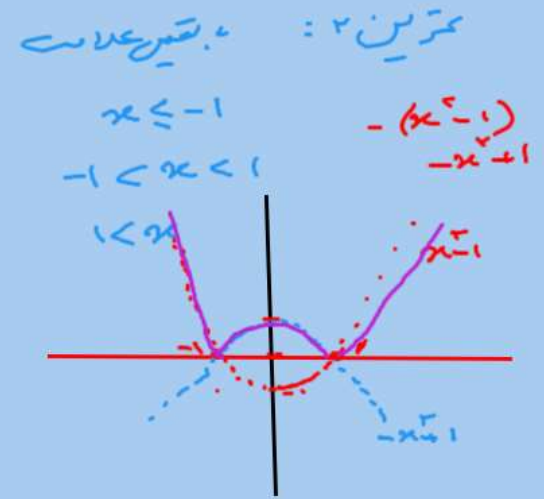


$$f(x) = |x^2 - 1|$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

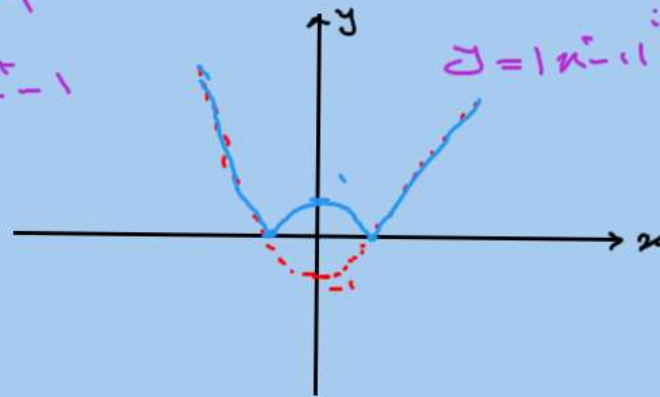
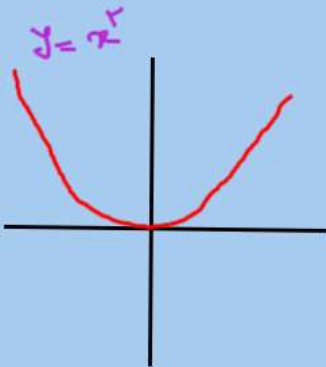


$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \\ -(x^2 - 1) & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$$f(x) = |x^2 - 1|$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 1$$



بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تجزیه نمودار: نمودار تابع

روش اول: تعیین علامت:

$1-x = -(x-1)$
 $|x-1| = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$
 $|x+1| = \begin{cases} x+1 & x > -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$
 $f(x) = \begin{cases} x-1+x+1 & x > 1 \\ 1-x+x+1 & -1 < x < 1 \\ 1-x-x-1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$

روش دوم:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$
 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x	-2	-1	1	2
y	4	2	2	4

$1+x = x$
 $0+x = x$
 $2+0 = 2$

$2+1 = 3$



تمرین ۴: نقاطی روی محور اعداد حقیقی بیابید که از ۳- و ۵، به یک فاصله باشند.

$$\begin{aligned} \text{عدد آینه‌ای} \\ |x-5| = \text{فاصله } x \text{ و } 5 \\ |x| = \text{فاصله } x \text{ از مبدأ} \\ |x| = |x-5| \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

نقطه ریشه : عدد سردرگم : x : جواب =

$$|x-5| = |x-(-3)| \Rightarrow |x-5| = |x+3|$$

عَنْقَاق

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5 = x+3 \Rightarrow -5 = 3 \\ x-5 = -(x+3) \Rightarrow x-5 = -x-3 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$x=2$

حبابی



تمرین ۷: معادله های زیر را حل کنید.

$$1) \frac{x-2}{x+1} = 2$$

نوع ۱: $\frac{x-2}{x+1} = 2 \Rightarrow x-2 = 2(x-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 2(x-1) \Rightarrow x-2 = 2x-2 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = 1/2 \\ x-2 = -2(x-1) \Rightarrow x-2 = -2x+2 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = 4/3 \end{cases}$$

نوع ۷: $(|x|^r = x^r)$

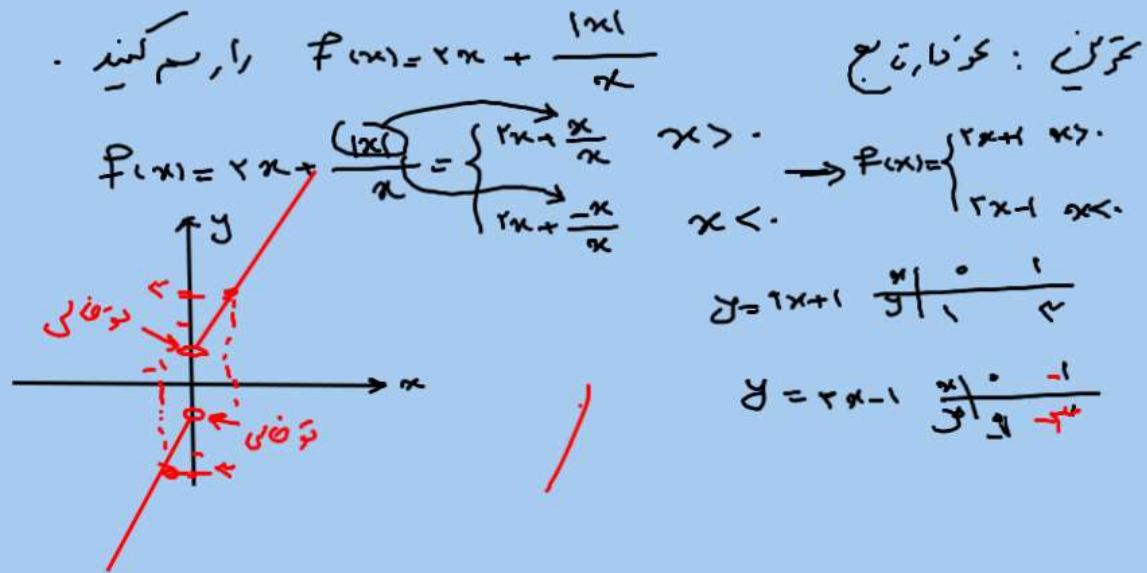
$$\frac{x-2}{x+1} = 2 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 4$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 18x + 9 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 8x^2 + 22x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 22^2 - 4(8)(5) = ?$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-22 \pm \sqrt{?}}{16} =$$

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

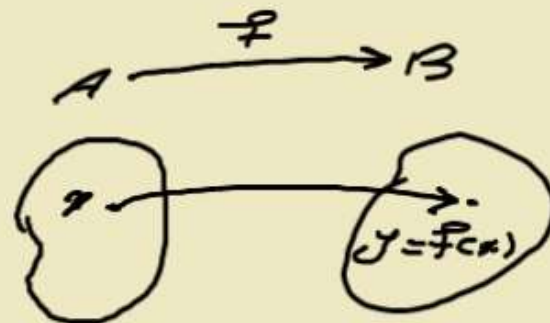


مزبان حبیبی



یادآوری

تعریف تابع:



رابطه های اسه از مجموعه

A به B که بزرگتر و عضو

از A در B متعلق به عضو از B دارند.

