

جزوه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دكتر مزبان حمیبي



سلام

وقت بخیر

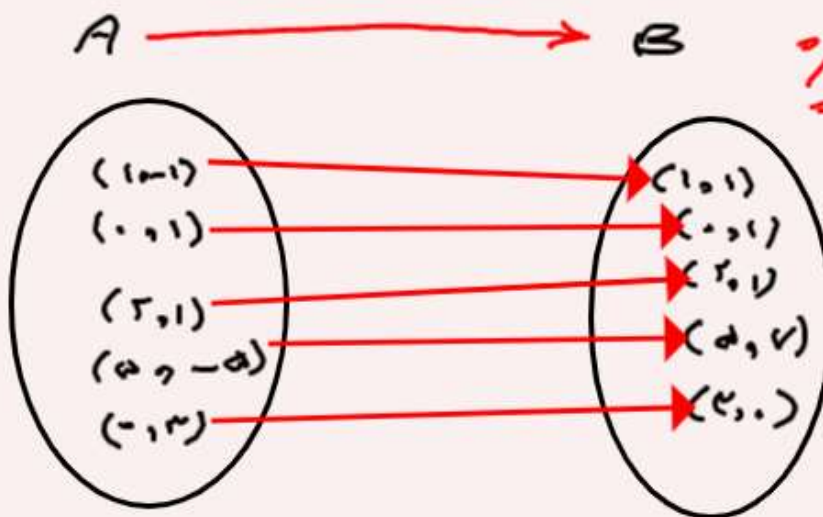
جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حمیبي

موضوع: فصل دوم، تبدیل های هندسی و کاربرد آنها - هنده دو یازدهم ریاضی



تبدیل:



تغییر:  
هر نقطه از A دقیقاً یک نقطه در تصویر است

و:  
هر نقطه B را دقیقاً یک نقطه  
در تصویر از A است.

تبدیلی



تعریف :

هر تبدیل در معنی  $M$  تابعی است که هر نقطه از  $M$  را دقیقاً به یک نقطه از  $M$  معنی تصویر کند و برعکس، هر نقطه از  $M$  دقیقاً تصویر یک نقطه از  $M$  معنی باشد.

با: تبدیل یک تابع یک به یک است از  $M$  معنی به  $M$  معنی.

تبدیلی



قرارداد: آرد  $T$  یک تبدیل روی صفحه  $P$  باشد می نویسیم:

$$T: P \rightarrow P$$

و: آرد  $T$  نقطه  $A$  را به نقطه  $B$  تصویر کند می نویسیم:

$$T(A) = B$$

$$T^{-1}(B) = A = \underline{A}$$

یا آرد  $f$

$$f(x) = a \Rightarrow f^{-1}(a) = x$$

مزبان حبیبی



سؤال: بتدیل  $T: P \rightarrow P$  را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$T(x, y) = (x+1, y-2)$$

$$1) T(5, 1) = (5+1, 1-2) = (6, -1)$$

$$T^{-1}(6, -1) = (5, 1)$$

$$2) T^{-1}(r, v) = (a, b) \Rightarrow T(a, b) = (r, v)$$
$$\Rightarrow (a+1, b-2) = (r, v) \Rightarrow \begin{cases} a+1=r \Rightarrow a=r-1 \\ b-2=v \Rightarrow b=v+2 \end{cases}$$

$$T^{-1}(r, v) = (r-1, v+2)$$

مزبان حبیبی



$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \quad : 5, 17, 25$$

$$f(25) = \frac{2(25)-1}{25+2} = \frac{49}{27}$$

$$f(25) = \frac{49}{27} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{49}{27}\right) = 25$$

$$f(2) = \frac{2(2)-1}{2+2} = \frac{3}{4} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

$$f(2) = \frac{3}{4} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

مبانی



مثال: مهربان کنید  $T$  یک تبدیل در صفحه باشد که فقط را به مرکز  $O$  به اندازه  $4^\circ$  دوران می دهد.



$$T(A) = A'$$

$$(OA = OA', \widehat{AOA'} = 4^\circ)$$

$$T(B) = B'$$

$$(OB = OB', \widehat{BOB'} = 4^\circ)$$

مهربان



تکوین: در مثل متساوی الساقین  $AB = A'B'$ .

