سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: هندسه سه-دوازدهم ریاضی

فصل اول هندسه سه، ماتریس ها

سلام

وقت بخیر

هندسه سه - دوازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ - شیراز

۲۷/۷/۹۹ ساعت ۷:۴۵

مدرس : مزبان حبیبی

یادآوری: ضرب عدد در ماتریس:

$$r\in\mathbb{R}\ ,\ A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$r.A=[r.a_{ij}]_{m\times n}$$

مثال: $$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix}6&3&3\\0&6&-3\end{bmatrix}$$

ویژگی های جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس :

۱) $A + (-A) = (-A) + A = \bar{0}$

۲) $(r \pm s) A = rA \pm sA$

۳) $r \cdot (A \pm B) = r \cdot A \pm r \cdot B$

۴) $r \cdot A = rB \,,\, r \neq 0 \Longrightarrow A = B$

۵) $A = B \Longrightarrow r \cdot A = r \cdot B$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

توجه: ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی، یک عدد حقیقی است.

حالت:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}=(2\times 0)+(1\times 3)+(1\times(-1))$$
$$=0+3-1=2$$

حالت: $$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}=(-2)+(0)+3+5$$
$$=6$$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس دلخواه :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{bmatrix} = [\cdots\cdots]$$

باید ماتریس مورد نظر را در تک تک ستونهای ماتریس دوم ضرب کرد. و جواب یک ماتریس سطری است.

الف:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + (-1) + 1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 + 2 + 3 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 1 + 2 = 5$$

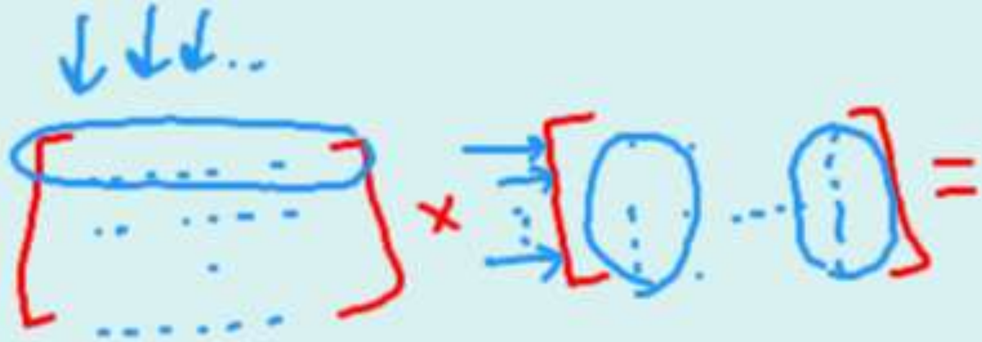
بالة :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4+1+5+1=3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0+1+10+1=12$$

ضرب ماتریس ها در حالت کلی :



باید هر یک از سطرهای ماتریس اول را در تمام ستون های ماتریس دوم ضرب کرد .

12 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 4+5+0=9$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2+1+1=0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0+10-0=10$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0+2-1=1$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

نمایش:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

تمرین: ضرب زیر را انجام دهید:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} =$$

لطفا جواب را تا دوشنبه ارسال کنید.

تعریف ضرب ماتریس :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{n \times p}$$

$$A \times B = [c_{ij}]_{m \times p}$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \text{عدد}$$

یعنی:

$C_{ij} = [$ سطر iام ماتریس A $] \times [$ ستون jام ماتریس B $]$

تمرین صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۱ـ اگر $A=[a_{ij}]_{3\times4}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1^2 & 1^2 & 1^2 \\ 2+1 & 7 & 2^2 & 2^2 \\ 3+1 & 3+2 & 7 & 3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 4-y=3 \Rightarrow y=1$$

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \overline{O}$ و $B \neq \overline{O}$ ولی $AB = \overline{O}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$A \cdot B = 0$$

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^{۲}=AA$ و $A^{۳}=AA^{۲}$ و . . . و $A^{n}=AA^{n-۱}$ ($n>۱$ $n\in\mathbb{N}$) در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{۲}$ و $A^{۳}$ و $A^{۷}$ را بیابید.

$$A^{2}=A\times A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$A^{3}=A^{2}.A=I.A=A$$

$$A^{4}=A^{2}.A^{2}=I.I=I \Rightarrow A^{n}=\begin{cases} A & \text{فرد } n \\ I & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$A^{7}=A^{4}\times A^{3}=I.A=I$$

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{قطری } A\times B}\begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

۷ـ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1^2-1 & 1-2 \\ 2-1 & 2^2-1 \\ 3-1 & 3-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1^2+1 & 1-2+2 & 1-3+2 \\ 1+2 & 2^2+1 & 2-3+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0-3 & 0-5 & 0-1 \\ 2+9 & 1+15 & 0+3 \\ 4+3 & 2+5 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0+1+0 & -2+3+0 \\ 0+5+2 & -3+15+1 \end{bmatrix}$$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & \circ & \circ \\ \circ & r_2 & \circ \\ \circ & \circ & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد

در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix}$$

۹ــ اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

$$A=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$A.B=k.B$ و $B A=k.B$

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟ بله

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B = B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^{۲} = A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$

$$(A+B)^{۲} = (A+B)\cdot(A+B) = A^{۲} + \underline{\underline{AB + BA}} + B^{۲}$$
$$= A^{۲} + AB + AB + B^{۲} = A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$$

ب) $(A-B)(A+B) = A^{۲} - B^{۲}$

$$(A-B).(A+B) = A^{۲} + AB - BA - B^{۲}$$
$$= A^{۲} + AB - AB - B^{۲} = A^{۲} - B^{۲}$$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

نتیجه: $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$

سلام

وقت بخیر

هندسه سه دوازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۲ شیراز

دوشنبه ۱۲ / ۸ / ۹۹ ساعت ۷:۳۰

مدرس : مزبان حبیبی

موضوع : وارون ماتریس ۲×۲

و حل دستگاه به کمک آن

مثال : $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

آیا ماتریس B با شرط زیر وجود دارد؟

$A \times B = I$ ؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+z & 2y+t \\ -x+z & -y+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=1 \\ -x+z=0 \\ 2y+t=0 \\ -y+t=1 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow x=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{3} \\ \\ \Rightarrow y=-\frac{1}{3},\ t=+\frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس ۲×۲ :

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۲ باشد، در این صورت دترمینان ماتریس A را با $|A|$ یا $\det A$ نشان می‌دهیم و :

$$\boxed{|A| = ad - bc}$$

راه حل:

۱) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

$$\det A = |A| = (۲\times ۱) - ((-۱)\times ۱)$$

$$= ۲-(-۱) = ۳$$

۲) $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

$$|A| = ۱۵ - ۲ = ۱۳$$

۳)

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۱۲ - ۱۲ = ۰$$

تمرین: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & m-1 \end{bmatrix}$ و $|A|=17$ ، آنگاه مقدار m را بیابید.

: $|A| = 2\times(m-1) - 5 = 2m-2-5 = 2m-7$

$|A| = 17 \Rightarrow 2m-7=17 \Rightarrow 2m=24 \Rightarrow m=12$

تمرین ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}3 & m+3\\1 & 5\end{bmatrix}$ آنگاه به ازای چه مقداری از m دترمینان ماتریس برابر با ۷ خواهد بود؟

تکلیف شد

وارون ماتریس 2×2 :

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که:

$$A\times B = B\times A = I$$

آنگاه ماتریس B وارون A نامیده و با A^{-1} نشان می‌دهیم یعنی:

$$A\times A^{-1} = A^{-1}\times A = I$$

مسئله ۱: اگر وارون A وجود داشته باشد، ثابت کنید منحصر به فرد است.

اثبات: فرض کنیم B و C وارون های ماتریس A باشند.

B وارون A است $\Longrightarrow A\times B = \underline{\underline{B\times A}} = I \quad (1)$

C وارون A است $\Longrightarrow \underline{\underline{A\times C}} = C\times A = I \quad (2)$

$$B = B\times I \overset{(2)}{=} B\times(A\times C) = (B\times A)\times C \overset{(1)}{=} I\times C = C$$

یعنی معکوس A فقط یک وارون دارد.

سوال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A| \neq 0$ ثابت کنید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

اثبات :

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{0}{ad-bc} \\ \frac{0}{ad-bc} & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

و همین ترتیب، $A^{-1}.A = I$

نتیجه ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $|A|=0$ آنگاه

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

مثال: $A=\begin{bmatrix}2&5\\-1&3\end{bmatrix}$ $\quad |A|=6-(-5)=11$

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\times\begin{bmatrix}3&-5\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{11}&-\frac{5}{11}\\\frac{1}{11}&\frac{2}{11}\end{bmatrix}$$

تمرین ۳: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ آنگاه مجموع درایه‌های A^{-1} کدام است؟

تکلیف شد.

نتیجه: اگر $A.X=B$ و A وارون‌پذیر باشد آنگاه $X=A^{-1}.B$

اثبات: $A.X=B \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(A.X)=A^{-1}.B$

$$\Rightarrow (A^{-1}.A).X=A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow I.X=A^{-1}.B \Rightarrow X=A^{-1}.B$$

یعنی: $\boxed{A.X=B,\ |A|\neq 0 \Rightarrow X=A^{-1}.B}$

تمرین ۵: اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $A \cdot X - 2I = B$

آنگاه ماتریس X را بیابید.

$$\therefore A \cdot X - 2I = B \Rightarrow AX = B + 2I \xRightarrow{|A| \neq 0} X = A^{-1} \cdot (B + 2I)$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{7} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

تمرین ۲ :

اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ و $(A+B)\cdot X - I = B$

آنگاه ماتریس X را بیابید.

تکلیف شد.

حل ساده دستگاه:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

۱) تبدیل دستگاه به رابطه ماتریسی

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب ، $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ax+by \\ a'x+b'y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \Rightarrow A\cdot X=B$$

۲) حل دستگاه .

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A\cdot X = B \xrightarrow{|A|\neq 0} X = A^{-1}\cdot B$$

حل:
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-2) - (1) = -3 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-3} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

تمرین: دستگاه زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

تکلیف شد

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام ، وقت بخیر

هندسه سه - دوازدهم ریاضی

دبیرستان شهدا - شیراز

دوشنبه نوزدهم آبان نود و نه .

مدرس : مزبان حبیبی

موضوع :

دترمینان ماتریس ۲×۲

یادآوری:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

مثال: $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det A = |A| = (-6)-(5) = -11$$

تمرین ۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2m+1\end{bmatrix}$ ، ۱ ث نگاه . به ازای چه مقداری از m داریم $|A|=7$ ؟

$$|A|=(-1)(2m+1)-2=7$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2m+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -2m+(-1)-2=7$$

$$\Rightarrow -2m-3=7$$

$$\Rightarrow -2m=10 \Rightarrow m=\frac{10}{-2}=-5$$

تمرین ۱: اگر $A=\begin{bmatrix} m+2 & 1 \\ 5 & m \end{bmatrix}$ آنگاه مقدار m را چنان بیابید که $|A|=-2$.

تمرین ش د (از طریق بخش تکلیف)

یادآوری ۲:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$1)\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} c & -b \\ -d & a \end{bmatrix}$$

$2)\quad |A| = 0 \Longrightarrow$ (منفرد است) ماتریس A وارون پذیر نیست

تمرین: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ را تعیین کنید:

$|A| = 5 - 2 = 3$, $A^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3 & -2/3\\ -1/3 & 1/3\end{bmatrix}$

توجه:

$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A^{-1} \times A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ واحد

یادآوری ۳:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

دستگاه فوق را بصورت معادله $A\cdot X=C$ می توان نوشت:

$$\boxed{AX=C \xrightarrow{|A|\neq 0} X=A^{-1}\cdot C}$$

تمرین: دستگاه زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| = (-2) - 1 = -3 \qquad A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.C = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5+1 \\ -5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 7/3 \end{cases}$$

تمرین ۲: دستگاه $\begin{cases}3x-y=7\\ x+y=3\end{cases}$ را به کمک ماتریس وارون حل کنید.

تکلیف شاد

تمرین: اگر $\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X+2I=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس X کدام است؟

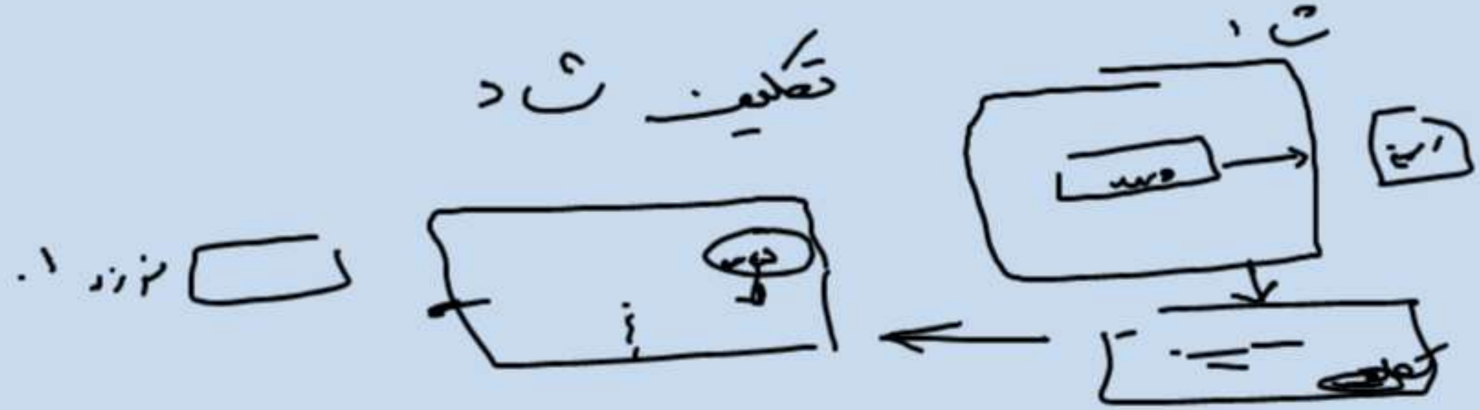
(I ماتریس همانی مرتبه ۲ است.)

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X+2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}\longrightarrow X=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}^{-1}}}\cdot\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{5-2}\times\begin{bmatrix}5&-1\\-2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}-12&6\\6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2\\2&-1\end{bmatrix}$$

تمرین ۳: اگر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . X . \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = I$ باشد، ماتریس X را بیابید.



دترمینان ماتریس ۳×۳ :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

روش بسط :

$$|A| = a\cdot(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

ثالثاً:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2\big(6-(-2)\big) - (-5)\big(0-(-1)\big) + 1\big(0-3\big)$$

منفی

$$= 2(8) + 5(1) + 1(-3) = 16 + 5 - 3 = 18$$

مثال :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(0-2) - 2(2-10) + 3(2-0)$$
$$= -2 + 16 + 6 = 20$$

روش ساروس :

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

$$|A|=(0+20+6)-(0+2+4)=26-6=20$$

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام ، وقت بخیر

هندسه سه دوازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ شهریور از

دوشنبه ۹۹/۸/۲۶ ساعت ۷:۴۵

مدرس : مزبان حبیبی

موضوع :

حل نمونه سوالات تمرین

فصل اول

تمرین ۱:

اگر $A=[2\quad 1\quad -1]$ و $B=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ آنگاه $|A.B|$ و $|B.A|$ را بیابید.

$$A.B=[2\quad 1\quad -1]\times\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=0+(1)+(-2)=-1$$

$$|A.B|=|-1|=1$$

$$B.A=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\times[2\quad 1\quad -1]=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&1&-1\\4&2&-2\end{bmatrix}$$

$$|B.A|=0\times(\quad)-0\times(\quad)+0\times(\quad)=0$$

تذکر: در ضرب ماتریس:

در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$.

تمرین ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A^2 را بیابید.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-2)+0&2+0+1&1+4+1\\-1+0+0&-2+0+2&-1+0+2\\0+(-1)+0&0+0+1&0+2+1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&3&6\\-1&0&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$$

$$|A^2|=-1(0-1)-3(\overbrace{-3-(-1)}^{-2})+6(-1-0)$$
$$=1-3(-2)+6(-1)=1+6-6=1$$

تمرین ۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ آنگاه $|A|$ کدام است؟

یادآوری: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ad-bc$

حل:

$$|A| = (5|A|)(4|A|^2) - (|A|)(5)$$

$$|A| = 20|A|^3 - 5|A| \Rightarrow 20|A|^3 - 6|A| = 0 \Longrightarrow |A|(20|A|^2-6)=0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \\ 20|A|^2 - 6 = 0 \Rightarrow |A|^2 = \frac{6}{20} = 0.3 \Longrightarrow |A| = \pm\sqrt{0.3} \end{cases}$$

تمرین ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-3&-2\\5&-1\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس های $A^{-1}-B^{-1}$ و $(A-B)^{-1}$ را بیابید.

$$|A|=20-6=14 \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$|B|=3-(-10)=13 \rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\-5&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1&2\\-5&-3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-B^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}-\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1&2\\-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14}+\frac{1}{13}&-\frac{3}{14}-\frac{2}{13}\\-\frac{2}{14}+\frac{5}{13}&\frac{4}{14}+\frac{1}{13}\end{bmatrix}$$

ادامه:

$$A-B=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -3 & 6\end{bmatrix}$$

$$|A-B| = 42-(-15) = 57$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{|A-B|}\cdot\begin{bmatrix}6 & -5\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix}6 & -5\\ 3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{6}{57} & -\frac{5}{57}\\ \frac{3}{57} & \frac{7}{57}\end{bmatrix}$$

تذکر: در بحث ماتریس‌ها: در حالت کلی

$$(A-B)' \neq A' - B'$$

تمرین ۵: اگر $A=\begin{bmatrix}5&2\\3&2\end{bmatrix}$ آنگاه $|A|$ و $|A^{-1}|$ را بیابید.

$$|A|=10-6=4$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}2&-2\\-3&5\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&-2\\-3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/4&-2/4\\-3/4&5/4\end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}|=\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{10}{16}-\frac{6}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

تذکر: اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد:

$$|A|\cdot|A^{-1}|=1$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

تمرین ۶: اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان A و $5A$ را بیابید.

$$|A| = 1(3-2) - 1(6-1) + 2(4-1)$$

$$= 1 - 5 + 6 = 2$$

$$5A = \begin{bmatrix}5&5&10\\10&5&5\\5&10&15\end{bmatrix}$$

$$|5A| = 5\times(75-50) - 5(150-25) + 10(100-25)$$

$$= 125 - 625 + 750 = 250$$

$$\boxed{|5A| = 125|A| = 125 \times 2 = 250}$$

تذکر: اگر $k \in R$ و A ماتریس $n \times n$ باشد:

$$|k.A| = k^n . |A|$$

مثل: در ماتریس 3×3 :

$$|k.A| = k^3 . |A|$$

تمرین

صفحه ۳۰ کتاب هندسه

۱ــ اگر $A=[۱\ \ ۲\ \ -۳]$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

$$AB=[۱\ \ ۲\ \ ۳]\times\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}=-۲-۲+۹=۵$$

$$\Rightarrow |AB|=۵$$

$$B.A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}\times[۱\ \ ۲\ \ ۳]=\begin{bmatrix}-۲&-۴&-۶\\-۱&-۲&-۳\\۳&۶&۹\end{bmatrix}$$

$$|BA|=-۲(-۱۸+۱۸)+۴(-۹+۹)-۶(-۶+۶)=۰$$

۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به‌دست آورید.

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$|A^2| = 4\times 9\times 25 = 900$$

روش دوم: $|A| = (-2)(-3)\times 5 = 30$

$$|A^2| = |A|^2 = 30^2 = 900$$

۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳-۲\right)$ را بیابید.

$$|A| = (5|A|)\cdot(4|A|^2) - (|A|)(5) = 20|A|^3 - 5|A|$$

$$\Rightarrow 20|A|^3 - 6|A| = 0 \Rightarrow |A|(10|A|^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \Rightarrow |A|^3 - 2 = -2 \\ |A|^2 = 0.3 \Rightarrow |A| = \pm\sqrt{0.3} \Rightarrow |A|^3 - 2 = \pm 0.3\sqrt{0.3} - 2 \end{cases}$$

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

۴ـ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$|A| = d(bc - bc) - e(ac - ac) + f(ab - ab) = 0$

اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس برابر باشند آنگاه دترمینان صفر است.

۵ـ ماتریسی ۳ × ۳ چون A بیابید که ۳ = $|A|$.

$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۳$

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

$A^{-۱} = \frac{۱}{۲۰-۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B^{-۱} = \frac{۱}{۲+۱۵}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$

$۲A^{-۱} - ۳B^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷}+\frac{۳}{۱۷} & -\frac{۳}{۷}-\frac{۹}{۱۷} \\ -\frac{۲}{۷}+\frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۴}{۷}+\frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix}$

۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

$|A| = ۱۰ - ۶ = ۴$

$A^{-1} = \frac{1}{۴}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{۲} & -\frac{1}{۲} \\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴} \end{bmatrix}$

$|A^{-1}| = \frac{۵}{۸} - \frac{۳}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{1}{۴} = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

اثبات: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\left|\begin{matrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} ka & kb \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|B| = kaei + kbfg + kcdh - kceg - kafh - kbdi = k \cdot |A|$$

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ بررسی کنید.

$$|A| = ad - bc$$

$$|B| = kad - kbc = k(ad - bc) = k \cdot |A|$$

نتیجه: $|B| = k \cdot |A|$

۹ـ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ $(k \in \mathbb{R})$ را با هم مقایسه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$kA=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix} \Rightarrow |kA|=k^2ad-k^2bc=k^2\cdot|A|$$

نتیجه: $|kA|=k^2\cdot|A|$

۱۰ـ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=5$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

$$||A|\cdot A|=|A|^3\cdot|A|=|A|^4=5^4=625$$

توجه: $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=۱ \\ ۴x+۲y=۱۰ \end{cases} \qquad A^{-1}=\frac{1}{۶+۲۰}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}=\frac{1}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲+۵۰ \\ -۴+۳۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

$$A=\begin{bmatrix} k & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-۲k-۳\neq ۰ \Rightarrow k\neq -\frac{۳}{۲}$$

۱۳ـ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $|A|=3+10=13\neq 0$

$|A|\neq 0 \Rightarrow$ جواب منحصر به فرد دارد

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{13}\times\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1+40 \\ 2+24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, $|A|=-6+6=0$

$\frac{1}{-2}=\frac{3}{-6}\neq\frac{5}{1}\Rightarrow$ جواب ندارد

پ) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $|A|=12-12=0$

$\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}\Rightarrow$ بیشمار جواب دارد.