که تنها

بزرگی

صن بطه تابع \equiv حوله تابع \equiv دسکو تابع $y = f(x)$

مثال . $f(x) = x + \sqrt{x}$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2-2}$$

$$h(x) = x^2 - x + 1$$

$$k(x) = 2^{x-1}$$

بزرگی





تابع خاص:

$$y = ax + b$$

a = شیب خط

b = عرض از مبدأ

۱- تابع خطی

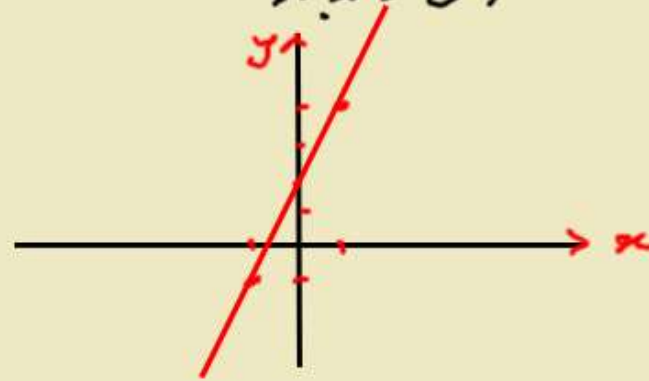
مثال:

$$y = 3x + 2$$

$$3(-1) + 2$$

$$3(1) + 2$$

x	-1	1
y	-1	5



مبانی

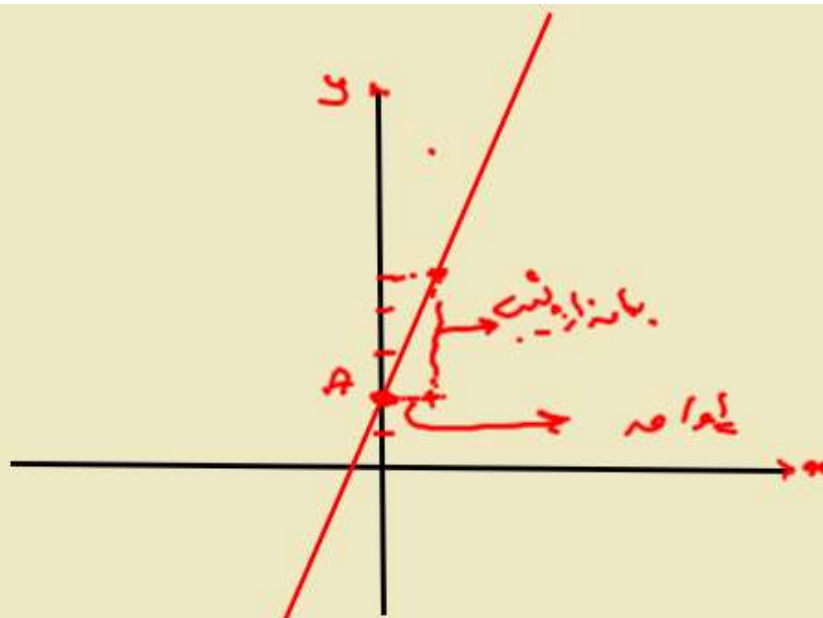
بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$y = 3x + 2$$

نسبت = 3 ✓

ممنوع از سه!



بازی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$y = 2x - 1 \quad \text{را رسم کنید}$$

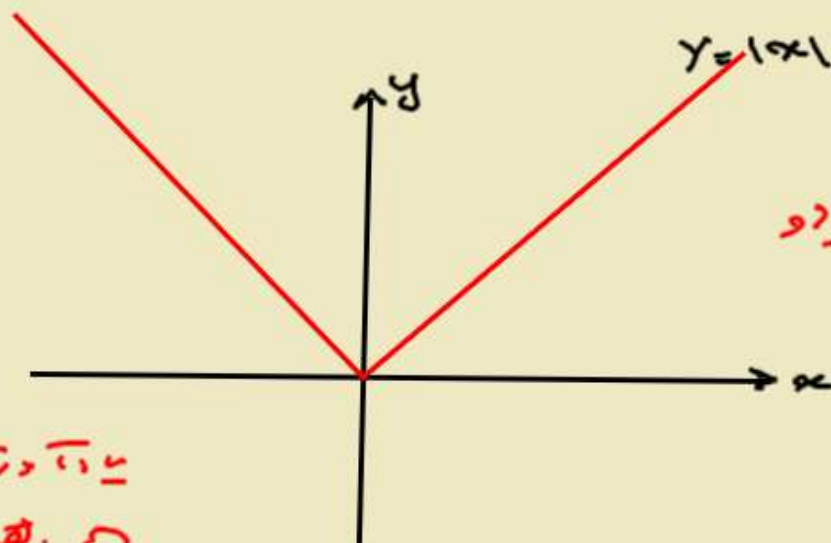
تگ های: حفظ

مزبان حبیبی



ع-۲

$$y = |x|$$



مجموع زندگانی نبود

$$D_y = \mathbb{R}$$

$$R_y = [0, +\infty)$$

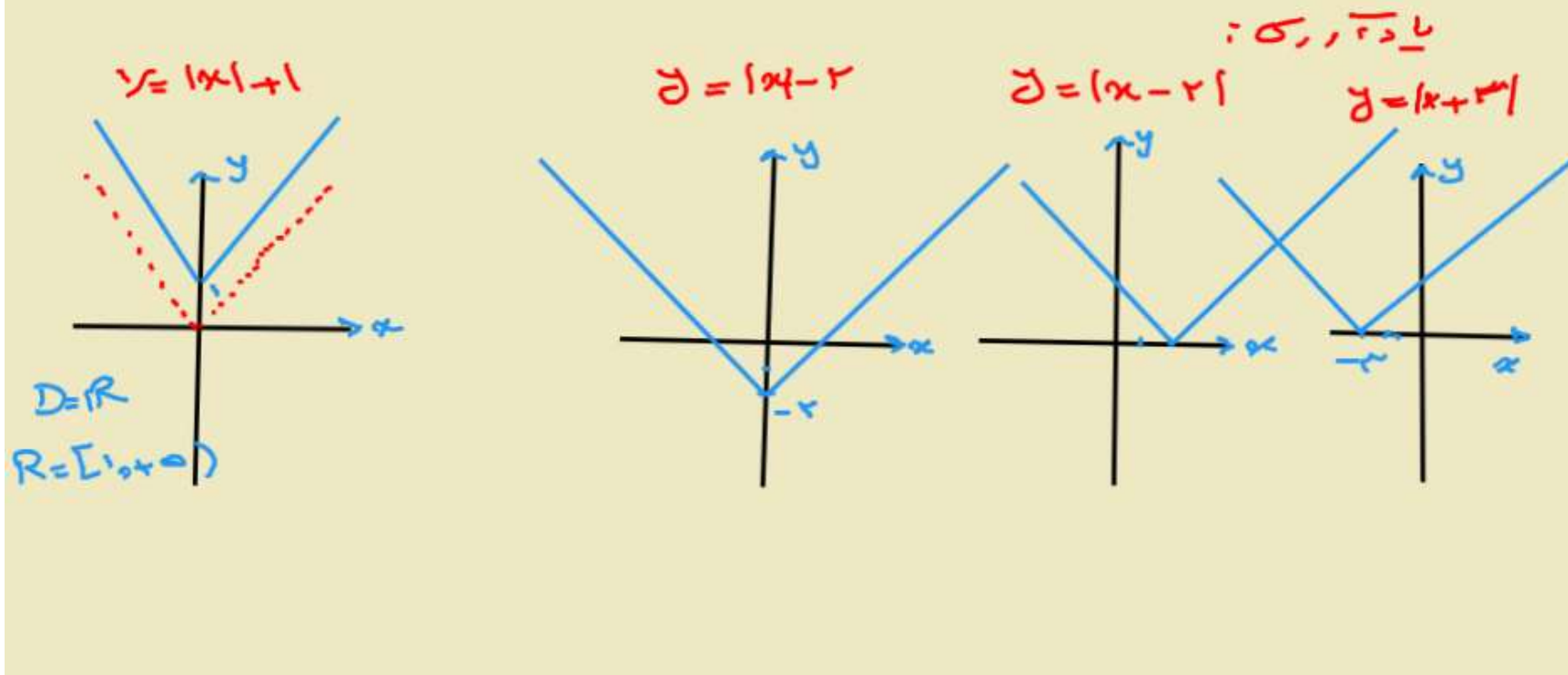
میانگین درستی:

\mathbb{D} : تصویر روی محور x ها

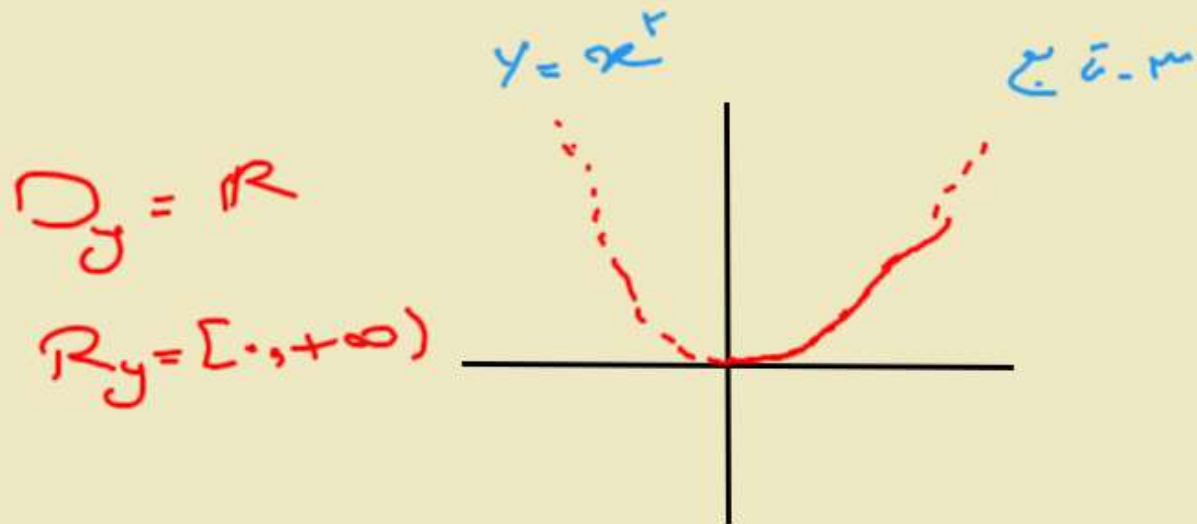
\mathbb{R} : تصویر روی محور y ها

مبانی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۱: نمودار تابع زیر را رسم کنید -

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 - 2$$

$$y = (x-1)^2 + 1$$

$$y = (x-2)^2 - 1$$

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مهر من! خود را تابع $y = x^2 - 2x$ را رسم کنید

مهر من!



۴- تابع $y = \frac{1}{x}$ (تابع گوی) (

حره تابع کبره که صورت و مخارج آن چند وجهی باشد را تابع گوی می گویند:

$$y = \frac{3x-1}{x+2} \quad \text{نمونه}$$

$$y = \frac{1+x^2}{x^5-1} \quad \left(y = \frac{1}{x} \right)$$

$$y = \frac{2x-1}{5}$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+x+5}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}x+2}{\frac{1}{5}x-\sqrt{2}}$$

بزرگی



ناتش: ۱) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2}$ ✓

۲) $y = \frac{\sqrt{3}x-1}{\pi x+2}$ ✓

۳) $y = \frac{\sqrt{3}x-1}{x+2}$ ✗

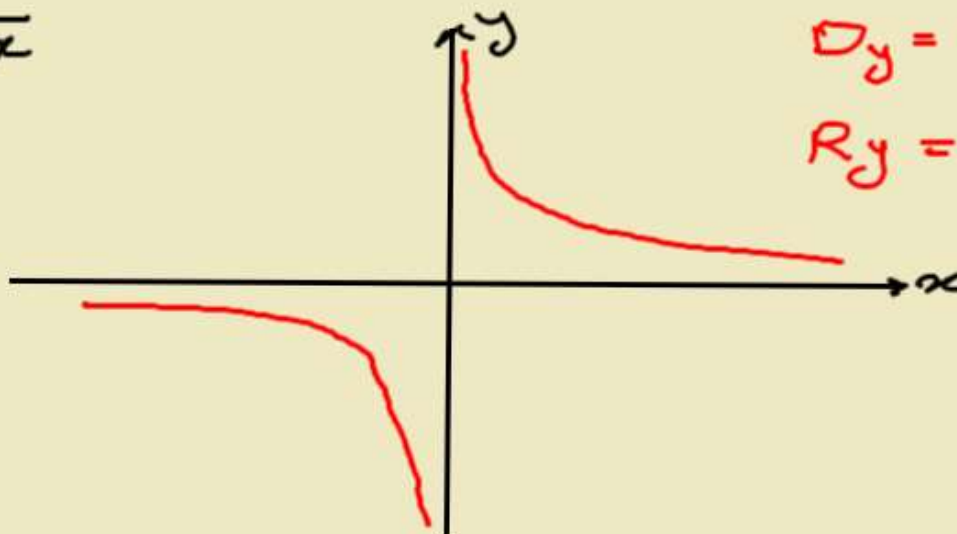
۴) $y = \frac{3^x-1}{2x+1}$ ✗

بزرگی



مثال: $y = \frac{1}{x}$

$$y = \frac{1}{x}$$



$$D_y = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_y = \mathbb{R} - \{0\}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تذکره:

معمولاً تابع را بصورت

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \dots \\ D_f = \dots \end{array} \right.$$

نمایش می دهیم.

