

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **فصل سوم، بردارها - هندسه سه دوازدهم ریاضی**



تمرین: اگر  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  و  $\vec{b} = (0, 1, 5)$  آنگاه اندازه بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  که است؟

$$\vec{a} + \vec{b} = (0+1, 1+2, 5+3) = (1, 3, 8)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{1+9+64} = \sqrt{74}$$

مزبان حبیبی



تمرین: آار  $\vec{v} = (-2, 1, 2)$   $\vec{u} = (1, 2, 3)$  سه گانه -

الف) اندازه  $u$  و اندازه  $v$  را بیابید .

ب) بردار  $\vec{u} + \vec{v}$  را بیابید .

ج) اندازه بردار  $\vec{u} + \vec{v}$  را بیابید .

تکلیف

تکلیف



نکته:  $a = (2, 1, -1)$  ،  $b = (0, 1, 2)$  اندازه بردار  
 $2a - 3b$  را بیابید.

$$2a - 3b = 2a + (-3b) = 2(2, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 2)$$

$$= (4, 2, -2) + (0, -3, -6) = (4, -1, -8)$$

$$|2a - 3b| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 1 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$b = (2, -1, 1)$$

$$a = (1, 2, 2)$$

تخمین: آرد

$$2a + b \text{ را بیابید}$$

آرد - اندازه بردار

لطیف

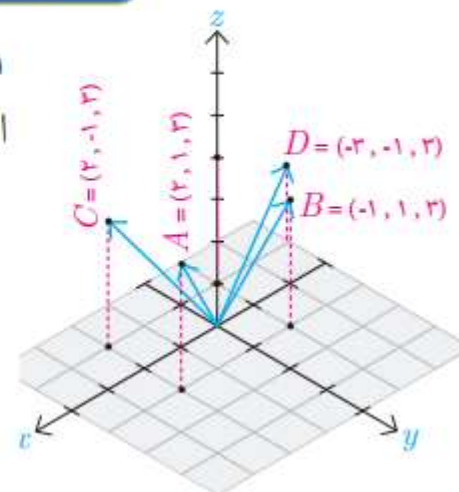
مزبان حبیبی

۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهار ضلعی  $ABCD$  را بنویسید.

$$\vec{AB}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y=1, z=3 \end{cases} \quad \vec{BC}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\vec{CD}: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ y=-1, z=3 \end{cases} \quad \vec{DA}: \begin{cases} x=2, z=3 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح  $ABCD$  هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

$$A'(2, 1, 0), B'(-1, 1, 0) \Rightarrow \vec{A'B'}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y=1, z=0 \end{cases}$$

$$B'(-1, 1, 0), C'(2, -1, 0) \Rightarrow \vec{B'C'}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$C'(2, -1, 0), D'(-2, -1, 0) \Rightarrow \vec{C'D'}: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ y=-1, z=0 \end{cases}$$

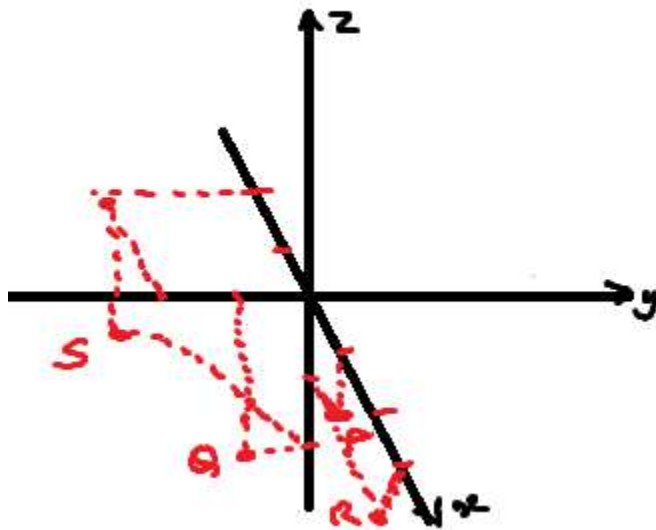
$$D'(-2, -1, 0), A'(2, 1, 0) \Rightarrow \vec{D'A'}: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 \\ z=0 \end{cases}$$

جزوه های آموزشی، هندسه دو و سه بعدی ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲- نقاط با مختصات  $P=(1,0,1)$ ،  $Q=(0,-1,-2)$ ،  $R=(3,0,-1)$  و  $S=(-2,-2,-2)$

را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.



مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه دو و سه بعدی ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۳- در سؤال قبل طول پاره خط های  $PQ$ ،  $RQ$  و  $PS$  را بیابید.

$$\vec{PQ} = \sqrt{0x^2 + 0y^2 + 0z^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$\vec{RQ} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1+1)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

$$PS = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

۴- فرض کنید  $P = (x_1, y_1, z_1)$  و  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ . مختصات نقطه  $M$  وسط پاره خط  $PQ$  را بیابید.



$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

حبیبی





جزوه های آموزشی، هنده سه دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی

۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف)  $r\vec{a}-\vec{b}=?$  ،  $r=3$  ،  $\vec{b}=(\sqrt{2}, 1, 1)$  ،  $\vec{a}=(\frac{1}{3}, 0, 2)$

$$3\vec{a}-\vec{b} = (-1, 0, 2) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (-1-\sqrt{2}, -1, 1) = d_1$$

ب)  $r\vec{a}+\vec{b}=?$  ،  $r=-1$  ،  $\vec{b}=(3, 1, -1)$  ،  $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

$$-\vec{a}+\vec{b} = (-3, -2, 1) + (3, 1, -1) = (0, -1, 0) = d_2$$

ج)  $\vec{a}+\vec{b}=?$  ،  $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{k}$  ،  $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}-\vec{k}$

$$\vec{a}+\vec{b} = (\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 3, 1) = (\sqrt{2}, 3, 0) = d_3$$

د)  $r\vec{a}+\vec{b}=?$  ،  $r=\frac{1}{5}$  ،  $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$  ،  $\vec{a}=5\vec{k}+\vec{j}$

$$\frac{1}{5}\vec{a}+\vec{b} = (-1, \frac{1}{5}, 1) + (1, 0, -1) = (0, \frac{1}{5}, 0) = d_4$$

جدید



جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۶- طول بردار  $\vec{a}$  را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-1-\sqrt{2})^2 + 1+2} = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{0+1+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{2+9+0} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{1+\frac{1}{4}+0} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

مزبان حبیبی





تمرین: کسینوس زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = 2i + j - 2k$  و  $\vec{b} = i + j + k$  را بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 2 + 1 - 2 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\cos \hat{\theta} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{3 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \left( \theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

مزبان حبیبی



معمولاً اگر دو بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j} + k$  و  $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$  بر هم عمود باشند  $m$  کجا؟

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow 2(2) + m(-2) + 1(-5) = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 2m - 5 = 0 \Rightarrow -2m = -1 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

مزبان حبیبی



مثال: تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (2, 1, 5)$  را در راستای بردار  $\vec{b} = (1, 2, 2)$  بیابید.

$$\vec{a}' = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b} = \left( \frac{14}{9} \right) \cdot (1, 2, 2) = \left( \frac{14}{9}, \frac{28}{9}, \frac{28}{9} \right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 2 + 2 + 10 = 14$$

$$|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

مزبان حبیبی



مثال ۱:  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  و  $\vec{b} = (2, 1, -2)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2-1)\vec{i} + (2+4)\vec{j} + (2-6)\vec{k} \\ = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

مثال ۲:  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  و  $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-6)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (2-4)\vec{k} \\ = -4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$



جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

تمرین: دکتر  
 $\vec{a} = 2i + j + k$  و  $\vec{b} = i - j - k$

آنگاه اندازه بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  را بیابید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+1)i + (1+2)j + (-2-1)k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 3j - 3k$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