فصل دوم، مقاطع مخروطی

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام به دوستان عزیز

هندسه سه - دوازدهم ریاضی

دبیرستان شهدا - شیراز

در تاریخ ۳-۹-۹۴ ساعت ۷:۳۰

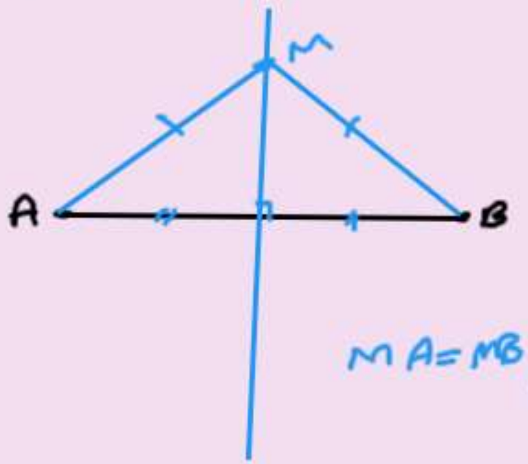
موضوع :

معرفی مقاطع مخروطی

میزبان حبیبی

یادآوری ۱:

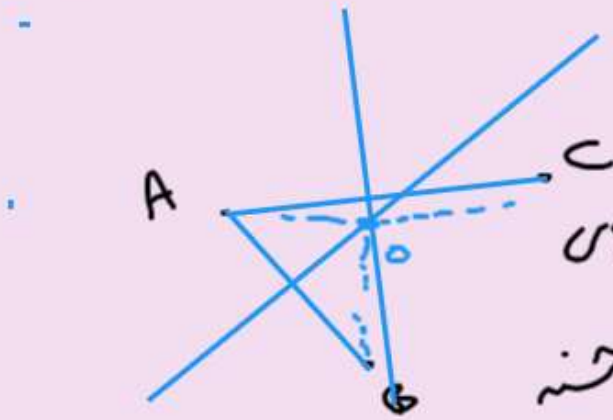
مکان هندسی نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله باشد، عمود منصف پاره خط AB است.



یادآوری:

نقطه M روی عمود منصف AB است اگر و تنها اگر $MA=MB$

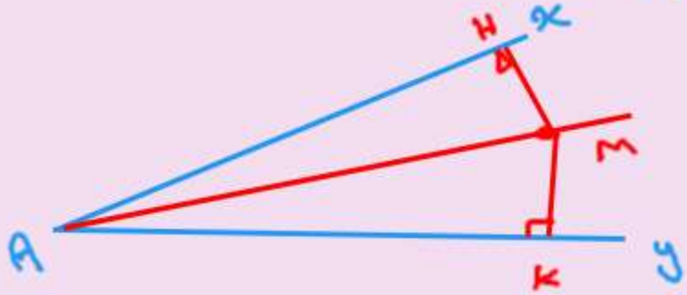
تمرین: نقاط A، B و C غیر هم‌خط مفروضند، نقطه‌ای بیابید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد.



جواب: می‌دانیم محل عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرسند. پس کافی است تا عمودمنصف‌های AB، AC را رسم کنید تا در نقطه O متقاطع شوند.

$OA=OB=OC$

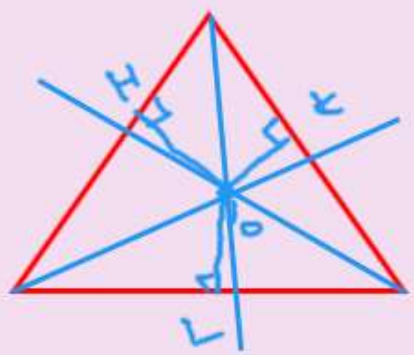
یادآوری ۲: مکان هندسی نقطه‌ای (نقاطی) که از دو ضلع زاویه $\hat{A}$ به یک فاصله باشند، نیمساز زاویه $\hat{A}$ است.



$MH = MK \Longleftrightarrow$ M روی نیمساز A

یادآوری: نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

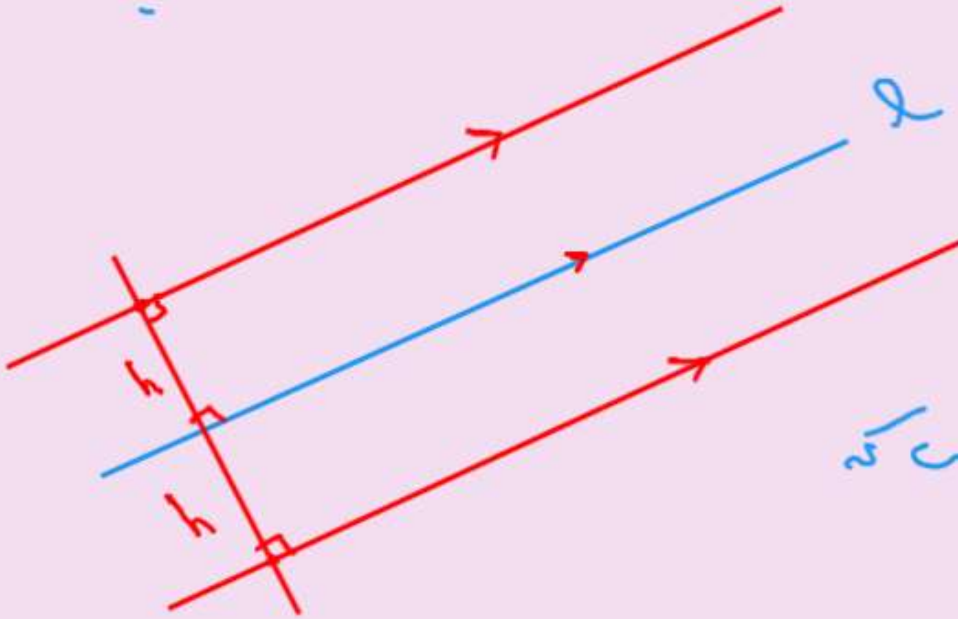
و اگر O نقطه همرسی آنها باشه:



$OH = OK = OL$

یادآوری ۳:

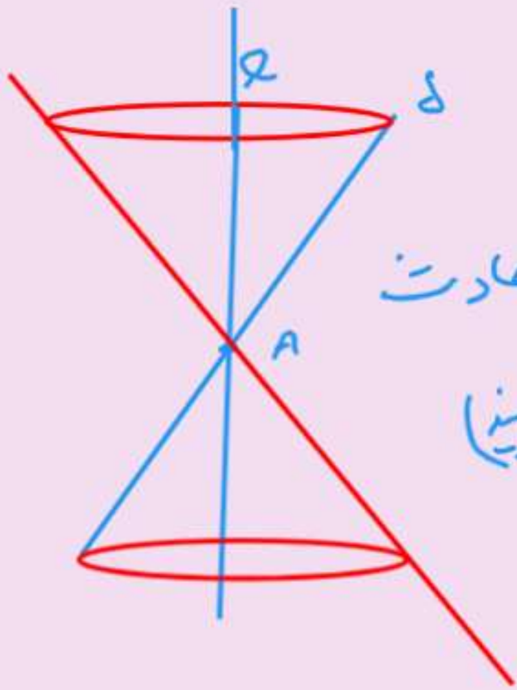
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصله h باشند، دو خط راست موازی خط l است که از l به فاصله h هستند.



تعریف: (زاویه مخروطی)

دو خط راست متقاطع غیر متعامد را در نظر بگیرید.

از دوران خط حول خط ثابت e ، شکلی حادث می شود که آن را سطح مخروطی (زاویه مخروطی) می گویند

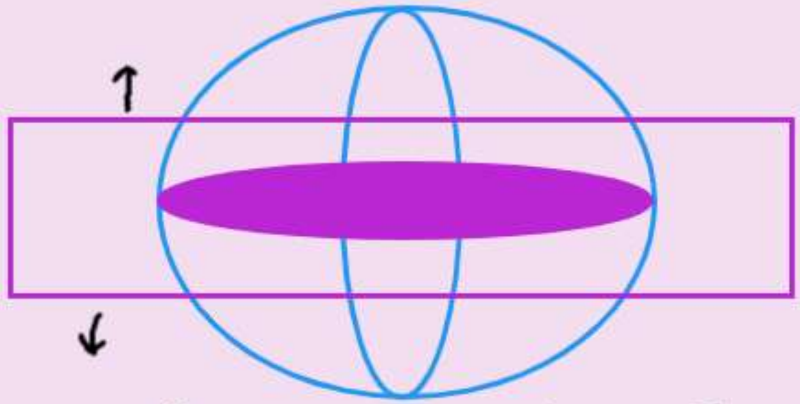


تذکر ۱ :

اشتراک صفحه و کره ی ،

یا تهی است یا یک نقطه و

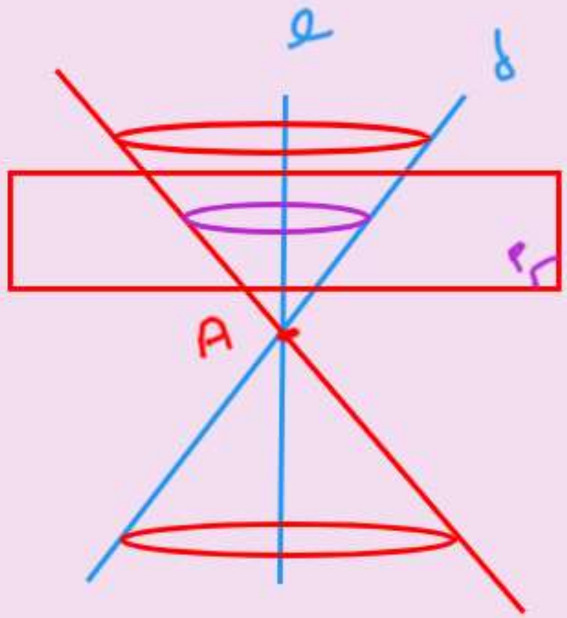
یا یک دایره :



یعنی: سطح مقطع صفحه و کره می تواند تهی ، نقطه و یا دایره باشد .

مقطع مخروطی:

اگر صفحه P و رویه مخروطی S را در اختیار داشته باشیم، آنگاه نقاط مشترک P و S را یک مقطع مخروطی می‌گویند.

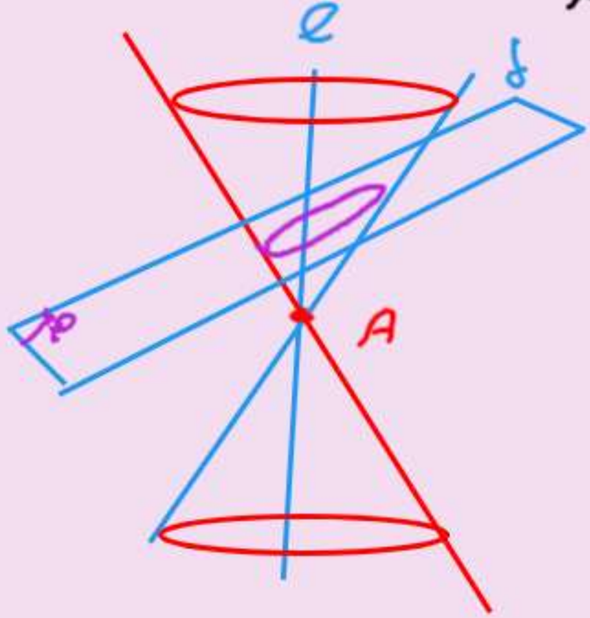


۱) اگر صفحه P بر محور عمود باشد و از A نگذرد

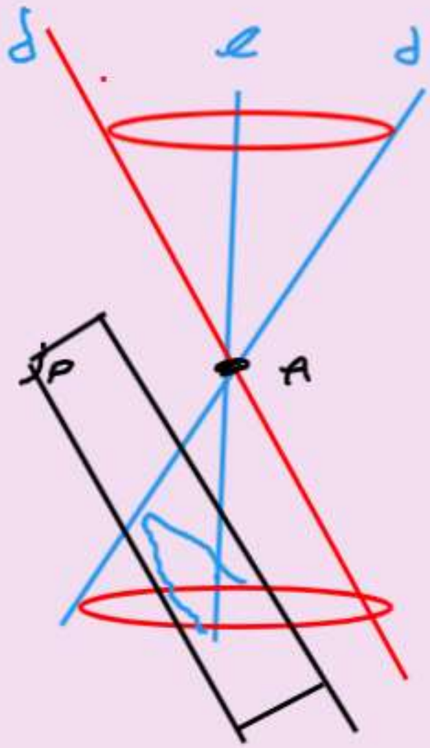
آنگاه مقطع مخروطی یک دایره است.

۲- اگر صفحه P بر محور عمود نباشد و با l موازی نباشد،

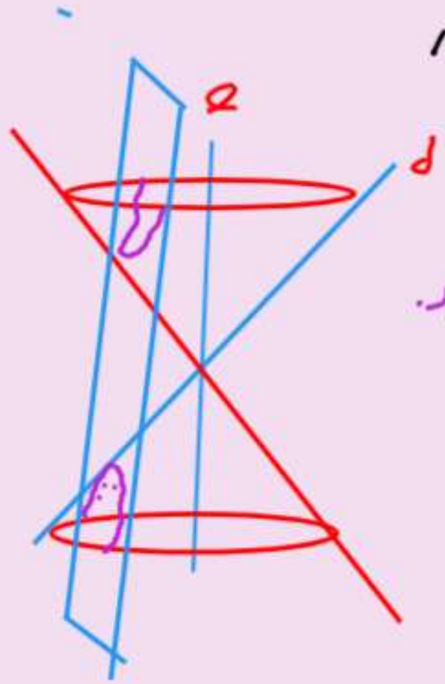
آنگاه مقطع مخروطی یک بیضی است.



۳) اگر صفحه P با d موازی باشد و از نقطه A نگذرد



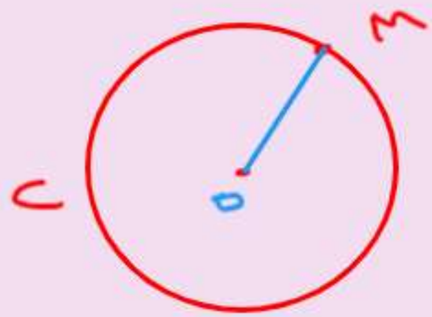
سهمی: مقطع مخروطی را سهمی می‌گویند.



۴) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که شامل S نباشد و هر دو تکه رویه را قطع کند.

آنگاه مقطع مخروطی، هذلولی نامیده می‌شود.

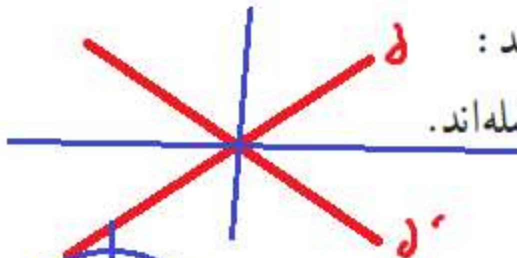
یادآوری: نقطه M روی دایره $C(O,R)$ است اگر و تنها اگر $OM=R$



تمرین

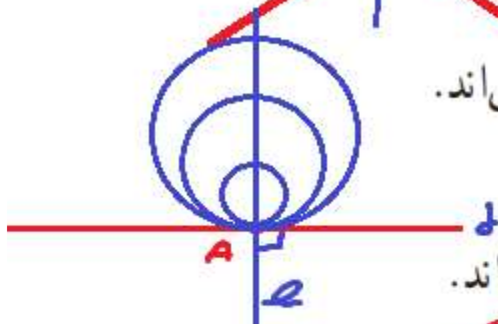
صفحه ۳۸ کتاب هندسه ۳

۱ــ مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :



الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

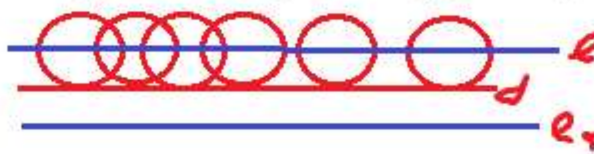
نیمسازهای دو خط



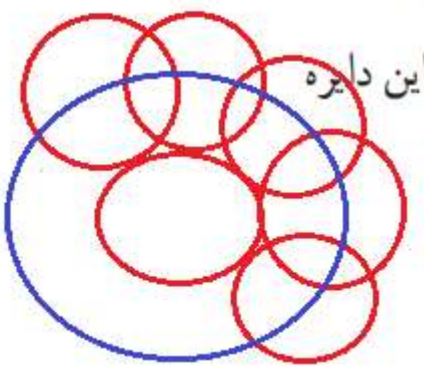
ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند.

خطی است که از A گذشته و بر d عمود است.

پ) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.



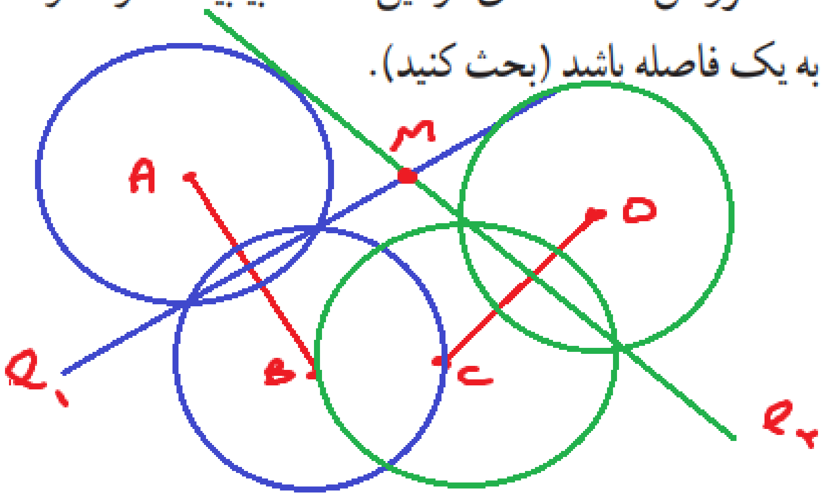
دو خط است d_1 و d_2 که با d موازی و به فاصله r هستند.



ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارجی‌اند.

دایره $C'(O, 2r)$

۲ـ نقاط A،B،C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).



ℓ_1: عمود منصف AB

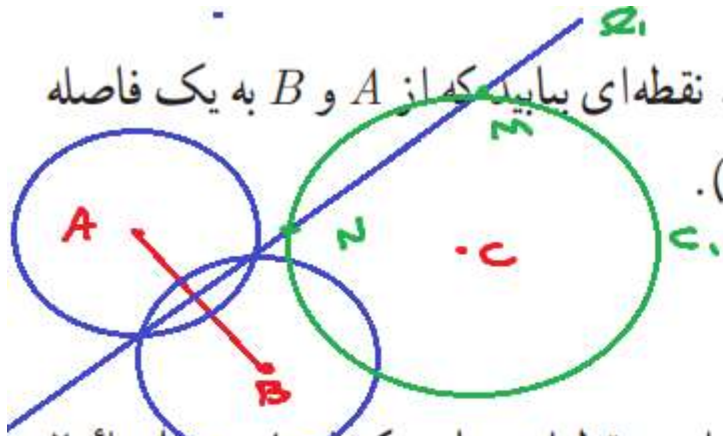
ℓ_2: عمود منصف CD

1) $\ell_1 \nparallel \ell_2 \Rightarrow$ یک جواب منحصربفرد $\equiv M$

2) $\ell_1 \parallel \ell_2$ و مجزا $\Rightarrow$ مسأله جواب ندارد

3) $\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow$ بیشمار جواب دارد

۳ـ نقاط A,B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

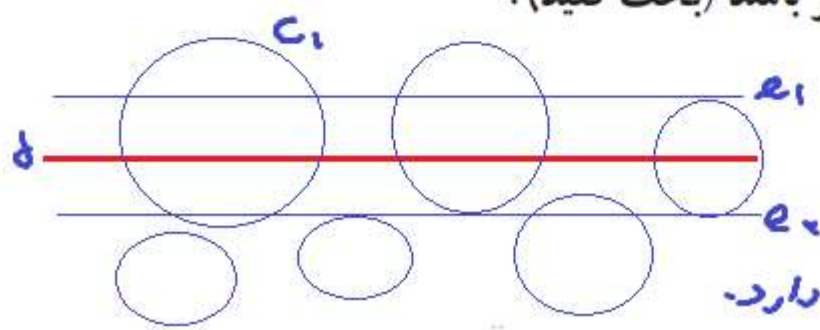


e_1: عمودمنصف AB

C_1: دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳

صفر، یک یا دو جواب دارد.

۴ـ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).



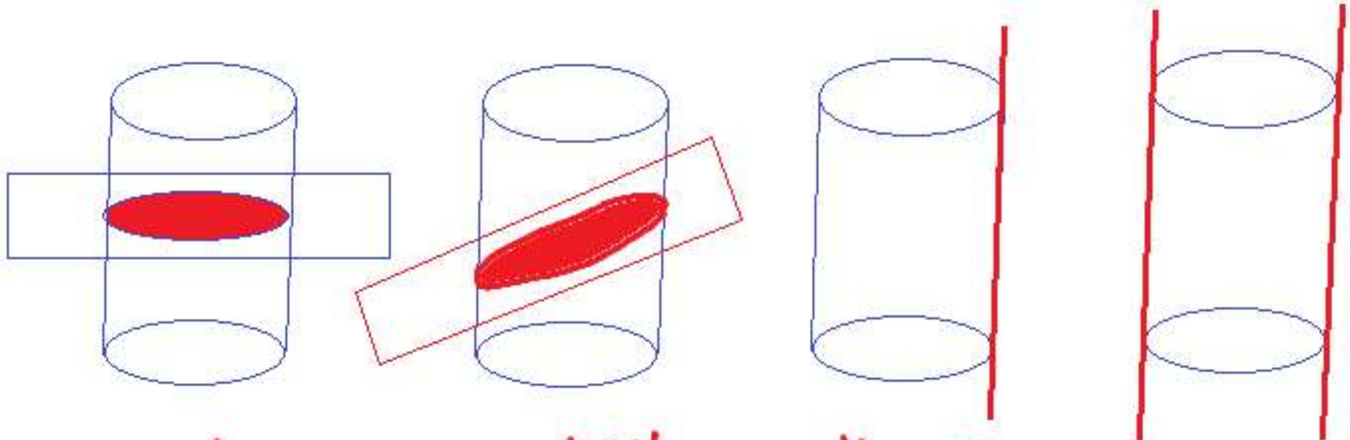
e_1 و e_2: دو خط موازی d به فاصله ۳

C_1: دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز A

صفر، یک، دو، سه و یا چهار جواب دارد.