اما؛ محدود کردن دامنه می توان تابع دیگری ساخت. (تحدید تابع)

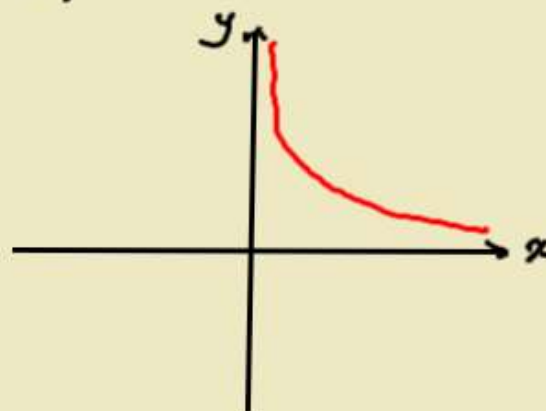
مبانی



مثال : تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ D = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ D = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \end{array} \right.$$



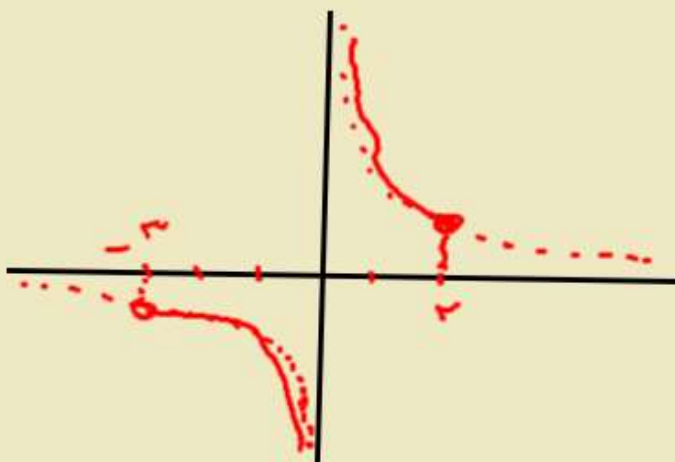
مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نشانده:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \end{cases}$$



مزبان حبیبی

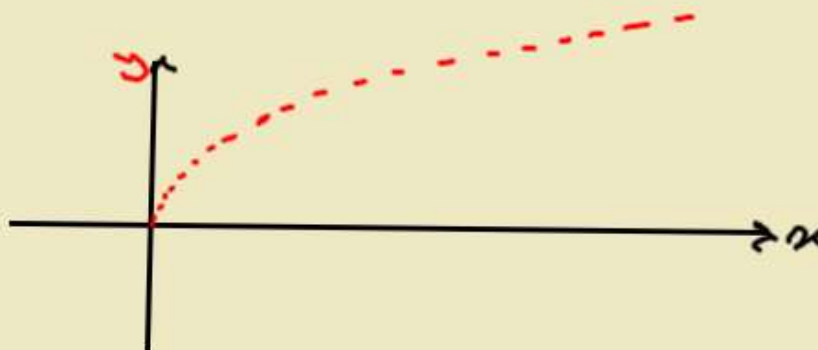


۵- تابع رادیکالی:

$$y = \sqrt{x}$$

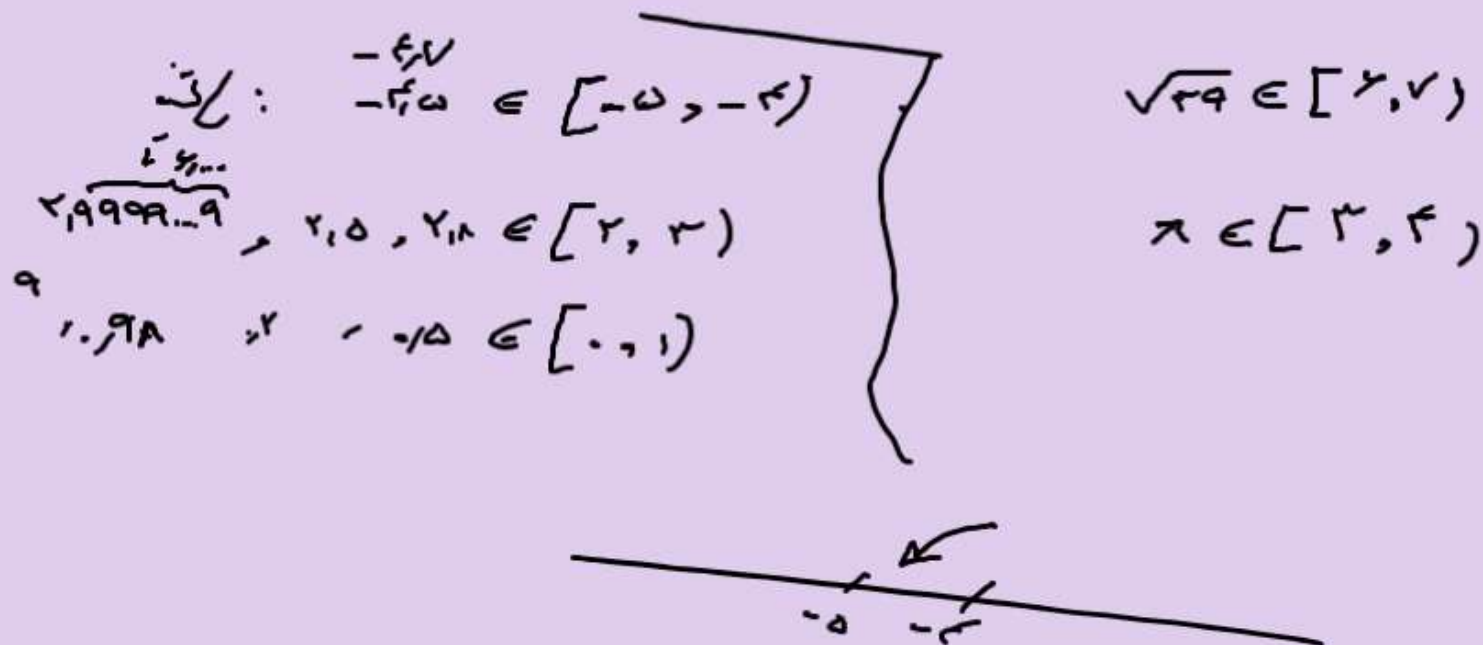
$$D = [0, +\infty)$$

$$R = [0, +\infty)$$



مبانی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی





تعریف جزده صحیح:

مخزنه کنید $n \in \mathbb{Z}$ و $x \in [n, n+1)$ در اینصورت عدد صحیح n را جزده صحیح
عدد x می نامیم و با $[x]$ نشان می دهیم.

$$\text{نمونه: } x \in [3, 4) \Rightarrow [x] = 3$$



$$\sqrt{49} \in [7, 8) \Rightarrow [\sqrt{49}] = 7$$

$$-7.3 \in [-8, -7) \Rightarrow [-7.3] = -8$$

بازی



$$\text{گالته: } [5, 2] = 5$$

$$5, 2 \in [5, 6)$$

$$[\sqrt{150}] = 12$$

$$12 < \sqrt{150} \approx 12,000 < 13$$

$$[-3, 1] = -3$$

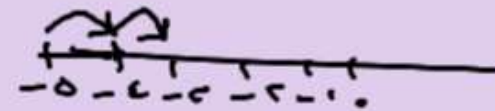
$$\textcircled{-3} -3, 1 < -3$$

$$[v] = v$$

$$v \in [v, \infty)$$

$$[-5] = -5$$

$$-5 \in \textcircled{[-5, -4)}$$



مبانی



ویژگی های جزء صحیح :

$$1) m \in \mathbb{Z}, [m] = m$$

$$\text{ثابت: } [v] = v, [-11] = -11, [29] = 29$$

$$2) m \in \mathbb{Z}: [x + m] = [x] + m$$

$$\text{ثابت: } [x^3 + 5] = [x^3] + 5, \left[\frac{1}{x} - 2 \right] = \left[\frac{1}{x} \right] - 2$$

