سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: حل تمرینات فصل اول هندسه سه، ماتریس ها- دوازدهم ریاضی

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

تمرین صفحه ۲۰ کتاب هندسه ۳

۱ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۴×۳ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱^۲ & ۱^۲ & ۱^۲ \\ ۲+۱ & ۷ & ۲^۲ & ۲^۲ \\ ۳+۱ & ۳+۲ & ۷ & ۳^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ ۲x+y=۵ \\ z=۱ \end{cases} \Rightarrow ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow ۴-y=۳ \Rightarrow y=۱$$

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \neq ۰ \ , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \neq ۰$$

$$A . B = ۰$$

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \ و \ B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N}\ \ n>1)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^3=A^2.A=I.A=A$$

$$A^4=A^2.A^2=I.I=I \Longrightarrow A^n=\begin{cases}A & \text{فرد } n\\ I & \text{زوج } n\end{cases}$$

$$A^7=A^4\times A^3=I.A=I$$

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{قطری } A\times B}\begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

۷ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱^{۲}-۱ & ۱-۲ \\ ۲-۱ & ۲^{۲}-۱ \\ ۳-۱ & ۳-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۱^{۲}+۱ & ۱-۲+۲ & ۱-۳+۲ \\ ۲+۱ & ۲^{۲}+۱ & ۲-۳+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰-۳ & ۰-۵ & ۰-۱ \\ ۲+۹ & ۱+۱۵ & ۰+۳ \\ ۴+۳ & ۲+۵ & ۰+۱ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰+۱+۰ & -۲+۳+۰ \\ ۰+۵+۲ & -۳+۱۵+۱ \end{bmatrix}$$

۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_2d & r_2e & r_2f \\ r_3g & r_3h & r_3i \end{bmatrix}$$

۹ـ اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

$$A=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$A.B=k.B$ و $B.A=k.B$

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟ بله

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

$(A+B)^۲=(A+B)\cdot(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$

$=A^۲+AB+AB+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

$(A-B)\cdot(A+B)=A^۲+AB-BA-B^۲$

$=A^۲+AB-AB-B^۲=A^۲-B^۲$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\cdot A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix}$$

نتیجه: $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$

تمرین: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & m-1\end{bmatrix}$ و $|A|=17$ باشد، آنگاه مقدار m را بیابید.

$$: \quad |A| = 2\times(m-1) - 5 = 2m-2-5 = 2m-7$$

$$|A| = 17 \Longrightarrow 2m-7 = 17 \Longrightarrow 2m = 24 \Longrightarrow m = 12$$

تمرین ۲: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & m+2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ آنگاه به ازای چه مقدار یا مقادیر m، دترمینان ماتریس برابر ۷ خواهد بود؟

تکلیف شد

مسئله ۱: اگر وارون A وجود داشته باشد، ثابت کنید منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنیم B و C وارون‌های ماتریس A باشند.

B وارون A است $\Longrightarrow A\times B = B\times A = I$ (1)

C وارون A است $\Longrightarrow A\times C = C\times A = I$ (2)

$$B = B\times I \overset{(2)}{=} B\times (A\times C) = (B\times A)\times C \overset{(1)}{=} I\times C = C$$

یعنی ماتریس A فقط یک وارون دارد.

سوال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $|A|\neq 0$ ثابت کنید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc}&\frac{-b}{ad-bc}\\\frac{-c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$$

اثبات :

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{0}{ad-bc} \\ \frac{0}{ad-bc} & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

و همین ترتیب ، $A^{-1} \cdot A = I$

تمرین ۵: اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $A \cdot X - 2I = B$

آنگاه ماتریس X را بیابید.

$$\therefore A \cdot X - 2I = B \Rightarrow AX = B + 2I \xRightarrow{|A| \neq 0} X = A^{-1} \cdot (B + 2I)$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{7} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

تمرین ۲:

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ و $(A+B)\cdot X - I = 13$

آنگاه ماتریس X را بیابید.

تکلیف شد.