۵ــ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟ دو خط راست متقاطع

۶ــ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).



تهی - یک خط - دو خط راست موازی - دایره - بیضی

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام و وقت بخیر

هندسه سه ، دوازدهم ریاضی ، دبیرستان شهدا ۱۲ شیراز

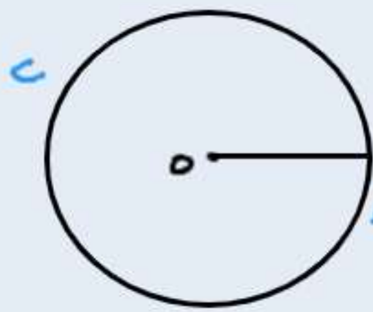
دوشنبه ششم بهمن نود و نه

موضوع : دایره

مزبان حبیبی

تعریف: نقطه ثابت O و عدد حقیقی $R>0$ را در نظر بگیرید.

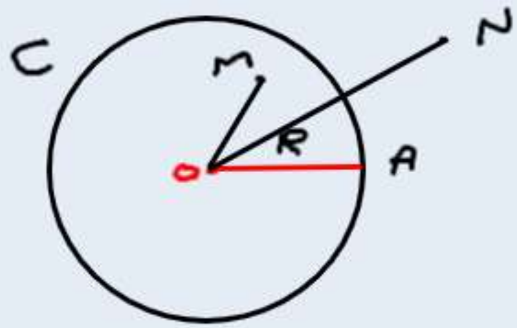
مکان هندسی نقطه ای (نقاطی) از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله R باشند:



توجه: دایره به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نمایش میدهیم

وضعیت نقطه نسبت به دایره :

دایره $C(O,R)$ را در نظر بگیرید .



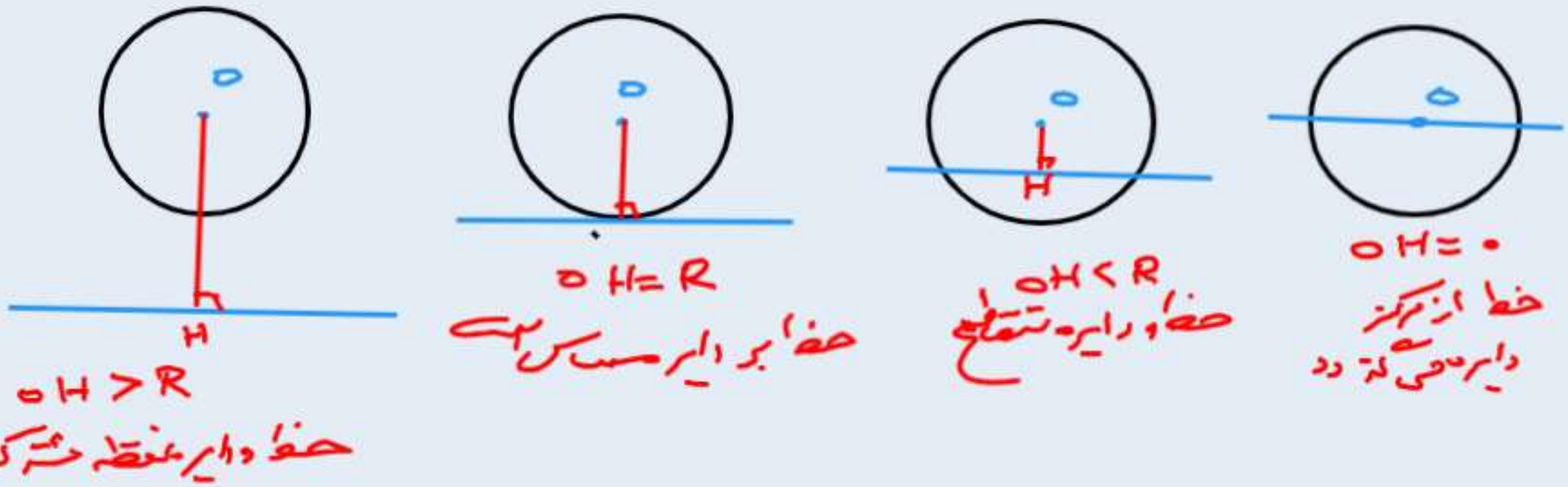
$OA=R \Rightarrow$ A روی دایره است

$OM<R \Rightarrow$ M درون دایره است

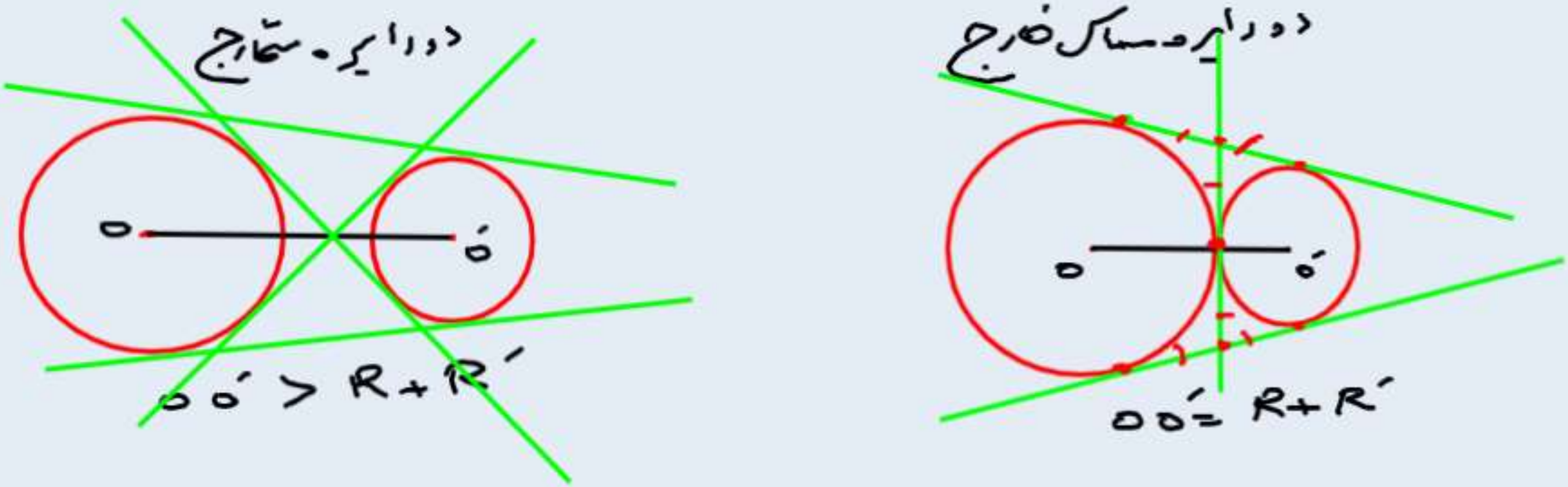
$ON>R \Rightarrow$ N بیرون دایره است

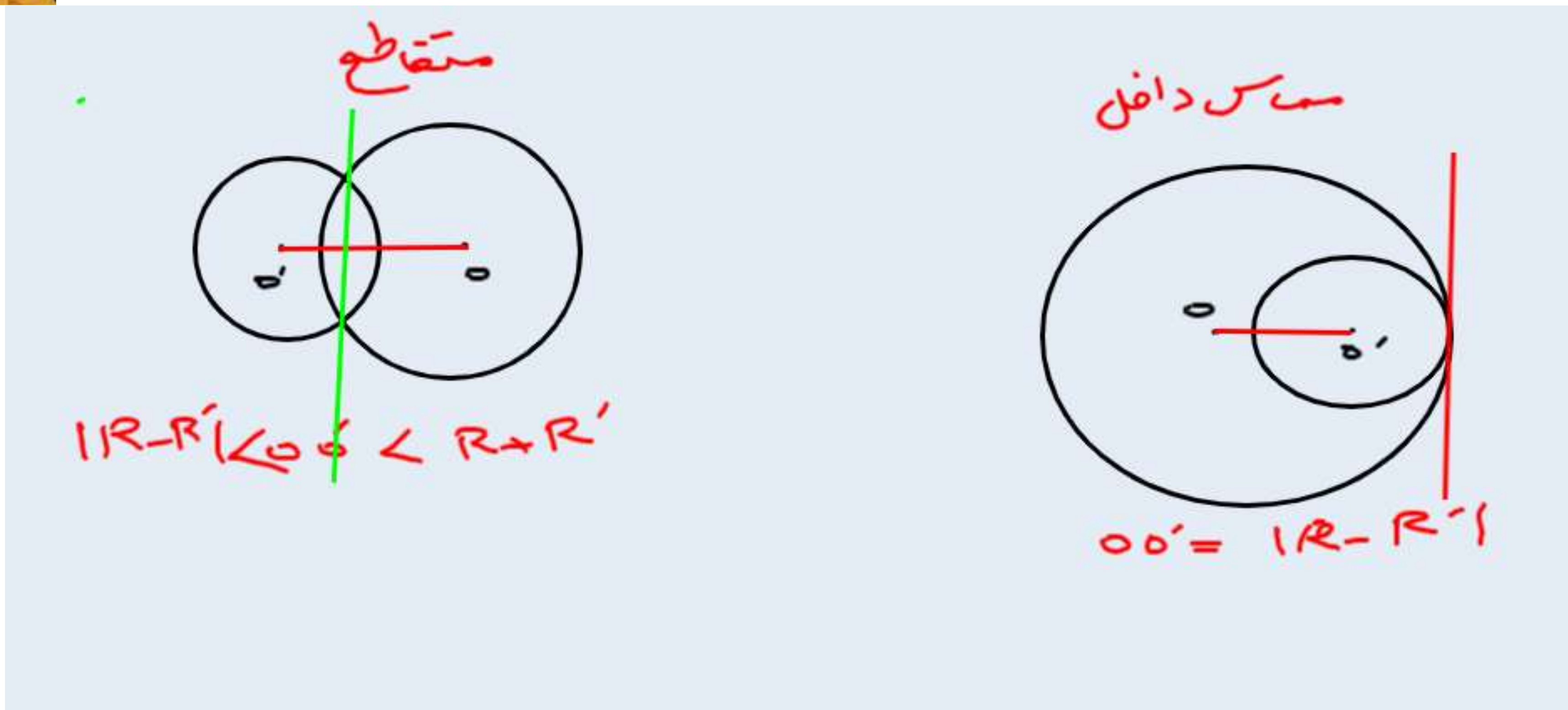
$OP=0 \Rightarrow$ P همان مرکز دایره است

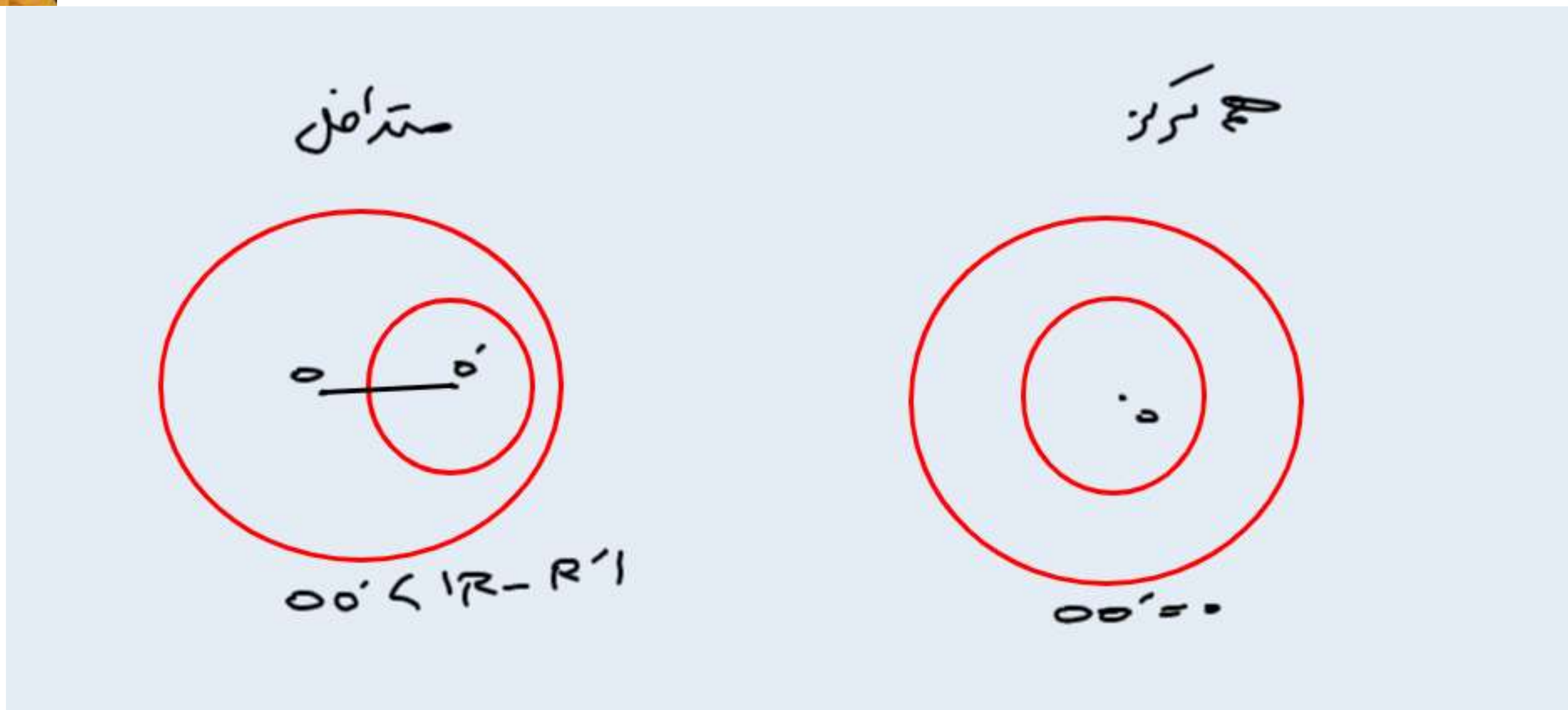
وضعیت خط و دایره نسبت به هم:



وضعیت دو دایره نسبت به هم: دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر بگیرید.




متقاطع
O'
O
|R−R'|<OO' < R+R'
مماس داخل
O
O'
OO' = |R−R'|

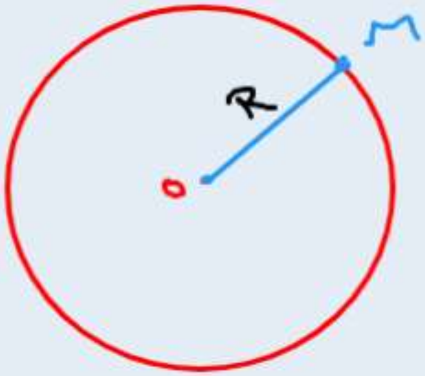

متداخل
هم مرکز
$OO' < |R-R'|$
$OO' = 0$

یادآوری: $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

معادله دایره:

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره، R شعاع دایره باشد

و نقطه $M(x,y)$ روی دایره باشد:



$$OM=R$$

$$\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=R$$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(\underset{\alpha}{2},\underset{\beta}{5})$ مرکز آن بوده و شعاع آن $\underset{R}{7}$ باشد.

شکل عمومی   مرکز (α,β)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$$

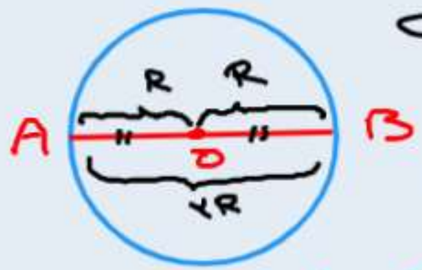
$$x^2-4x+4+y^2-10y+25=49$$

$$\boxed{x^2+y^2-4x-10y-20=0}$$

تمرین: معادله دایره‌ای را بنویسید که $A(5,2)$ و $B(1,-4)$ دو سر یکی از قطرهایش باشند.

حل: O وسط AB است $\Rightarrow O\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$$\Rightarrow O\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) \Rightarrow O(\underset{\alpha}{3}, \underset{\beta}{-1})$$



$$R = OA = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = \sqrt{13}^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$$

وتری که از مرکز دایره می‌گذرد ≡ قطر

تمرین: نقاط $A(1,5)$ و $B(3,4)$ دو سر یک قطر دایره هستند، معادله دایره را بنویسید.

تکلیف شب

تمرین : معادله دایره ای بصورت زیر است . مرکز و شعاع آن را بیابید .

$$x^2+y^2-4x+6y-23=0$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=23+4+9$$

نصف $\to -2$ به توان ۲ $\to 4$

نصف $\to +3$ به توان ۲ $\to 9$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=36$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ y+3=0 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow O(2,-3)$$

$$R^2=36 \Rightarrow R=6$$

تمرین: مرکز و شعاع دایره زیر را بیابید.

$$x^2+y^2+4x-2y-2=0$$

تکلیف

نکته: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$\frac{a^2+b^2-4c}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0 \Rightarrow$ دایره $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$

$R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

$a^2+b^2-4c<0 \Rightarrow$ تهی است

$a^2+b^2-4c=0 \Rightarrow$ تک نقطه $O(-a/2,-b/2)$

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

هندسه سه دوازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ شیراز

دوشنبه سیزدهم بهمن نود و نه ساعت ۸:۰۰

موضوع :

تکمیل مبحث دایره

مزبان حبیبی

یادآوری:

معادله دایره ای که $O(\alpha, \beta)$ مرکز آن بوده و R شعاع آن باشد:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

یا:

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2-R^2=0$$

$$x^2+y^2\underbrace{-2\alpha}_{a}x\underbrace{-2\beta}_{b}y+(\underbrace{\alpha^2+\beta^2-R^2}_{c})=0$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 , \begin{cases}\alpha=-a/2\\ \beta=-b/2\\ R=\sqrt{a^2/4+b^2/4-c}\end{cases}$$

تمرین: مختصات مرکز و شعاع دایره زیر را بیابید.

$$x^2+y^2-4x+2y-1=0$$

جواب:

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=+1+4+1$$

نصف: $-2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4$

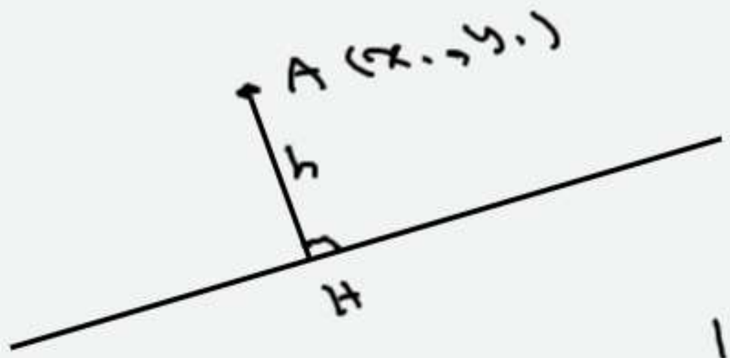
نصف: $+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=6 \Longrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ y+1=0 \Rightarrow y=-1 \\ R^2=6 \Longrightarrow R=\sqrt{6} \end{cases}$$

$\rightarrow O(2,-1)$ مرکز

$R=\sqrt{6}$ شعاع

یادآوری:



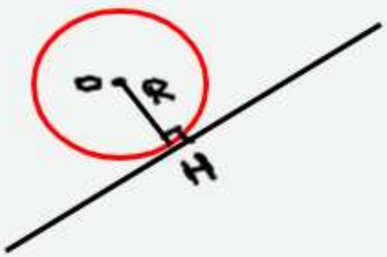
$\ell : ax+by+c=0$

فاصله نقطه A از خط ℓ $= h \equiv AH = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: فاصله نقطه $A(2,-1)$ را از خط $3x = y+5$ بیابید. $3x-y-5=0$

$$h = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3(2)-(-1)-5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که $O(1,2)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $x-2y=1$ مماس باشد.



