

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

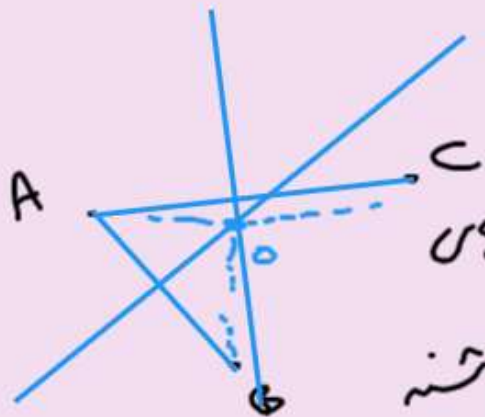
جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **فصل دوم، مقاطع مخروطی - هندسه سه دوازدهم ریاضی**



محکمتن : نقاط A, B, C عرضند ، نقطه ای بیاید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد



جواب : هر راسته محکود مسافت های اصدا محکومتن

هر راسته . این کا ضربات کا محکود مسافت های

AB, AC را رسم کنید کا در نقطه O متساوی فاصله باشند

$$OA = OB = OC$$

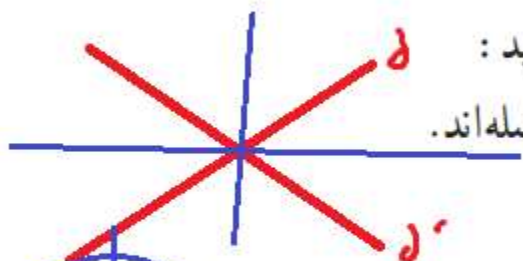
مزبان حبیبی



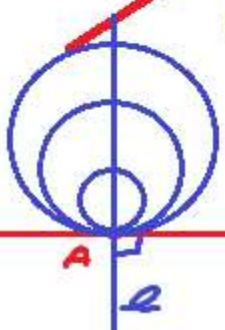
تمرین

صفحه ۳۸ هندسه

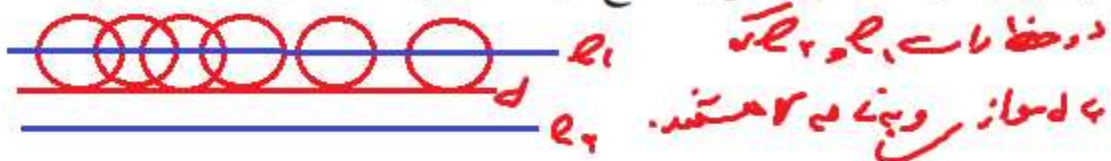
۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :
 الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.



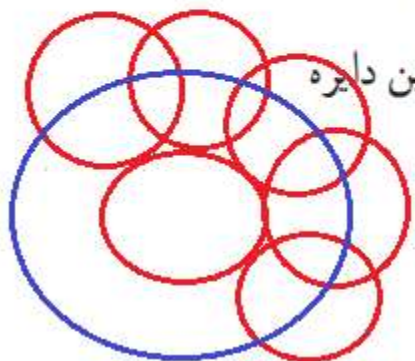
ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.



ج) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.



ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره

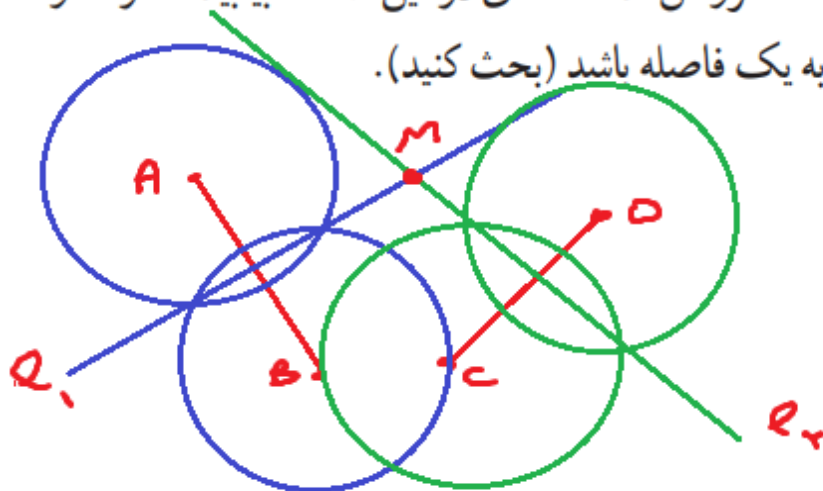


مماس خارجی‌اند. دایره $C'(O', 2r)$

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۲- نقاط A, B, C, D در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).



l_1 : محور عمود منصف AB

l_2 : محور عمود منصف CD

۱) $l_1 \neq l_2 \Rightarrow M$ یک جواب منحصر به فرد

۲) $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow$ سه جواب ندارد

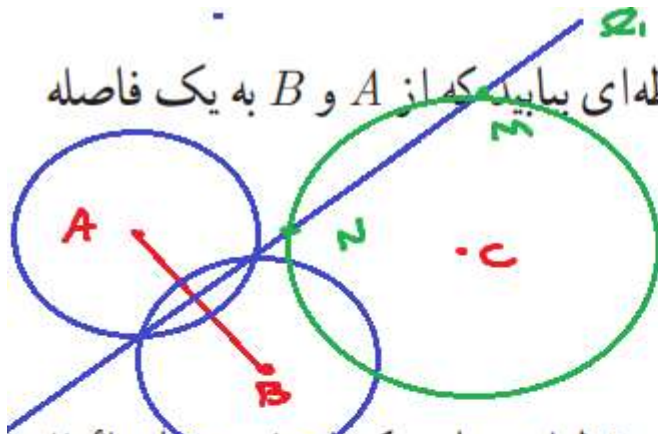
۳) $l_1 = l_2 \Rightarrow$ بی نهایت جواب دارد

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

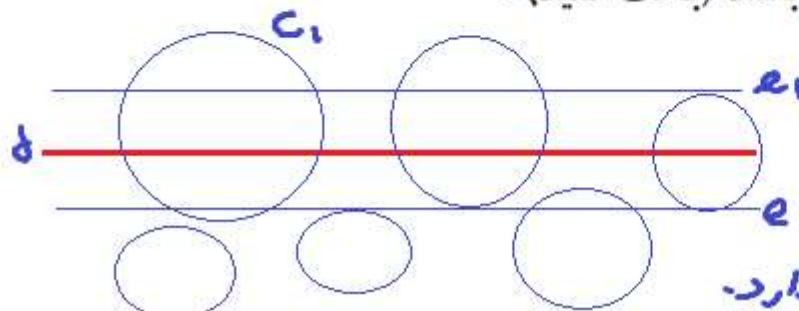


۳- نقاط A, B, C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).