مزبان حبیبی



تمرین: اگر x و y اعداد حقیقی باشند آنگاه درستی یا نادرستی عبارت
زیر را تعیین کنید:

$$[x + y] = [x] + [y] \quad \times$$

مثال نقض:

$$x = 2,4 \quad y = 5,7$$

$$[x + y] = [2,4 + 5,7] = [9,1] = 9$$

$$[x] + [y] = [2] + [5] = [2,4] + [5,7] = 2 + 5 = 7$$

مزبان حبیبی



$$۳) [x] < n \implies x < n$$

$$[x] \leq n \implies x < n+1$$

$$[x] > n \implies x \geq n+1$$

$$[x] \geq n \implies x \geq n$$

$$۴) x \in \mathbb{R}, [x] \in \mathbb{Z}$$



$$۵) [m\alpha] = [\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{m}\right] + \dots + \left[\alpha + \frac{m-1}{m}\right] \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{مثلاً } m=2 : [2\alpha] = [\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{2}\right]$$

$$m=3 : [3\alpha] = [\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{3}\right] + \left[\alpha + \frac{2}{3}\right]$$

$$m=4 : [4\alpha] = [\alpha] + \left[\alpha + \frac{1}{4}\right] + \left[\alpha + \frac{2}{4}\right] + \left[\alpha + \frac{3}{4}\right]$$

مبانی



$$۶) [x] = n \Rightarrow [-x] = \begin{cases} -n & x \in \mathbb{Z} \\ -n-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{مثال: } [5.۲] = 5 \Rightarrow [-5.۲] = -5-1$$

$$[v] = v \Rightarrow [-v] = -v$$

$$[0] + [-0]$$

$$\text{مثال: } [-9.۲] = -9-1 = -10$$

$$۷) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مزبان حبیبی



$$\text{نمونه: } [0] + [-0] = 0$$

$$[1,4] + [-1,4] = -1$$

$$[\pi] + [-\pi] = -1$$

$$\begin{aligned} \wedge) x \in \mathbb{Z}, \quad [x] = n &\Rightarrow n \leq x < n+1 \\ &\Rightarrow [x] \leq x < [x] + 1 \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



$$9) \quad [x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow \underline{[x]} - \underline{[x]} \leq x - \underline{[x]} < \underline{[x] + 1} - \underline{[x]}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq x - [x] < 1}$$

$$10) \quad [x - [x]] = 0$$

مزبان حبیبی



$$۱) \quad [[x] - x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تذکره:
 $[x] \equiv$ بزرگترین عدد صحیح نابینا از x است \equiv کف x
 $[x] + 1 \equiv$ کوچکترین عدد صحیح که از x بزرگتر است.

مزبان حبیبی



نشان:

$$[\lceil v_{1,2} \rceil - v_{1,2}] = \lceil -x \rceil = -1$$

تذکره:

$$x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$$

مزبان حبیبی

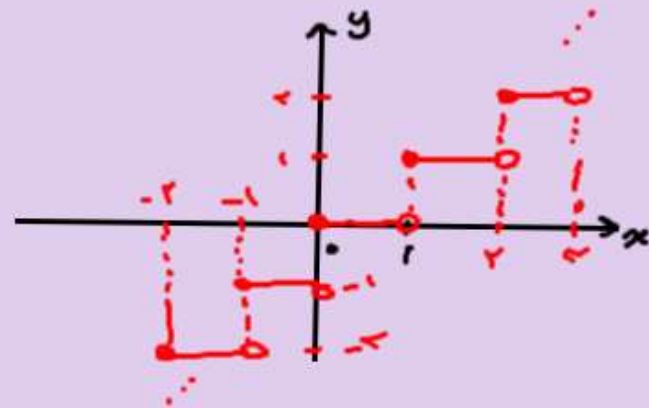


$$f(x) = [x]$$

(تابع پله ای)

تابع جزیه صحیح :

۱- رسم نمودار :



$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = -2$$

پله ای

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲۲ دانته و سرد :

$$f(x) = [x]$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{Z}$$

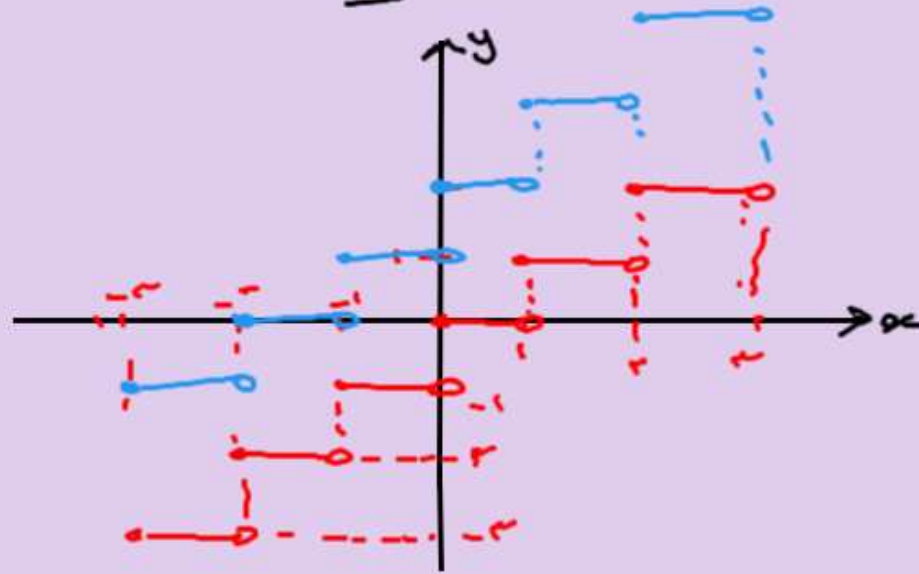
مزبان حبیبی



$$f(x) = [x] + 2, \quad x \in [-2, 2]$$

$$y = [x]$$

$$y = [x] + 2$$



مربی

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نگارنی: بخور، تاج

$y = [x] - 2$ را رسم کنید. $x \in [-2, 2)$

تکلیف شد.

مزبان حبیبی



نکته: رسم نمودار تابع $y = [f(x)]$

۱- تابع $y = f(x)$ را رسم کنید.

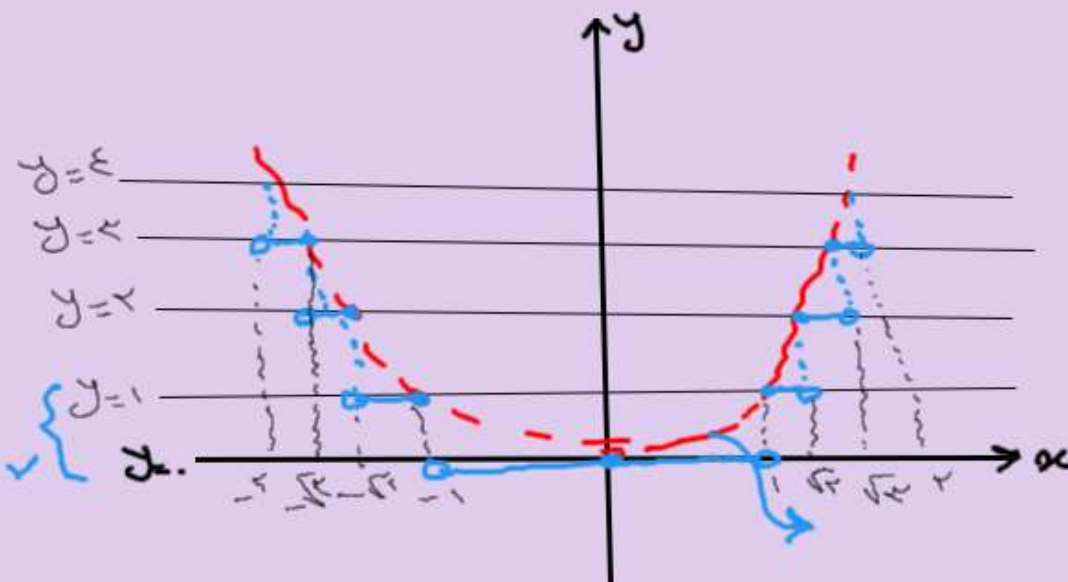
۲- فقط $m = k (k \in \mathbb{Z})$ را رسم کنید.