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 40^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 40^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ O_1 = O_3 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فرض}} \Delta OAB \cong \Delta OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

مزبان حبیبی





تبدیل ایزوتتری: (طولیا)

تبدیلی است که طول یا حفظ (فاصله بین دو نقطه) را حفظ می کند

یا: تبدیل  $T$  را ایزوتتری می گویند، هرگاه:  $T(A) = A'$  و  $T(B) = B'$

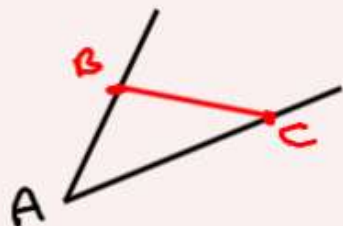
$$AB = A'B'$$

یعنی: فاصله بین دو نقطه یا فاصله بین چند نقطه برابر است.

تبدیلی



تمرین: ثابت کنید در تبدیل ایزومتري، اندازه زاویه حفظ می شود.



ایده: منظر کنید  $\hat{A}$  تصویر زاویه  $\hat{A}$  تحت  $T$  را در  
 دو نقطه  $B$  و  $C$  را روی اضلاع  
 $AB$  و  $AC$  انتخاب می کنیم.  
 $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$ ,  $T(C) = C'$

چون  $T$  ایزومتري است  
 $\implies AB = A'B'$  و  $AC = A'C'$ ,  $BC = B'C' \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$   
 $\therefore \hat{A} = \hat{A}'$  ✓

تبدیلی



نتیجه: در تبدیل ایندوتری، سمت حقیقی بود.

یعنی: سمت حرکت در تبدیل ایندوتری، با سمت تصویرش برابر است.

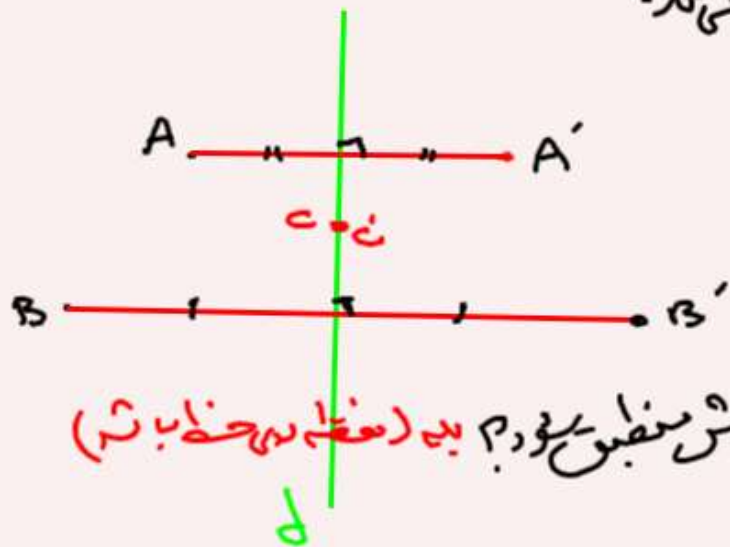
تذکره: تصویر هر نقطه تحت تبدیل ایندوتری، با خودش همگن است.

تبدیلی



مثال: خط  $\alpha$  را در خط  $\beta$  بکشید.  
فرض کنید  $T$ ، هر نقطه را نسبت به خط  $\alpha$  متناهی کند.

$$T(A) \equiv \text{نقطه } A \text{ نسبت به خط } \alpha$$



سؤال: آیا این تبدیل اینو سترگه است؟

سؤال: آیا نقطه  $\alpha$  هست؟ تصویرش بر خودش منطبق می‌شود یا نه (نقطه  $\alpha$  نسبت به خط  $\alpha$ )

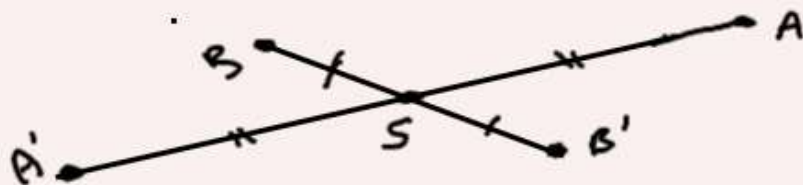
تبدیلی



تعریف: اگر  $T(A) = A$  آنگاه نقطه  $A$  را یک نقطه ثابت می گویند.