محورصفحت AB : l_1
 دایره مرکز C شعاع ۲ : C_1
 صفحه مماس به C_1 یا در جواب دارد.

۴- نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).



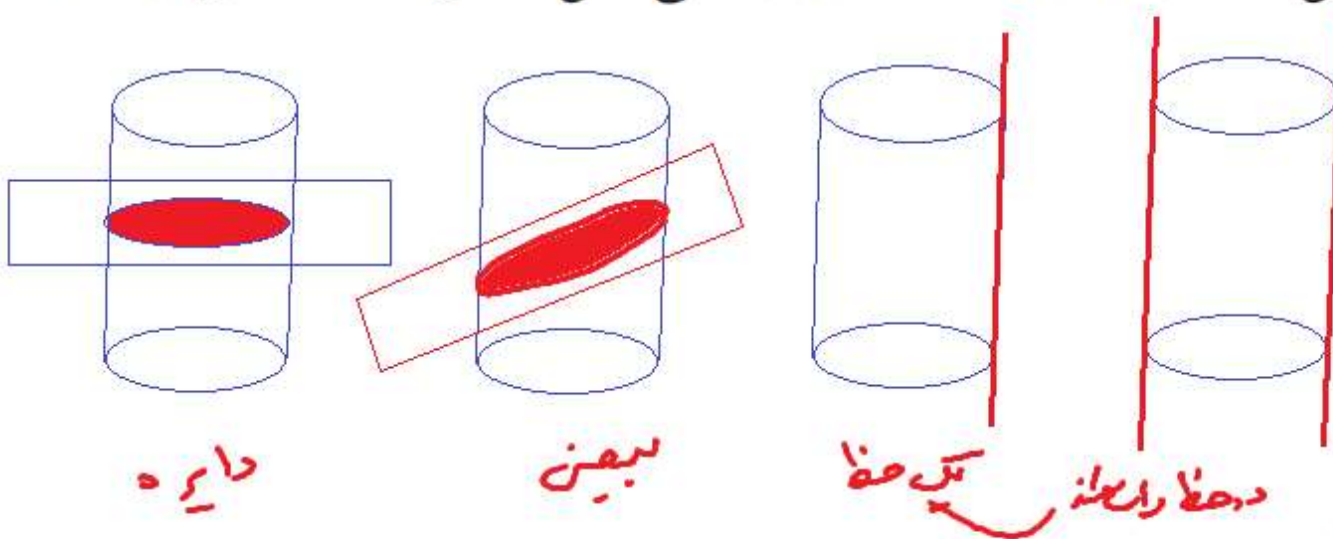
د خط موازی d فاصله ۲ : l_1, l_2
 دایره مرکز A شعاع ۳ : C_1, C_2
 صفحه مماس به C_1, C_2 و l_1, l_2 یا در جواب دارد.

مزبان حبیبی



۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟ دو خط راست متقاطع

۶- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه P ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).



دایره

بیضی

دو خط راست موازی
یک خط

یک خط - یک خط - دو خط راست موازی - دایره - بیضی



سؤال: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(2, 5)$ و شعاع آن \sqrt{R} باشد.

شعاع R مرکز (α, β)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{R}^2$$

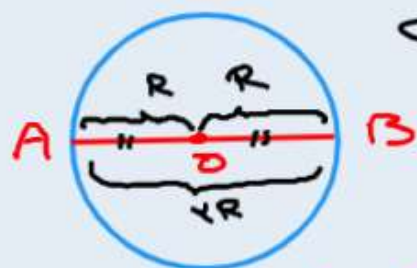
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 49$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$$

مزبان حبیبی



نکته: معادله دایره ای را بنویسید
از قشرهای آن بگذرید



حل: $O\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) \Rightarrow O\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) \Rightarrow O(3, -1)$

$R = OA = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= R^2 \\ (x-3)^2 + (y-(-1))^2 &= (\sqrt{13})^2 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 &= 13 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

وتری که از مرکز دایره می گذرد \equiv قطر

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: نقاط $A(۱,۳)$ و $B(۳,۳)$ در یک قطر دایره هستند. دایره را بنویسید.

تکلیف ۶

مزبان حبیبی



مکوین : معادله دایره ای بصورت زیر است . مرکز و شعاع آن را بیابید .

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 23 + 4 + 9$$

بتداک 4 بکنف ←
بتداک 9 بکنف

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 26$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow O(2, -3)$$

$$R^2 = 26 \Rightarrow R = \sqrt{26}$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مکاتبی: مرکز توسعه پایه دوازدهم ریاضی

$$x^2 - 2y - 2 = 0$$

تألیف دکتر

مزبان حبیبی



نکته: مختصات مرکز دایره معادله زیر را بیابید.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$$

جواب:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = +1 + 4 + 1$$

تکمیل مربع
 $\xrightarrow{-2}$ (for x)
 $\xrightarrow{+1}$ (for y)

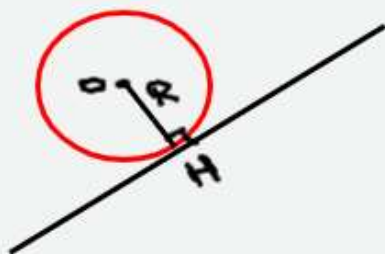
تکمیل مربع
 $\xrightarrow{+1}$ (for y)

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \rightarrow 0(2-2) \\ y+1=0 \Rightarrow y=-1 \\ R^2=6 \Rightarrow R=\sqrt{6} \end{cases}$$

مزبان حبیبی



تکمین: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(1, 2)$ باشد و بر خط $x - 2y = 1$ مماس باشد.



$$O(\alpha, \beta)$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = R^2$$

$$R = OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$O : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - \frac{4}{5} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{9}{5} = 0$$

بزرگوار

تمرین: توصیف دو دایره زیر را نسبت به هم تعیین کنید.