۳- بخش هایی از نمودار به بین درجه ها تقویم کرده و آن را روی خط
یافتن تصویر کنید.

مزبان حبیبی



مثال: $y = [x^2]$

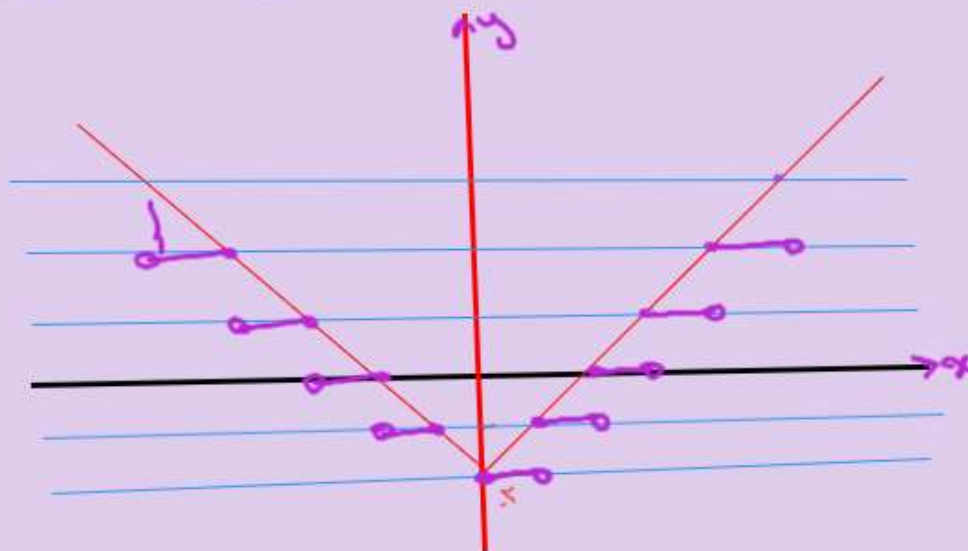


مزبان حبیبی



$$y = [|x| - 2]$$

$$y = |x| - 2$$



مزبان حبیبی



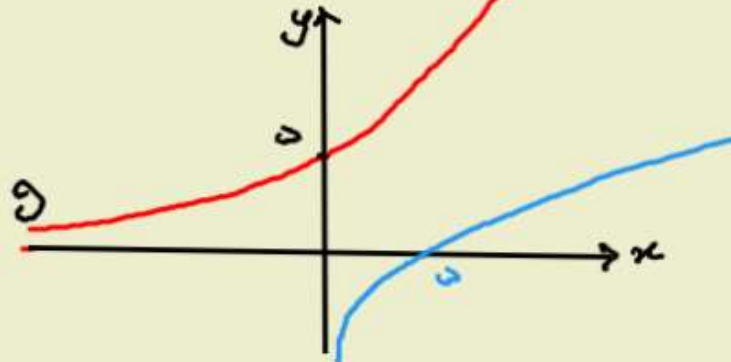
۱: حالت $f = \{(2, 1), (-1, 3), (5, 7)\}$

تابع هفت $= \{(1, 2), (3, -1), (7, 5)\}$

$f(2) = 1$
 $f(-1) = 3$
 $f(5) = 7$
 $f(4) = \text{نداریم}$

۲: حالت

$g(1) = 5$



۳: حالت

$h = \{(2, 1), (5, 3), (7, 1)\}$
 $= \{(1, 2), (3, -1), (7, 5)\}$
 تابع هفت

مزبان حبیبی



مثال ۴: $f = \{ (2, 1), (-3, 7), (4, 11) \}$

✓ $\{ (1, 2), (7, -3), (11, 4) \}$ تابع است

مثال ۵: $g = \{ (1, 2), (2, -1), (5, 7), (2, 2) \}$

✗ $\{ (2, 1), (-1, 3), (7, 5), (2, 2) \}$ تابع نیست

بزرگ

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



وارون تابع :

اگر f یک تابع باشد آنگاه با جابه جایی x و y در تمام نقاط،

مجموعه ای به دست می آید که آنرا وارون تابع می گویند.

مبانی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تذکره محترم:

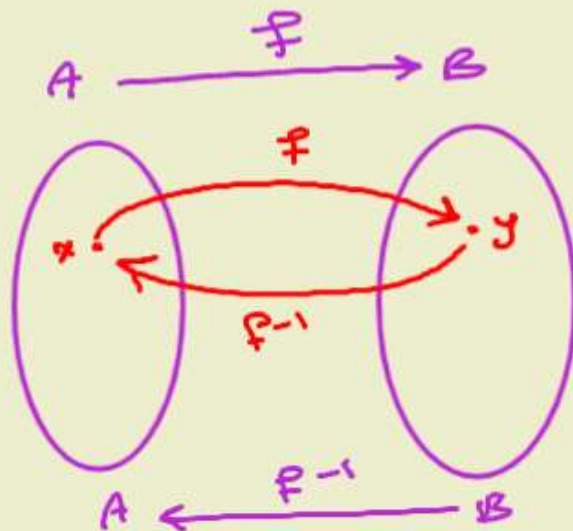
واردون تابع ممکن نیست تابع بنا بر

اگر f تابعی یک به یک باشد آنگاه واردون f ، خود تابع است.
در این حالت واردون تابع f را تابع واردون f می گویند.

بیبی



تذکر: اگر f یکدیک باشد آنگاه وارون تابع f را با f^{-1} نشان می دهیم.



یعنی:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

یکدیک



مثال ۶۰: $f = \{ (\underline{۲}, \underline{۵}), (\underline{۱}, \underline{۲}), (\underline{۷}, \underline{۳}) \}$

$$f(۲) = ۵$$

$$f(۱) = ۲$$

$$f(۷) = ۳$$

تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f^{-1} = \{ (۵, ۲), (۲, ۱), (۳, ۷) \}$$

$$f^{-1}(۵) = ۲, \quad f^{-1}(۲) = ۱, \quad f^{-1}(۳) = ۷$$

یک به یک



سؤال ۷: اگر $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ و $f^{-1}(1.0)$ کدام است؟

$$f^{-1}(1.0) = t \implies f(t) = 1.0$$

$$(1.0, t) \in f^{-1}$$

$$f = \{ (t, 1.0) \dots \}$$

$$f(t) = 1.0 \implies \frac{3t+1}{t-2} = \frac{1.0}{1} \implies 1 \cdot t - 2 = 3t + 1$$

$$\implies \forall t = 21 \implies t = 2$$

$$\therefore f^{-1}(1.0) = 2$$

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۱۰۰: اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ آنگاه $f^{-1}(x)$ را صاف کنید.

