

جزوه های آموزشی، هندسه دویازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **فصل اول، دایره - هندسه دویازدهم ریاضی**

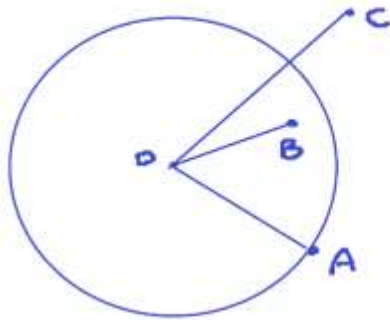
بزه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

دایره :

مجموعه است از نقاط در مسطحه که از نقطه ثابت O به فاصله R هستند



$OA = R \Rightarrow$ A روی دایره است

$OB < R \Rightarrow$ B درون دایره است

$OC > R \Rightarrow$ C بیرون دایره است



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

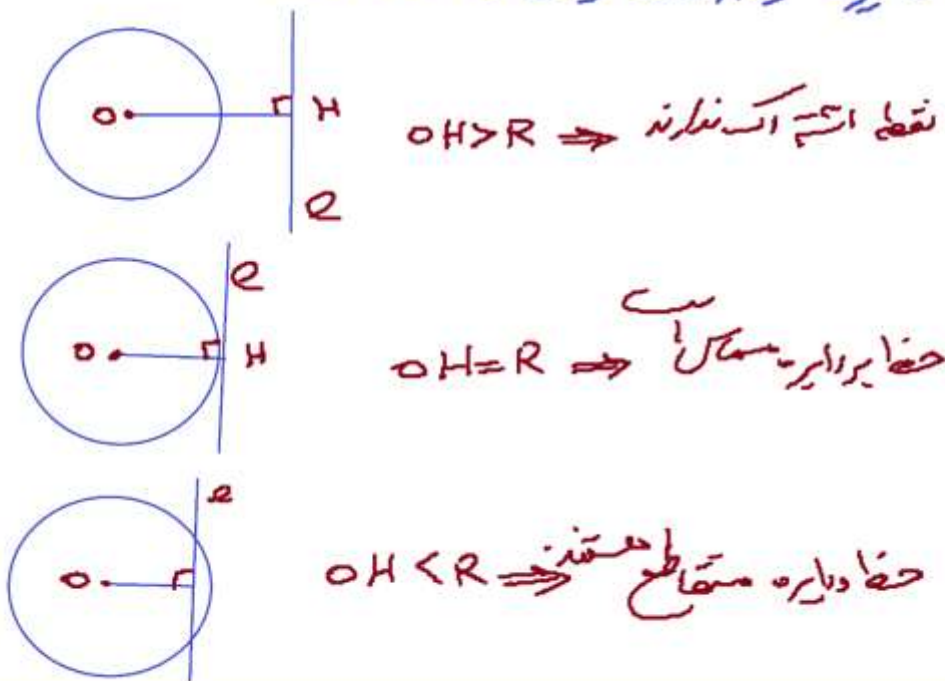
mezbanhabibi@gmail.com

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

وصفیت خط و دایره نسبت به هم: $C(O, R)$ و خط l را در نظر بگیرید.



Dr Mezban Habibi
Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

mezbanhabibi@gmail.com

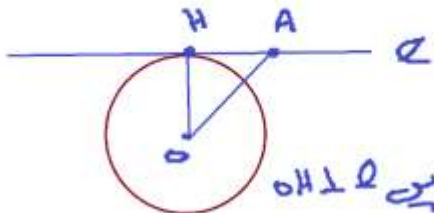
بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

یک خط و یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

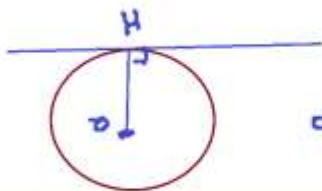
حالت اول: اگر خط l بر دایره مماس باشد.



$$OH = R \rightarrow OA > R$$

پس H نزدیکترین نقطه به O است پس $OH \perp l$

حالت دوم: اگر خط l در نقطه H بر شعاع OH مماس است.



$$OH \perp l \rightarrow l \text{ بر دایره مماس است}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



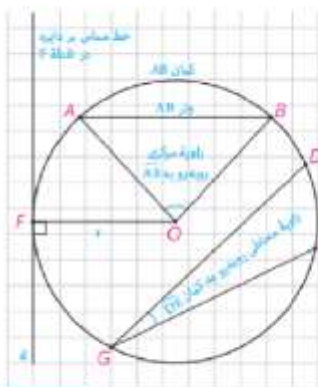
بسم الله الرحمن الرحيم



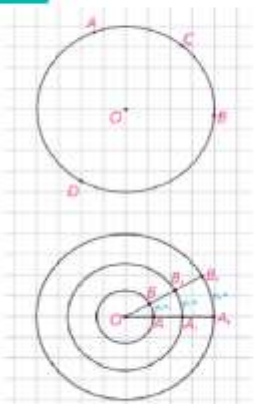
Dr Mezban Habibi
Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511
+989166161828



- ۱- شعاع دایره : پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره باشد.
- ۲- وتر دایره : پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.
- ۳- قطر دایره : وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد.
- ۴- زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.
- ۵- زاویه محیطی : زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.



۶- کمان : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است!

- ۷- اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود و واحد آن درجه است.
- ۸- با توجه به شکل به سادگی دیده می شود که کمان های دایره های مختلف می توانند اندازه های برابر و طول های نابرابر داشته باشند.

mezbanhabibi@gmail.com



بسم الله الرحمن الرحيم

تدکسی :

طول حرکت را به مستقیم با زاویه معبر آن مدار

$$\frac{\text{اندازه زاویه}}{360} = \frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}}$$

اندازه زاویه α ، طول کمان l ، شعاع دایره R =

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{l}{2\pi R} \Rightarrow \frac{\alpha}{180} = \frac{l}{\pi R}$$



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

mezbanhabibi@gmail.com

بزوه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

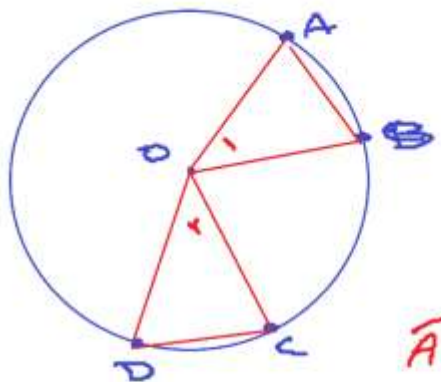


بسم الله الرحمن الرحيم

مے کہیہ: ثابت کنید کہ دلہہ نیطیح دترہہ ساری،

با جمعہ رسیدہ.

اثبات: فرض کنیم $AB = CD$.