$O\overset{\alpha}{(1},\overset{\beta}{2)}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ $\qquad x-2y-1=0$

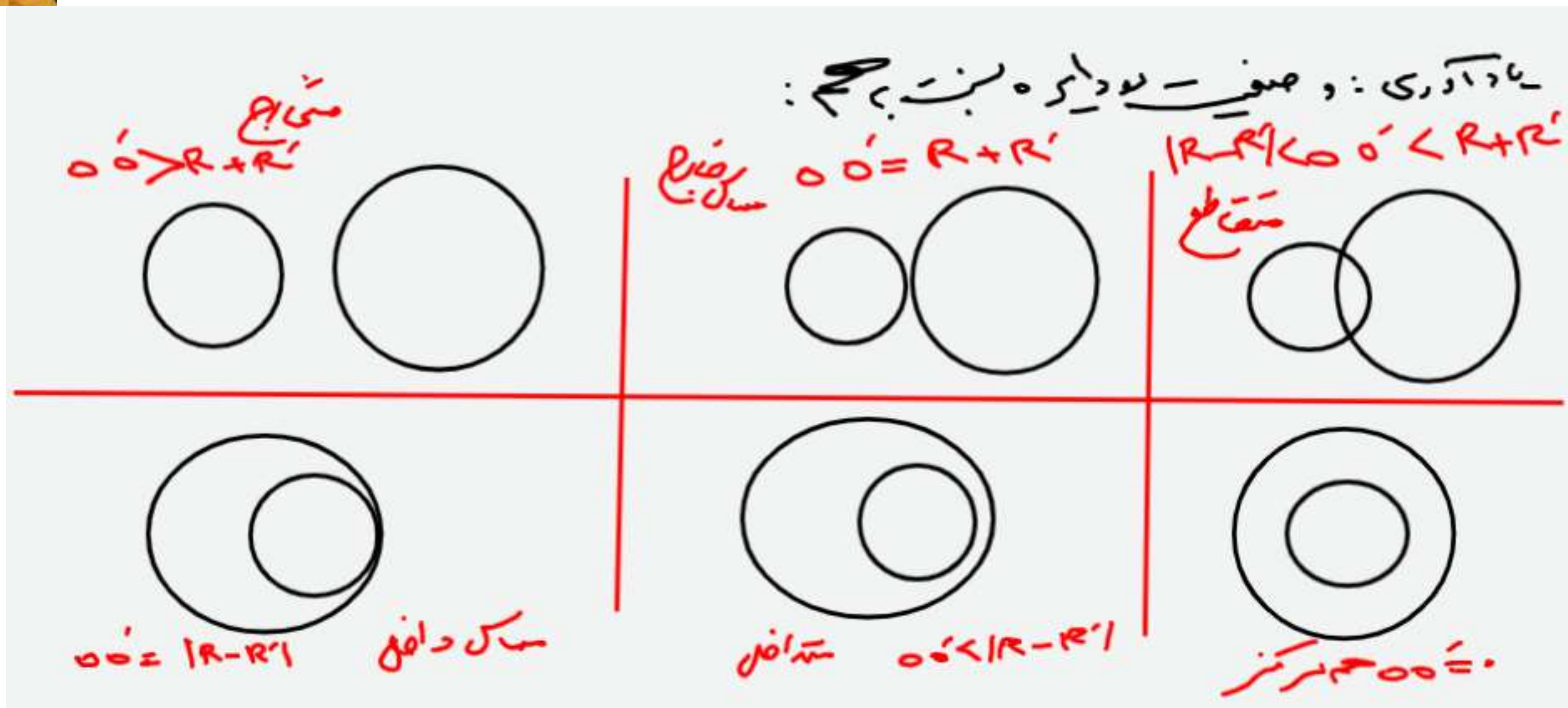
$(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$

$R=OH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|1-4-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$C: \quad (x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{16}{5}$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4-\dfrac{16}{5}=0$

$x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{9}{5}=0$


یادآوری: وضعیت دو دایره نسبت به هم:
متخارج
$OO' > R+R'$
مماس خارج
$OO' = R+R'$
متقاطع
$|R-R'| < OO' < R+R'$
مماس داخل
$OO' = |R-R'|$
متداخل
$OO' < |R-R'|$
هم مرکز
$OO' = 0$

تمرین: وضعیت دو دایره زیر را نسبت به هم تعیین کنید.

$x^2+y^2+2x=0$ | $x^2+y^2-2y-1=0$

حل: $x^2+(y^2-2y\underline{\underline{+1}})=1+1$

$x^2+(y-2)^2=2$

$O'(0,2)\ ,\ R'=\sqrt{2}$

$(x^2+2x\underline{\underline{+1}})+y^2=0\underline{\underline{+1}}$

$(x+1)^2+y^2=1$

$O(-1,0)\ ,\ R=1$

$OO'=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{1+4}=\underline{\sqrt{5}}\ ,\ R+R'=\underline{\sqrt{2}+1}\ ,\ R-R'=\sqrt{2}-1$

$R-R'<OO'<R+R' \Longrightarrow$ متقاطع

روش دوم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 \\ x^2+y^2-2y-1=0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2+2x)-(x^2+y^2-2y-1)=0$$

$$\boxed{2x+2y+1=0}$$ معادله وتر مشترک

$$2x=-2y-1 \Rightarrow x=-y-\frac{1}{2}$$

$$(-y-\tfrac{1}{2})^2+y^2+2(-y-\tfrac{1}{2})=0 \Rightarrow y^2+y+\frac{1}{4}+y^2-2y-1=0$$

$$2y^2-y-\frac{3}{4}=0 \longrightarrow 8y^2-4y-3=0 \Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{16+96}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{112}}{2}$$ مختص طول‌ها

$$x=-\left(\frac{4\pm\sqrt{112}}{2}\right)-1 \Longrightarrow$$ عرض دو نقطه مشترک

تمرین: خط $x-y=2$ نسبت به دایره $x^2+y^2-2y=0$ چه وضعیتی دارد؟

حل:

$$x^2+(\underbrace{y^2-2y}_{\div 2:\ -1\to 1}+1)=0+1$$

$$x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow O(0,1),\ R=1$$

$$x-y-2=0\ ,\ O(0,1)$$

$$OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$OH>R \Rightarrow$ هیچ نقطه اشتراکی ندارند

روش دوم :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x-y=2 \Rightarrow x=y+2 \Rightarrow y=x-2 \end{cases}$$

$$x^2+(x-2)^2-2(x-2)=0$$

$$x^2+x^2-4x+4-2x+4=0$$

$$2x^2-6x+8=0 \Rightarrow x^2-3x+4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=9-16=-7<0 \Rightarrow$$ معادله جواب ندارد

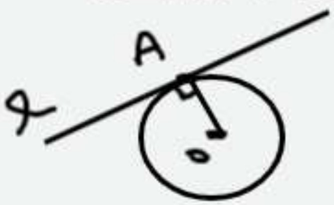
یعنی ؛ خط و دایره نقطه اشتراک ندارند .

تمرین: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1,2)$ که نقطه‌ای بر دایره‌ای به معادله $x^2+y^2-2x-3=0$ مماس باشد.

$(x^2-2x+1)+y^2=3+1$

$(x-1)^2+y^2=4 \Rightarrow \begin{cases} O(1,0) \\ R=\sqrt{4}=2 \end{cases}$

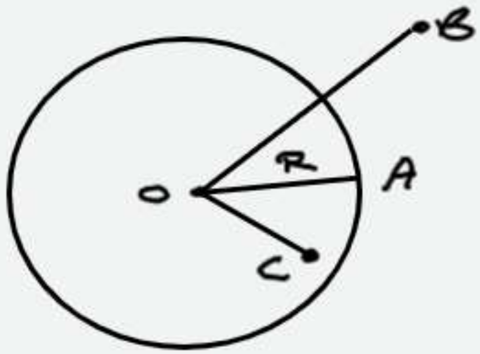
$OA=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{0+4}=2=R \Rightarrow$ نقطه A روی دایره است.



$m_{OA}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{1-1}=\infty \Rightarrow m_\ell=\frac{1}{\infty}=0$

$\ell: y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-2=0 \Rightarrow y=2$

یادآوری : وضعیت نقطه نسبت به دایره :

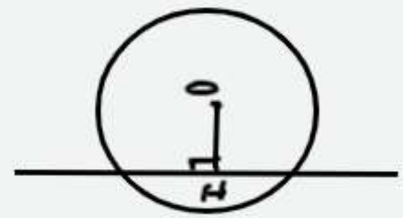


$OA = R \Rightarrow$ A روی دایره است

$OB > R \Rightarrow$ B بیرون دایره است

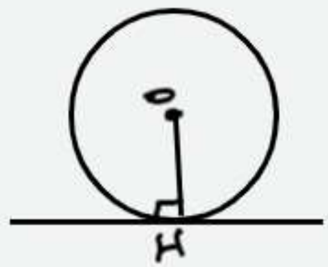
$OC < R \Rightarrow$ C درون دایره است

یادآوری: وضعیت خط و دایره :



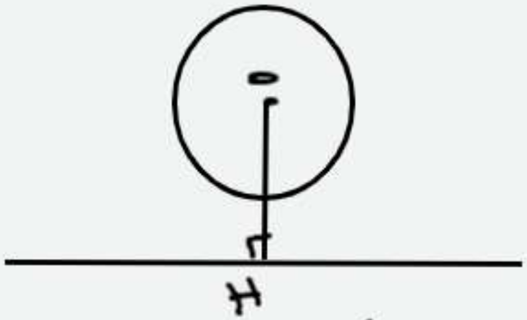
$OH < R$

متقاطع



$OH = R$

خط بر دایره مماس



$OH > R$ نقطه اشتراکی ندارند

تمرین: معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه زیر می گذرد.

$$A(1,-1),\quad B(0,5),\quad C(3,1)$$

جواب:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

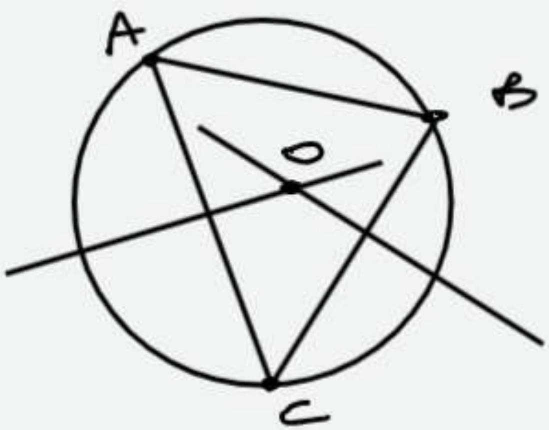
$$\left.\begin{array}{l} A \to 1+1+a-b+c=0 \\ B \to 0+25+0+5b+c=0 \\ C \to 9+1+3a+b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a-b+c=-2 \\ 5b+c=-25 \\ 3a+b+c=-10 \end{array}\right.$$

$$5b+c=-25 \Longrightarrow \boxed{c=-25-5b} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a-b-25-5b=-2 \\ 3a+b-25-5b=-10 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a-6b=23 \\ 3a-4b=15 \end{array}\right.$$

$$a-6b=23 \Longrightarrow \boxed{a=6b+23} \Rightarrow 3(6b+23)-4b=15 \Rightarrow 14b=-54 \Rightarrow b=\frac{-54}{14}$$

$$\Rightarrow a=\ldots,\ c=\ldots$$

تذکر : عمود منصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد .



مثلاً اگر عمود منصف AB و همچنین عمود منصف BC را می‌نویسیم و در یک دستگاه حل می‌کنیم تا نقطه O به دست آید .

تمرین صفحه ۴۲ کتاب هندسه سه

۱ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(۱,۱)$ مرکز آن و $A(۳,۲)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$$R = OA = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

ب) $O(۲,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط $۳x+۴y=۰$ مماس باشد.

$$R = OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|6+4+0|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

پ) $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

$$h = OH = \frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$R^2 = h^2 + 1^2 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$$

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 ,\ y=-1 \Rightarrow O(2,-1)$$

$$R=OH=\frac{|8-3-6|}{\sqrt{16+9}}=\frac{1}{5}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$$

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{1-3}=-1 \Rightarrow AB: y-0=-1(x-3) \Rightarrow y+x=3$$

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x+3 \end{cases} \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} ,\ y=\frac{5}{3} \Rightarrow O\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$$R=OA=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

۲ــ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.

$$(x^2-3x+\frac{9}{4})+(y^2+5y+\frac{25}{4})=-a+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}$$

$$(x-3/2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{34-4a}{4}>0 \rightarrow a<\frac{34}{4}$$

۳ــ وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=5+1+4$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow O(1,-2),\ R=\sqrt{10}$$

$OA=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(1+1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}<R\Rightarrow$ درون دایره

$OB=\sqrt{(1-1)^2+(-2+2)^2}=0\Rightarrow$ B درون دایره و در مرکز است

$OC=\sqrt{(1-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}>R\Rightarrow$ بیرون دایره

$OD=\sqrt{(1-4)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}=R\Rightarrow$ روی دایره است

۴ـ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x=4$

$O(0,0)\ ,\ R=2$ $\quad (x-1)^2+y^2=5\ :\ O'(1,0)\ ,\ R'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{1+0}=1$

$|R-R'|=\sqrt{5}-2<OO'<R+R' \Rightarrow$ متقاطع

ب) $x^2+(y-1)^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$

$O=(0,1)\ ,\ R=1$ $\quad O'(1,0)\ ,\ R'=1$

$OO'=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \Rightarrow |R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$ متقاطع

ج) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

$O(0,0), R=1$

$(x^2-3\sqrt{2}x+\frac{9}{2})+(y^2-3\sqrt{2}y+\frac{9}{2})=-5+9$

$O'(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}), R'=2$

$OO'=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}=3=R+R'\Rightarrow$ مماس خارج

د) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-2y+9=0 \rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=-9+9+1$

$O(0,0), R=1$

$O'(3,1), R'=1$

$OO'=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}>R+R'\Rightarrow$ متخارج

۵ــ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+1}{1+1} = 1 \Rightarrow m'_{AB} = -1$

وسط AB: $M=(0,0) \Rightarrow$ عمودمنصف AB: $y-0 = -1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-x}$

$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+1}{-2+1} = -1 \Rightarrow m'_{AC} = 1$

وسط AC: $N=(0,-2) \Rightarrow$ عمودمنصف AC: $y+2 = 1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x-2}$

$-x = x-2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x=1 ,\ y=-1 \Rightarrow O(1,-1)$

$R = OA = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 2$

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4}$ ✓

سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+1}{1-1} =$ تعریف نشده $\Rightarrow$ $OB \parallel$ محورها $\Rightarrow \boxed{x=1}$

۶ـ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ $\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=-7+4+4$

$O(2,2)$, $R=1$

$OH=\frac{|6+8|}{\sqrt{9+16}}=\frac{14}{5}>1 \Rightarrow$ نقطه مشترک ندارند

ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$: $O(0,0)$, $R=\sqrt{2}$

$OH=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R \Rightarrow$ خط بر دایره مماس است

ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y=2$ $\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2+1+1$

$O(1,1)$, $R=2$

$OH=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R \Rightarrow$ متقاطع هستند

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

موضوع :

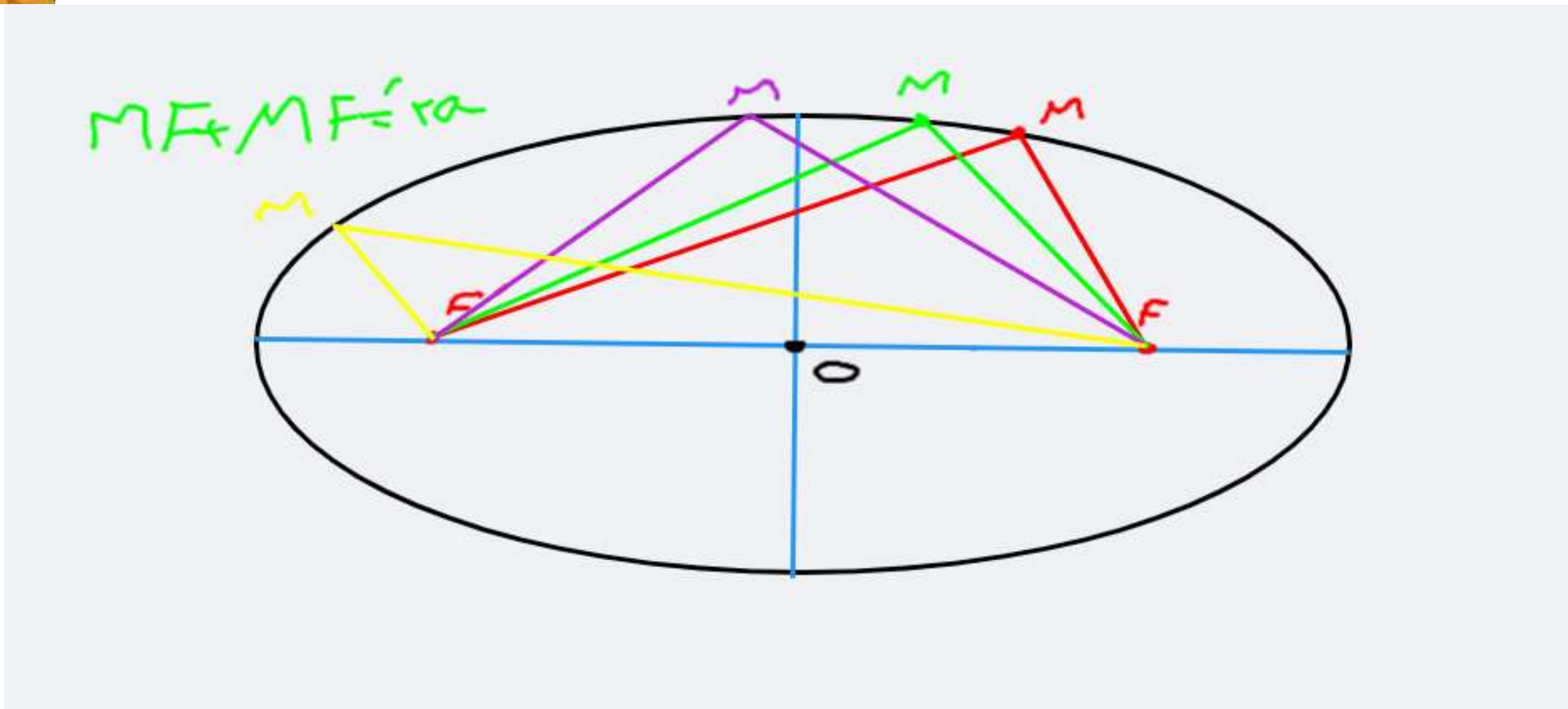
هندسه سه - دوازدهم ریاضی

بهمنی

دبیرستان شاهد ۱۲ شیراز

دوشنبه بیستم بهمن نوزده نه صفر... ۹:

مزبان حبیبی


MF+MF'=2a
M
M
M
M
F
F'
O

تعریف :

دو نقطه ثابت F و F' و مقدار ثابت $2a$ را در نظر بگیرید. بیضی مکان هندسی نقطه ای (نقاطی) در صفحه است که :

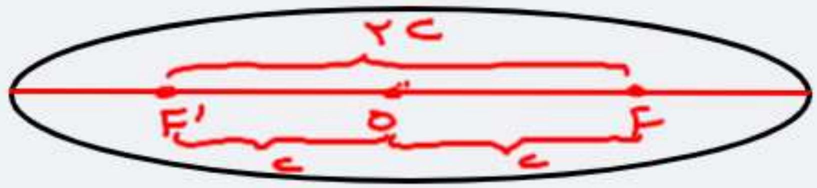
$\boxed{\text{مجموع فاصله های آن از F و F'، مقدار ثابت 2a می باشد}}$

یعنی: اگر M روی بیضی باشد آنگاه : $MF+MF'=2a$

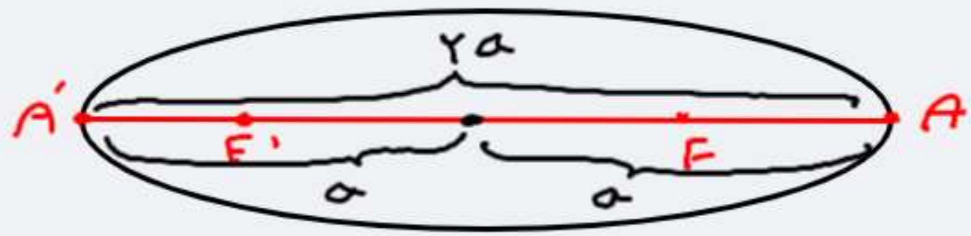
۱- نقاط F و F' را کانون های بیضی می گویند.

و پاره خط FF' را فاصله کانونی می گویند.

$FF' = 2c$ و $OF = OF' = c$



۲- امتداد FF' ، بیضی را در نقاط A و A' قطع می کند.
نقاط A و A' را راسهای کانونی (اصلی) بیضی می گویند.
پاره خط AA' را قطر بزرگ می گویند. $AA' = 2a$ و $OA = OA' = a$



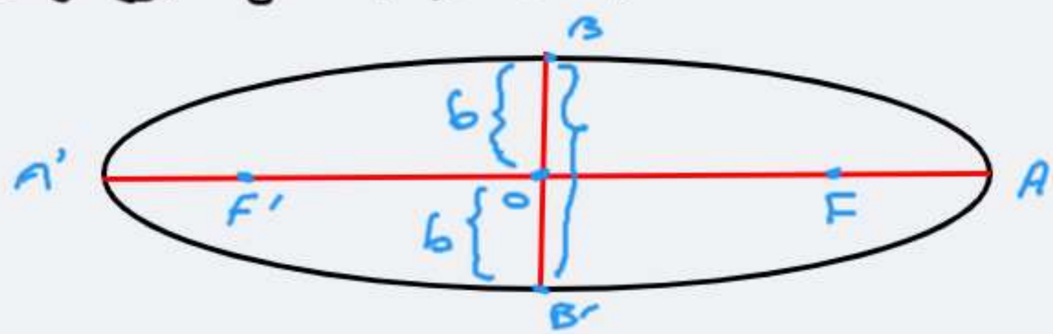
۴- عمود منصف FF' (عمود منصف AA')، بیضی را در B و B' قطع می‌کند.

نقاط B و B' را رأس‌های غیر کانونی (غیر اصلی) می‌نامیم

پاره‌خط BB' را قطر کوچک (غیر اصلی - فرعی) می‌گوییم

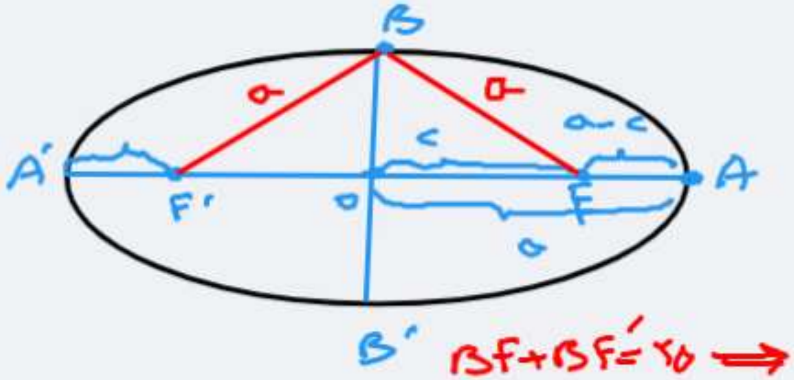
$BB' = 2b$

$OB = OB' = b$



۴- رابطه بین a و b و c :

مقدار ثابت a و b و c را پارامترهای بیضی می گویند.