پی





مهمترین: از هر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، تا بگردید:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

اثبات:  $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 \\ &\quad + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 \\ &= \dots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2 \theta \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \\ &\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \end{aligned}$$



جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

نتیجه ۱: رابطه مستقیم بین سینوس زاویه و مقدار ضرب برداری

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta} = \tan \theta \quad \text{نتیجه ۲}$$

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \tan \theta$$

نتیجه ۳: برای بردارهای هم‌جهت  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \hat{\theta} = 0 \text{ یا } \pi \iff \sin \theta = 0 \iff |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta = 0$$

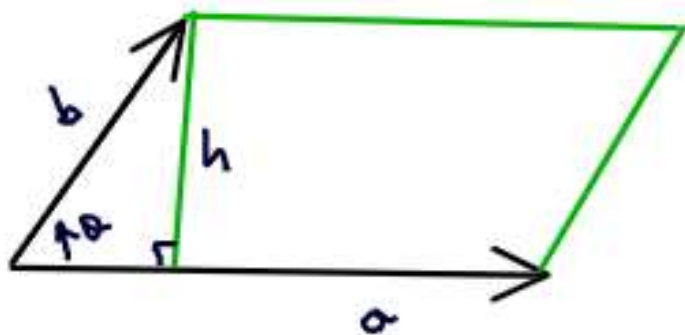
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \text{یعنی}$$

پی





تمرین: تا جاییکه می توانید موازی الاصلی که برد بردار  $\vec{a}$  در  $\vec{b}$  است  
می شود برابر با  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .



$$\sin \hat{\theta} = \frac{h}{|\vec{b}|} \Rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

$$S = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \cdot \sin \theta) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$$
$$\Rightarrow S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



تمرین: مساحت متوازی الاضلاع را بیابید که برد بردار زیر گفته شده است.

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

ح: -

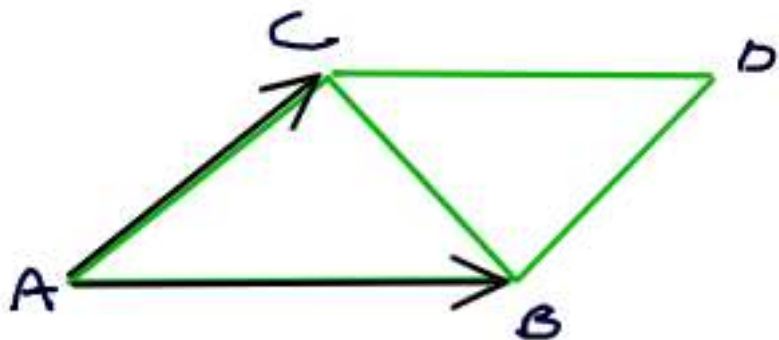
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2-3)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (6-1)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$$



پایه: س م س - ت



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} |AB \times AC|$$

نقطه ها:  $A(0, 1, 0)$  و  $B(1, 1, 0)$  و  $C(2, 2, 1)$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1-0, 1-1, 0-0) = (1, 0, 0) \quad \text{را بیاید}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (2-0, 2-1, 1-0) = (2, 1, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{j} + \hat{k} \rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



تمرین: حجم مستطیل را حساب کنید که با سه بردار زیر هم می خورد.

$$\vec{a} = (2, 1, 2), \quad \vec{b} = (1, 1, 3), \quad \vec{c} = (5, 2, 1)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1-6) - 1(1-15) + 2(2-5)$$

$$= -10 + 14 - 6 = -2$$

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |-2| = 2$$

تذکره: بردارنا صفر  $\vec{0}$  را  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک صفحه هستند

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \quad \text{اگر دقت کنید}$$

کمترین: به اندازه چه مقدار  $m$  بردار زیر در یک صفحه قرار دارند؟

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \vec{b} = m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \quad \vec{c} = (2, 1, 2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2-1) - 1(2m-2) - 1(m-2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -2 - 2m + 2 - m - 2 = -3m - 2$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \implies -3m - 2 = 0 \implies m = -\frac{2}{3}$$