$$x^2 + y^2 + 2x = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 0 + 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$O(-1, 0), R=1$$

$$x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$x^2 + (y^2 + 2y + 1) = 1 + 1$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$O'(0, -1), R' = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, R+R' = \sqrt{2}+1, R-\sqrt{R'} = \sqrt{2}-1$$

$$R-R' < OO' < R+R' \Rightarrow \text{مقاطع}$$



ادرس دوم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 + 2x) - (x^2 + y^2 - 2y - 1) = 0$$

معادله مشترک

$$\checkmark \boxed{2x + 2y + 1 = 0}$$

$$2x = -2y - 1 \Rightarrow x = -y - \frac{1}{2}$$

$$(-y - \frac{1}{2})^2 + y^2 + 2(-y - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow y^2 + y + \frac{1}{4} + y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$2y^2 - y - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 8y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-6 \pm \sqrt{55}}{16} = \frac{4 \pm \sqrt{14+94}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{112}}{4}$$

ستاره طرح این دو صورت یک

$$x = -\left(\frac{4 \pm \sqrt{112}}{4}\right) - \frac{1}{2}$$

مکتب



تمرین: خط $x - y = 2$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2y = 0$ چه وضعیتی دارد؟

حل:

$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 0 + 1$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ -1 & +1 \end{matrix}$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow O(0, 1), R = 1$$

$$x - y - 2 = 0 \Rightarrow O(2, 0)$$

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$OH > R \Rightarrow \text{مجموعه تقاطع دایره و خط تهی است}$$

میزبان حبیبی



ادسی درم :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow y = x - 2 \end{cases}$$

$$x^2 + (x-2)^2 - 2(x-2) = 0$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

یعنی: خط و دایره نقطه اشتراک ندارند.

مزبان حبیبی



نقطه $A(1, 2)$ را به خط Q از مرکز O عمود بر خط Q به مرکز O

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0}}$$

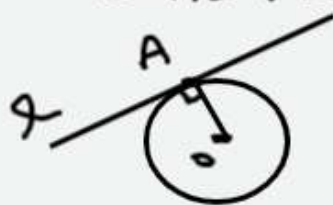
$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 2 + 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O(1, 0) \\ R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

نقطه A روی دایره $\Rightarrow OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \neq 2 = R \Rightarrow$

$$m_{OA} = \frac{dy}{dx} = \frac{2-0}{1-1} = \infty \Rightarrow m_Q = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$Q: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$



مزبان حبیبی



تمرین : معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه از صفحه N رد شود.

$$A(1, -1), B(-1, 5), C(3, 1)$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{جواب:}$$

$$\begin{cases} A \rightarrow 1 + 1 + a - b + c = 0 \\ B \rightarrow 1 + 25 + a - 5b + c = 0 \\ C \rightarrow 9 + 1 + 3a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = -2 \\ a - 5b + c = -26 \\ 3a + b + c = -10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a - 5b + c = -26 &\Rightarrow c = -26 - a + 5b \\ a - b - 26 - a + 5b &= -2 \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6 \\ 3a + 6 + c &= -10 \Rightarrow c = -16 - 3a \\ a - 12 &= -26 \Rightarrow a = -14 \end{aligned}$$



تمرین

صورت یک کعب هندسه

۱- معادله دایره ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه ای از آن باشد.

$$R = OA = \sqrt{ax^2 + ay^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

$$R = OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 + 4 + 0|}{\sqrt{16 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{32}} = \sqrt{2}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وترى به طول ۲ ایجاد کند.



$$h = OH = \frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$R^2 = h^2 + 1^2 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$$



ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن

تماس باشد. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O(2, -1)$

$$R_{OH} = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 9}} = \frac{1}{5}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25}$$

ج) از نقاط $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

$$m_{AB} = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow AB: y-0 = -1(x-3) \Rightarrow y+x=3$$

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2, y=3 \Rightarrow O\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$R_{OA} = \sqrt{5x^2 + 5y^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2 \Rightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{2}{5}$$





۲- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک

دایره باشد.

$$(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (y^2 + 5y + \frac{25}{4}) = -a + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{34 - 4a}{4} > 0 \rightarrow a < \frac{34}{4}$$

۳- وضعیت هر یک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, -2)$ و $C(2, 3)$ و $D(4, -1)$ را

نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ تعیین کنید.

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 5 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10 \Rightarrow O(1, -2), R = \sqrt{10}$$

$O A = \sqrt{0x^2 + 0y^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < R \Rightarrow$ درون دایره

$O B = \sqrt{(1-1)^2 + (-2+2)^2} = 0 \Rightarrow$ در مرکز دایره

$O C = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} > R \Rightarrow$ بیرون دایره

$O D = \sqrt{(1-4)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = R \Rightarrow$ روی دایره

جزوه های آموزشی، هندسه دو ابعاد ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۴- وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$$\text{الف) } x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - 2x = 4$$
$$O(0,0), R=2 \quad O'(1,0), R'=2$$

$$OO' = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = 1$$

$$|R - R'| = |2 - 2| = 0 < OO' < R + R' = 4 \Rightarrow \text{مقاطع}$$

$$\text{ب) } x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$O(0,1), R=1$$

$$O'(1,0), R'=1$$

$$OO' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow |R - R'| = 0 < OO' < R + R' = 2 \Rightarrow \text{مقاطع}$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه دو ابعاد ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$\text{ج) } x^2 + y^2 = 1, \quad \text{O}(0,0), R=1$$

$$\text{O}(0,0), R=1$$

$$x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$$

$$(x^2 - 3\sqrt{2}x + \frac{9}{2}) + (y^2 - 3\sqrt{2}y + \frac{9}{2}) = -5 + 9$$

$$\text{O}' = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}), R=2$$

$$\text{OO}' = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = 3 = R + R' \Rightarrow \text{مسکون است}$$

$$\text{د) } x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = -9 + 9 + 1$$

$$\text{O}(0,0), R=1$$

$$\text{O}'(3,1), R'=1$$

$$\text{OO}' = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} > R + R' \Rightarrow \text{متقاطع}$$

مزبان حبیبی



۵- نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1 \Rightarrow m'_{AB} = -1$$

$M = (0, 0)$ وسط AB و معادله عمود منتهی AB : $y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$

$$m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-(-1)}{1-(-1)} = -1 \Rightarrow m'_{AC} = 1$$

$N = (0, -2)$ وسط AC و معادله عمود منتهی AC : $y + 2 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$

$$-x = x - 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow O(1, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4} \checkmark$$

سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1 \Rightarrow \text{عمود منتهی} \Rightarrow \boxed{x = 1}$$



۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=-2+4+4$

$O(2,2)$, $R=1$

$OH = \frac{|4x+2y-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{14}{5} > 1 \Rightarrow$ نقطه ای که ندارند

ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$: $O(0,0)$, $R=\sqrt{2}$

$OH = \frac{|1+0-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R \Rightarrow$ خط بر دایره است

ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2+1+1$

$O(1,1)$, $R=2$

$OH = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R \Rightarrow$ متقاطع هستند

پیش



مکزی: آدا اندازه حاصل دو قطر بیضی ۲۰ و ۱۰ باشد، کجاست؟ اندازه خروج
از مرکز بیضی کدام است؟

$$2a = 20 \Rightarrow a = 10$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

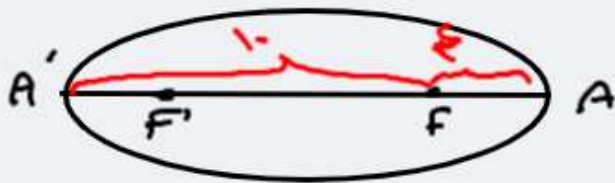
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = 25 + c^2 \Rightarrow c^2 = 75 \Rightarrow c = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مزبان حبیبی



تمرین: اگر فاصله یک کانون بیض تا دو سر قطر بزرگ، تقریباً ۱۰ باشد
 اندازه انداز خروج از نور بیض را بیابید.



$$FA = c \Rightarrow a - c = c$$

$$FA' = 10 \Rightarrow AA' = 14 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

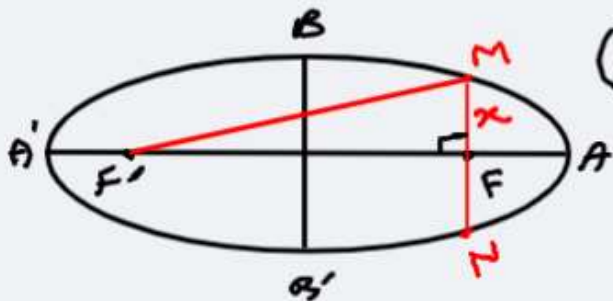
$$7 - c = c \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{7}$$

مزبان حبیبی



تمرین: اندازه قطرهای یک بیضی به ترتیب ۴ و ۱۰ هستند.
از کانون بیضی حفظی محور بر قطر بزرگ رسم کنید تا بیضی را در M و N قطع کند.



اندازه $MN = 2a$ را حساب کنید. (وتر کانونی)

$$AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$BB' = 4 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

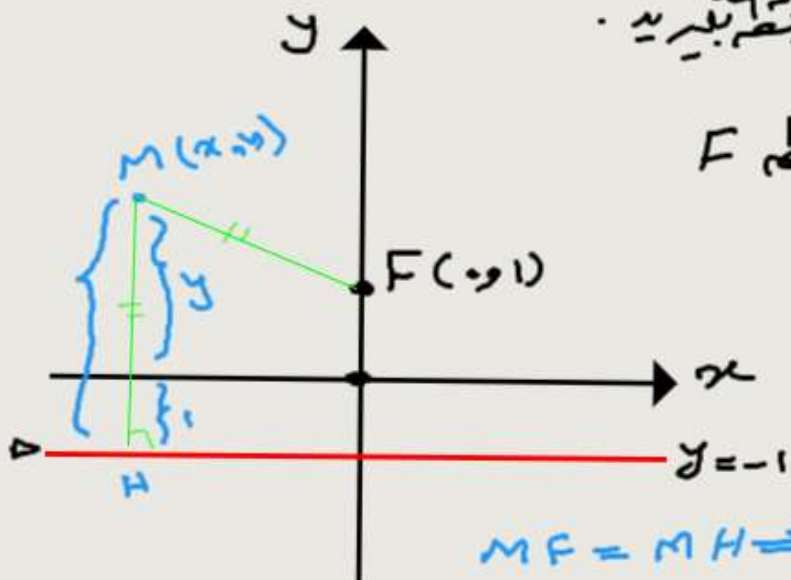
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$$

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' + x = 10 \Rightarrow MF = 10 - x$$

$$\Delta MFF': FF'^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow (c)^2 = x^2 + (10-x)^2 \Rightarrow 21 = x^2 + 100 - 20x + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 79 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 79 \cdot 2}}{2} = 5 \pm \sqrt{19} \Rightarrow MN = 2(5 \pm \sqrt{19})$$





مثال: نقطه $F(0, 1)$ و خط $y = -1$ را در نظر بگیرید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که از نقطه F و خط H به یک فاصله باشند.

جواب: فرض کنیم $M(x, y)$ نقطه ای از این مکان

هندسی باشد پس

$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = (y+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = y+1 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$

مزبان حبیبی



$$\Rightarrow x^2 + \cancel{y} - 2y + 1 = \cancel{y} + 2y + 1$$

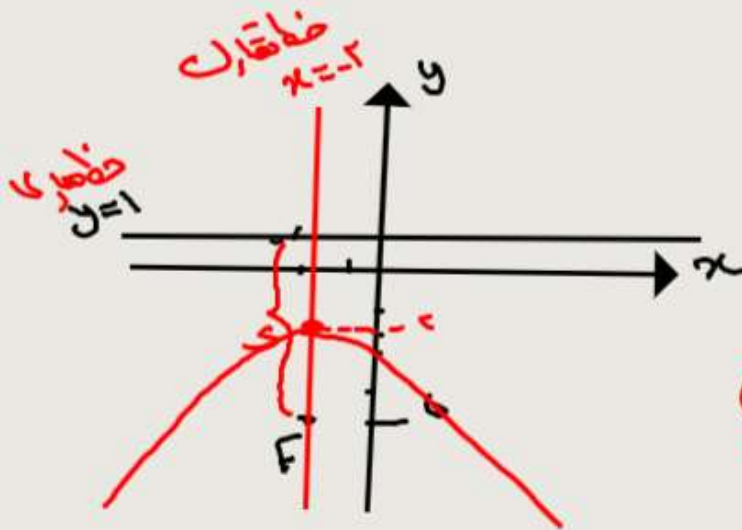
$$x^2 - 2y = 2y \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x^2} \checkmark$$

معادله $y = \frac{1}{4}x^2$ یک سهم است که رأس آن در مبدأ مختصات است.