(f^{-1} دایره f است)

تَصْلِیْحَات

مزبان حبیبی



تمرین: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+2}{1-x}$ تا مقدار

$f^{-1}(20)$ را مساوی کنید.

$$f^{-1}(20) = t \Rightarrow f(t) = 20 \Rightarrow t + \sqrt{t} = 20 \Rightarrow \sqrt{t} = 20 - t$$

$$\Rightarrow \sqrt{20-t} = 20-t \Rightarrow (20-t)^2 = (20-t)^2 \Rightarrow 400 - 40t + t^2 = 400 - 40t + t^2 \Rightarrow 0 = 400 - 40t + t^2 - 400 + 40t - t^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 40t + 400 = 0 \Rightarrow (t-14)(t-26) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-14=0 \Rightarrow t=14 \\ t-26=0 \Rightarrow t=26 \end{cases}$$

۵۰٪



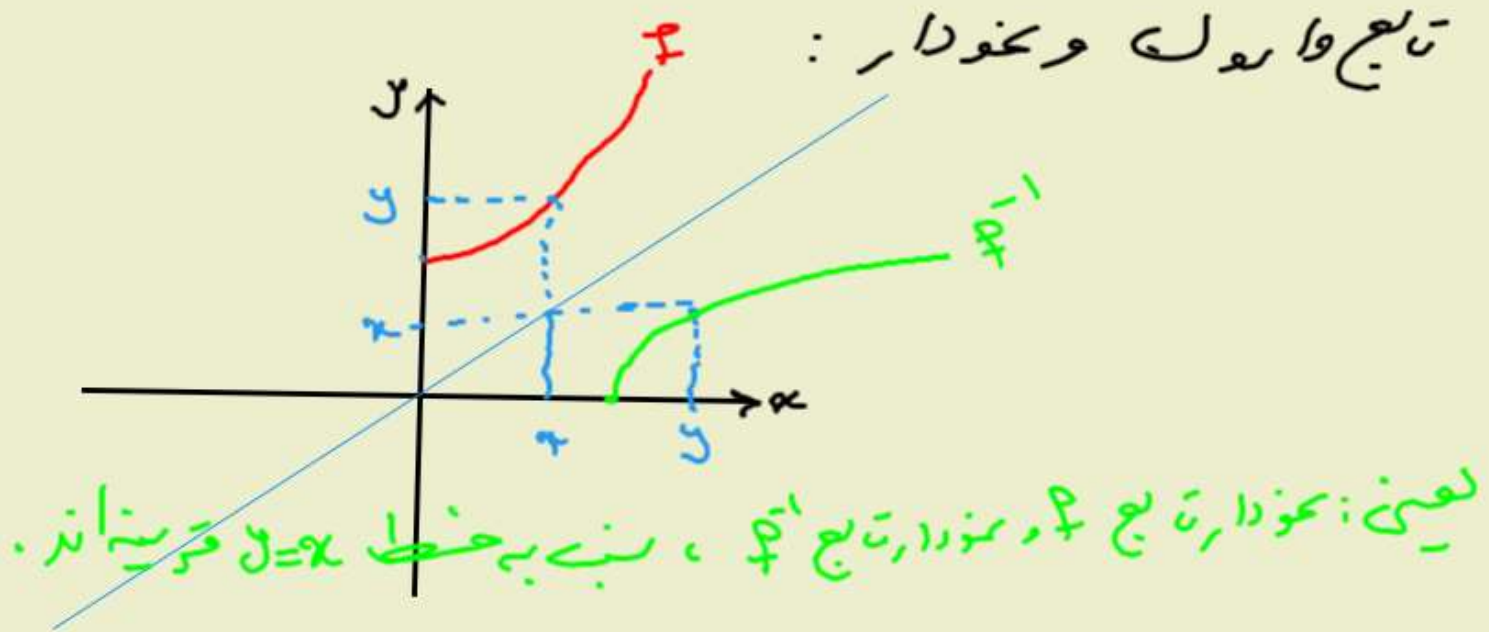
$$g^{-1}(\underline{f^{-1}(r)}) = g^{-1}(14) = m \Rightarrow g(m) = 14$$

$$\frac{9m+4}{1-m} = \frac{14}{1} \Rightarrow 9m+4 = 14-14m \Rightarrow 23m = 10$$

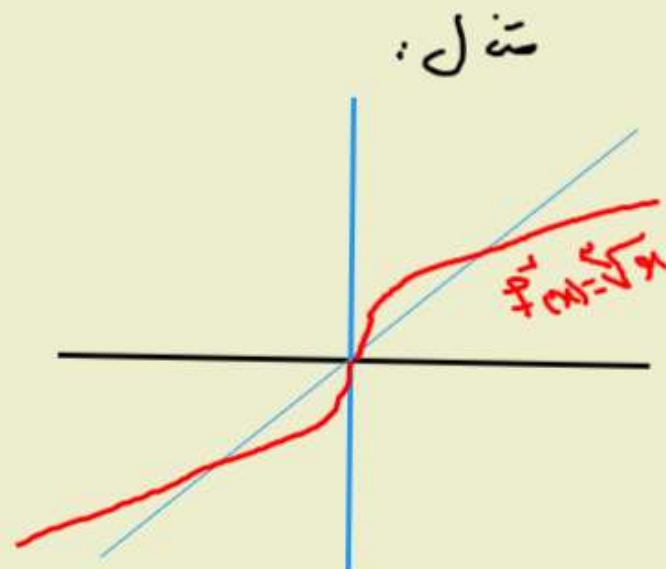
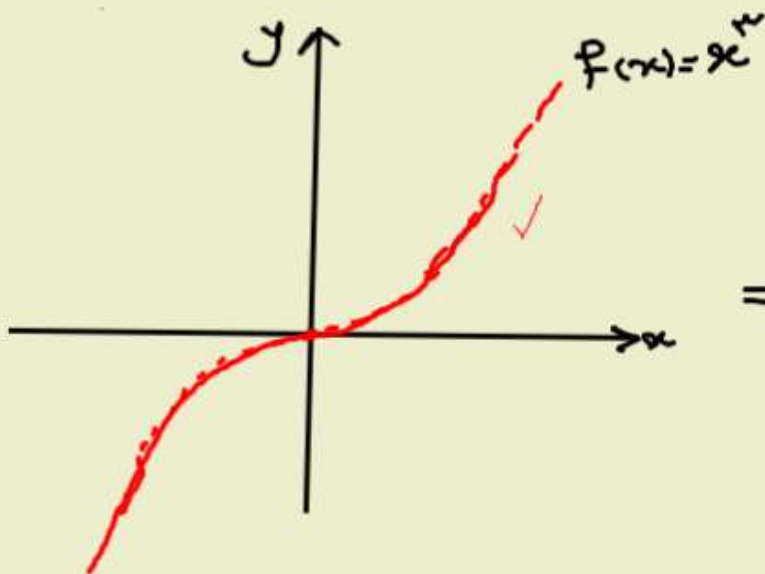
$$\Rightarrow m = \frac{10}{23} = \frac{2}{5}$$

$$g^{-1}(\underline{f^{-1}(r)}) = g^{-1}(14) = \frac{2}{5}$$

مزبان حبیبی



بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مربی



ضابطه تابع وارون :

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

معنی :

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$R_f = D_{f^{-1}}$$

مبانی



تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$ است، معکوس آن f^{-1} را بیابید.