$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \\ AB = CD \end{array} \right\} \text{ضلعی} \Rightarrow \hat{AOB} = \hat{COD} \Rightarrow AB = CD$$

$$\hat{AOB} = \hat{COD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB = CD$$



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

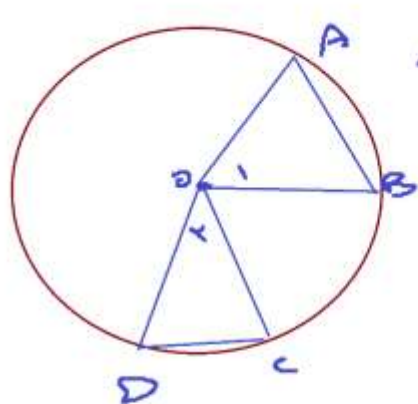
mezbanhabibi@gmail.com

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

مث ۲۴: ثابت کنید وترهای یک دایره مساوی با هم مرکز دایره
 اثبات: فرض کنیم $\overline{AB} = \overline{CD}$.



$$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC \\ OB = OD \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیة دایره}} \Delta OAB \cong \Delta OCD$$

پس $\overline{AB} = \overline{CD}$



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

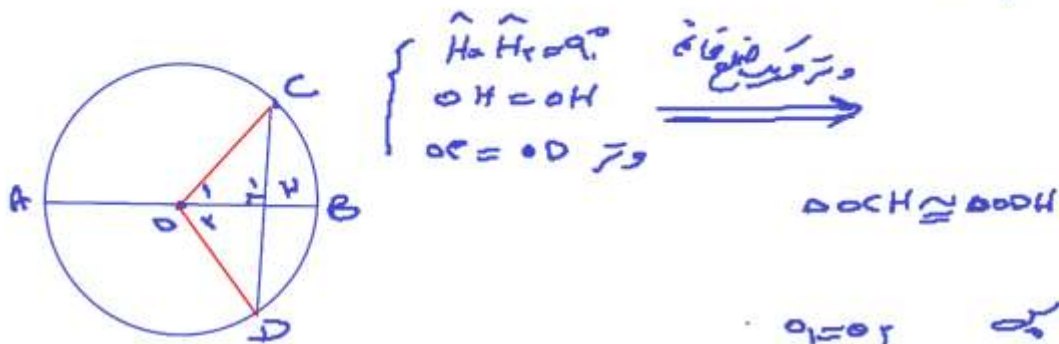
mezbanhabibi@gmail.com

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

مسئله ۳: قطر AB بر وتر CD عمود است.
 ثابت کنید قطر AB ، که چهار زاویه \widehat{CAD} و \widehat{CBD} را نصف می کند
 اثبات:



$$\begin{cases} \widehat{CAH} = \widehat{CBH} \\ OH = OH \\ OC = OD \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه قائمه وتر عمود بر وتر}} \triangle OCH \cong \triangle ODH$$

$$\triangle OCH \cong \triangle ODH$$

$$\therefore \angle O_1 = \angle O_2$$

$$\angle O_1 = \angle O_2 \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD} \Rightarrow \text{ا.ن.} - \widehat{BC} = \text{ا.ن.} - \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD}$$



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

mezbanhabibi@gmail.com

9 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

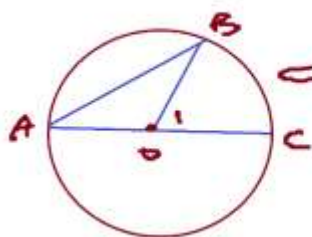
بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

حالت اول: کمان ضلع زاویه محاطی قطر دایره است.



$$OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \quad (1)$$

$$\hat{O} \text{ زاویه در مرکز } \Rightarrow \hat{O} = \hat{A} + \hat{B} \quad (2)$$

$$\hat{O} = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{O} = \widehat{BC} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 2\hat{A} &\stackrel{(1)}{=} \hat{A} + \hat{B} \stackrel{(2)}{=} \hat{O} \stackrel{(3)}{=} \widehat{BC} \Rightarrow 2\hat{A} = \widehat{BC} \\ &\Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{aligned}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

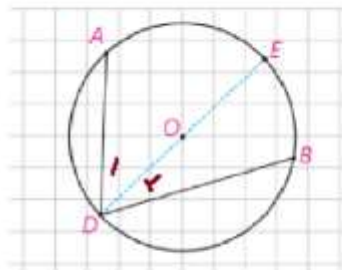
+989166161828

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



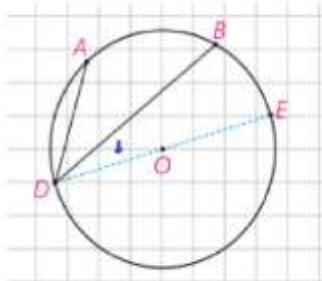
بسم الله الرحمن الرحيم

حالت دوم: مرکز دایره درون زاویه است.



$$\begin{aligned} \widehat{ADB} &= \widehat{O_1} + \widehat{O_2} \\ &= \frac{\widehat{AE}}{2} + \frac{\widehat{EB}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AE} + \widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned}$$

حالت سوم: مرکز دایره بیرون از زاویه است.



$$\begin{aligned} \widehat{ADB} &= \widehat{ADE} - \widehat{O_1} \\ &= \frac{\widehat{ABE}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} \\ &= \frac{\widehat{ABE} - \widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

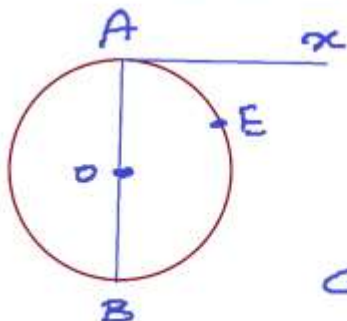
+989166161828

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

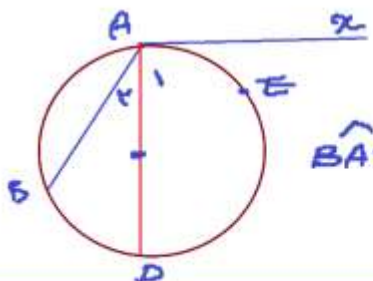
قضیه: اندازه هر زاویه ظلی، نصف کمان محصوره آن زاویه است.
 اثبات: حالت اول، اگر یک ضلع زاویه قطر دایره باشد.



$$Ax \perp AB \Rightarrow \widehat{BAx} = 90^\circ \text{ (1)}$$

$$AB \text{ قطر دایره} \Rightarrow \widehat{AEB} = 180^\circ \text{ (2)}$$

$$\text{(1), (2)} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{AEB}}{2}$$



حالت دوم: اگر مرکز زاویه درون زاویه باشد.

$$\begin{aligned} \widehat{BAx} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{AED}}{2} + \frac{\widehat{DB}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AED} + \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{AEB}}{2} \end{aligned}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

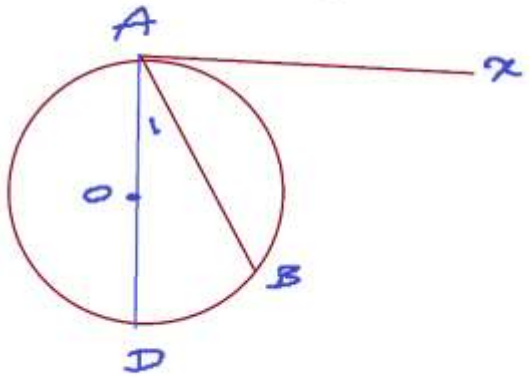
+989166161828

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

حالت سوم: آر مرکز دایره بیرون زاویه است.



$$\begin{aligned} \widehat{BAX} &= \widehat{DAX} - \widehat{DAB} = \frac{\widehat{ABD}}{r} - \frac{\widehat{DB}}{r} \\ &= \frac{\widehat{ABD} - \widehat{DB}}{r} = \frac{\widehat{AB}}{r} \end{aligned}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511
+989166161828

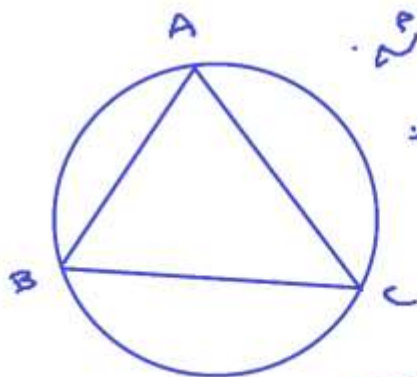
13 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

مسئله: یک زاویه محاطی ثابت کنید مجموع زوایای داخل آن ۱۸۰ درجه است.