مزبان حبیبی



مختوم: معادله سهم را بسویجه که $F(-2, 5)$ کانون آن بود و خط $y=1$ خط
هدی همی باشد.



$$2a = -5 - 1 = -6 \Rightarrow a = 3$$

$$S(-2, -2)$$

معادله قائم درده پائین اب .

$$(x-a)^2 = -4a(y-b)$$

$$(x+2)^2 = -12(y+2)$$

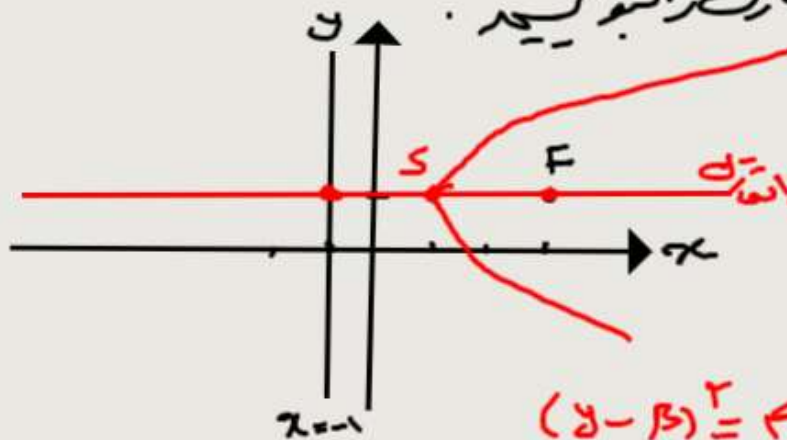
مزبان حبیبی



مکعبین: آر (۳، ۱) F کا نون سهم و حفا $\alpha = -1$ حفا هادی سهم با β .

انف (مختصه) اس و معادله حفا (تقارن) را بنویسید.

(- معادله سهم را بنویسید.



$\alpha = FS = 2$
خط تقارن $y = 1$
راس $S(1, 1)$

سهم (نقطه) سه راس α

$$(y - \beta)^2 = 4\alpha(x - \alpha) \Rightarrow (y - 1)^2 = 8(x - 1)$$

مکعبین



تمرین: سهمی با معادله $y^2 - 4y + 16x - 4 = 0$ معروضات

افتخار y^2 →
قائم x^2 →

افتخار (افتخار رأس، کانون، معادله خطوط تقاطع و محوری را بنویسید.
- سهمی را رسم کنید.

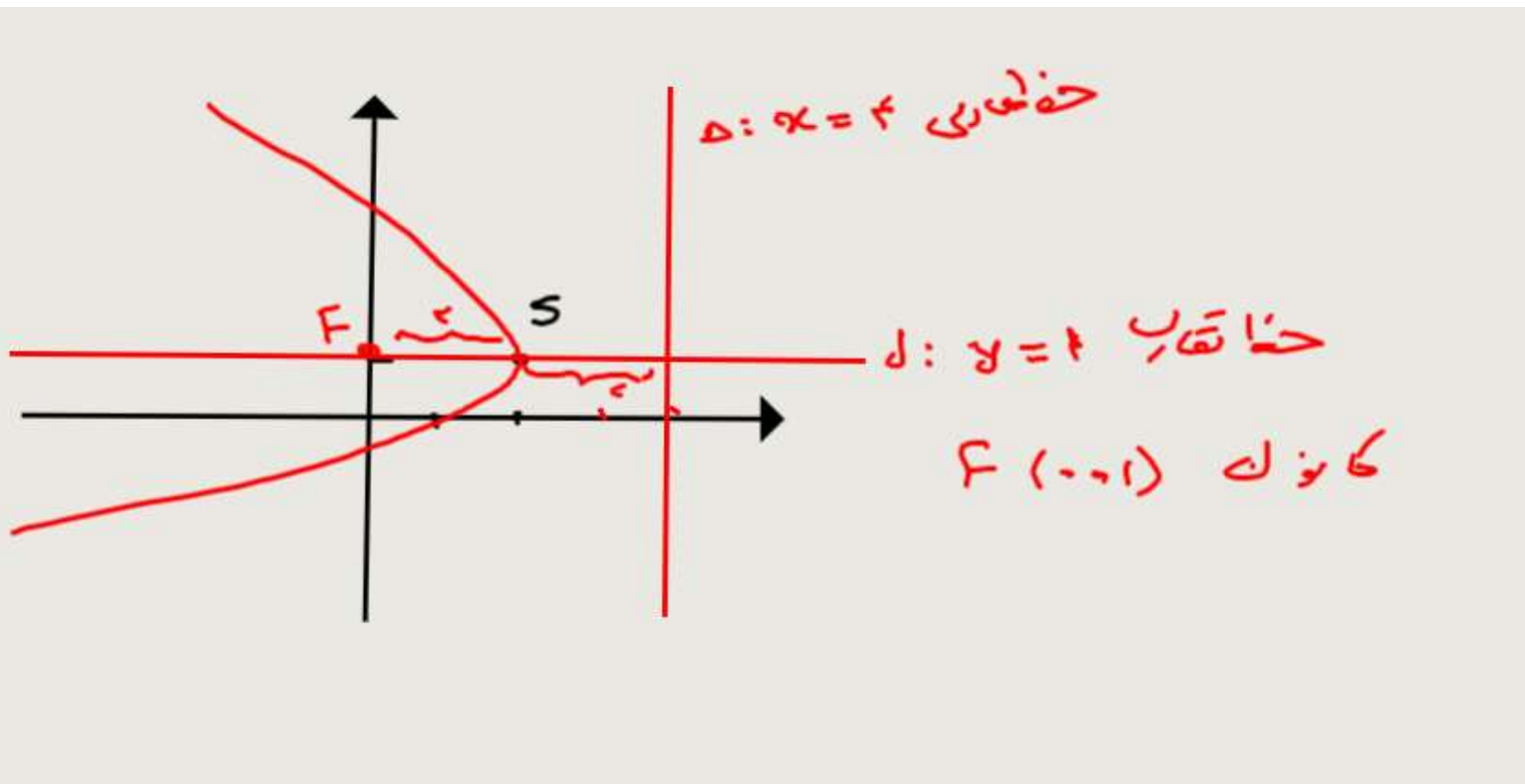
$$y^2 - 4y + 16x - 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = -8(x-1)$$