مثال: در تقارن نسبت به خط  $l$ ، نقطه  $S$  روی خط  $l$ ، نقطه ثابت هستند.

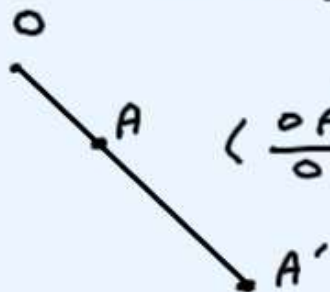
مثال: در تقارن نسبت به نقطه  $K$ ، نقطه  $K$  نقطه ثابت است.



مزبان حبیبی



تجانس (تقارن) : نقطه  $O$  و عدد حقیقی  $k$  را در نظر بگیرید.  $(k \neq 0)$   
 تجانس به بزرگی  $|k|$  و مثبت  $k$ ، تبدیل است که برای هر نقطه  $A$  و  
 تصویر آن  $A'$ ، دو شرط زیر برقرار است.



۱)  $O$  و  $A$  و  $A'$  روی یک خط هستند.

$$(2) \quad \left( \frac{OA'}{OA} = k \right) \quad OA' = k \cdot OA$$

$$|k| > 1 \Rightarrow OA' > OA$$

$$|k| < 1 \Rightarrow OA' < OA$$

۲.۳

مزبان حبیبی



انواع تجانس :

انسباط  $\Rightarrow$  تصویر هر مثل از صورتش بزرگتر  $\Rightarrow |k| > 1$

انقباض  $\Rightarrow$  تصویر هر مثل، از صورتش کوچکتر  $\Rightarrow |k| < 1$

تجانس راستقیم  $\Rightarrow k > 0$

( معکوس ) تجانس راستقیم  $\Rightarrow k < 0$

تجانس در واقع هم  $\Rightarrow k = 1$  بدلیل همانند

تجانس در حقیقت  $\Rightarrow k = -1$  یک بازتاب است

مزبان حبیبی



تذکره:

۴-  $k = 0$  نگاه بچانس به مرکز  $O$  دایره بچانس صفر، هم‌افلا  
را به  $O$  تصویر می‌کنند و در واقع می‌بندین تا  $B$  است. (سیاه چاله)



بندینی

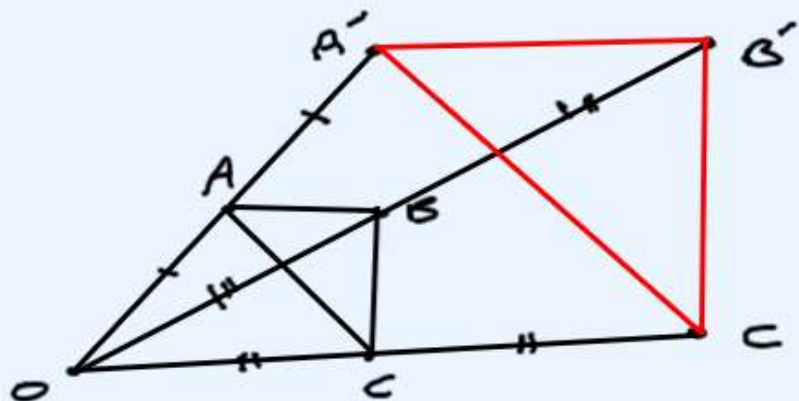




تمرین: در شکل زیر مثلث  $ABC$  و نقطه ثابت  $O$  داده شده است.