$OA = OA' = a$

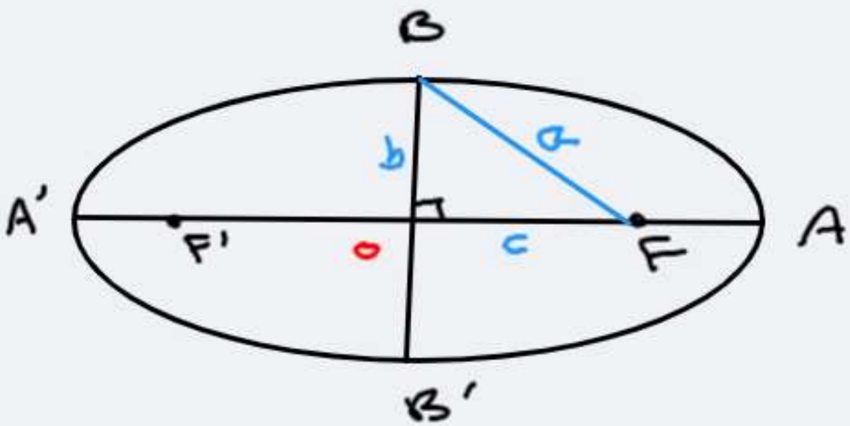
$OB = OB' = b$

$OF = OF' = c$

$AF = A'F' = a - c$

$BF + BF' = 2a \Longrightarrow BF = BF' = B'F = B'F' =$

پس



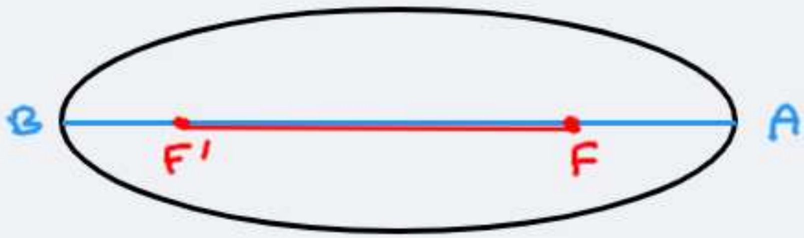
پس :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

جواب : $AB = ?$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow AB^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

۵ - خروج از مرکز بیضی :



نسبت اندازه فاصله کانونی به اندازه قطر بزرگ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند و با e نشان می‌دهند، یعنی :

$$\boxed{e = \frac{\text{فاصله کانونی}}{\text{قطر بزرگ}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{c}{a}}$$

توجه : $0 < c < a \Rightarrow \frac{0}{a} < \frac{c}{a} < \frac{a}{a} \Rightarrow \boxed{0 < e < 1}$

تمرین: اگر اندازه‌های دو قطر بیضی ۱۰ و ۲۰ باشد، آنگاه اندازه خروج از مرکز بیضی کدام است؟

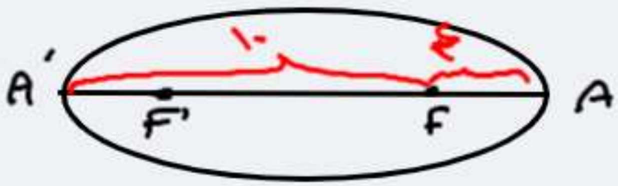
$$2a = 20 \Rightarrow a = 10$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = 25 + c^2 \Rightarrow c^2 = 75 \Rightarrow c = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرین : اگر فاصله یک کانون بیضی تا دو سر قطر بزرگ آن به ترتیب ۴ و ۱۰ باشد آنگاه اندازه خروج از مرکز بیضی را بیابید.



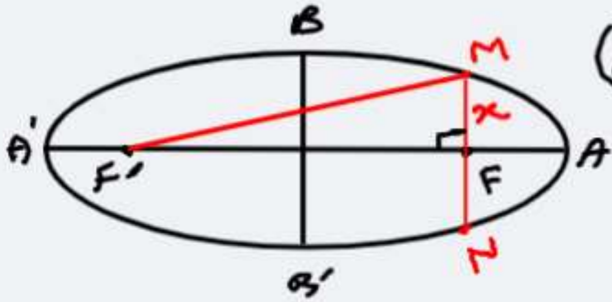
$FA=4 \Rightarrow a-c=4$

$FA'=10 \Rightarrow AA'=14 \Rightarrow 2a=14 \Rightarrow a=7$

$7-c=4 \Rightarrow \boxed{c=3}$

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{7}$

تمرین: اندازه قطرهای یک بیضی به ترتیب ۴ و ۱۰ هستند.
از کانون بیضی خطی عمود بر قطر بزرگ رسم کنید تا بیضی را در M و N قطع کند.
اندازه MN را حساب کنید. (MN = وتر کانونی)



$AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$BB' = 4 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' + x = 10 \Rightarrow MF' = 10 - x$

$\triangle MFF': FF'^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow (2c)^2 = x^2 + (10-x)^2 \Rightarrow 84 = x^2 + 100 - 20x + x^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-32}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{19} \Rightarrow MN = 2x$

$MN = 2(5 \pm 2\sqrt{19})$

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام ، وقت بخیر

هندسه سه ، دوازدهم ریاضی

دبیرستان شهدا ۱۲ شیراز

دوشنبه بیست و هفتم بهمن [illegible] ساعت ۷:۳۰

موضوع :

سهمی

مزبان حبیبی

یادآوری :

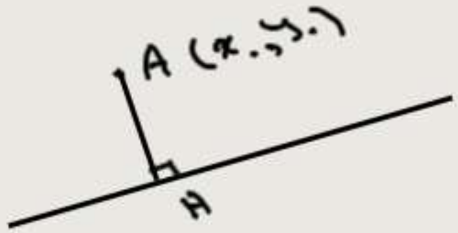
فاصله دو نقطه : (طول پاره خط)

$$|AB| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال : فاصله دو نقطه $A(2,5)$ و $B(-1,1)$ را بیابید .

$$|AB| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

یادآوری: فاصله نقطه از خط:



$\ell : ax+by+c=0$

$$AH = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dots$$

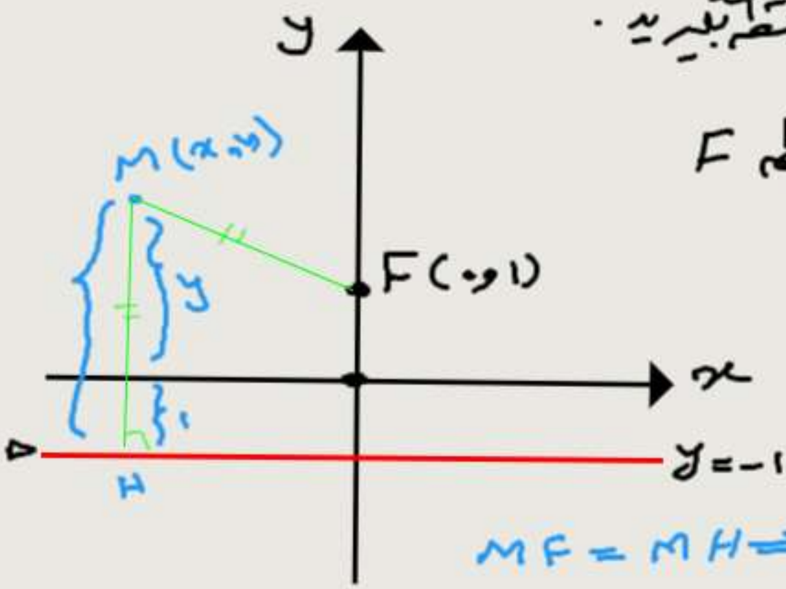
مثال: فاصله نقطه $A(2,-1)$ را از خط $3x = 2y - 5$ را بیابید.

$3x - 2y + 5 = 0$

$$AH = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|6+2+5|}{\sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

مثال: نقطه $F(0,1)$ و خط $\Delta: y=-1$ را در نظر بگیرید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که از نقطه F و خط Δ به یک فاصله باشند.



جواب: فرض کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد. پس

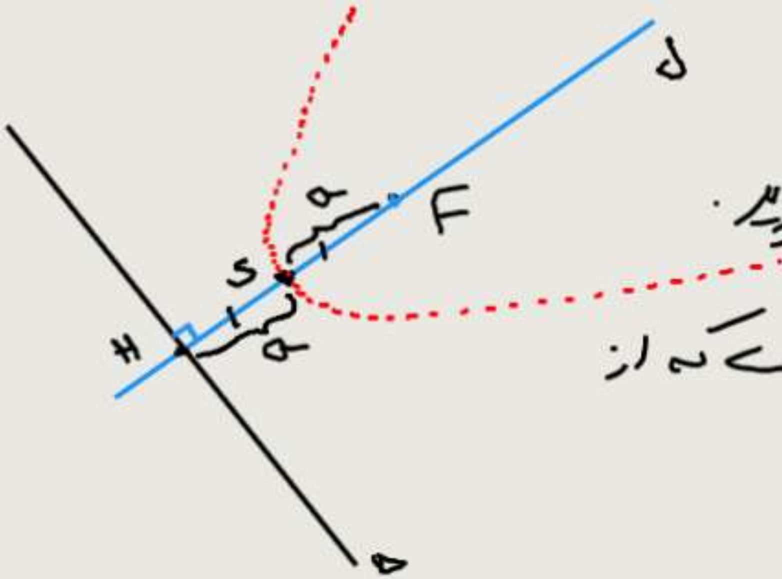
$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = (y+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = y+1 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1}$$

$$x^2 - 2y = 2y \Rightarrow x^2 = 4y \Longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x^2} \checkmark$$

معادله $y = \frac{1}{4}x^2$ یک سهمی است که رأس آن مبدأ مختصات است.



تعریف سهمی :

خط d است و نقطه F غیر واقع بر d را در صفحه در نظر بگیرید.

سهمی، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از نقطه F و خط d به یک فاصله هستند.

۱- نقطه F را کانون سهمی و خط Δ را خط هادی سهمی می‌گویند.

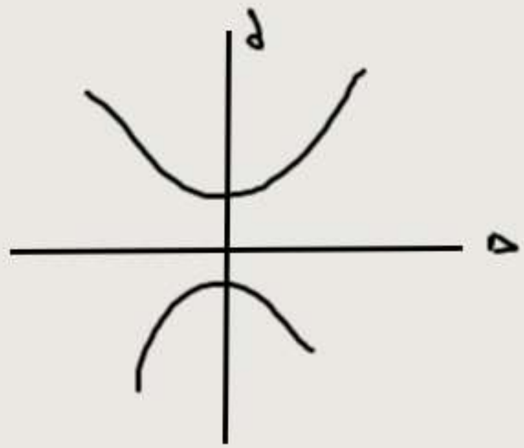
F : کانون   خط هادی : Δ

۲- خطی که از F بر خط Δ عمود شود، خط تقارن سهمی است.

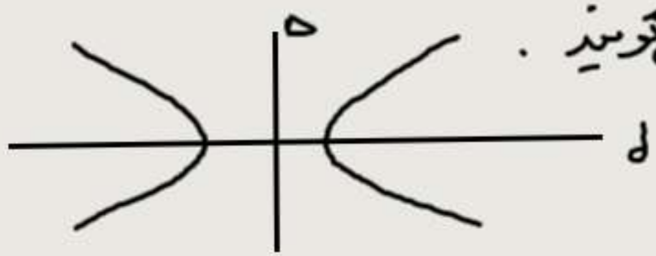
۳- نقطه وسط F و H را با S نشان می‌دهیم و آن را رأس سهمی می‌گویند.

۴- فاصله F و S را با a (یا p) نشان می‌دهیم. یعنی، $FS = SH = \frac{1}{2} FH = a$

توجه:



۱. اگر $x_o \parallel \Delta$ باشد آنگاه سهمی را قائم می‌گویند.



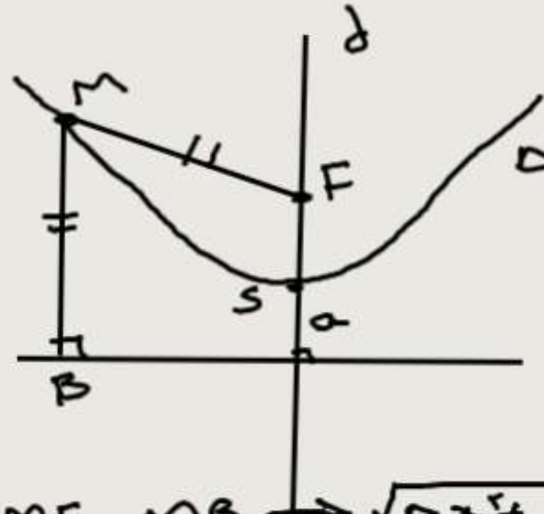
۲- اگر $y_o \parallel \Delta$ باشد آنگاه سهمی را افقی می‌گویند.

۳- در غیر این صورت، سهمی را مایل می‌نامیم.

معادله سهمی:

۱- سهمی قائم: فرض کنیم $S(\alpha, \beta)$ و $\Delta : y = \beta - a$

در اینصورت: $F(\alpha, \underline{\beta + a})$



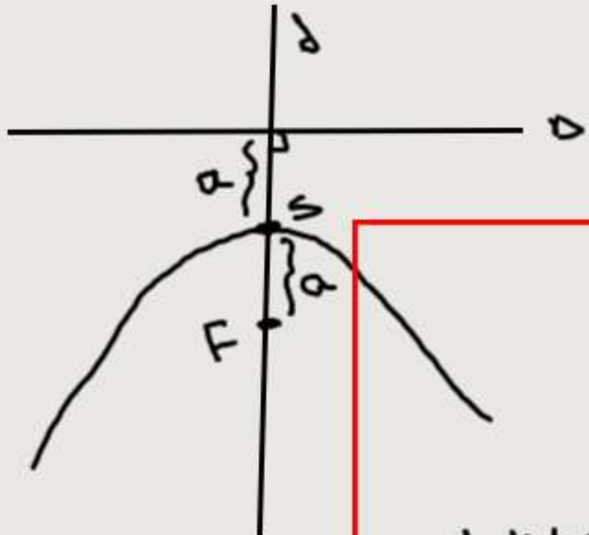
برای هر نقطه $M(x, y)$ روی سهمی داریم:

$$MF = MB \Rightarrow \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |y_M - y_\Delta| \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = |y - (\beta - a)|$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta-a)^2 = (y-\beta+a)^2 \Rightarrow (x-\alpha)^2 = \underline{(y-\beta+a)^2 - (y-\beta-a)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)}$$

نتیجه: اگر سهمی رو به پایین باشد.



$S(\alpha, \beta)$

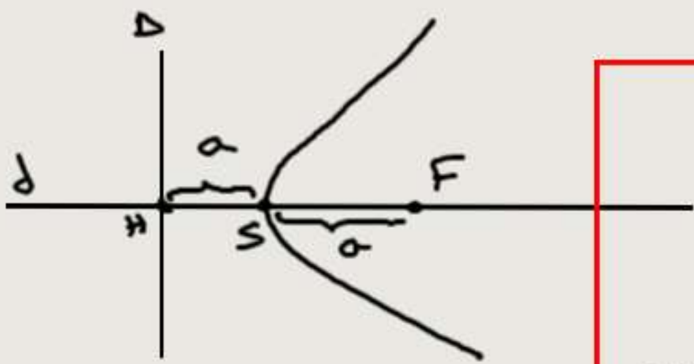
$\Delta : y = \beta + a$

$F = (\alpha, \beta - a)$

معادله سهمی : $(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta)$

۲- سهمی افقی :

۱- اگر سهمی به سمت راست باز شود.



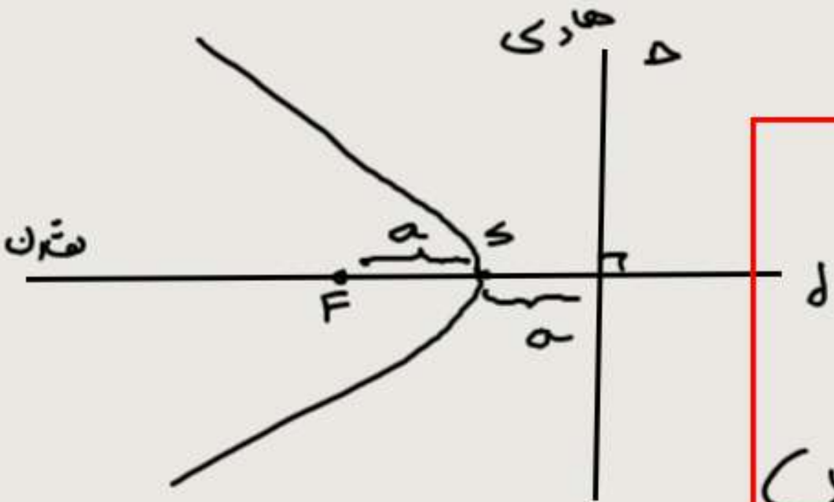
$S=(\alpha,\beta)$

$F=(\alpha+a,\beta)$

$\Delta: x=\alpha-a$

معادله : $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$

سهمی افقی به سمت چپ :



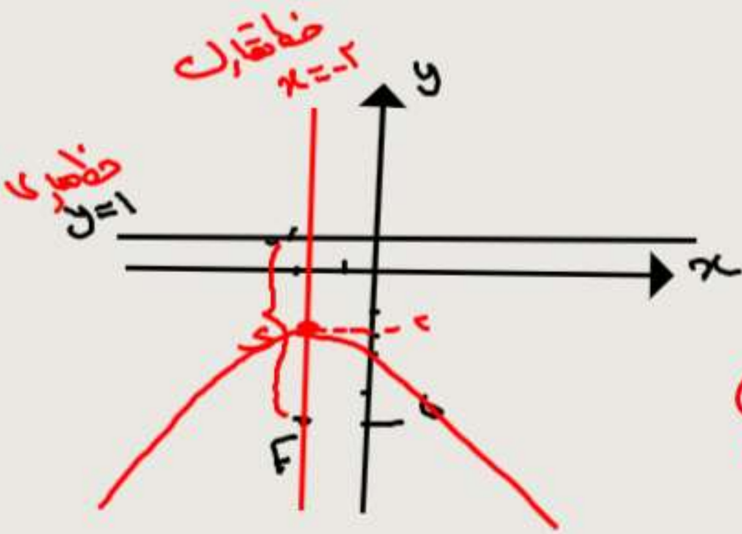
$$S = (\alpha, \beta)$$

$$F = (\alpha - a, \beta)$$

$$\Delta : x = \alpha + a$$

$$\boxed{(y - \beta)^2 = -4a(x - \alpha)}$$

تمرین: معادله سهمی را بنویسید که $F(-2,-5)$ کانون آن بوده و خط $y=1$ هادی سهمی باشد.



$2a=|-5-1|=6 \Rightarrow a=3$

$S(-2,-2)$

سهمی قائم در جهت پایین است.

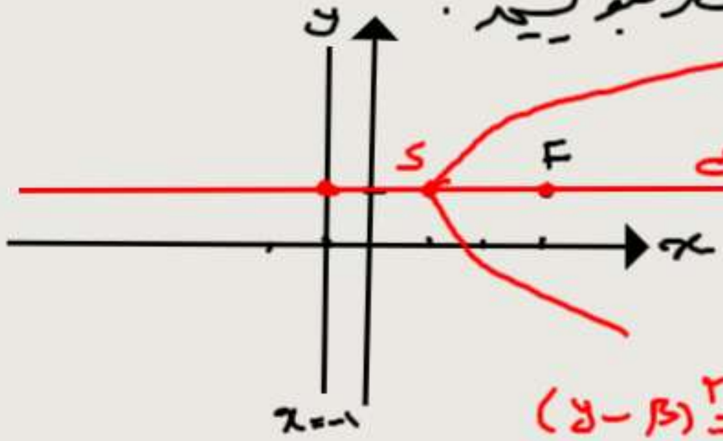
$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$

$(x+2)^2=-12(y+2)$

تمرین: اگر $F(3,1)$ کانون سهمی و خط $x=-1$ خط هادی سهمی باشد.

الف) مختصات راس و معادله خط تقارن را بنویسید.

ب) معادله سهمی را بنویسید.



$a = FS = 2$

خط تقارن $y=1$

راس $S(1,1)$

سهمی افقی و به سمت راست است

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \Rightarrow (y-1)^2 = 8(x-1)$$

$y^2 \Rightarrow$ افقی

$x^2 \Rightarrow$ قائم

تمرین: سهمی با معادله $y^2-4y+8x-4=0$ مفروض است.

الف) مختصات راس، کانون، معادله خطوط تقارن و هادی را بنویسید.

ب) سهمی را رسم کنید.