$y^2 - 4y + 4 = -16x + 4 + 4$
 $y^2 - 4y + 4 = -16x + 8$
 $(y-2)^2 = -16x + 8$
 $(y-2)^2 = -8(x-1)$

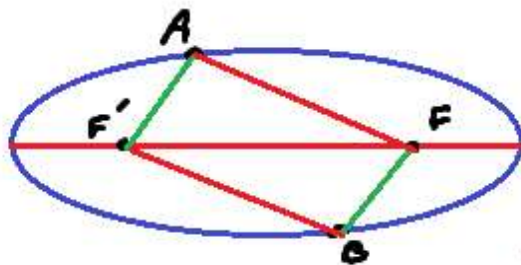
سهمی افتخار به سمت چپ است.

$$\left. \begin{array}{l} y-2=0 \Rightarrow y=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 4a=8 \Rightarrow a=2 \end{array} \right\} \Rightarrow S = (1, 2) \Rightarrow F($$

سهمی



۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. A به کانون F' نزدیک تر و B به کانون F نزدیک تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی اند.



$$AF + AF' = BF + BF'$$
$$\Rightarrow AF = BF'$$

پس AF و BF' متوازی و موازی اند.

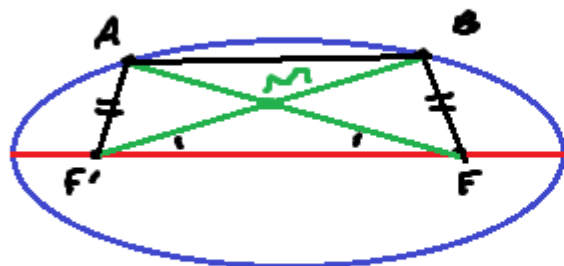
مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، هندسه دو و دهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



$$AF = BF' \Rightarrow AF' = BF \Rightarrow BF' = AF$$

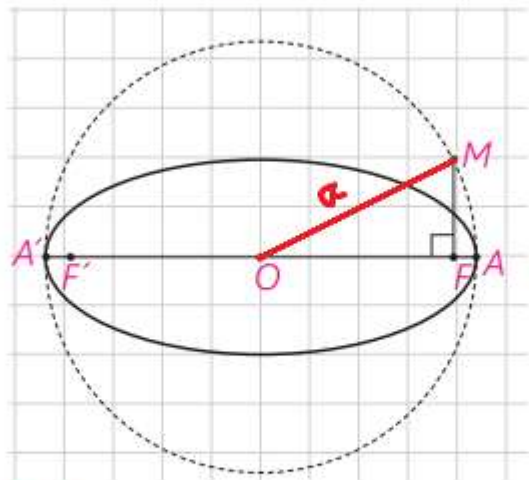
$$\begin{cases} AF = BF \\ AF' = BF' \\ FF' = FF' \end{cases} \xrightarrow{\text{منه من}} \triangle FF'A \cong \triangle FF'B \Rightarrow \hat{F} = \hat{F}'$$

پس FMF' متساوی الساقین است

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هنده سه دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی

۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



$$\begin{aligned} OM &= a, \quad OF = c \\ \triangle OMF: \quad OM^2 &= OF^2 + MF^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + MF^2 \\ \Rightarrow MF^2 &= a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b \end{aligned}$$

بیبی

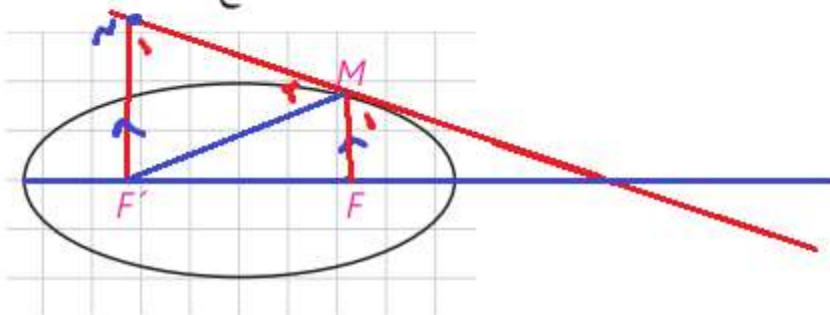


جزوه های آموزشی، هندسه دو ایزوم ریاضی، دکترزبان حبیبی



۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید

$$NF' = MF'$$



$$\left. \begin{array}{l} MF \perp d, MF' \perp d \Rightarrow \angle M_1 = \angle M_2 \\ MF \parallel NF' \Rightarrow \angle M_1 = \angle N_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1$$

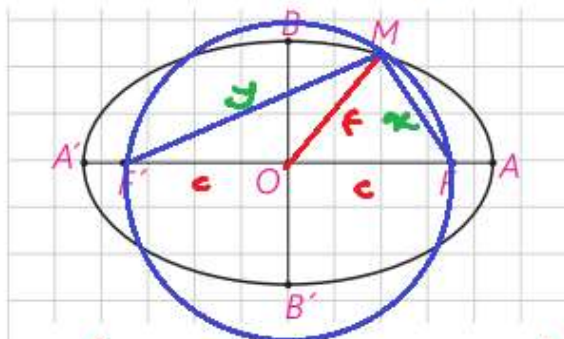
$$F'M = F'N \quad \square$$

پپی

جزوه های آموزشی، هندسه دو اوزنم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۴- نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله آن تا



مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ج) طول های MF و MF' را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ BB' = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\Rightarrow OF = OF' = OM = 4$$

ب) داریم مرکز O و نقطه F از M می گذرد و لذا FF' قطر بیضی است

$$FF' = 2c \Rightarrow \widehat{FMF'} = 90^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = 2a = 10 \Rightarrow y = 10 - x \\ x^2 + y^2 = 4c^2 \Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 64 \end{cases} \quad (ع)$$

$$x^2 + 100 + x^2 - 20x - 64 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$x^2 - 10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 72}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}$$