مثال: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-2) - (1) = -3 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-3} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

تمرین: دستگاه زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید:

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ x-2y=5 \end{cases}$$

تکلیف شد

تمرین ۱- اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2m+1\end{bmatrix}$ ، آنگاه به ازای چه مقداری از m داریم $|A|=7$ ؟

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2m+1\end{bmatrix}$$

$$|A|=(-1)(2m+1)-2=7$$

$$\Rightarrow -2m+(-1)-2=7$$

$$\Rightarrow -2m-3=7$$

$$\Rightarrow -2m=10 \Rightarrow m=\frac{10}{-2}=-5$$

تمرین ۱: اگر $A=\begin{bmatrix} m+2 & 1 \\ 5 & m \end{bmatrix}$ آنگاه مقدار m را چنان بیابید که $|A|=-2$.

تمرین ش د (از طریق بخش تکلیف)

تمرین: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ را تعیین کنید:

$|A| = 5 - 2 = 3$, $A^{-1} = \frac{1}{3} \times \begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5/3 & -2/3\\ -1/3 & 1/3\end{bmatrix}$

توجه:

$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A^{-1} \times A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ واحد

تمرین: دستگاه زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| = (-2) - 1 = -3 \qquad A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.C = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5+1 \\ -5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 7/3 \end{cases}$$

تمرین ۲: دستگاه $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$ را به کمک ماتریس وارون حل کنید.

تکلیف شد

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

تمرین: اگر $\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X+2I=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس X کدام است؟

(I ماتریس همانی مرتبه ۲ است.)

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X+2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}\longrightarrow X=\begin{bmatrix}1&1\\2&5\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{5-2}\times\begin{bmatrix}5&-1\\-2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}-12&6\\6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2\\2&-1\end{bmatrix}$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ \\ ۵ & ۱ \end{matrix}$$

$$|A|=(۰+۲۰+۶)-(۰+۲+۴)=۲۶-۶=۲۰$$

تمرین ۱:

اگر $A=[2 \quad 1 \quad -1]$ و $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ آنگاه $|A.B|$ و $|B.A|$ را بیابید.

$$A.B=[2 \quad 1 \quad -1]\times\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=0+(1)+(-2)=-1$$

$$|A.B|=|-1|=1$$

$$B.A=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\times[2 \quad 1 \quad -1]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|B.A|=0\times(\quad)-0\times(\quad)+0\times(\quad)=0$$

تمرین ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان ماتریس A^2 را بیابید.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-2)+0 & 2+0+1 & 1+4+1\\ -1+0+0 & -2+0+2 & -1+0+2\\ 0+(-1)+0 & 0+0+1 & 0+2+1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 6\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$|A^2|=-1(0-1)-3\big(\overbrace{-3-(-1)}^{-2}\big)+6(-1-0)$$
$$=1-3(-2)+6(-1)=1+6-6=1$$

تمرین ۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ آنگاه $|A|$ کدام است؟

یادآوری: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ad-bc$

حل:

$$|A| = (5|A|)(4|A|^2)-(|A|)(5)$$

$$|A| = 20|A|^3 - 5|A| \Rightarrow 20|A|^3 - 6|A| = 0 \Longrightarrow |A|(20|A|^2-6)=0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \\ 20|A|^2 - 6 = 0 \Rightarrow |A|^2 = \frac{6}{20} = 0.3 \Longrightarrow |A| = \pm\sqrt{0.3} \end{cases}$$

تمرین ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-3&-2\\5&-1\end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس های $A^{-1}-B^{-1}$ و $(A-B)^{-1}$ را بیابید.

$$|A|=20-6=14 \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$|B|=3-(-10)=13 \rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\-5&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1&2\\-5&-3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-B^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}-\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-1&2\\-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14}+\frac{1}{13}&-\frac{3}{14}-\frac{2}{13}\\-\frac{2}{14}+\frac{5}{13}&\frac{4}{14}+\frac{1}{13}\end{bmatrix}$$

ادامه:

$$A-B=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A-B| = 42-(-15) = 57$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{|A-B|}\cdot\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/57 & -5/57 \\ 3/57 & 7/57 \end{bmatrix}$$

تمرین ۵: اگر $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ آنگاه $|A|$ و $|A^{-1}|$ را بیابید.

$$|A| = 10 - 6 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/4 & -2/4\\ -3/4 & 5/4\end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \left(\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{10}{16} - \frac{6}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

تمرین ۶: اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان A و $5A$ را بیابید.