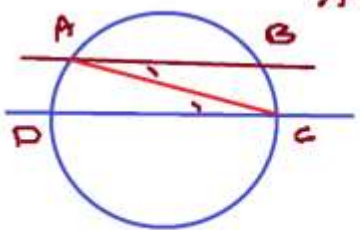


اثبات: فرض کنیم ABC مثلث دلخواهی باشد.
 دایره ای رسم می کنیم که از سه رأس می گذرد.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$= \frac{\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

مسئله ۲: در شکل زیر $AB \parallel CD$ ثابت کنید $\widehat{AD} = \widehat{BC}$



$$AB \parallel CD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511
 +989166161828

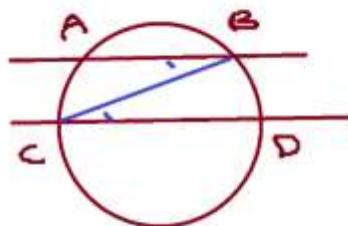
14 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

مسئله ۳: در شکل زیر اگر $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ ثابت کنید $AB \parallel CD$.

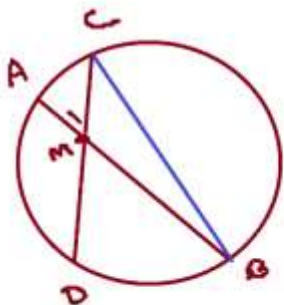


اثبات:

$$\widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{r} = \frac{\widehat{BD}}{r}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$$

مسئله ۴: در شکل زیر ثابت کنید: $\vec{M}_1 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{r}$



اثبات: \vec{M}_1 را به ضلع AB و CD وصل کنید:

$$\vec{M}_1 = \hat{B} + \hat{C} = \frac{\widehat{AC}}{r} + \frac{\widehat{BD}}{r} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{r}$$



Dr Mezban Habibi
Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

mezbanhabibi@gmail.com

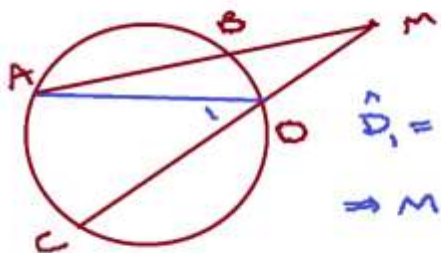
بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$

مثال ۵: در شکل زیر ثابت کنید

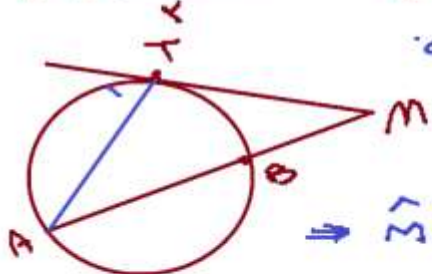


اثبات: \hat{D}_1 زاویه ضریب است:

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 &= \hat{A} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{D}_1 - \hat{A} \\ \Rightarrow \hat{M} &= \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} \end{aligned}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$$

مثال ۴: MT بر پایه است. ثابت کنید



اثبات: T_1 زاویه ضریب داخلی است:

$$\begin{aligned} T_1 &= \hat{M} + \hat{A} \Rightarrow \hat{M} = T_1 - \hat{A} \\ \Rightarrow \hat{M} &= \frac{\widehat{AT}}{2} - \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} \end{aligned}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

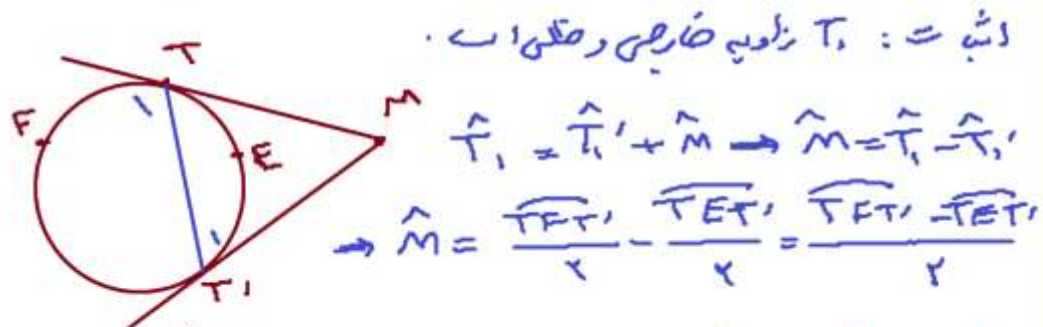
+989166161828

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

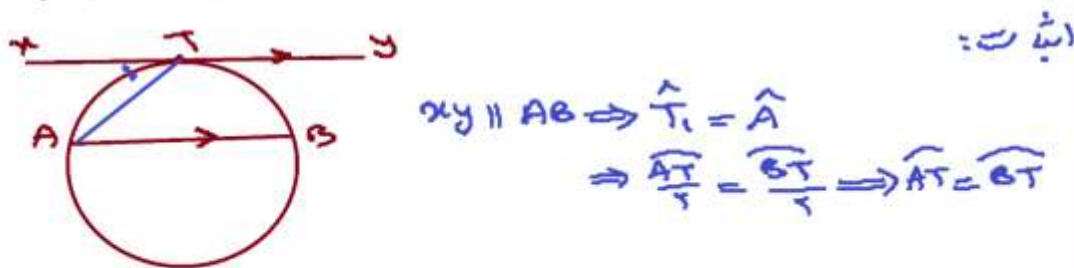


بسم الله الرحمن الرحيم

مسئله: M و MT' بردارها را نسبت به یکدیگر کشف کنید
 $\hat{M} = \frac{\widehat{TFT'} - \widehat{TET'}}{2}$



مسئله ۸: در مثل زیر xy بر سطح است و $AB \parallel xy$ ثابت کنید $\widehat{AT} = \widehat{BT}$



mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

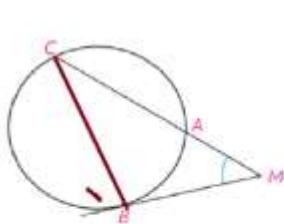
بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



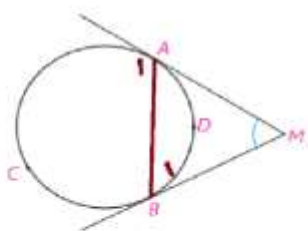
بسم الله الرحمن الرحيم

تمرینات صفحه ۱۲۰ کتاب هندسه در

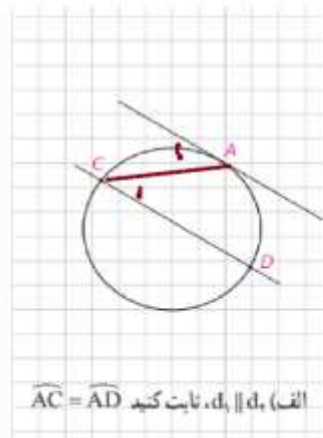
۱- در شکل های زیر ثابت کنید:
 راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \quad (\text{ب})$$



$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{ب})$$



$\widehat{AC} = \widehat{AD}$ ثابت کنید $d_1 \parallel d_2$ (الف)

$$\begin{aligned} \text{الف) } d_1 \parallel d_2 &\Rightarrow A_1 = C_1 \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD} \\ \text{ب) } A_1 = M + B_1 &\Rightarrow M = A_1 - B_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \\ \text{ج) } M = \hat{B}_1 - \hat{C} &= \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \end{aligned}$$

mezbanhabibi@gmail.com



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

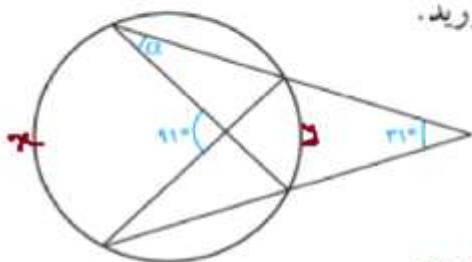
+989176193511

+989166161828

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم



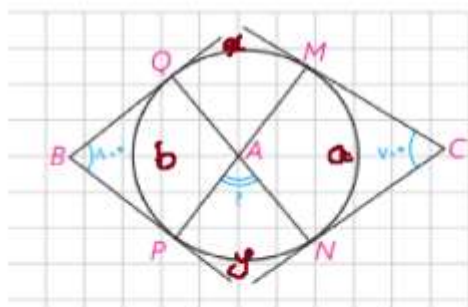
۲- در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

$$\frac{x+y}{2} = 91 \Rightarrow x+y = 182$$

$$\frac{x-y}{2} = 21 \Rightarrow x-y = 42$$

$$\Rightarrow 2y = 140 \Rightarrow y = 70 \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