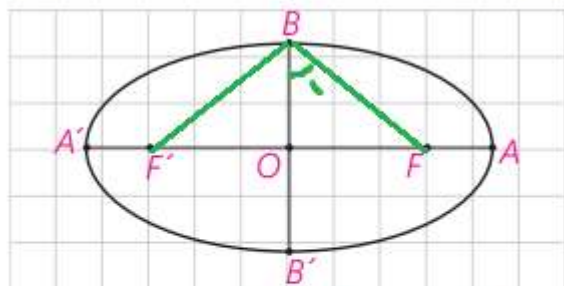
$$x = 5 + \sqrt{7} \Rightarrow y = 5 - \sqrt{7}$$

$$x = 5 - \sqrt{7} \Rightarrow y = 5 + \sqrt{7}$$

جزوه های آموزشی، هنده سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه

FBF' چند درجه است؟



$$2a = 2(2b) = a = 2b$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4b^2 - b^2} = b\sqrt{3}$$

$$\text{در } \triangle OFB: \tan \hat{\beta}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle FBF' = 2\hat{\beta}_1 = 120^\circ$$

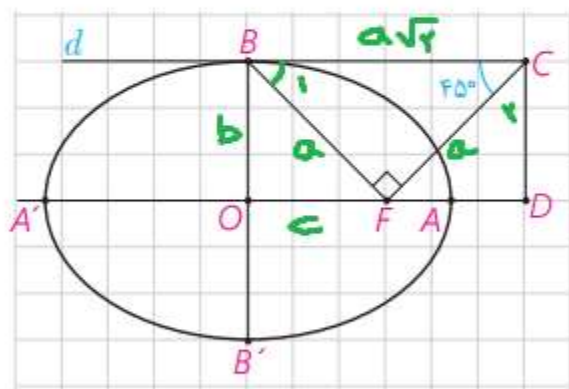
ریاضی جدیدی



جزوه های آموزشی، هندسه دو اوزنم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه ای مانند D قطع کند. اگر $\hat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



$$\hat{C}_1 = 45^\circ \rightarrow \hat{B}_1 = 45^\circ, \hat{C}_2 = 45^\circ$$

$$BF = CF = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$$

$$AD = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$$

$$AF = a - c$$

$$b = c = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a - \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}}$$

پیشی

جزوه های آموزشی، هنر سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

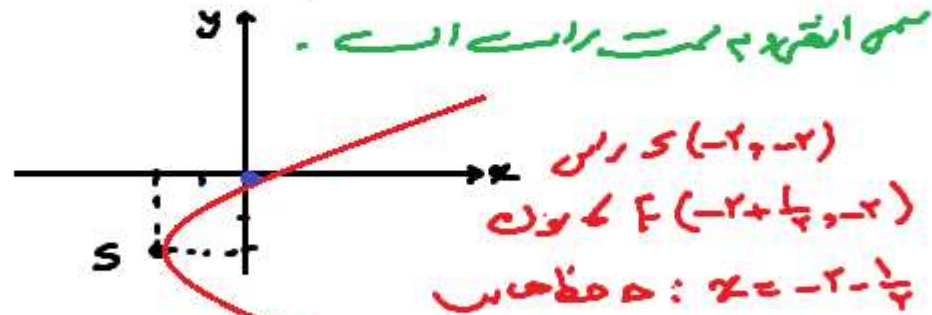


۷- سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

$$\Rightarrow S(-2, -2), \quad 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

سه انحراف است راست است.



رأس $S(-2, -2)$

کانون $F(-2 + \frac{1}{2}, -2)$

خط مستقیم $x = -2 - \frac{1}{2}$

$$x=0 \Rightarrow y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y = 0, -4 \Rightarrow A(0,0), B(0,-4)$$

$$y=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,0)$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه دو ابعاد ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

$$ax^2 + bx = y - c \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}y - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a} \left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right) \rightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$a > 0 \Rightarrow F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}\right)$$

۹- معادله سهمی را بنویسید که رأس $S(1, 2)$ و کانون آن $F(1, -2)$ باشد.

$$x_S = x_F \Rightarrow \text{سمت قائم}$$

$$y_F < y_S \Rightarrow \text{سهمی باز به پایین}$$

$$a = \frac{FS}{p} = \frac{\sqrt{0^2 + (2+2)^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \Rightarrow (x - 1)^2 = 4(2)(y - 2)$$

جزوه های آموزشی، هندسه دو ابعاد ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۰- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد

دایره ای رسم می کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$$y^2 = 4(x-1) \Rightarrow S = (1, 0), a = 1 \Rightarrow F(1+1, 0) = (2, 0)$$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 9$$

$$\begin{cases} y^2 = 9 - (x-2)^2 \\ y^2 = 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow 4x - 4 = 9 - (x-2)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 4x - 4 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 13 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8} \Rightarrow A(3, \sqrt{8}), B(3, -\sqrt{8})$$

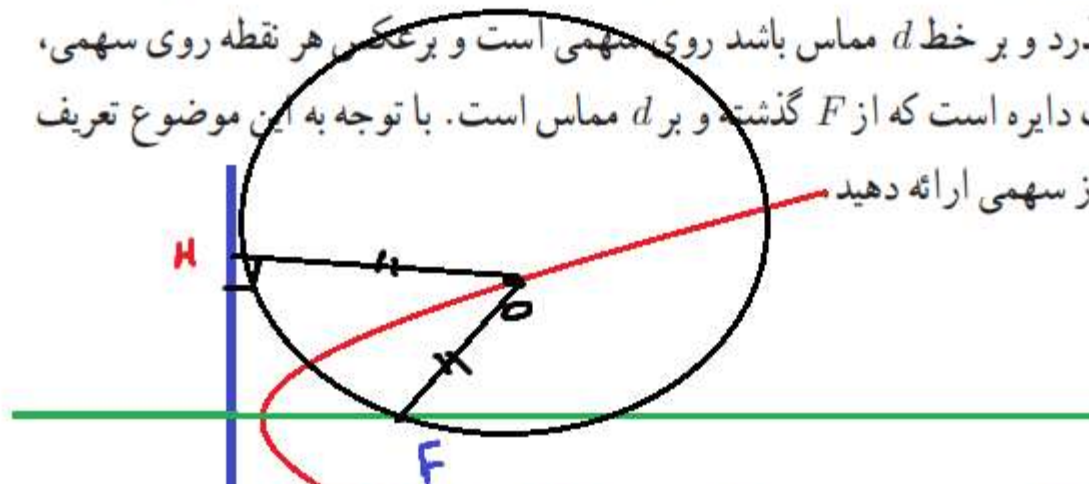
$$x = -3 \Rightarrow y^2 = -12 \quad \text{غیر ممکن}$$

بیبی

جزوه های آموزشی، هندسه دو و دهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید



آز مرکز دایره در سهمی: شد و از F بگذرد. نقطه O مرکز دایره در نقطه H بر خط d مماس است.