الف) مجانب مثلث  $ABC$  را بکش

ب) مجانب به مرکز  $O$  و ضلع  $AB$  رسم کنید  $K=2$



ج) چرا  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  ؟

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 2 \quad \text{چون}$$

ب) بنویسید ضلع های مثلث  $A'B'C'$  موازی با ضلع های  $ABC$  است.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2 = 2^2 = 4$$

مزبان حبیبی

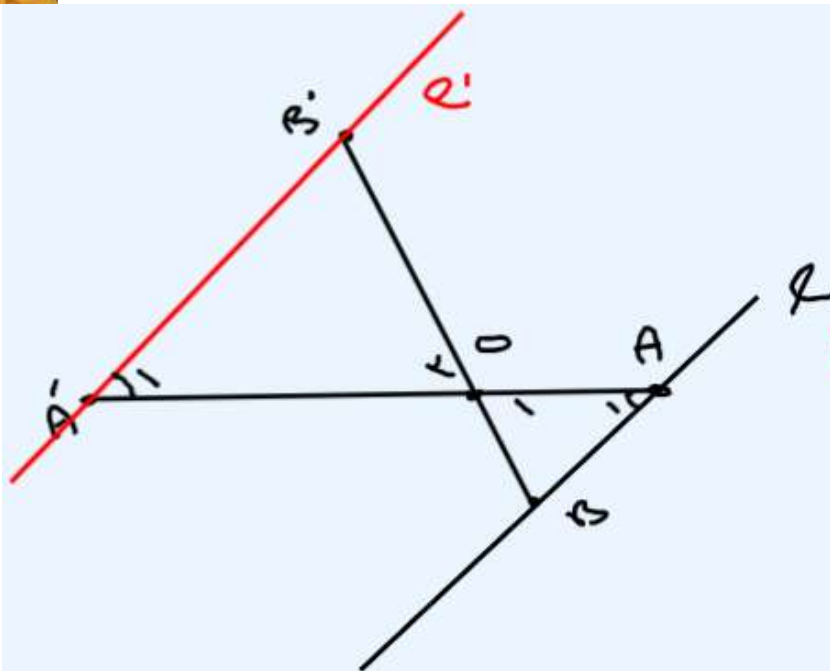
تمرین: ثابت کنید، تجانس تریب خط را حفظ می کند.

اثبات: تجانس مستقیم:

موضوع کنیم خط  $l$  تصویر خط  $l'$  تحت تجانس. مرکز  $O$  باشد تجانس  $k$  باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{OA_1}{OA} = k \\ \frac{OB_1}{OB} = k \end{array} \right. \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$$

و  $\hat{A}_1 = \hat{A}_1'$  در نتیجه  $l \parallel l'$ .



تجانس معلوس:  
 فرض کنیم  $l$  و  $l'$  خط معلوس تجانس  
 معلوس به مرکز  $O$  و نسبت تجانس  $k$  باشد ( $k < 0$ )

$$\begin{cases} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |k| \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OA'B'$$

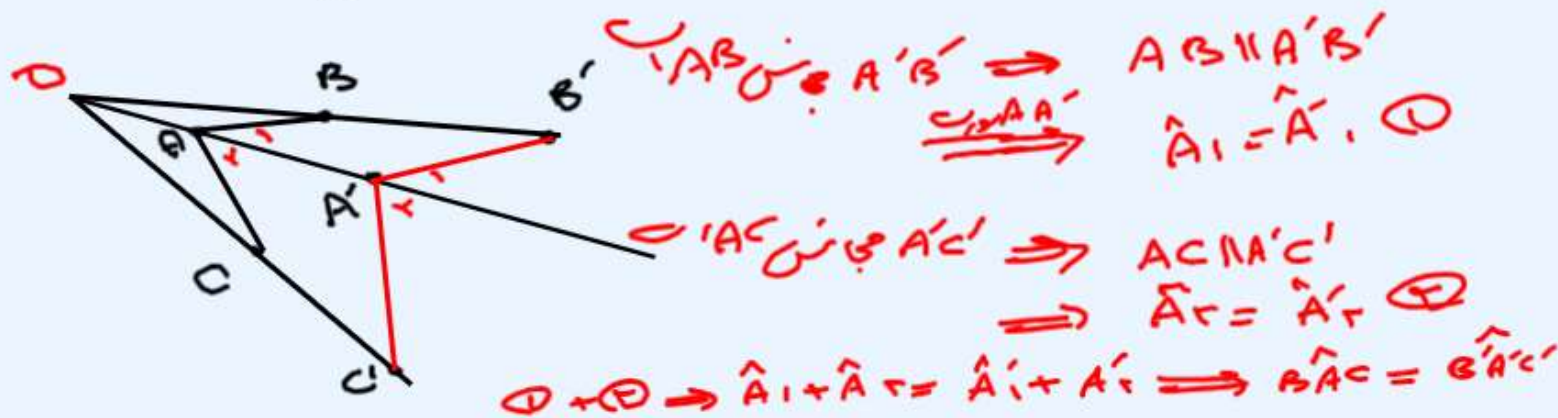
$$l \parallel l' \quad \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \quad \text{و}$$