حل: $f(x) = y = \sqrt{x+2} - 1$ $\xrightarrow{\text{تجانس‌سازی}}$ $x = \sqrt{y+2} - 1$
(Note: Red arrows indicate the substitution of x for y and y for x+2)

$$\Rightarrow x+1 = \sqrt{y+2} \Rightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{y+2})^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = y+2 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 2$$

بزرگ



تمرین: آرد $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ نگاه f^{-1} را بیابید.

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \xrightarrow[\text{واحد}]{x \leftrightarrow y} x = \frac{2y-1}{y+2} \Rightarrow xy + 2x = 2y - 1$$

$$\Rightarrow \underline{xy - 2y = -2x + 1} \Rightarrow y(x - 2) = -2x + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2x + 1}{x - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x + 1}{x - 2}$$

مربی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ $g(x) = \sqrt{x-1}$

$f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$

$f(1) - g(1) = 2 - 0 = 2$

$f(0) + g(0) =$ وجود ندارد

$f(-0) + g(-0) =$ وجود ندارد

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 1}{x} = \frac{9}{2} = 4.5$

$g(x) = \sqrt{x-1} = \sqrt{1} = 1$

$f(1) = 1^2 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$g(1) = \sqrt{1-1} = 0$

$f(0) =$ وجود ندارد $(\frac{0}{0})$

$f(-0) = (-0)^2 + \frac{1}{-0} = 0 - \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$

$g(-0) = \sqrt{-0-1} = \sqrt{-1}$ وجود ندارد

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$\text{مثال: } f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$f(x) + g(x) = \quad \text{کجا وجود ندارد؟} \Rightarrow x=2 \quad , \quad x < 1$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) \Rightarrow \text{وجود ندارد}$$

$$g(0) = \sqrt{-1}$$

$$g(-5) = \sqrt{-6}$$

$$f(1) + g(1) = \frac{2}{-1} + \sqrt{0} = -2 + 0 = -2$$

$$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-2}{0} \quad \times$$

مزبان حبیبی



تعریف: فرض کنید f و g دو تابع حقیقی با دامنه های D_f و D_g داشته باشند.

جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم آنها را به ترتیب $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ می گویند.
با دقت و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \quad , \quad x \in D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad x \in D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}\end{aligned}$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثلاً: $f(x) = x^2 + 4x$ (چند جمله‌ای) $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ ✓

$g(x) = \sqrt{x-1}$ (ریشه اول) $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$D_g = [1, +\infty)$ ✓

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x + \sqrt{x-1}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (\sqrt{x-1})$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 4x) \cdot (\sqrt{x-1})$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [1, +\infty)$



$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x-1}}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [1, +\infty) - \{1\} = (1, +\infty)$





مثال: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, $x-1=0 \Rightarrow x=1$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$g(x) = \sqrt{a-x}$, $a-x \geq 0 \Rightarrow a \geq x$, $D_g = (-\infty, a]$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x-1} + \sqrt{a-x}$



$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{2x}{x-1} - \sqrt{a-x}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{2x}{x-1}\right) \cdot \sqrt{a-x}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}{\sqrt{a-x}}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
 $= (-\infty, a] - \{1\}$
 $= (-\infty, 1) \cup (1, a]$

$D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = (-\infty, a] \cup (1, \infty] - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, a]$



بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تجربین آ آر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ و آ ن ف و $f+g$ و $f-g$ و

$f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را بیابید.

تکلیف شد

مزبان حبیبی



شالته: $f(x) = x^2 - x$ ، $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

$$f(g(3)) = f(10) = 10^2 - 10 = 100 - 10 = 90$$

$$g(f(2)) = g(2) = \frac{f(2)+1}{2-2} = \frac{5}{0} \text{ و عدد بزرگ}$$

$$g(2) = \frac{f(2)+1}{2-2} = \frac{10}{1} = 10$$

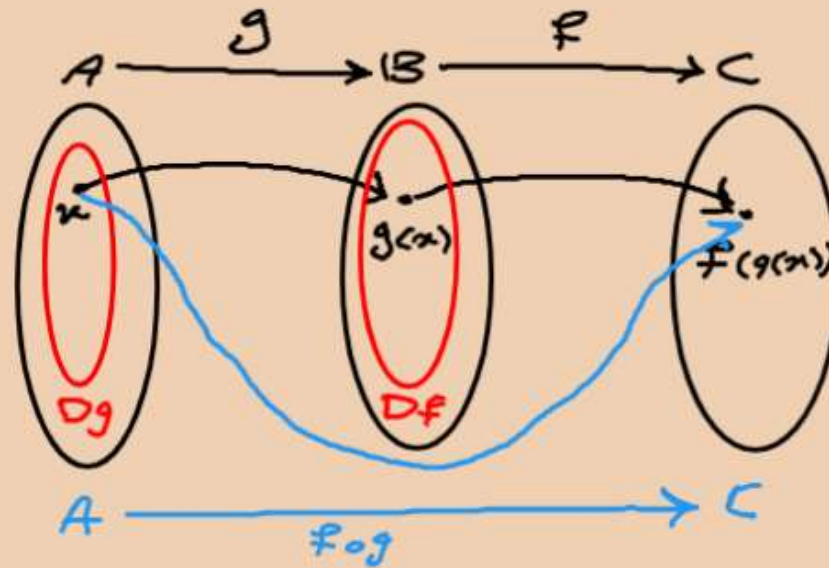
$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعریف: $g: B \rightarrow C$ و $f: A \rightarrow B$



$x \in D_g \Rightarrow g(x)$ موجود است
 $g(x) \in D_f \Rightarrow f(g(x))$ موجود است

$$\left. \begin{array}{l} f \circ g: A \rightarrow C \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{array} \right\}$$



یعنی: اگر f و g دو تابع حقیقیه؛ نسبتاً آنگاه ترکیب $f \circ g$ روی $D_{f \circ g}$ را به دو تصویر گزیننده تعریف می‌کنیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

مزبان حبیبی

تمرین: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ آنگاه

صن بگردانید $g \circ f$ را بیابید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x : x \in D_f, f(x) \in D_g \right\}$$

$$= \left\{ x : x \in \mathbb{R} - \{0\}, \frac{1}{x} \in [0, +\infty) \right\}$$

$$= \left\{ x : x \neq 0, \frac{1}{x} > 0 \right\} = (-\infty, +\infty)$$

$x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$x > 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty)$

$x \neq 0$

بزوه های آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۲: اگر $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ صدق کند، معادله $f \circ g$ را بنویسید.

تکلیف شد

مزبان حبیبی



نگار من: اگر $f(x+1) = x^2 - x$ آنگاه $f(5)$ کجا است؟

$$x+1 = t \Rightarrow x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{1}$$

$$f(x+1) = x^2 - x \Rightarrow f(t) = \left(\frac{t-1}{1}\right)^2 - \left(\frac{t-1}{1}\right)$$

$$f(5) = \left(\frac{5}{1}\right)^2 - \frac{5}{1} = \frac{16}{1} - \frac{5}{1} = \frac{11}{1}$$

مزبان حبیبی

بزوہ ہی آموزشی، حسابان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بابان
پت

دکتر مزبان حبیبی