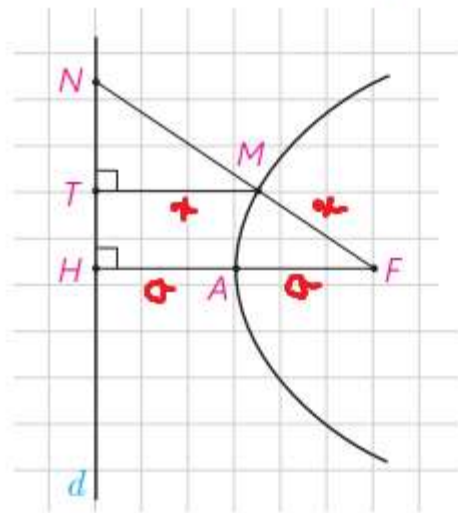
برعکس آرد دایره از F گذشته و بر d در H مماس است. O مرکز دایره است.

این مرکز دایره در سهمی است.

جزوه های آموزشی، هندسه دوادهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M ، MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$



$$\triangle MNT \sim \triangle FNH$$

$$\frac{MN}{FN} = \frac{MT}{FH} \Rightarrow \frac{MN}{FN} = \frac{MF}{2FA} \Rightarrow \frac{MN}{MF} = \frac{FN}{2FA} \quad \text{①}$$

$$MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MN}{MF} = \frac{NT}{TH} \quad \text{②}$$

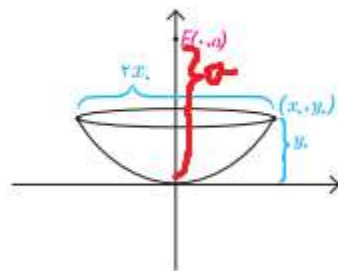
$$\text{①, ②} \Rightarrow \frac{FN}{2FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

حبیبی

جزوه های آموزشی، هندسه دو ایزدم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۳- یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخایراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به



او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

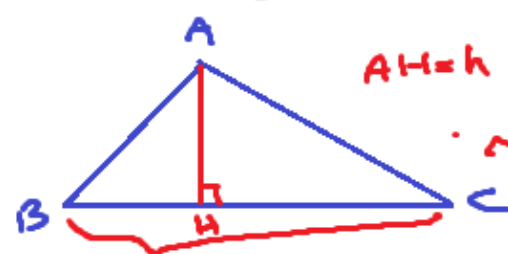
$$\frac{(2x)^2}{16y} = a \Rightarrow 4x^2 = 16ay \Rightarrow x^2 = 4ay$$

ریاضی جدیدی

جزوه های آموزشی، هنر سه ده دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی



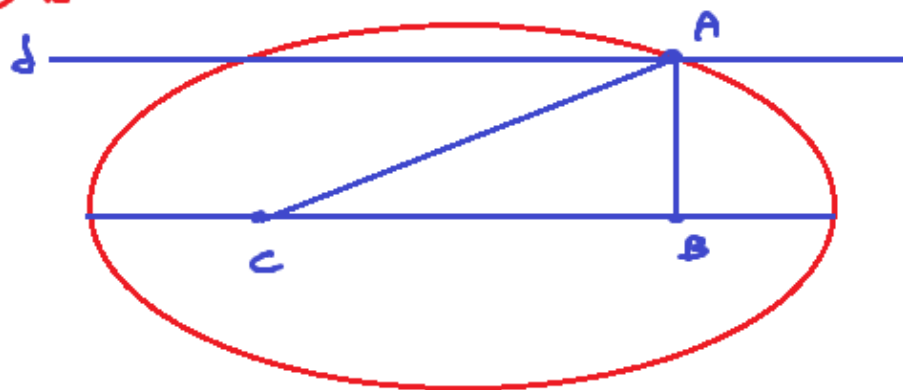
۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.



موسوم $BC = m$ و $AH = h$
و محیط $2P$ است.

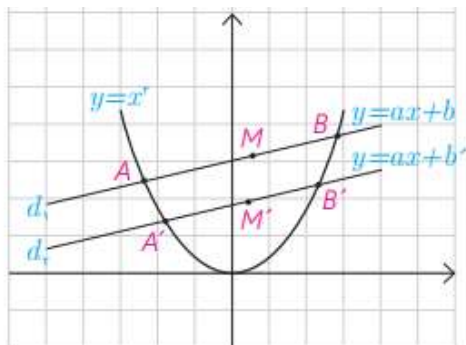
بیضی با فاصله $FF' = m$ و $2a = 2P - m$ رسم کنید.

حقیقاً d را به موازات FF' رسم کنید h رسم کنید
تاییدی را در A قطع کند. مثلث ABC
جواب تمام است.



بیبی

جزوه های آموزشی، هندسه دو اوزنم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱۵- سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^2$ باشد. $x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید. $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

$$x_A + x_B = S = a$$

$$y_A + y_B = ax_A + b + ax_B + b = a(x_A + x_B) + 2b = a^2 + 2b \Rightarrow M(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + b)$$

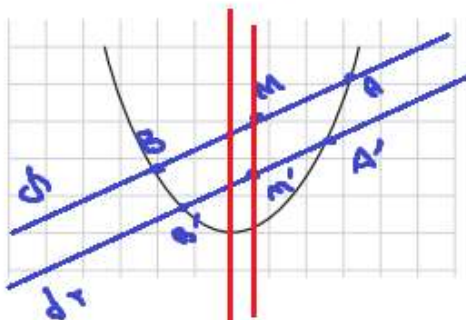
ب) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

$$x^2 = ax + b' \Rightarrow x^2 - ax - b' = 0$$

$$x_{M'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$y_{M'} = \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2} = \frac{ax_{A'} + b' + ax_{B'} + b'}{2} = \frac{a^2}{4} + b' \Rightarrow M' = (\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + b')$$

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟



$$x_M = x_{M'} \Rightarrow MM' \parallel y$$

ث) با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

دو خط موازی d_1 و d_2 را چنان رسم کنید که سهمی را قطع کند.

نقاط وسط AB و $A'B'$ را به ترتیب M و M' بنویسید. از خط MM' موازی y رسم کنید.

جزوه های آموزشی، هندسه سه دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پاپان

دکتر مزبان حبیبی

51 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511