مزبان حبیبی



مکرمین : ثابت کنیده، بتدیل تجانس، اندازه زاویه، احصا می کنده.

اثبات : فرض کنیده  $\hat{A}'$  تجانس زاویه  $\hat{A}$  در تجانس به مرکز  $O$  در نسبت  $k$  به مرکز



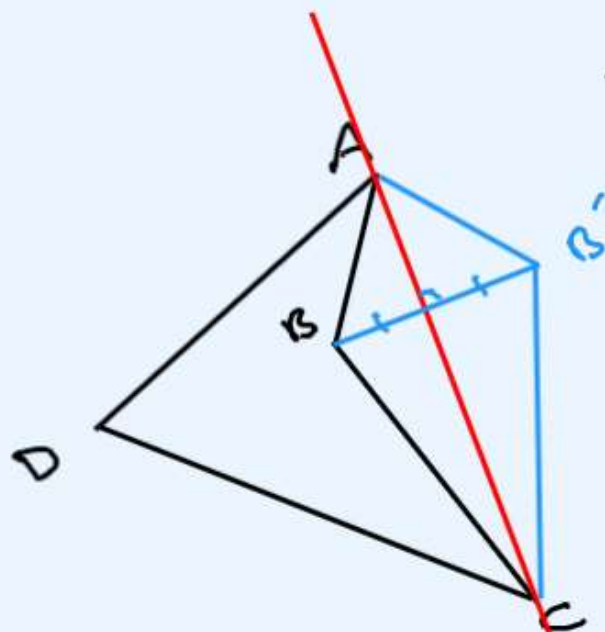
بزه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مزیات کتبه صنف ۱۰ صنف ۱۵

تکلیف

مزبان حبیبی



سؤال ۱: زمین بی به شکل زیر را احصا رکنی کردن ایم.

اگر بخواهیم با همین احصا رکنی و همین حیاط،

زمین بزرگتر که احصا رکنی کنیم. آیا امکان پذیر است؟

جواب: بجز با B نسبت به خط AC را B' بنسیم.

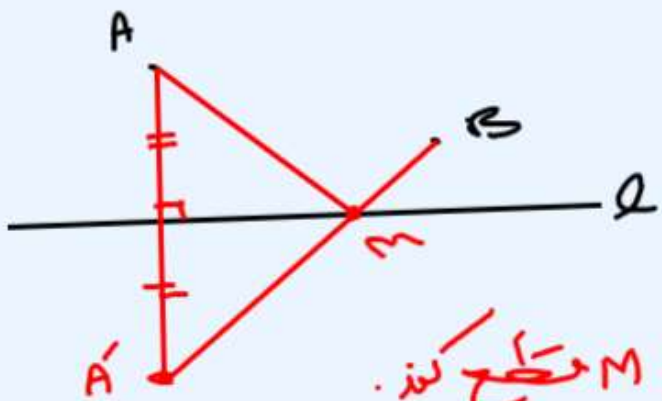
چون با B' تا B نیز دتر که است:  $AB = A'B'$   
 $CB = CB'$