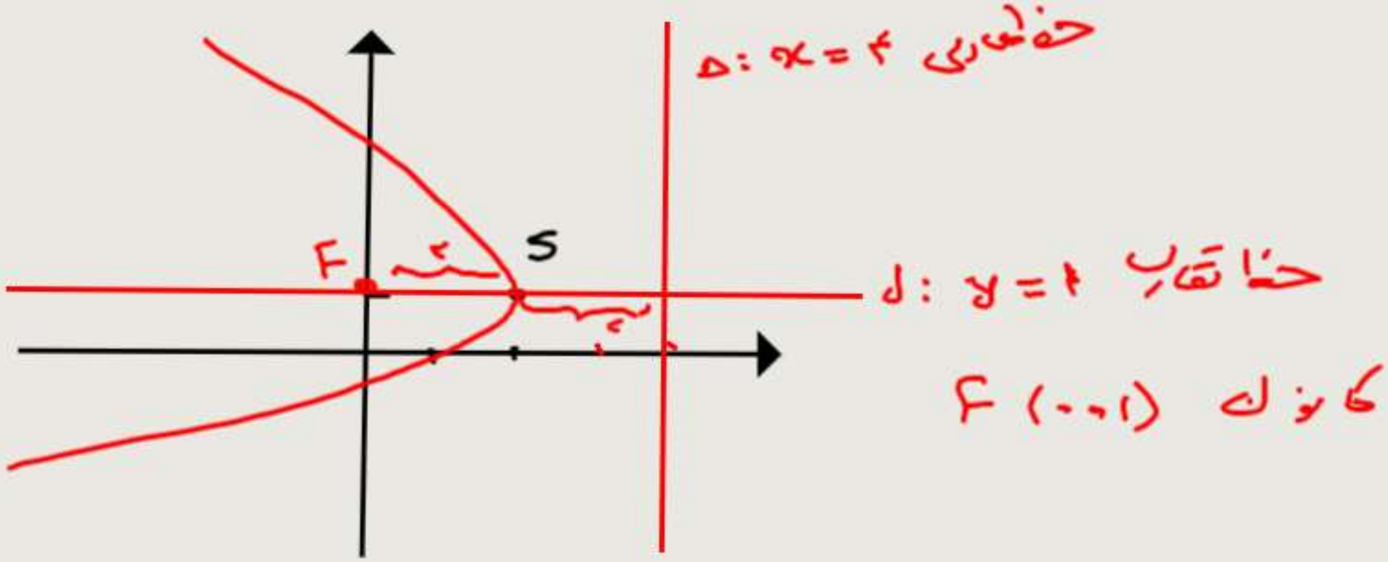
$$y^2-4y+4=-8x+4+4 \Longrightarrow (y-2)^2=-8(x-1)$$

$-2 \longrightarrow 4$

سهمی افقی و به سمت چپ است.

$$\left.\begin{array}{l} y-2=0 \Rightarrow y=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow S=(2,1) \Longrightarrow F\,($$

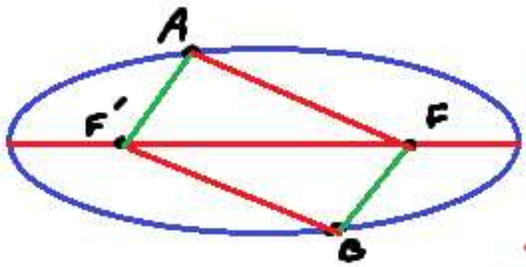
$$4a=8 \Longrightarrow a=2$$


خط هادی Δ: x = ۴
S
F
خط تقارن d: y = ۱
کانون F (۰،۱)

تمرین صفحه ۵۷ کتاب هندسه سه

۱ــ دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید :

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

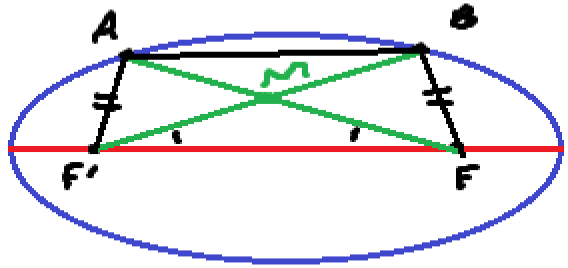


$AF + AF' = BF + BF'$

$\Rightarrow AF = BF'$

پس $AF'BF$ متوازی‌الاضلاع است.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

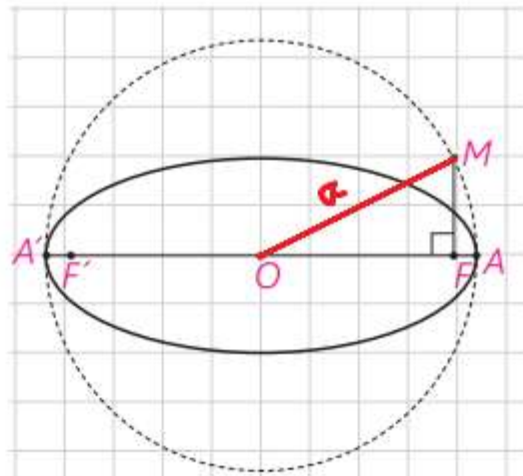


$AF + AF' = BF + BF' \Rightarrow BF' = AF$

$$\left\{\begin{array}{l} AF' = BF \\ AF = BF' \\ FF' = FF' \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle FF'A \cong \triangle FF'B \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{F}'_1$$

پس MFF' متساوی‌الساقین است

۲ــ قطر دایره C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



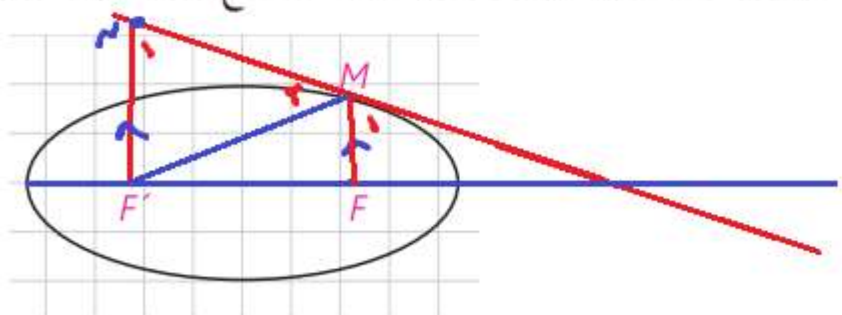
$OM=a \;,\; OF=c$

$\triangle OMF: OM^2=OF^2+MF^2 \Rightarrow a^2=c^2+MF^2$

$\Rightarrow MF^2=a^2-c^2=b^2 \Rightarrow MF=b$

۳ــ در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید

$$NF' = MF'$$



MF و MF′ شعاع‌های بازتاب یکدیگرند $\rightarrow M_1 = M_2$

$MF \parallel NF' \Rightarrow M_1 = N_1$

$\Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}_1$

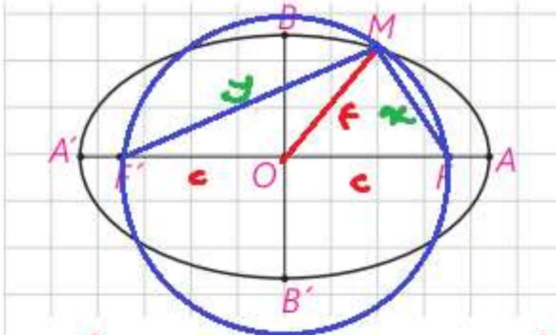
پس $F'M = F'N$

۴ـ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ BB' = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\Rightarrow OF = OF' = OM = 4$$

ب) دایره به مرکز O و شعاع ۴، از M و F می‌گذرد و لذا FF' قطر دایره است

$$FF' = 2R \Rightarrow \widehat{FMF'} = 90^\circ$$

ج)

$$\begin{cases} x + y = 2a = 10 \Rightarrow y = 10 - x \\ x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 64 \end{cases}$$

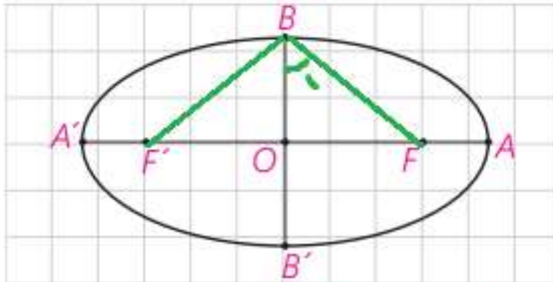
$$x^2 + 100 + x^2 - 20x - 64 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$x^2 - 10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 72}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 5 + \sqrt{7} \Rightarrow y = 5 - \sqrt{7}$$

$$x = 5 - \sqrt{7} \Rightarrow y = 5 + \sqrt{7}$$

۵ــ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟



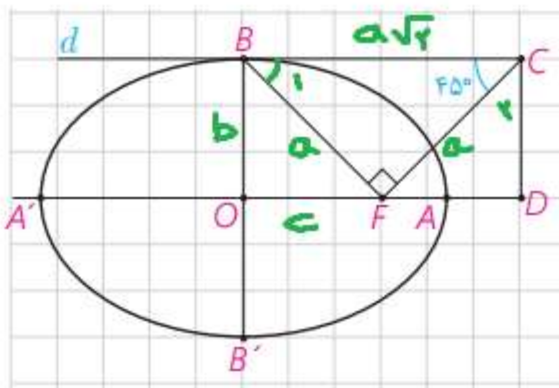
$2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3b^2} = b\sqrt{3}$

$\triangle OBF: \quad \tan \hat{B}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Longrightarrow F\hat{B}F' = 2\hat{B}_1 = 120$

۶ــ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن‌را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\hat{BCF} = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.



$\hat{C}_1 = 45^\circ \rightarrow \hat{B}_1 = 45^\circ,\ \hat{C}_2 = 45^\circ$

$BF = CF = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

$AD = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2}-1)$

$AF = a - c$

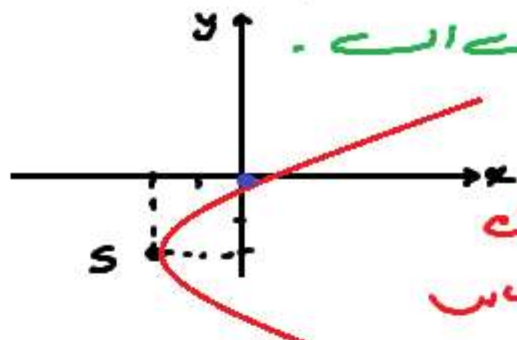
$$b = c = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a-\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}}$$

۷ــ سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

$y^2+4y+4=2x+4 \Rightarrow (y+2)^2=2(x+2)$

$\Rightarrow S(-2,-2),\quad 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

سهمی افقی و به سمت راست است.



رأس $S(-2,-2)$

کانون $F(-2+\frac{1}{2},-2)$

خط هادی $d: x=-2-\frac{1}{2}$

$x=0 \Rightarrow y^2+4y=0 \Rightarrow y=0,-4 \Rightarrow A(0,0),\ (0,-4)$

$y=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,0)$

۸ــ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را به دست آورید.

$$ax^2+bx=y-c \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{1}{a}y-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(y\underbrace{-c+\frac{b^2}{4a}}\right) \rightarrow \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$a>0 \Rightarrow F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\right)$$

$$a<0 \Rightarrow F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}-\frac{1}{4a}\right)$$

۹ــ معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد.

$x_S=x_F \Rightarrow$ سهمی قائم

$y_F<y_S \Rightarrow$ سهمی رو به پایین

$$a=FS=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{0+(2+2)^2}=4$$

$$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta) \rightarrow (x-1)^2=16(y-2)$$

۱۰ــ سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$y^2=4(x-1) \Rightarrow S=(1,0)\ ,\ a=1 \Rightarrow F(1+1,0)=(2,0)$

دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-0)^2=9$

$\begin{cases} y^2=9-(x-2)^2 \\ y^2=4x-4 \end{cases} \Rightarrow 4x-4=9-(x-2)^2$

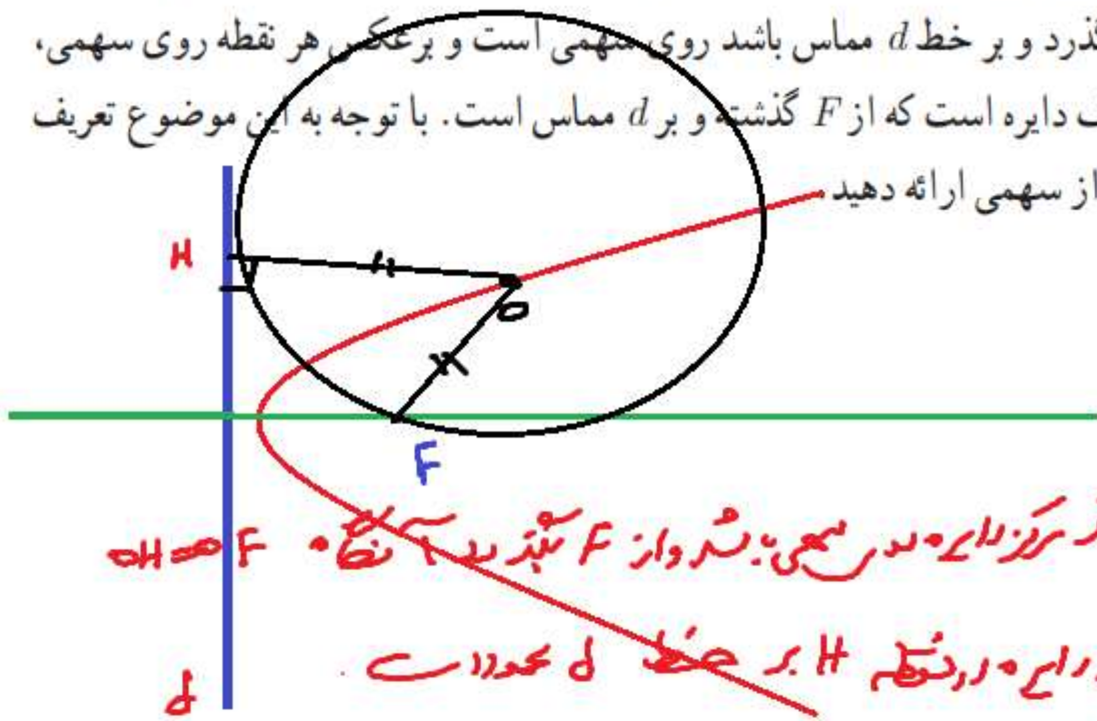
$\Rightarrow (x-2)^2+4x-4-9=0 \Rightarrow x^2-4x+4x+4-13=0$

$\Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$

$x=3 \Rightarrow y^2=8 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8} \Rightarrow A(3,\sqrt{8}),B(3,-\sqrt{8})$

$x=-3 \Rightarrow y^2=-12$ غ ق ق

۱۱ــ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید



اگر مرکز دایره روی سهمی باشد و از F بگذرد آنگاه $OH = OF$

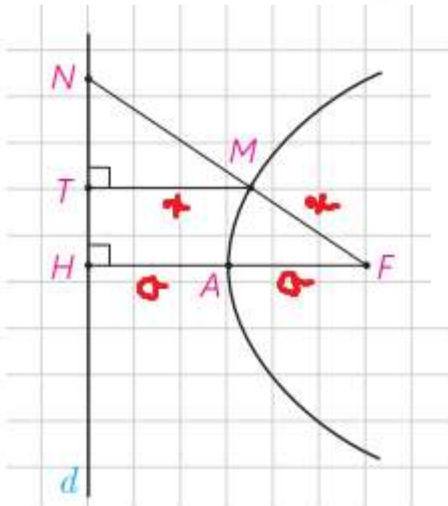
و دایره در نقطه H بر خط d مماس است.

برعکس اگر دایره از F بگذرد و بر d در H مماس باشد آنگاه

$OF = OH$

پس مرکز دایره روی سهمی است.

۱۲ــ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$



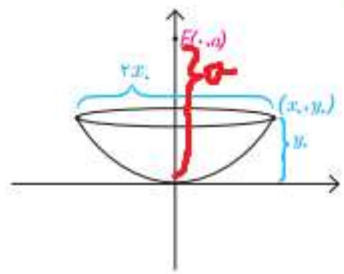
$\triangle MNT \sim \triangle FNH$

$$\frac{MN}{FN}=\frac{MT}{FH} \Rightarrow \frac{MN}{FN}=\frac{MF}{2FA} \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{FN}{2FA} \quad (1)$$

$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MN}{MF}=\frac{NT}{TH} \quad (2)$$

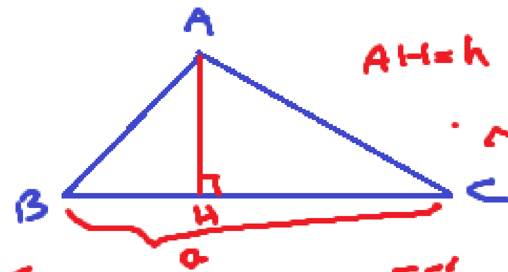
$$(1),(2) \Rightarrow \frac{FN}{2FA}=\frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$$

۱۳ــ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن‌را به‌دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت : باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



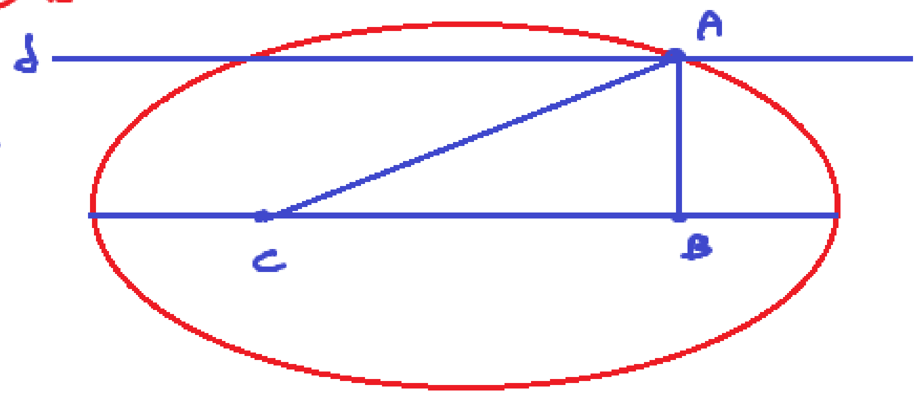
$$\frac{(2x_0)^2}{16y_0}=a \Rightarrow 4x_0^2=16ay_0 \Rightarrow x_0^2=4ay$$

۱۴ــ فرض کنید از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

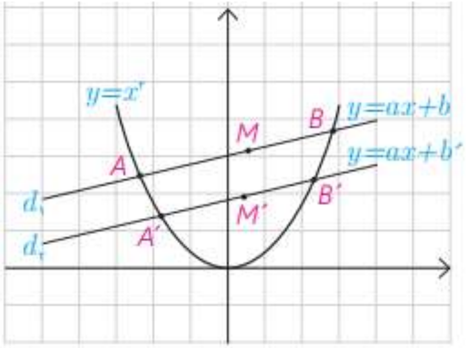


فرض می‌کنیم $BC=m$ و $AH=h$ و $2p$ محیط مثلث باشد.

بیضی به فاصله کانونی $FF'=m$ و $2a=2p-m$ رسم می‌کنیم.



حتماً d را به موازات FF' و به فاصله h رسم می‌کنیم تا بیضی را در A قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.



۱۵ــ سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1:\ y=ax+b$ و $d_2:\ y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، درنظر بگیرید.

الف) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

$x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M را به‌دست آورید.

$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$x_A + x_B = S = a$

$y_A + y_B = ax_A + b + ax_B + b = a(x_A+x_B) + 2b = a^2 + 2b \Rightarrow M\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + b\right)$

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطهٔ M' (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به‌دست آورید.

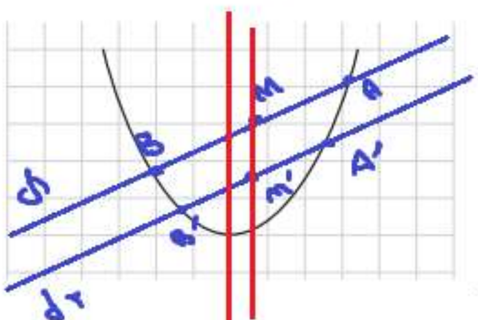
$x^2 = ax + b' \Rightarrow x^2 - ax - b' = 0$

$x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \frac{a}{2}$

$y_{M'} = \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2} = \frac{ax_{A'} + b' + ax_{B'} + b'}{2} = \frac{a^2}{2} + b' \Rightarrow M' = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + b'\right)$

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعی دارد؟

$x_M = x_{M'} \Rightarrow MM' \parallel Oy$



ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

دو خط موازی دلخواه را چنان رسم می‌کنیم که سهمی را قطع کنند.
نقاط وسط AB و A'B' را به ترتیب M و M' بنامید. از ... خطی موازی MM' رسم کنید.

فصل سوم، بردارها

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

هندسه سه دوازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ شیراز

دوشنبه یازدهم اسفند نود و نه ساعت ۷:۳۰

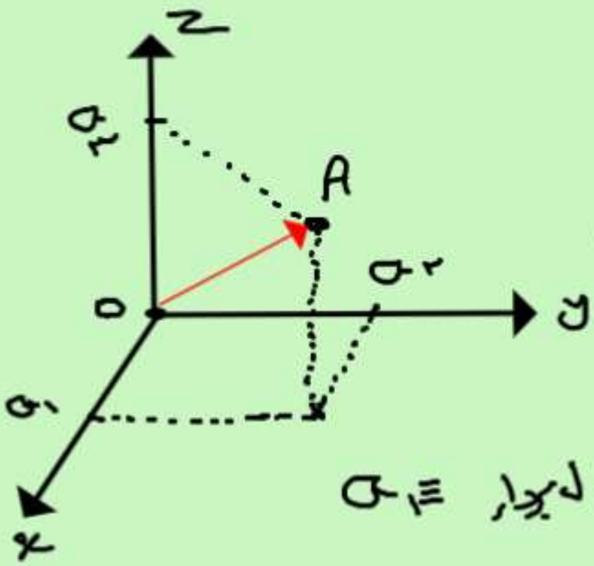
موضوع: - کره در فضای سه بعدی

مزبان حبیبی

معرفی بردار در فضای $\mathbb{R}^3$:

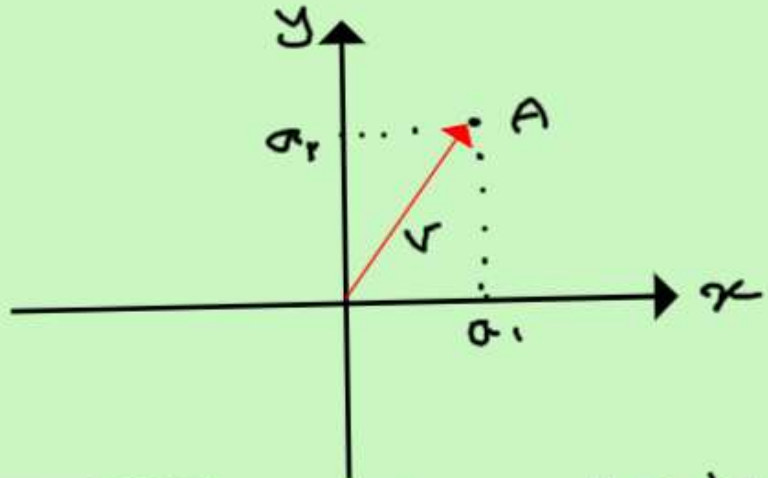
نقطه $A(a_1, a_2, a_3)$ را در فضای $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید.