۳- در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه \hat{A} چند درجه است؟



$$x+y+a-b = 140 \quad \text{①}$$

$$x+y+b-a = 140 \quad \text{②}$$

$$\text{①} + \text{②} \Rightarrow 2x+2y = 280$$

$$\Rightarrow x+y = 140$$

$$\hat{A} = \frac{x+y}{2} = \frac{140}{2} = 70^\circ$$



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

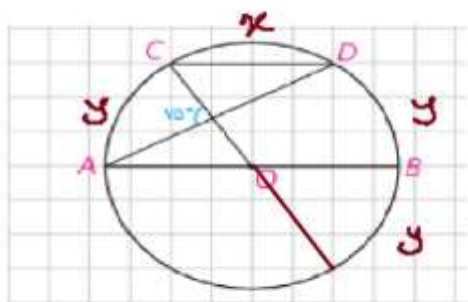
mezbanhabibi@gmail.com

بزه های آموزشی، هنر دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۴- در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.

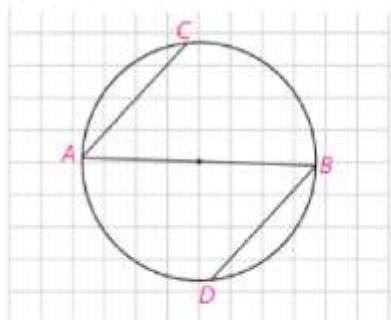


$$\hat{C} + \hat{D} = 75 \Rightarrow \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} = 75$$

$$2y = 150 \Rightarrow y = 75$$

$$x = 180 - 2y = 180 - 150 = 30$$

۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow 180 - \widehat{BC} = 180 - \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

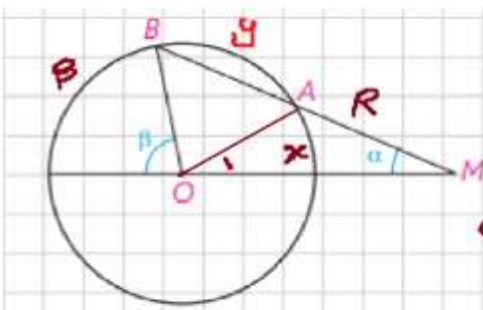
mezbanhabibi@gmail.com

بزه های آموزشی، مهندس دیازدم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۶- دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$: نشان دهید: $\beta = 2\alpha$

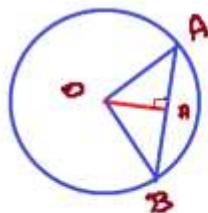


$$\beta - x = 2\alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha + x \quad (1)$$

$$AM = AO \Rightarrow \hat{O}_1 = \alpha \Rightarrow x = \alpha \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۷- در دایره $C(O,R)$ و $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.



$$\widehat{AB} = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow OA = OB = 10 \text{ و } AH = 5$$

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$



Dr Mezban Habibi

Mathematics Instructure

Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

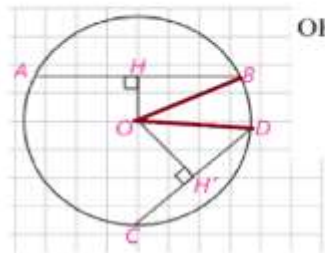
+989166161828

mezbanhabibi@gmail.com

بزه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم



ا در دایره $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
 (OH و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند).
 راهنمایی: از O به C و B وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

$$\begin{aligned}
 AB > CD &\iff \frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD \iff BH > DH' \\
 &\iff BH^2 > DH'^2 \iff -BH^2 < -DH'^2 \\
 &\iff R^2 - BH^2 < R^2 - DH'^2 \\
 &\iff OH^2 < OH'^2 \iff OH < OH'
 \end{aligned}$$



Dr Mezban Habibi
 Mathematics Instructure
Educator

www.mezbanhabibi.ir

+989176193511

+989166161828

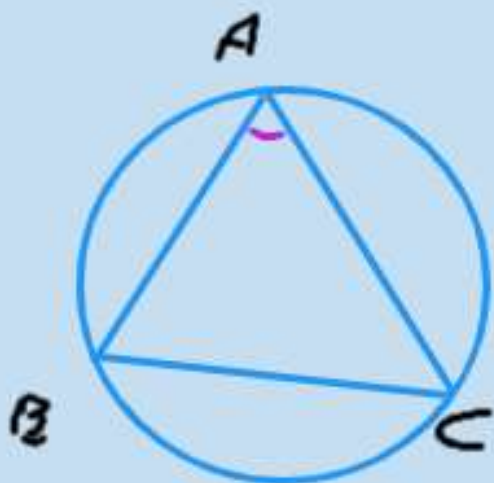
mezbanhabibi@gmail.com

22 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



به کمک زاویه های طریقی ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی

هر مثلث 180° می باشد.



اثبات: می دانیم هر مثلث در یک دایره
می کش می شود. (یعنی می توان دایره ای که
از سه سر آن دایره از سه رأس مثلث می گذرد)

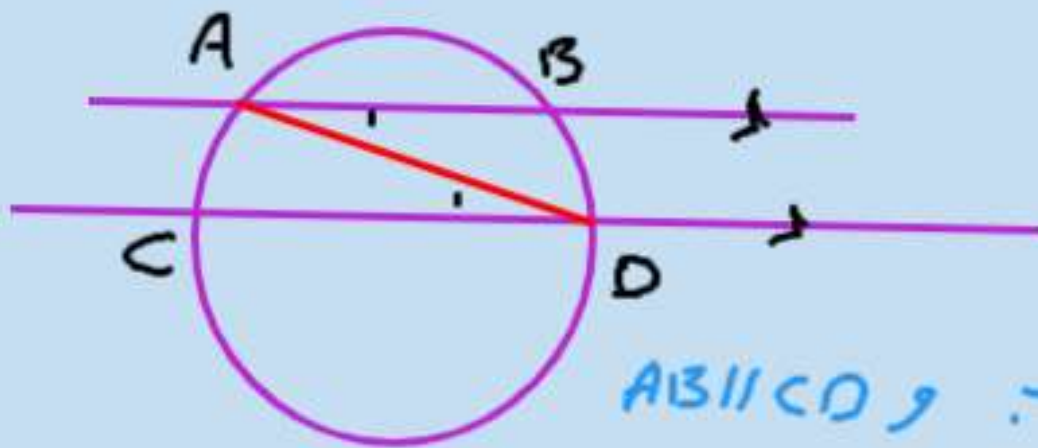
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\overline{BC}}{r} + \frac{\overline{AC}}{r} + \frac{\overline{AB}}{r} = \frac{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}}{r} = \frac{3r}{r} = 180^\circ$$



مساله: اگر دو وتر AB و CD موازی باشند آنگاه ثابت

کنید که آن مخصوص به این دو وتر با هم برابرند.

$$\text{حکم: } \widehat{AC} = \widehat{BD}$$



اثبات =:

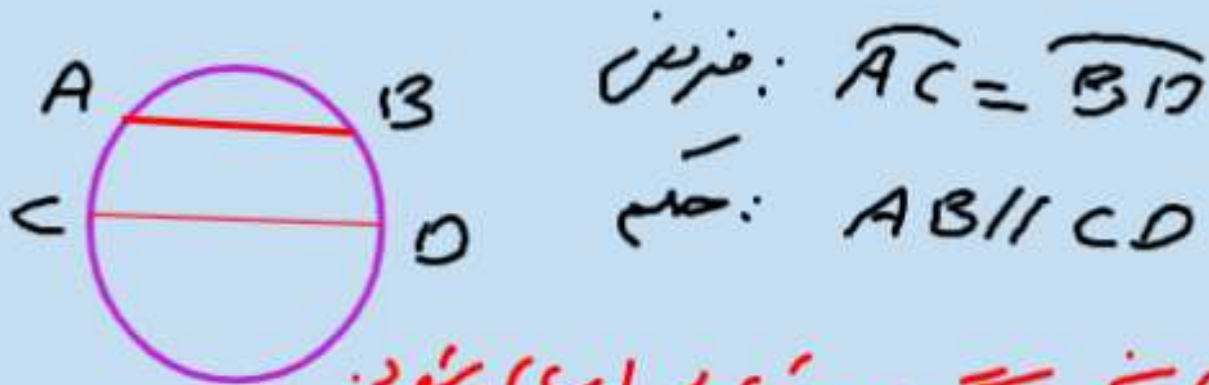
وتر AD را رسم می کنیم

$$AB \parallel CD \text{ و } AD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{r} = \frac{\widehat{AC}}{r} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$



مسئله :
اگر کمانها در بین دو وتر نامتقاطع، با هم مساوی باشند آنگاه آن دو وتر موازی هستند.