صیغه  $AB'CD = ABCD$  و  $S_{AB'CO} > S_{ABCO}$  در نتیجه

زمین بزرگتر



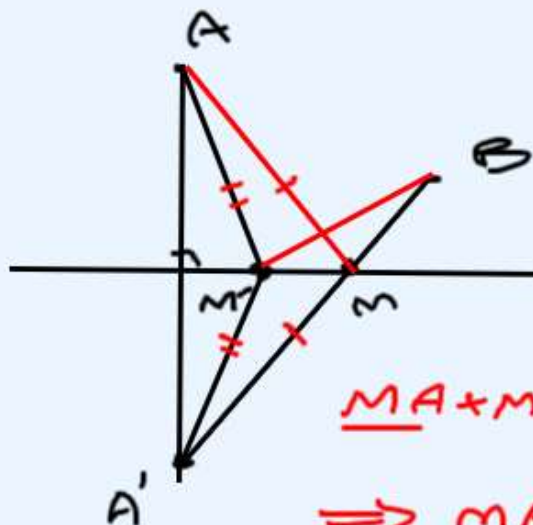
سأه : دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $l$  را در نظر بگیرید .  
نقطه  $M$  روی خط  $l$  را چنان بیابید که  
 $MA + MB$  کمترین مقدار ممکن باشد .



حل :

میان  $M$  : قرینه  $A$  نسبت به  $l$  را  $A'$  بنامید  
 $B$  را به  $A'$  وصل کنید تا  $l$  را در  $M$  قطع کند .

مزبان حبیبی



اثبات کترین مقدار بود  $MA + MB$  :

نقطه ای در کف ما  $M'$  بخیر از  $M$  اوی که انتخاب کنید.

ل محود صفت  $A A'$  است پس  $\underline{M'A = M'A'}$

$$\underline{MA + MB} = \underline{MA' + MB} = A'B < \underline{M'B + M'A'}$$

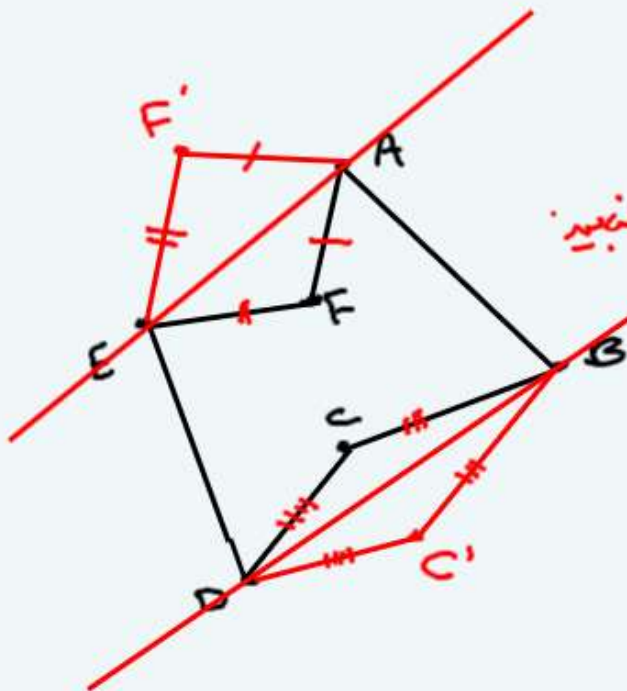
$$\Rightarrow MA + MB < M'B + M'A \quad \checkmark$$

مزبان حبیبی





تمرین صفحه ۵۶ : (ب)