مگرین: آر  $|\vec{a}| = 3$  و  $|\vec{b}| = 1$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 4$  معلوم

$(\vec{a} \cdot \vec{b})$  را بیابیم

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{9}} = \pm \sqrt{\frac{9-16}{9}} = \pm \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = 3 \times 1 \times \left( \pm \frac{\sqrt{33}}{3} \right) = \pm \sqrt{33}$$

اگرچه نه:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$16 = 9 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 4 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$



تمرین

صفحه ۸۴ کتاب هندسه سه

۱- برای هر یک از بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که در زیر آمده است تصویر قائم  $\vec{a}$  را بر امتداد  $\vec{b}$  به دست آورید.

الف)  $\vec{b} = i, \vec{a} = (2, -1, 2)$

$$\vec{a}' = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{2+0+0}{1} i = 2i$$

ب)  $\vec{b} = (3, 2, 1), \vec{a} = (2, 3, 1)$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{2+6+1}{9+4+1} (3, 2, 1) = \left( \frac{39}{14}, \frac{26}{14}, \frac{13}{14} \right)$$

پ)  $\vec{b} = (-1, 2, 4), \vec{a} = (1, 1, 0)$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{-1+2+0}{1+4+16} \cdot (-1, 2, 4) = \left( -\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{4}{21} \right)$$

پی



جزوه های آموزشی، هندسه سه وازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲- فرض کنید  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بردارهایی باشند به ترتیب به طول های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  را محاسبه کنید.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = -\frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}{2} = -\frac{1 + 4 + 9}{2} = -7$$

۳- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ .

$$\vec{a} = (1, 2, 2), \vec{b} = (3, 1, -1), \vec{c} = (3, -1, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 2 - 2 = 3 \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 - 2 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ و } \vec{b} \neq \vec{c}$$

مربی

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوزدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۴- اگر  $\vec{a} = (1, -3, 4)$  و  $\vec{b} = (3, -4, 2)$ ،  $\vec{c} = (-1, 1, 4)$  باشند آنگاه تصویر قائم  $a$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید.

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = (3 + (-1), -4 + 1, 2 + 4) = (2, -3, 6)$$

$$\vec{c}' = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} = \frac{2 + 9 + 24}{4 + 9 + 36} (2, -3, 6) = \frac{35}{49} (2, -3, 6)$$

۵- برداری عمود بر دو  $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ،  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$  بردار پیدا کنید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(15 - 2) - \hat{j}(-5 + 4) + \hat{k}(1 - 6) = 13\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

مبانی

جزوه های آموزشی، هنر و مهندسی، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۶- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ . آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{a} = (1, 2, 2) \text{ و } \vec{b} - \vec{c} = (2, 4, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{b} = (3, 5, 5), \vec{c} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{a} = (1, 2, 2) \text{ و } \vec{b} - \vec{c} = (2, 4, 4) = 2\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} - \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

۷- بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$ ،  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . مقدار  $a \cdot b$  را محاسبه کنید.

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (a \cdot b)^2$$

$$72^2 = 3^2 \times 26^2 - (a \cdot b)^2 \Rightarrow (a \cdot b)^2 = 3^2 \cdot 26^2 - 72^2$$

$$\Rightarrow a \cdot b = \pm \sqrt{3^2 \times 26^2 - 72^2} = \pm \sqrt{9 \dots} = \pm 3$$

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط  $C = (-4, 0, 4)$ ,  $B = (5, 5, 0)$ ,  $A = (3, 5, 7)$  داده شده است را بیابید.


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (5-3, 5-5, 0-7) = (2, 0, -7)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (-4-3, 0-5, 4-7) = (-7, -5, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= i(0-35) - j(-7-21) + k(-10-21) = -35i + 28j - 31k$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{35^2 + 28^2 + 31^2} = \frac{1}{2} \sqrt{430}$$

مزبان حبیبی