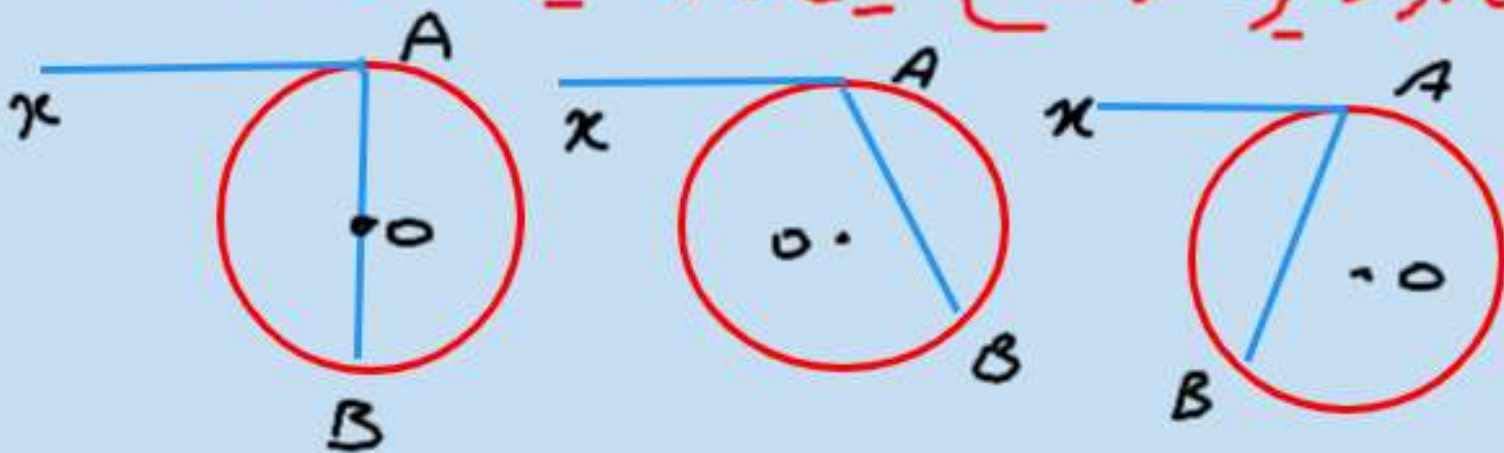
لحفاً باید رخ بگردد که این می شود.



تعریف زاویه ظلّی:

~~مستقیم~~

زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و یکی از ضلع آن وتر یک دایره و ضلع دیگری یک دایره مماس است.



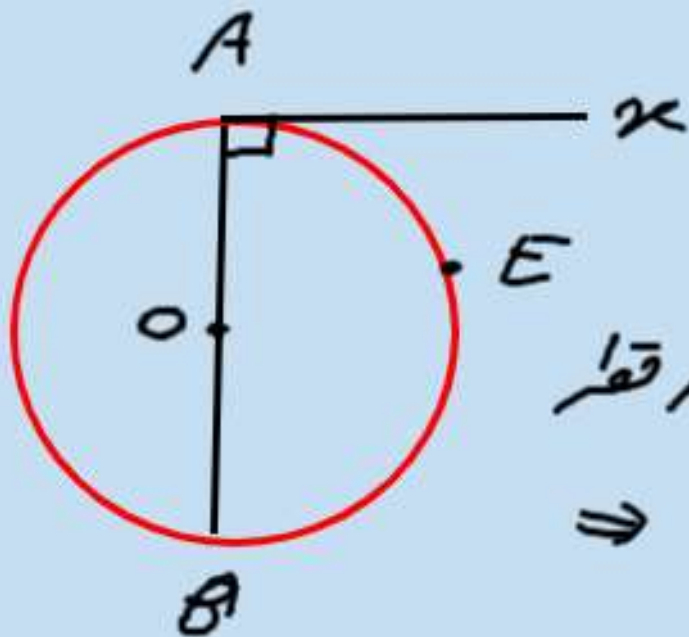


قضیه :

اندازه هر زاویه داخلی، نصف کمان متناظر است.

اثبت: سه حالت مختلف را در نظر بگیریم.

حالت اول: اگر یک ضلع زاویہ قطر دایرہ باشد



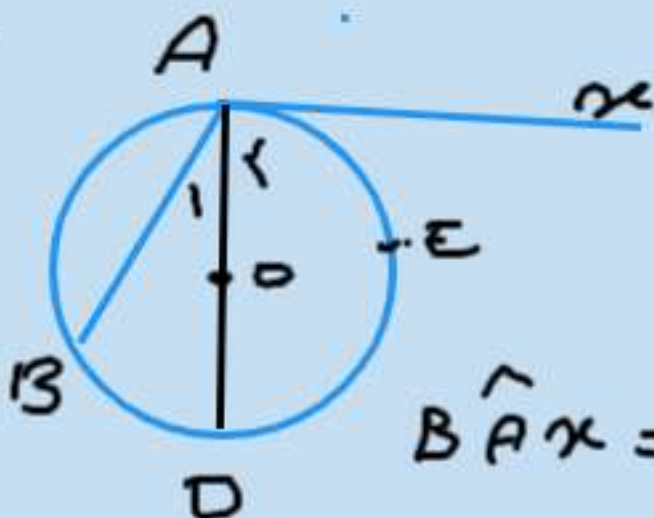
$$A \hat{O} \perp AB \Rightarrow \angle BAX = 90^\circ \quad \text{①}$$

$$\text{قوس } AB \Rightarrow \widehat{BEA} = 11^\circ \quad \text{②}$$

$$\Rightarrow \angle BAX = \frac{\widehat{BEA}}{2}$$



حالت دوم: اگر سترزاد بر دایره زاویه به نظر.



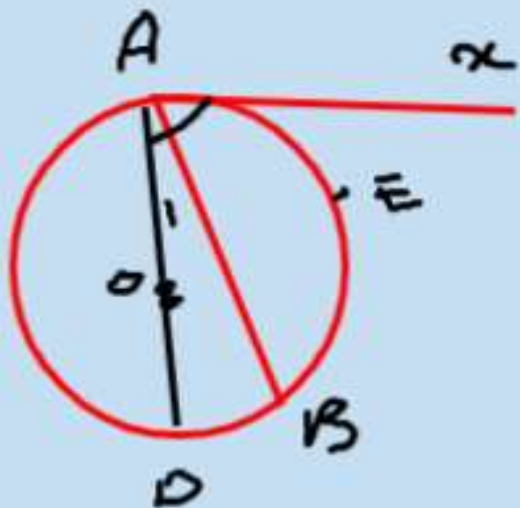
قطری از دایره را رسم می کنیم که
از رأس زاویه می نهد.

$$\begin{aligned} \widehat{BAx} &= \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BD}}{\gamma} + \frac{\widehat{DEA}}{\gamma} \\ &= \frac{\widehat{BD} + \widehat{DEA}}{\gamma} = \frac{\widehat{BEA}}{\gamma} \end{aligned}$$



حالت سوم: اگر مرکز دایره بیرون زاویه باشد

قطرهای از دایره را رسم کنیم که از رأس زاویه بیرون بیاید.



$$\hat{BAX} = \hat{DAX} - \hat{A}$$

$$= \frac{\widehat{DBA}}{r} - \frac{\widehat{DOB}}{r}$$

$$= \frac{\widehat{DBA} - \widehat{DOB}}{r} = \frac{\widehat{BEA}}{r}$$



سؤال: دو وتر AC و BD متقاطع اند.