بردار مکان نقطه A، برداری است با ابتدای O و انتهای A، که با $\overrightarrow{OA}$ نشان داده می‌شود.



ارتفاع بردار $\equiv a_3$ عرض بردار $\equiv a_2$ طول بردار $\equiv a_1$

یادآوری: بردار در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$.



$A(a_1, a_2)$

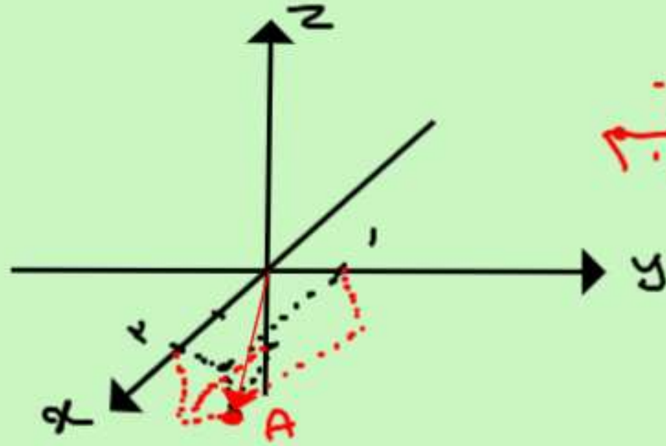
$a_1 \equiv$ طول بردار

$a_2 \equiv$ عرض بردار

اندازه بردار $\equiv$ فاصله انتهای بردار تا ابتدای بردار $\equiv |\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

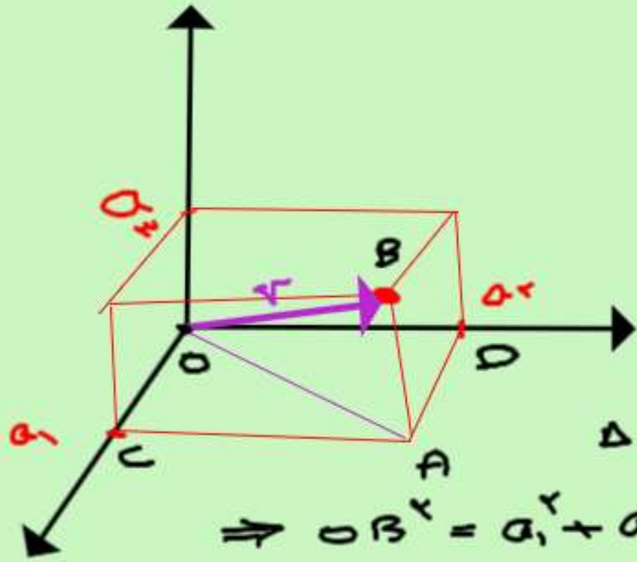
مثال: بردار $\vec{v}=(2,1,-1)$ را در فضای $\mathbb{R}^3$ نمایش دهید.

انتهای بردار $\vec{v}$ در کدام ناحیه است؟ ناحیه پنجم



اندازه بردار : (طول بردار)

بردار $\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)$ را در نظر بگیرید:



$\triangle OAC: \ OA^2=OC^2+AC^2$

$\underline{OA^2=a_1^2+a_2^2}$

$\triangle OAB: \ OB^2=OA^2+AB^2$

$$\Rightarrow OB^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{v}|=|\vec{OB}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

- مثال :

$$\vec{V} = (2, -1, 5)$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$$

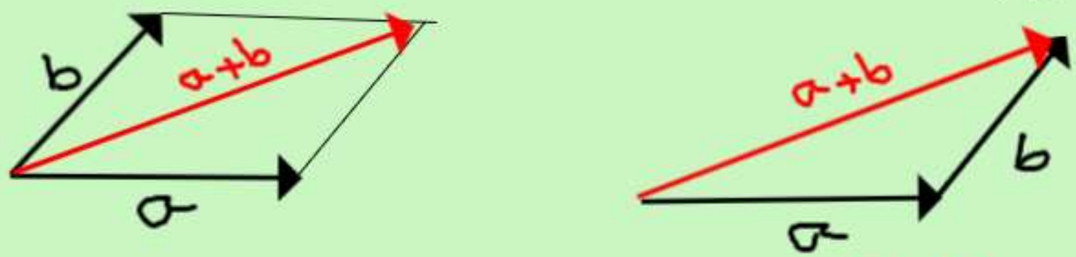
مثال :

$$\vec{u} = (-1, 4, 2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

جمع دو بردار در فضای R^3 :

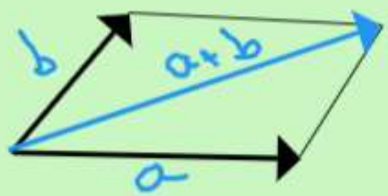
۱. روش هندسی (برآیند)



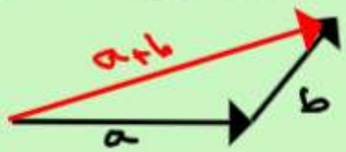
روش متوازی الاضلاع   روش مثلث

یعنی :

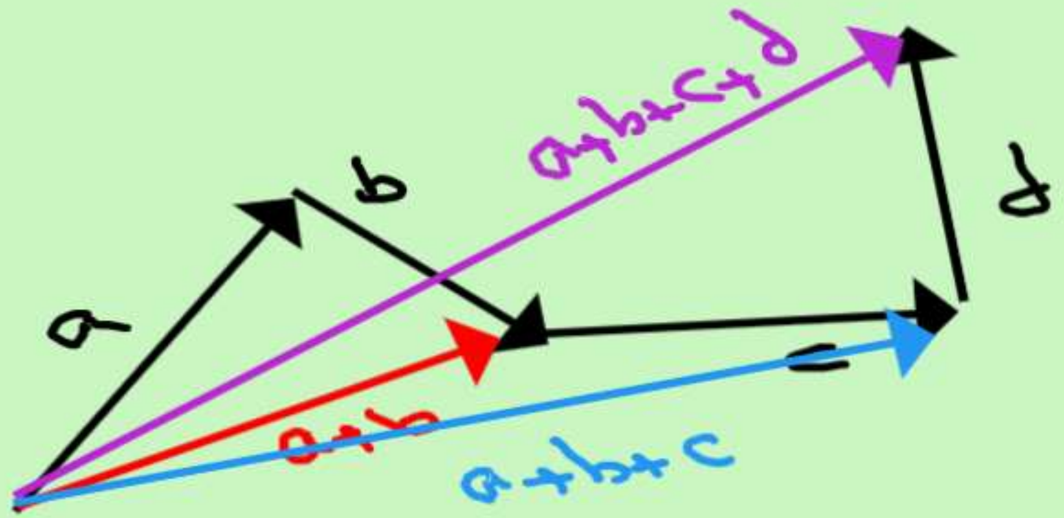
۱- اگر ابتدای دو بردار بر هم منطبق باشد آنگاه، مجموع دو بردار قطر متوازی‌الاضلاعی است که با دو بردار ابتدای مشترک دارد.



۲- اگر دو بردار a و b را در امتداد هم بگذاریم آنگاه بردار $a+b$، در واقع ضلع سوم مثلثی است که بر a و b فرض شده و با a ابتدای مشترک دارد.



مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ بردارهای شکل زیر باشند آنگاه بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ کدام است؟



۲- روش جبر جمع دو بردار :

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ آنگاه:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1\,,\,a_2+b_2\,,\,a_3+b_3)$$

مثال: $\vec{a}=(2,-1,5)$ و $\vec{b}=(1,1,2)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(2+1\,,\,(-1)+1\,,\,5+2)=(3,0,7)$$

تمرین: اگر $\vec{a}=(1,2,3)$ و $\vec{b}=(0,1,5)$ آنگاه اندازه بردار $\vec{b}+\vec{a}$ کدام است؟

$$\vec{a}+\vec{b}=(0+1,1+2,5+3)=(1,3,8)$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+3^2+8^2}=\sqrt{1+9+64}=\sqrt{74}$$

تمرین: اگر $\vec{v}=(-2,1,2)$ و $\vec{u}=(1,2,3)$ آنگاه:

الف) اندازه $\vec{u}$ و اندازه $\vec{v}$ را بیابید.

ب) بردار $\vec{v}+\vec{u}$ را بیابید.

ج) اندازه بردار $\vec{v}+\vec{u}$ را بیابید.

تکلیف

خواص جمع بردارها:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

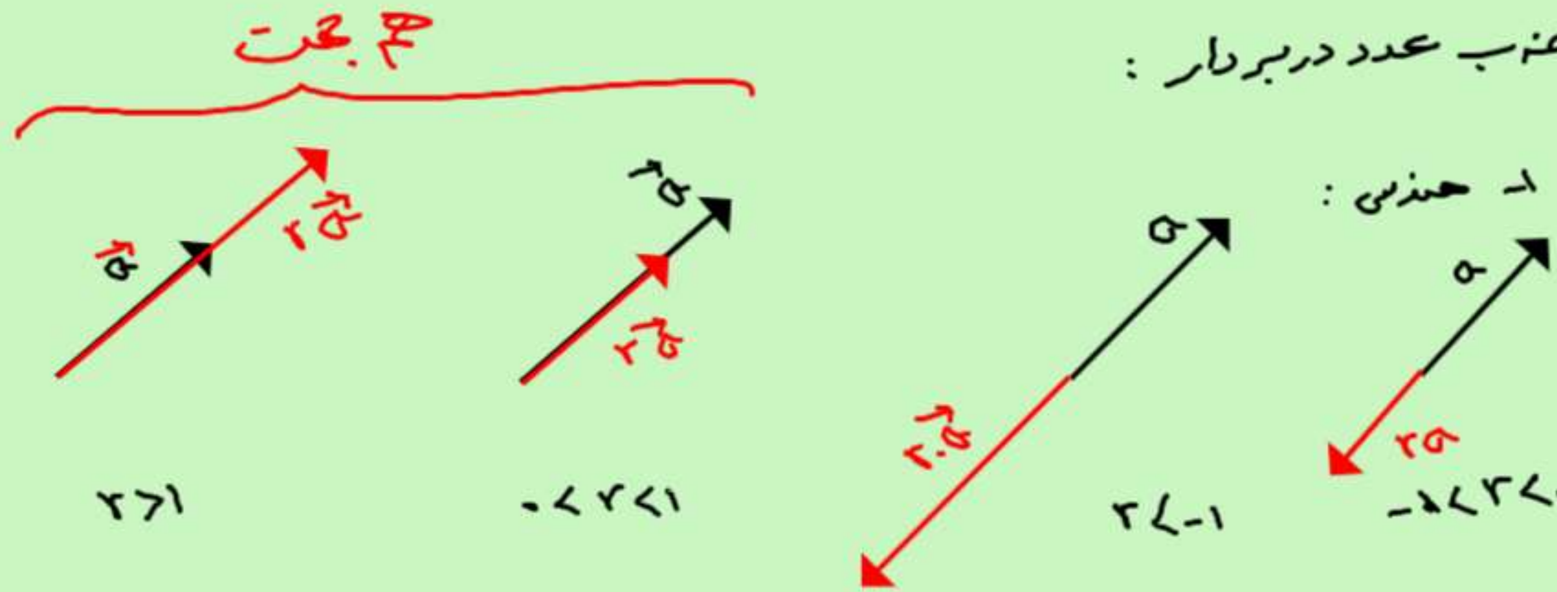
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ خاصیت شرکت‌پذیری

3) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+(\vec{a})=\vec{0}$ خاصیت عضو قرینه

4) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ خاصیت عضو خنثی

ضرب عدد در بردار :

۱- هندسی :



یعنی :

$r>0 \Rightarrow$ بردارهای $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ هم جهت هستند.

$r<0 \Rightarrow$ بردارهای $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ جهت متفاوت دارند.

$$r=1 \Rightarrow r\vec{a} = 1.\vec{a} = \vec{a}$$

$$r=-1 \Rightarrow r\vec{a} = (-1).\vec{a} = -\vec{a}$$

ضرب عدد در بردار (جبری)

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $r\in R$ ، آنگاه

$$r.\vec{a}=(r.a_1,\ r.a_2,\ r.a_3)$$

مثال: $\vec{a}=(2,1,-1)$ و $r=3$

$$3\vec{a}=(6,3,-3)$$

تمرین: اگر $a=(2,1,-1)$ و $b=(0,1,2)$ آنگاه اندازه بردار $2a-3b$ را بیابید.

$$2a-3b = 2a+(-3b) = 2(2,1,-1)+(-3)\cdot(0,1,2)$$

$$=(4,2,-2)+(0,-3,-6)=(4,-1,-8)$$

$$|2a-3b| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4^2+(-1)^2+(-8)^2} = \sqrt{16+1+64} = \sqrt{81} = 9$$

تمرین: اگر $a=(1,2,2)$ و $b=(2,-1,1)$

آنگاه اندازه بردار $2a+b$ را بیابید.

تکلیف

ادامه خواص جمع بردارها :

۵) $(r+s)a = r.a + s.a \quad (r, s \in \mathbb{R})$

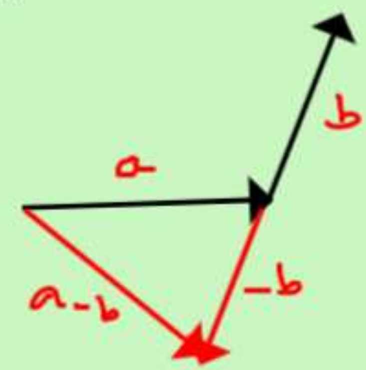
۶) $r.(a+b) = r.a + r.b$

۷) $(r.s)a = r.(s.a)$

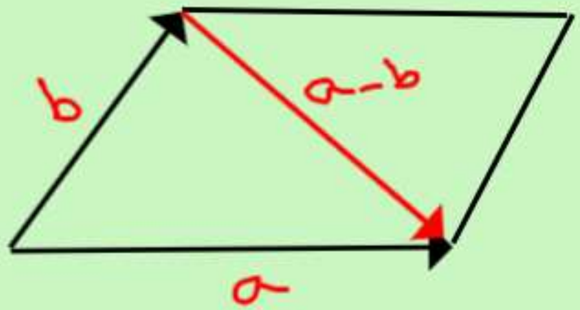
۸) $1\vec{a} = \vec{a}$

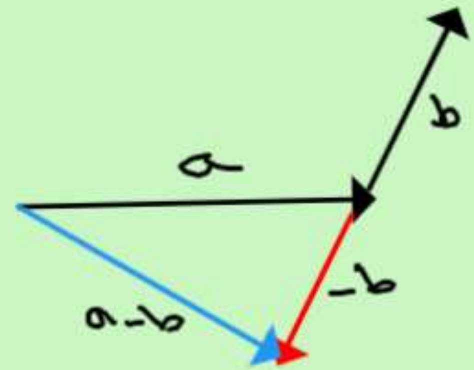
۹) $(-1)\vec{a} = -a$

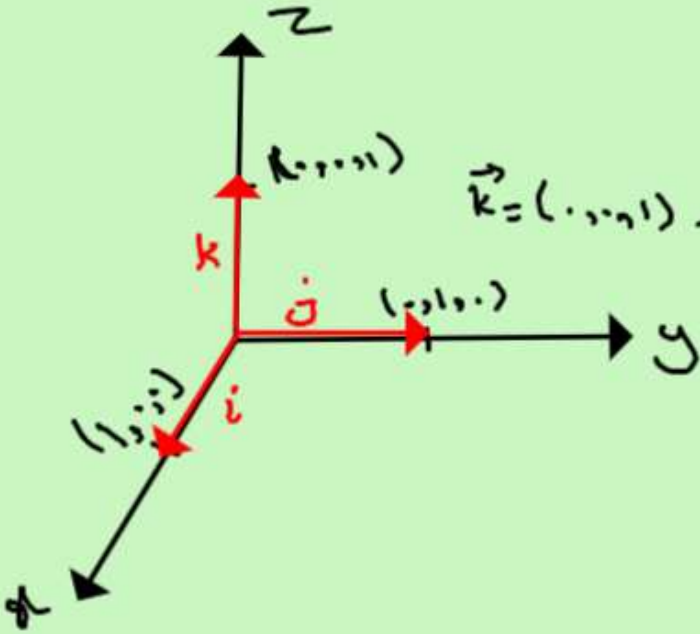
۱۰) $a - b = a + (-b)$



و : تفریق دو بردار







بردارهای یکه:

سه بردار $\vec{i}=(1,0,0)$ و $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$

را بردارهای یکه فضای R^3 می‌گویند.

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$$

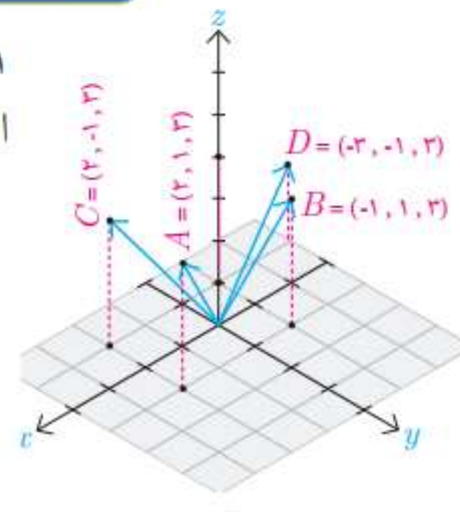
۶ :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$
$$= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$$
$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

مثال: $\vec{a} = (3, 2, 7) = 3i + 2j + 7k$

تمرین صفحه ۷۶ کتاب هندسه سه

۱ــ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.



الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

$\overrightarrow{AB}: \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ y=1, z=3 \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{BC}: \begin{cases} -1 \le x \le 2, -1 \le y \le 1 \\ z=3 \end{cases}$

$\overrightarrow{CD}: \begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ y=-1, z=3 \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{DA}: \begin{cases} x=2, z=3 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

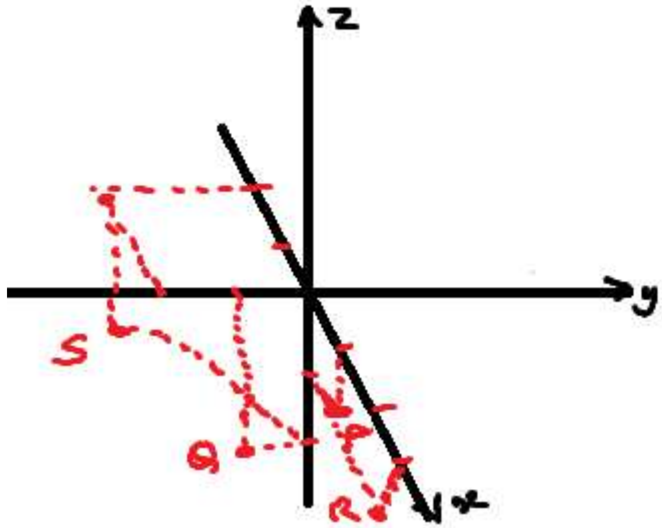
$A'(2,1,0), B'(-1,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}: \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ y=1, z=0 \end{cases}$

$B'(-1,1,0), C'(2,-1,0) \Rightarrow \overrightarrow{B'C'}: \begin{cases} -1 \le x \le 2, -1 \le y \le 1 \\ z=0 \end{cases}$

$C'(2,-1,0), D'(-3,-1,0) \Rightarrow \overrightarrow{C'D'}: \begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ y=-1, z=0 \end{cases}$

$D'(-3,-1,0), A'(2,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{D'A'}: \begin{cases} -3 \le x \le 2, -1 \le y \le 1 \\ z=0 \end{cases}$

۲ــ نقاط با مختصات $P=(۱,۰,۱)$، $Q=(۰,-۱,-۲)$، $R=(۳,۰,-۱)$ و $S=(-۲,-۲,-۲)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.