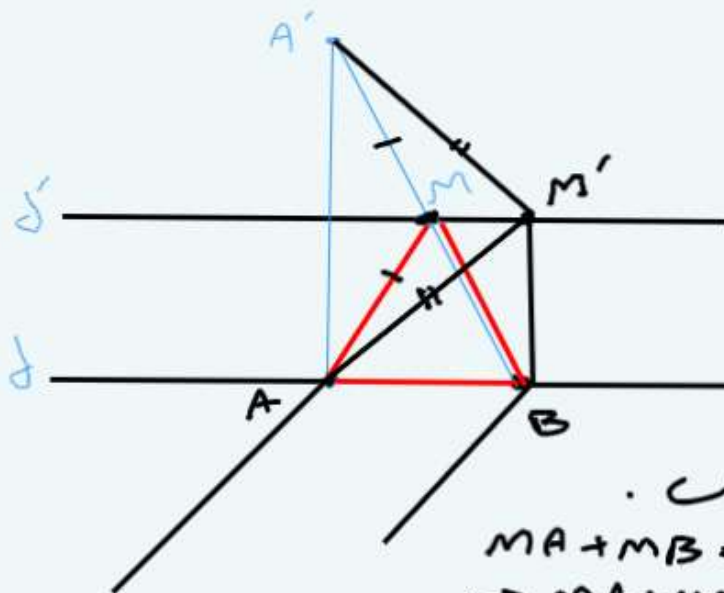


۱- فرض کنید  $F$  را نقطه  $A$  به خط  $l$  و  $F'$  را نقطه  $A'$

۲- فرض کنید  $C$  را نقطه  $B$  به خط  $l$  و  $C'$  را نقطه  $B'$

$$\begin{aligned} AF &= AF' \\ DF &= DF' \\ BC &= BC' \\ DC &= DC' \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



تمرین ۲ صفحه ۱۱۰ :

تمرین ۱ نسبت به خط  $d'$  تقابل را  $A'$  می‌نویسید.

با حفظ  $A'B$ ،  $d'$  را در  $M'$  قطع می‌کنید.

ادی می‌کنیم  $MABM'$  کمترین مسافت است.

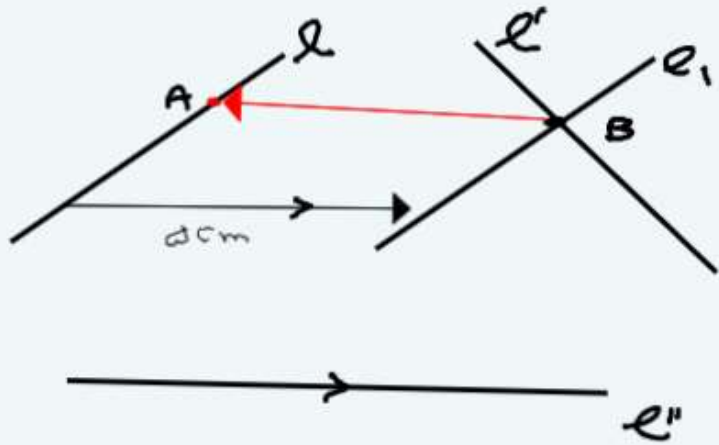
$$MA + MB = MA' + MB = A'B < M'A' + M'B = M'A + M'B$$

$$\Rightarrow MA + MB < M'A + M'B \quad \blacksquare$$

مزبان حبیبی



تمرین ۳ صفحه ۵۴ :



خط  $l$  را با اندازه  $d$  نسبت به  $l'$  موازی  
 $l''$  انتقال دهیم به موازات  $l''$ .  
 خط  $l$ ,  $l'$ ,  $l''$  در نقطه  $B$  متقاطع اند.  
 $(l, l', l'') \Rightarrow l \parallel l'$   
 تصویر کردن  $B$  را نسبت به انتقال  $l'$  به  $l$   
 بسازیم  $A$  به دست آید. پس :