تا ثابت کنید: $\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$



چون \widehat{AD} و \widehat{BC} متساوی است

$\hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{D}$

$\Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2}$



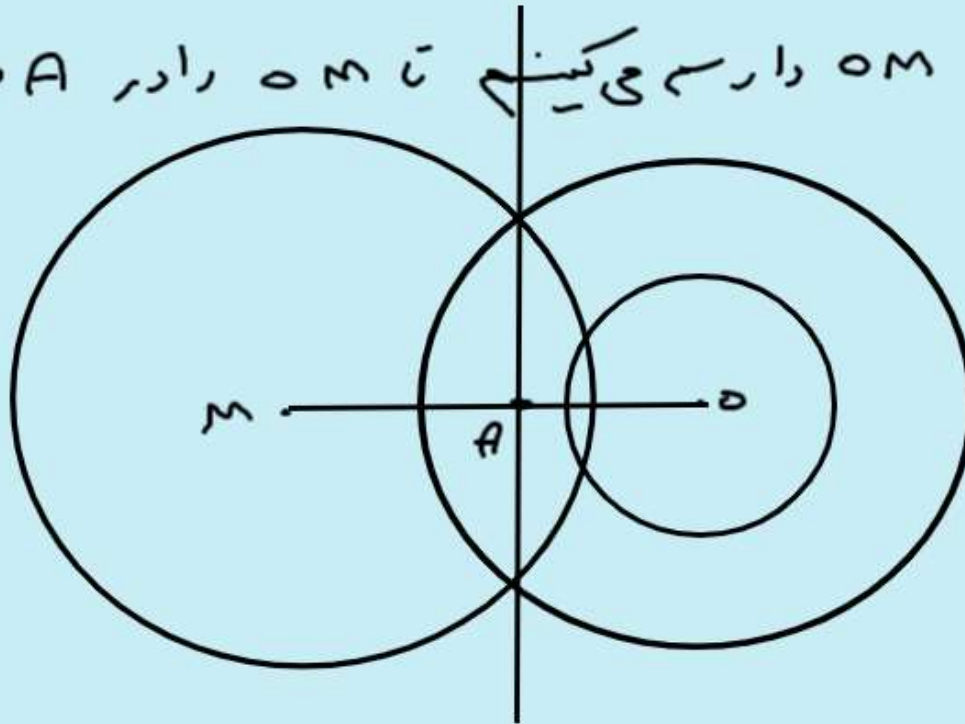
سه له : نقطه مرکز هر دو دایره C و C' مرکز ضرب است. خطی رسم کنید
از نقطه مرکز دایره C موازی با AB .



مزبان حبیبی



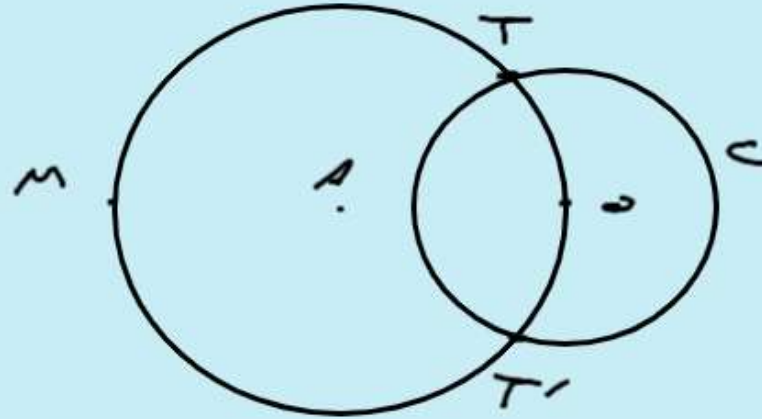
۱۲- محور نصف OM دارسمی کنیم تا OM رادر A قطع کند.



مربی



۲ م : دایره ای به مرکز A و شعاع Am / رسم کنید. ($Am = A'o$)

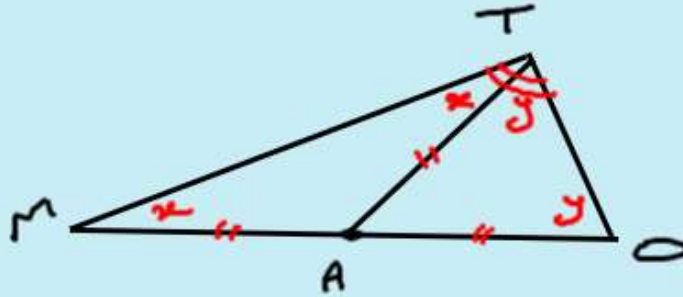


۳ م : خطواره از m و T رسم کنید در جواب شعاع o را.

مزبان حبیبی



م ۴: اثبه سے مسک مورد :



$$2x + 2y = 180$$

س ۱۸۰

$$x + y = 90$$

$$\widehat{OTM} = 90^\circ$$

$$OT \perp MT$$

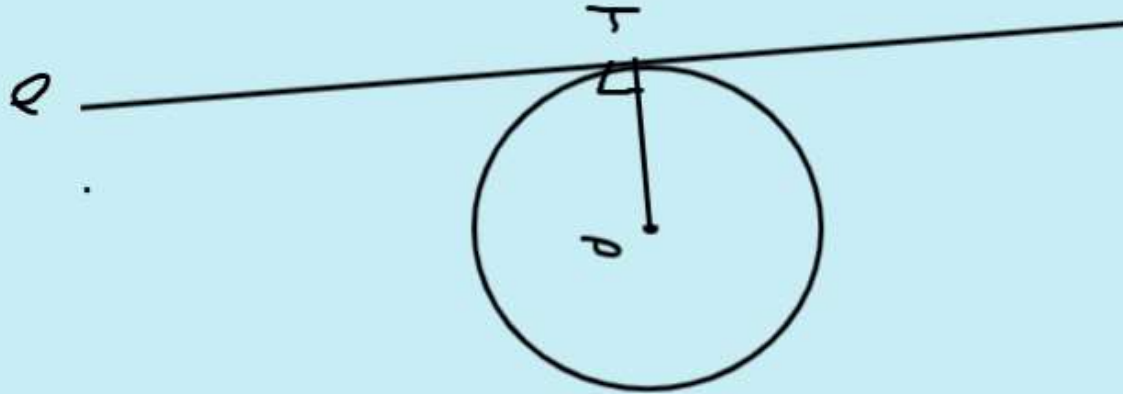
نبره براس MT در نقطه T خط عمود مسک کس .