۳ـ در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

$$\overrightarrow{PQ}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{11}$$

$$\overrightarrow{RQ}=\sqrt{(3-0)^2+(0+1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$$

$$PS=\sqrt{(-2-1)^2+(-2-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9+4+9}=\sqrt{22}$$

۴ـ فرض کنید $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$. مختصات نقطه M وسط پاره‌خط PQ را بیابید.

$$x_m=\frac{x_0+x_1}{2} \quad , \quad y_m=\frac{y_0+y_1}{2} \quad , \quad z_m=\frac{z_0+z_1}{2}$$

۵ــ در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{1}{3},0,2)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{2},1,1)$ ، $r=3$ ، $r\vec{a}-\vec{b}=?$

$3a-b=(-1,0,6)-(\sqrt{2},1,1)=(-1-\sqrt{2},-1,5)=d_1$

ب) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(3,1,-1)$ ، $r=-1$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

$-a+b=(-3,-2,1)+(3,1,-1)=(0,-1,0)=d_2$

ج) $\vec{a}=\sqrt{2}\,\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{a}+\vec{b}=?$

$a+b=(\sqrt{2},0,-1)+(0,3,1)=(\sqrt{2},3,0)=d_3$

د) $\vec{a}=5\vec{k}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$ ، $r=\frac{1}{5}$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

$\frac{1}{5}a+b=(0,\frac{1}{5},1)+(1,0,-1)=(1,\frac{1}{5},0)=d_4$

۶ــ طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{(-1-\sqrt{2})^2 + 1 + 25} = \sqrt{29 + 2\sqrt{2}}$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{0 + 1 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\vec{a}_3| = \sqrt{2 + 9 + 0} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{a}_4| = \sqrt{1 + \frac{1}{25} + 0} = \sqrt{\frac{26}{25}}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقتت بخیر

هندسه سه دوازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ شیراز

دوشنبه هیجدهم اسفند نود و نه ساعت ۸:۰۰

موضوع: ضرب داخلی بردارها

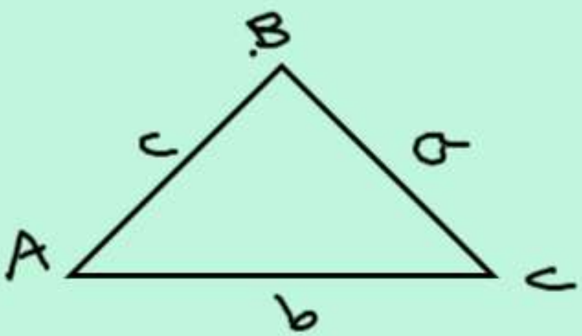
مزبان حبیبی

یادآوری:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x}^{\,2} = x \quad , \quad x \geq 0$$

یادآوری: قضیه کسینوس‌ها



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

یادآوری ۱:

اگر $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ($\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$) یک بردار در فضای R^3 باشد آنگاه

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

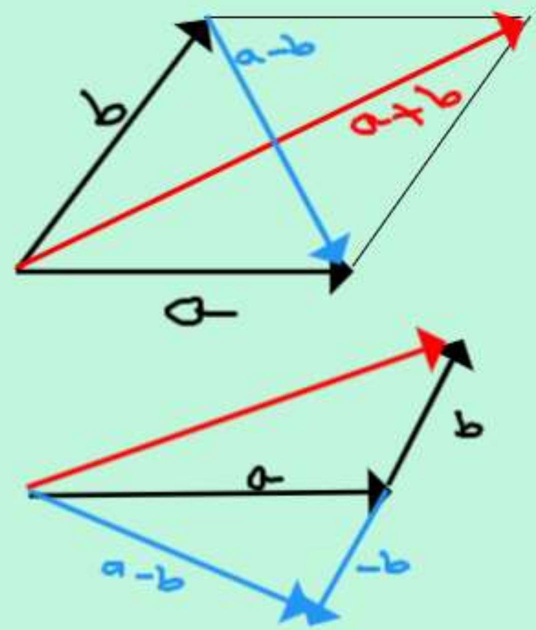
مثال: اگر $a = 2i + j - 2k$ و $\vec{b} = (1, -2, 3)$ آنگاه $|\vec{a}|$ ، $|\vec{b}|$ و $|\vec{a} - \vec{b}|$ را بدست آورید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2-1)i + (1-(-2))j + (-2-3)k = i + 3j - 5k \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$$

یادآوری :

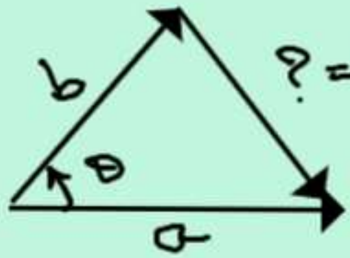


$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

محاسبه کسینوس زاویه بین دو بردار:

فرض کنیم θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد



$? = \vec{a} - \vec{b}$

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a|.|b|.\cos\hat{\theta}$$

$$-2|a|.|b|.\cos\theta = |a|^2 + |b|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$\boxed{\cos\hat{\theta} = \frac{|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2}{2|a|.|b|}}$$ ✓

حال فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و θ زاویه بین دو بردار باشد.

$$\cos\hat{\theta} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}|.|\vec{b}|} \Longrightarrow \cos\hat{\theta} = \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3}{2|a|.|b|} \quad ②$$

$$|a|^2 + |b|^2 - |a-b|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}\right)^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \left((a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2\right)$$

$$= \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{a_3^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} + \cancel{b_3^2} - (\cancel{a_1^2} + \cancel{b_1^2} - 2a_1b_1 + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_2^2} - 2a_2b_2 + \cancel{a_3^2} + \cancel{b_3^2} - 2a_3b_3)$$

$$= 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 \quad ①$$

$$①\ ② \Longrightarrow \cos\hat{\theta} = \frac{2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3}{2|a|.|b|}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|a|.|b|}}\ \checkmark$$

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$

دو بردار در فضای R^3 باشند، مقدار $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ را ضرب داخلی

دو بردار نامیده و با $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (یا $\vec{a} \vee \vec{b}$) نمایش می‌دهیم.

یعنی:

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

مثال: $\vec{a}=(3,2,5)$ و $\vec{b}=(-1,3,1)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$=3(-1)+2(2)+5(1)=-3+4+5=6$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$$

مثال: $\vec{a}=(2,1,1)$ و $\vec{b}=(-3,0,1)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=-6+0+1=-5$$

تذکر ۱: از آنجا که حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ همواره یک عدد حقیقی است گاهی ضرب داخلی دو بردار را ضرب عددی دو بردار هم می‌گویند.

تذکر ۲:

$$\left.\begin{aligned} \cos\hat{\theta} &= \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} \\ \vec{a}.\vec{b} &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}}$$

تمرین: کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 2i+j-2k$ و $\vec{b} = i+j+k$ را بیابید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 2+1-2 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\cos\hat{\theta} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1}{3\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \left(\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

تذکر: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta}$$ ✓

ویژگی های ضرب داخلی :

۱) ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابه جایی دارد، یعنی

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

۲) $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2}$$

۳) خاصیت توزیع پذیری

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

اثبات: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)\\&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3\\&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

۴) اگر دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

اثبات : $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \hat{\theta}=90^\circ \Longleftrightarrow \cos\hat{\theta}=0$

$\xLeftrightarrow{|\vec{a}|,|\vec{b}|\neq 0} |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\hat{\theta}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

یعنی :

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad , \quad \vec{a},\vec{b}\neq 0}$$

تمرین ۱: اگر دو بردار $\vec{a} = 2i + mj + k$ و $\vec{b} = 3i - 2j - 5k$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\Longrightarrow 2(3) + m(-2) + 1(-5) = 0$$

$$\Longrightarrow 6 - 2m - 5 = 0 \Longrightarrow -2m = -1 \Longrightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

۵) $\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{a}=0$

۶) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|$

اثبات: فرض کنیم θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$:

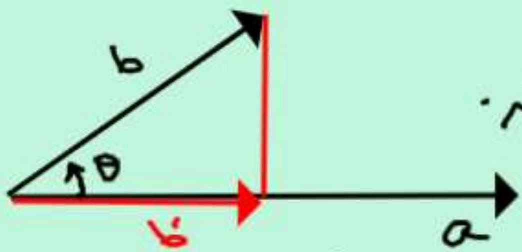
$$-1\leq\cos\theta\leq1\Rightarrow|\cos\theta|\leq1$$

$$\Longrightarrow|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\,.\,|\cos\theta|\leq|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|$$

$$\Longrightarrow|\vec{a}\,.\,\vec{b}|\leq|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|$$

تصویر قائم بردار در راستای بردار دیگر:

فرض کنید $\vec{b'}$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ در راستای بردار $\vec{a}$ باشد.



$$\cos\hat{\theta} = \frac{|\vec{b'}|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{b'}| = |\vec{b}|.\cos\theta$$

$$\vec{b'} = |\vec{b'}|.e_{b'} = |\vec{b'}|.e_{\vec{a}} = |\vec{b}|.\cos\theta = \frac{|\vec{b}|.|\vec{a}|.\cos\theta}{|\vec{a}|}.e_a$$

$$= \frac{|\vec{b}|.|\vec{a}|.\cos\theta}{|\vec{a}|}.\frac{1}{|\vec{a}|}.\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right).\vec{a}$$

یعنی:

$$\vec{b'} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$$

و

$$\vec{a'} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,1,5)$ را در راستای بردار $\vec{b}=(1,2,2)$ بیابید.

$$\vec{a}'=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}=\left(\frac{14}{9}\right)\cdot(1,2,2)=\left(\frac{14}{9},\frac{28}{9},\frac{28}{9}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2+2+10=14$$

$$|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=1+4+4=9$$

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

خوش آمدید

هندسه سه

موضوع: ضرب خارجی

یادآوری: ضرب داخلی بردارها

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

مثال: $\vec{a}=2i+3j+k,\quad \vec{b}=(3,-1,2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\times 3)+(3\times(-1))+(1\times 2)$$

$$=6-3+2=5$$

توجه: $\vec{a}\cdot\vec{b}\in R$

یادآوری: دترمینان ماتریس

الف) ماتریس ۲×۲

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

مثال: $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۶ - ۵ = ۱$

ب) ماتریس ۳×۳

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A| = a\cdot(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(4-3) - 1(2-3) + (-3)(1-0)$$

$$= 2+1-3 = 0$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه به ازای چه مقداری از m دارای $|A|=5$

$$|A| = m(2-6) - 1(0-4) + 2(0-2) = -4m + 4 - 4$$

$$|A| = -4m = 5 \Rightarrow m = -\frac{5}{4}$$

تعریف ضرب خارجی:

فرض کنیم $\vec{a}=a_1 i+a_2 j+a_3 k$ و $\vec{b}=b_1 i+b_2 j+b_3 k$

دو بردار در فضای سه بعدی R^3 باشند.

ضرب خارجی (برداری) این دو بردار را با $\vec{a}\times\vec{b}$ نشان داده و

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

مثال:

$\vec{a} = 2i + 3j + k$ و $\vec{b} = (3, 1, -2)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-6-1)i + (3+4)j + (2-9)k$$

$$= -7i + 7j - 7k$$

مثال:

$\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = 2i + 2j + k$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-6)i + (6-1)j + (2-4)k$$

$$= -4i + 5j - 2k$$

تمرین: اگر $\vec{a} = 2i + j + k$ و $\vec{b} = i - j - k$

آنگاه اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را بیابید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1)i + (1+2)j + (-2-1)k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 3j - 3k$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

تمرین: اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، ثابت کنید:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |a|.|b|.\sin\theta$$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \left(\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}\right)^2$$

$$= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3b_1a_1b_3$$

$$+ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1$$

$$= \dots = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^2 - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - (a.b)^2 = |\vec{a}|^2.|b|^2 - |a|^2.|b|^2.\cos^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\vec{a}|^2.|b|^2.\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2.|b|^2\sin^2\theta \Longrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||b|.\sin\theta.$$

نتیجه ۱) رابطه مستقل از θ بین حاصلضرب داخلی و ضرب خارجی

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|a|^2\cdot|b|^2-(a\cdot b)^2$$

نتیجه ۲:

$$\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{a\cdot b}=\frac{|a|\cdot|b|\cdot\sin\theta}{|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{a\cdot b}=\tan\theta$$

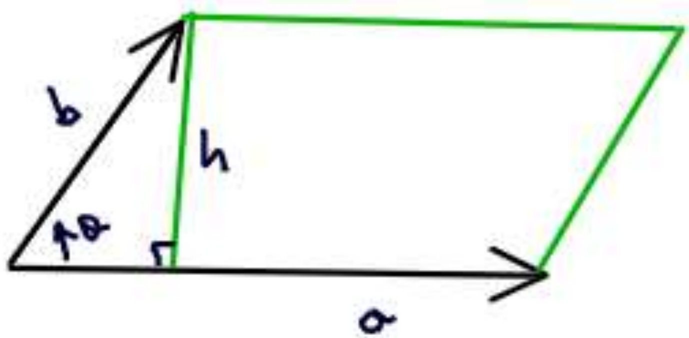
نتیجه ۳: برای دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\hat{\theta}=0 \text{ یا } 180^\circ\Leftrightarrow\sin\theta=0\Leftrightarrow|a|\cdot|b|\cdot\sin\theta=0$$

یعنی:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$$

تمرین: ثابت کنید مساحت متوازی الاضلاعی که بر روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود برابر است با $|\vec{a}\times\vec{b}|$.



$$\sin\hat{\theta} = \frac{h}{|\vec{b}|} \Rightarrow h = |\vec{b}|.\sin\theta$$

$$S = |a|.h = |a|.(|b|.\sin\theta) = |a|.|b|.\sin\theta = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$\Rightarrow S = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

تمرین: مساحت متوازی الاضلاعی را بیابید که بر دو بردار زیر ساخته می‌شود.

$$\vec{a} = 2i + j + k \quad \text{و} \quad \vec{b} = i + 3j + 2k$$

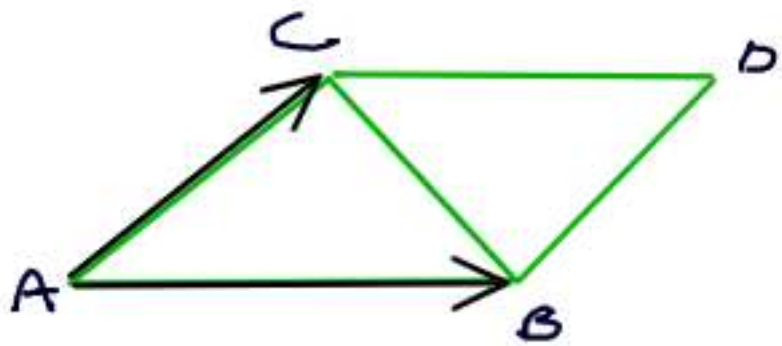
جواب:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2-3)i + (1-4)j + (6-1)k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -i - 3j + 5k$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

نتیجه: مساحت مثلث



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} |AB \times AC|$$

مثال: مساحت مثلثی با رأس های $A(1,1,2)$ و $B(0,1,3)$ و $C(3,2,1)$ را بیابید.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (0-1, 1-1, 3-2) = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (3-1, 2-1, 1-2) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + 3j - k \Rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

حل تمرین ۱: اگر $\vec a$ و $\vec b$ دو بردار در فضای R^3 باشند آنگاه

الف) $\vec a\cdot(\vec a\times\vec b)=0$ ب) $\vec b\cdot(\vec a\times\vec b)=$

اثبات الف

$$\vec a\cdot(\vec a\times\vec b)=(a_1,a_2,a_3)\cdot(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1$$

$$=0$$

اثبات ب هم همین گونه است

نتیجه ویژگی اول :

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند،

الف) $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ ب) $\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$

تمرین: برداری بیابید که بر دو بردار $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = 3i + j + 2k$ عمود باشد.

جواب :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 3)i - (2 - 9)j + (1 - 6)k$$

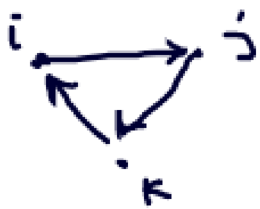
$$= i + 7j - 5k$$

ویژگی ۲: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

یعنی: ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد.

ویژگی ۳: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

نتیجه: $i\times i=j\times j=k\times k=\vec{0}$



$i\times j=k \qquad i\times k=-j$

$j\times k=i \qquad k\times j=-i$

$k\times i=j \qquad j\times i=-k$

توجه:

$i\cdot j=j\cdot k=k\cdot i=0$

$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$

ویژگی ۴ :

$r \in \mathbb{R}$:

$$(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b}) = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

نتیجه :

$r, k \in \mathbb{R}$

$$(r \cdot \vec{a}) \cdot (k \cdot \vec{b}) = (r \cdot k) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

ویژگی ۵ :

الف) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

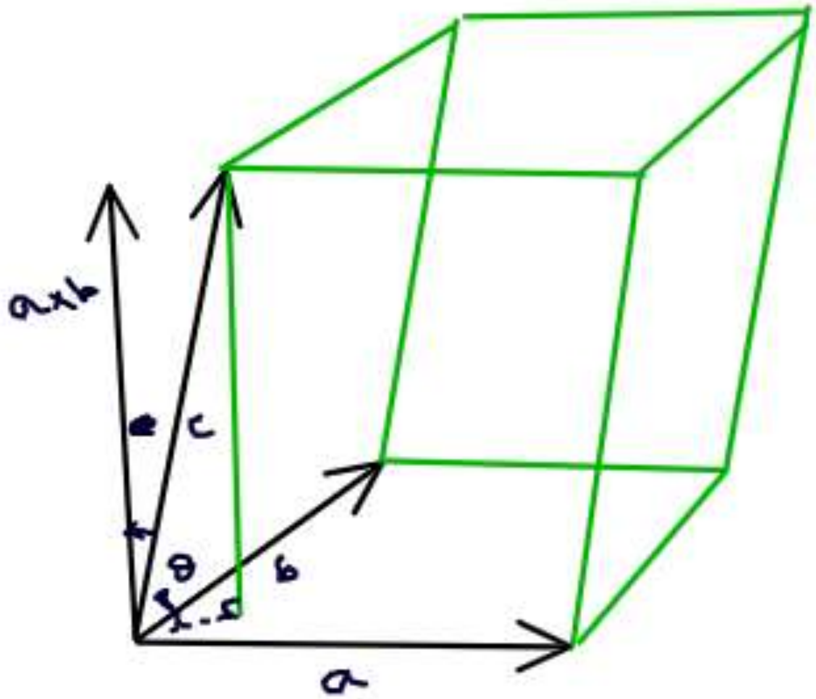
ب) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

ویژگی ۶ : اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشند آنگاه :

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

یعنی : دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازیند اگر و فقط اگر حاصلضرب خارجی آنها صفر باشد.

حجم متوازی السطوح :



$$V = S \cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\theta$$

$$= |\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,.\,|\cos\theta| = |\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$$

تذکر: ضرب مختلط سه بردار

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

مثال:

$$\vec{a}=(2,1,1),\quad \vec{b}=(1,3,5),\quad \vec{c}=(2,0,1)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2(3-0)-1(1-10)+1(0-6)$$

$$=6+9-6=9$$

تمرین: حجم متوازی السطوح را حساب کنید که با سه بردار زیر ساخته می‌شود.

$$\vec{a}=(2,1,2),\quad \vec{b}=(1,1,3),\quad \vec{c}=(5,2,1)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2(1-6)-1(1-15)+2(2-5)$$

$$=-10+14-6=-2$$

$$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|-2|=2$$

تذکر: سه بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه هستند اگر و فقط اگر

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times c)=0$$

تمرین: به ازای چه مقدار m سه بردار زیر در یک صفحه قرار دارند؟

$$a=2i+j-k \quad , \quad b=mi-j+k \quad , \quad c=(3,1,2)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2(-2-1)-1(2m-3)-1(m+3)$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-6-2m+3-m-3=-3m-6$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0 \Longrightarrow -3m-6=0 \Longrightarrow m=-2$$

تمرین: اگر $|\vec{a}|=7$ و $|\vec{b}|=1$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=4$ آنگاه $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ را بیابید.

روش اول:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\times|\vec{b}|} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{49}} = \pm\sqrt{\frac{33}{49}} = \pm\frac{\sqrt{33}}{7}$$

$$a\cdot b = |a|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta = 7\times1\times\left(\pm\frac{\sqrt{33}}{7}\right) = \pm\sqrt{33}$$

روش دوم:

$$|a\times b|^2 = |\vec{a}|^2\cdot|b|^2-(a\cdot b)^2$$

$$16 = 49-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = 33 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \pm\sqrt{33}$$

تمرینات کتاب هندسه سه صفحه ۸۲ را حل کنید

خسته نباشید

پایان

تمرین صفحه ۸۴ کتاب هندسه سه

۱ــ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $\vec{a}=(۲\,,-۱\,,۲)$ ، $\vec{b}=i$

$$a'=\frac{(a\cdot b)}{|b|^۲}\cdot\vec{b}=\frac{۲+۰+۰}{۱}\,i=۲i$$

ب) $\vec{a}=(۲\,,۳\,,۱)$ ، $\vec{b}=(۳\,,۲\,,۱)$

$$\vec{a}'=\frac{a\cdot b}{|b|^۲}\cdot\vec{b}=\frac{۶+۶+۱}{۹+۴+۱}(۳,۲,۱)=\left(\frac{۳۹}{۱۴},\frac{۲۶}{۱۴},\frac{۱۳}{۱۴}\right)$$

پ) $\vec{a}=(۱\,,۱\,,۰)$ ، $\vec{b}=(-۱\,,۲\,,۴)$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^۲}\cdot\vec{b}=\frac{-۱+۲+۰}{۱+۴+۱۶}\cdot(-۱,۲,۴)=\left(\frac{-۱}{۲۱},\frac{۲}{۲۱},\frac{۴}{۲۱}\right)$$

۲ــ فرض کنید $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=\circ$ را محاسبه کنید.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=0$$

$$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

$$\Rightarrow |a|^2+|b|^2+|c|^2+2a.b+2a.c+2b.c=0$$

$$\Rightarrow a.b+a.c+b.c=-\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2}{2}=-\frac{1+4+9}{2}=7$$

۳ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

$$\vec{a}=(1,2,2)\ ,\quad \vec{b}=(3,1,-1),\ \vec{c}=(3,-1,1)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}.\vec{b}&=3+2-2=3\\ \vec{a}.\vec{c}&=3-2+2=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}\ ,\ \vec{b}\neq\vec{c}$$

۴ـ اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$, $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=(3+(-1),-4+1,2+4)=(2,-3,6)$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}=\frac{2+9+24}{4+9+36}(2,-3,6)=\frac{35}{49}\cdot(2,-3,6)$$

۵ـ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(1,-3,2)$, $\vec{b}=(-2,1,-5)$ پیدا کنید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=i(15-2)-j(-5+4)+k(1-6)=13i+j-5k$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a},\quad (\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$$

۶ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times(b-c)=0 \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{a}=(1,2,3)$ و $\vec{b}-\vec{c}=(2,4,6)$

$\Rightarrow \vec{b}=(3,5,5),\ \vec{c}=(1,1,1)$

$a=(1,2,3)$ و $\vec{b}-\vec{c}=(2,4,6)=2\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}-\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$

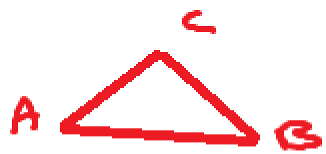
۷ــ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}|=3$ ، $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

$|a\times b|^2=|a|^2|b|^2-(a.b)^2$

$72^2=3^2\times26^2-(a.b)^2 \Rightarrow (a.b)^2=3^2\cdot26^2-72^2$

$\Rightarrow a.b=\pm\sqrt{3^2\times26^2-72^2}=\pm\sqrt{900}=\pm30$

۸ــ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(۳,۵,۷)$، $B=(۵,۵,۰)$، $C=(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(5-3,5-5,0-7)=(2,0,-7)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-4-3,0-5,4-7)=(-7,-5,-3)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=i(0-35)-j(-6-49)+k(-10-0)=-35i+55j-10k$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{35^2+55^2+10^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4350}$$

پایان