$$A \in l, B \in l' \Rightarrow |AB| = d, AB \parallel l''$$

بسیاری

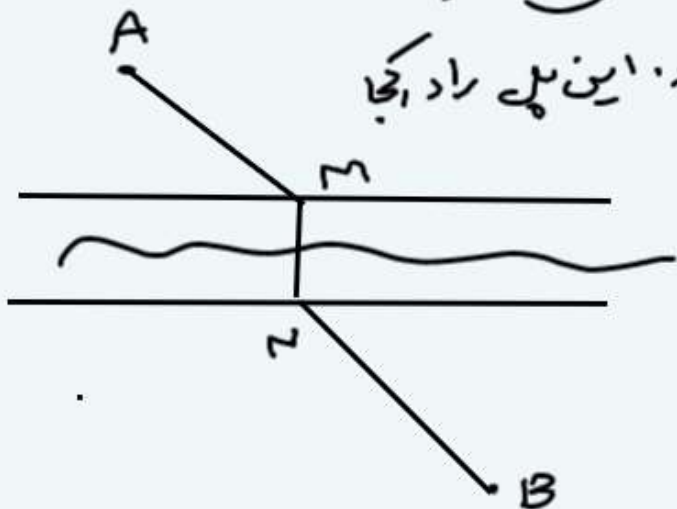


تمرین (۵۵): مد خط  $A$  و  $B$  در وسط ادا فضا حرکت دارند:

قرار است یک پل عمودی روی رودخانه احداث شود. این پل را در کجا

احداث کنند که مسافت از  $A$  به  $B$ ، کمترین

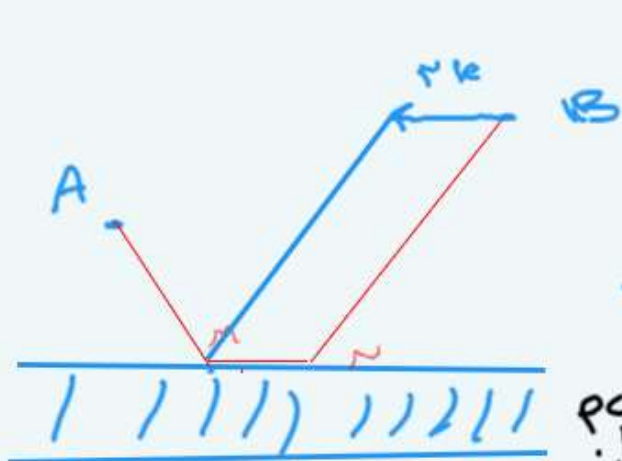
مسافت ممکن باشد.



مسافت: کمترین مسافت  $A M N B$  را پیدا کنید.

مزبان حبیبی

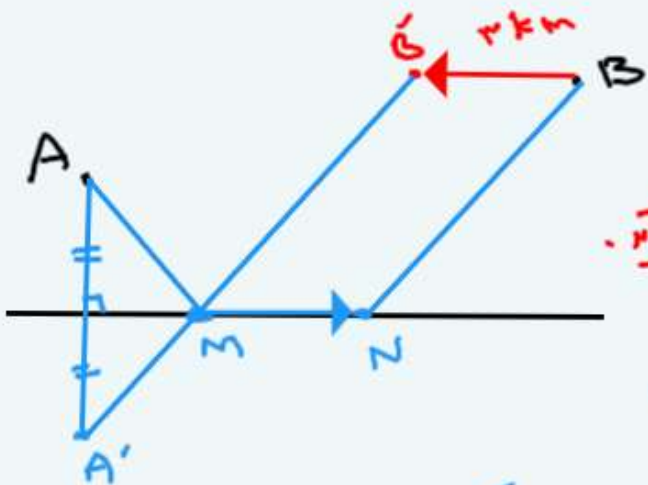




تمرین: دو مثلث A, B در یک طرف من و در ضلع AB قرار دارند. می خواهیم یک خط موازی با AB بکشیم که از وسط من بگذرد. چگونه می توانیم این کار را انجام دهیم؟

تمرین بعدی: مسکن برای امداد صفت با هر چه در دسترس است.

بهبودی



۱- نقطه B را به موازات C من لود صاف من ،  
به اندازه ۳km به سمت A منتقل کنید تا B' بدست آید .

تصویر (حرفین) A را این به خط C من ، A' بنویسید .

خط C من را در M قطع می کند .

نقطه M را بر عکس انتقال BB' ، به نقطه N منتقل کنید .

AMNB جواب است .

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکر مزبان حبیبی



پان

دکر مزبان حبیبی