مزبان حبیبی

بزرگواران، آموزشی، مهندس دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



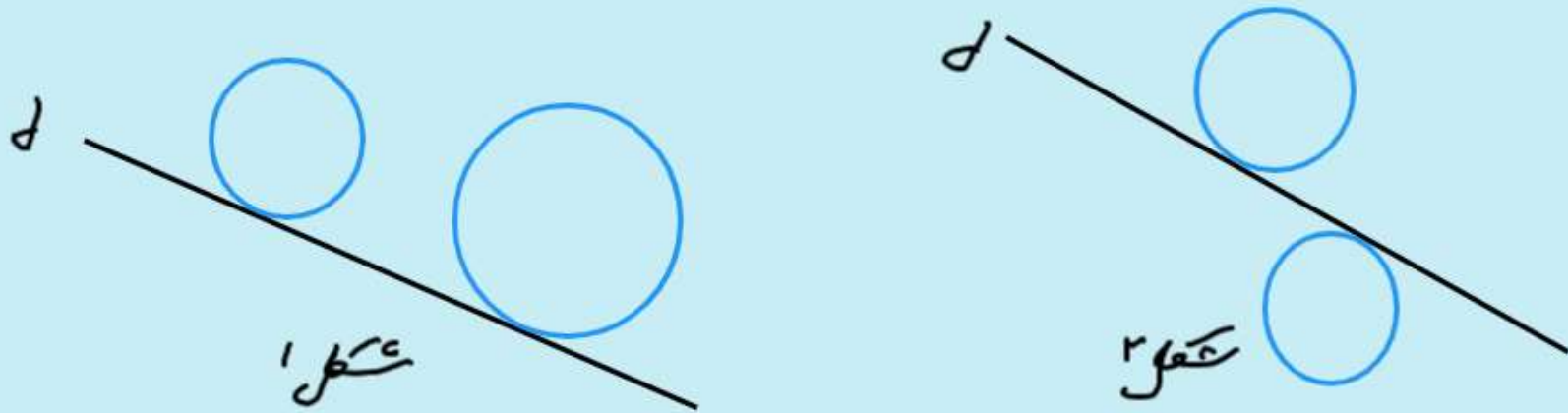
قضیه: اگر خط l بر دایره $\odot O$ در نقطه A مماس باشد.



مزبان حبیبی



تعریف مسک مشترک: اگر خط d بر دو دایره C_1 و C_2 مسک باشد، آن خط d را مسک مشترک می‌گویند.



مبانی



هم: آر ۰، ۰ در یک لکون خط، بشده آنگاه در اسکرنگ

خارجه ۰، ۰ می گونیه. (شکل ۱)

آر ۰، ۰ در خط صفر، بشده، در اسکرنگ افقی

ده دایره می گونیه. (شکل ۲)

مزبان حبیبی



و صغیت در دایره نسبت به حجم دسک است که ها :
فرض کنید $C(0, R)$ و $C'(0', R')$ دو دایره مستند.

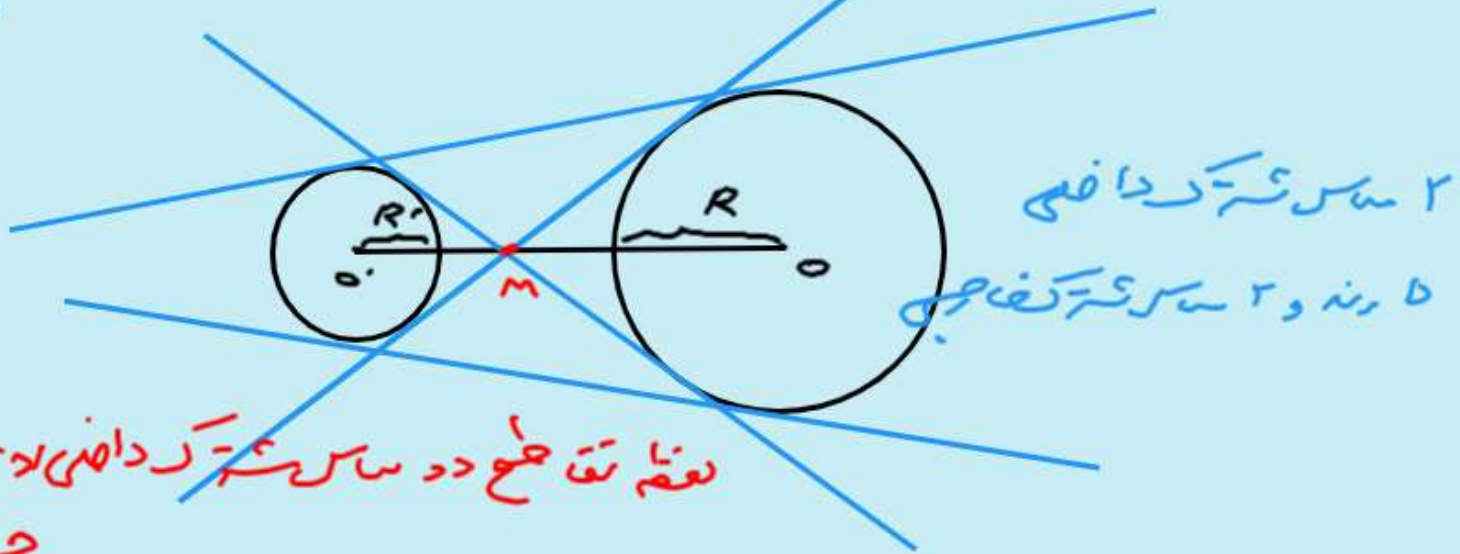
$$d = 0 \quad 0'$$

شش فالت بعد از ادراک نظر بفرید .

مزبان حبیبی

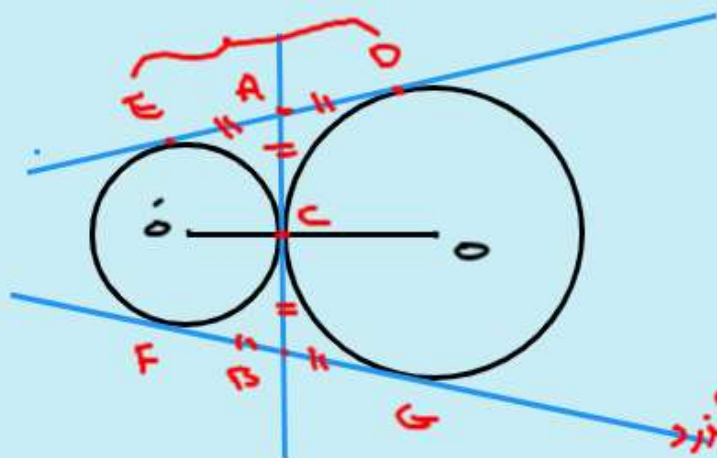


$$(1) \quad d > R + R' \Leftrightarrow \text{متقاطع}$$





$$d = R + R' \Leftrightarrow \text{مساحت خارج}$$



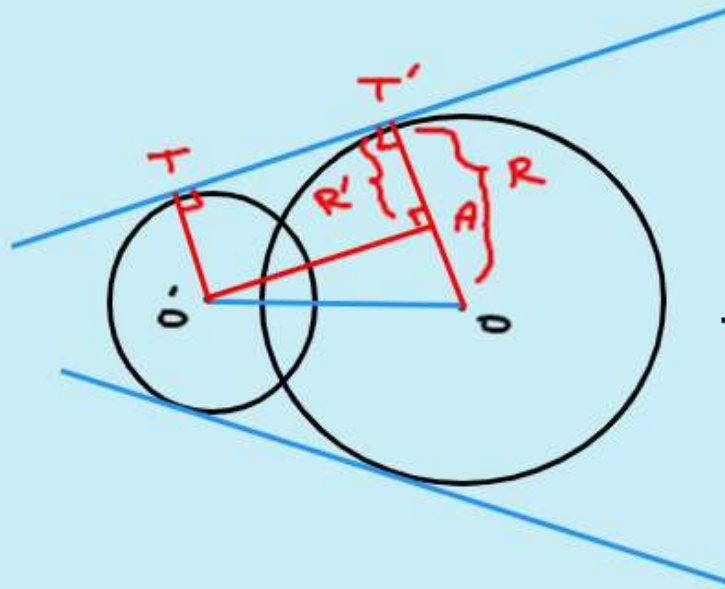
کدام مساحت خارج دایره
و دو مساحت خارج

$$1) AC = AE = AD = BC = BF = BG$$

2) مساحت دایره از وسط مساحت خارج می گذرد

$$AB \perp OO' \quad 3)$$

$$|R-R'| < d < R+R' \quad \leftarrow \text{مقاطع}$$



مسک شکر دافنی ندارد.