$|A|=1(3-2)-1(6-1)+2(4-1)$

$=1-5+6=2$

$5A=\begin{bmatrix}5&5&10\\10&5&5\\5&10&15\end{bmatrix}$

توجه: $|5A|=125|A|$

$|5A|=5\times(75-50)-5(150-25)+10(100-25)$

$=125-625+750=250$

تمرین

صفحه ۳۰ کتاب هندسه

۱ـ اگر $A=[۱ \quad ۲ \quad -۳]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

$$AB=[1 \quad 2 \quad 3]\times\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=-2-2+9=5$$

$$\Rightarrow |AB|=5$$

$$BA=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\times[1 \quad 2 \quad 3]=\begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|BA|=-2(-18+18)+4(-9+9)-6(-6+6)=0$$

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به‌دست آورید.

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ -۷ & ۰ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

$$|A^۲| = ۴ \times ۹ \times ۲۵ = ۹۰۰$$

روش دو : $|A| = (-۲)(-۳) \times ۵ = ۳۰$

$$|A^۲| = |A|^۲ = ۳۰^۲ = ۹۰۰$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳-۲\right)$ را بیابید.

$$|A| = (5|A|)\cdot(4|A|^2) - (|A|)(5) = 20|A|^3 - 5|A|$$

$$\rightarrow 20|A|^3 - 6|A| = 0 \rightarrow |A|(10|A|^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \rightarrow |A|^3 - 2 = -2 \\ |A|^2 = 0.3 \rightarrow |A| = \pm\sqrt{0.3} \Rightarrow |A|^3 - 2 = \pm 0.3\sqrt{0.3} - 2 \end{cases}$$

۴ــ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$|A| = d(bc - bc) - e(ac - ac) + f(ab - ab) = 0$$

اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس برابر باشند آنگاه دترمینان صفر است.

۵ـ ماتریسی ۳ × ۳ چون A بیابید که $|A| = ۳$.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۳$$

۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱} - ۳B^{-۱})$ را بیابید.

$$A^{-1} = \frac{۱}{۲۰ - ۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B^{-1} = \frac{۱}{۲ + ۱۵}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$۲A^{-1} - ۳B^{-1} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} + \frac{۳}{۱۷} & -\frac{۳}{۷} - \frac{۹}{۱۷} \\ -\frac{۲}{۷} + \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۴}{۷} + \frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix}$$

۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

$|A| = ۱۰ - ۶ = ۴$

$A^{-1} = \frac{1}{۴}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{۲} & -\frac{1}{۲}\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$

$|A^{-1}| = \frac{۵}{۸} - \frac{۳}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{1}{۴} = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

ثبت : $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

۸ـ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\left|\begin{matrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} ka & kb \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|B| = kaei + kbfg + kcdh - kceg - kafh - kbdi = k \cdot |A|$$

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ بررسی کنید.

$$|A| = ad - bc$$

$$|B| = kad - kbc = k(ad - bc) = k \cdot |A|$$

نتیجه: $|B| = k \cdot |A|$

۹ـ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ $(k \in \mathbb{R})$ را با هم مقایسه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad-bc$$

$$kA=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow |kA| = k^{2}ad-k^{2}bc = k^{2}\cdot|A|$$

نتیجه: $|kA| = k^{2}\cdot|A|$

۱۰ـ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و ۵ = $|A|$ در این صورت حاصل $\big||A|A\big|$ را بیابید.

$$\big||A|\cdot A\big| = |A|^{3}\cdot|A| = |A|^{4} = 5^{4} = 625$$

توجه: $|k\cdot A| = k^{n}\cdot|A|$

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

$$\begin{cases}۳x-۵y=۱\\ ۴x+۲y=۱۰\end{cases} \qquad A^{-۱}=\frac{۱}{۶+۲۰}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}.B=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲+۵۰\\ -۴+۳۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$$

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases}kx+۳y=۴\\ x-۲y=۳\end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

$$A=\begin{bmatrix}k & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-۲k-۳\neq ۰ \Rightarrow k\neq -\frac{۳}{۲}$$

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $|A|=3+10=13\neq 0$

$|A|\neq 0 \Rightarrow$ جواب منحصربفرد دارد

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{13}\times\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1+40 \\ 2+24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, $|A|=-6+6=0$

$\frac{1}{-2}=\frac{3}{-6}\neq\frac{5}{1}\Rightarrow$ جواب ندارد

پ) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$ $\quad A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $|A|=12-12=0$

$\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}\Rightarrow$ بیشمار جواب دارد.

پایان