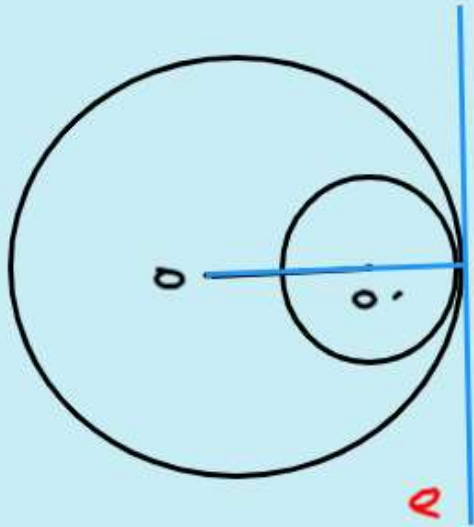
دو مسک شکر فاجی دارند.

« $AT \perp O'A$ استقیال

$$OA = R - R' \quad \ll$$

بزرگی

۴) $R - R'$ سے مساں داخل



مسک شترک داخلہ نڈارند .

کتی مسک شترک خا جی راینڈ

س مس شترک خا جی، بر انداد OO' عمداں .

$e \perp OO'$

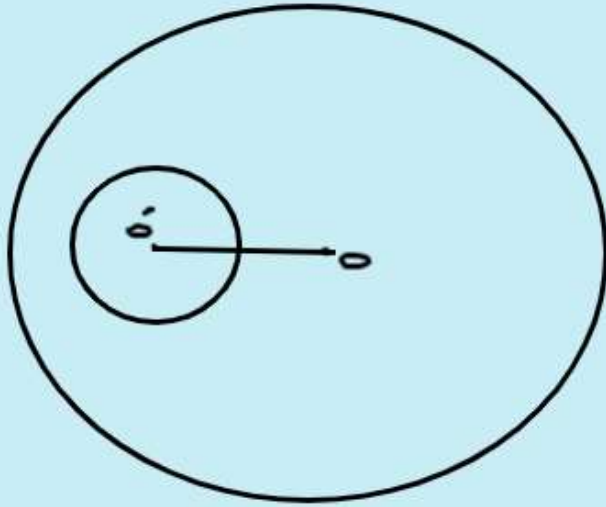
مزبان حبیبی



بزرده های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکر مزبان حبیبی



$$d \leq |R - R'| \Leftrightarrow \text{مداخل}$$

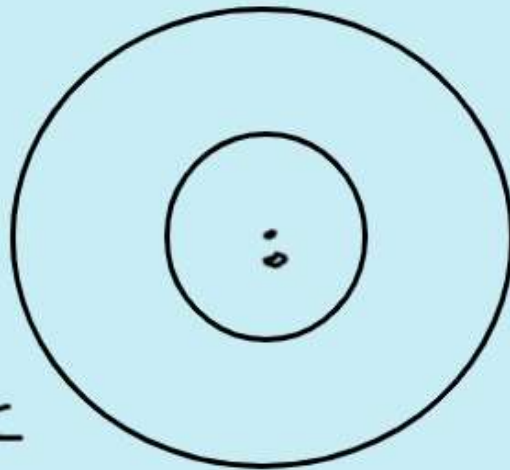


سایه مشترک ندارند

مزبان حبیبی



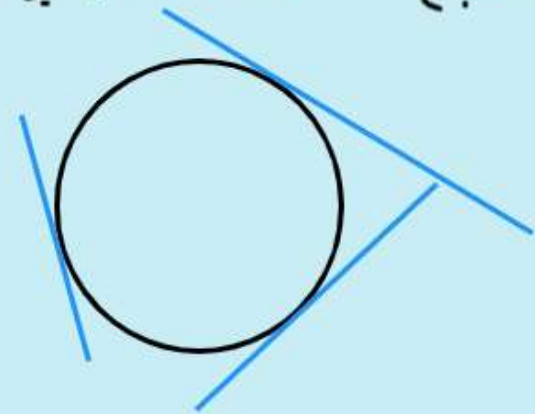
الف) $R \neq R^{-1} \Leftrightarrow \text{نه نظ}$



سایه زدن در آینه

ب) $d = 0 \Leftrightarrow \text{هم مرکز}$

ج) $R = R^{-1} \Leftrightarrow \text{چشمه تطبیق دانه}$

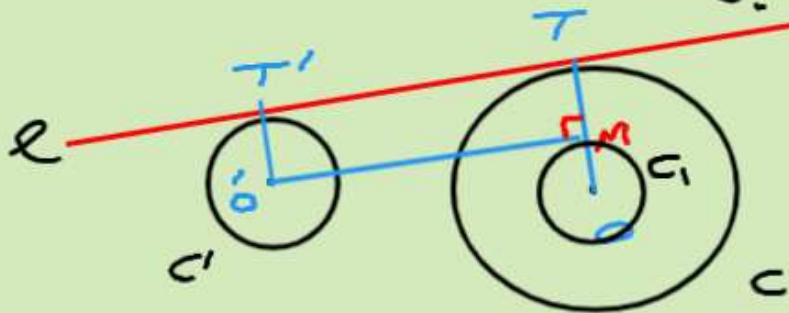


مبانی



مسئله ۱: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $OO' = d$
 نقاط مرکز O و O' را با فرض d نشان دهید.

دو دایره بیرونی به هم می‌رسند. روش رسم مساحت T و T' را توضیح دهید.
 جواب: فرض کنیم خط l مساحت T و T' را نشان دهد.



و خط l در نقاط T و T' به دو دایره

C و C' مماس است.

از O' بر OT عمود می‌کشیم



چرا ضلعی $O'MTT'$ چه نوعی است؟

$$\left. \begin{array}{l} OT \perp l \Rightarrow \hat{T} = 90^\circ \\ O'T' \perp l \Rightarrow \hat{T}' = 90^\circ \\ M = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O} = 90^\circ$$

پس $O'MTT'$ مستطیل است -

مزبان حبیبی





دایره ای به مرکز O ، شعاع OM رسم کنید.

$$OM = OT - MT = R - OT' = R - R'$$

$$OM = R - R'$$

$O'M$ به دایره C_1 مماس است

بزرگواران



دو دایره هم‌محور $C(0, R)$ و $C'(0', R')$ که $R > R'$ است.
۱- دایره $C_1(0, R - R')$ را رسم کنید.

۲- از O' به C_1 مماس کنید و نقطه تماس را M بنامید.

۳- از O به M وصل کرده و امتداد دهید تا به دایره C برخورد کند.

۴- از O' به M محوری خارج کنید تا دایره C' را در T' قطع کند.
(T و T' به یک طرف $O'M$ باشند)

۵- TT' جواب سؤال است.

بیبی



اثبات مستطیل بودن : $O'MTT'$

$$\left. \begin{array}{l} O'M \perp O'T' \Rightarrow \angle O'MT = 90^\circ \\ O'M \perp O'T' \Rightarrow \angle O'T'M = 90^\circ \\ MT = O'T' = R' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مستطیل } O'MTT'$$

مزبان حبیبی



دلیل مسأله ک بران TT' :

$TT' \text{ بر } C \text{ مسأله } A \Rightarrow OT \perp TT' \Rightarrow OT \perp MTT' \Rightarrow$ مستقیم

$TT' \text{ بر } C' \text{ مسأله } A \Rightarrow OT' \perp TT' \Rightarrow OT' \perp MTT' \Rightarrow$ مستقیم

یعنی TT' بر دو دایره C و C' مسأله A .

مربی

بزرگوار، آموزشی، مهندس دیپلوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نکته ۲: دو دلیل است که سفر و زندگی، توجه به وضعیت بودا بره
لقد، احساس شکر که است و است را میسر میسر.

تَطْبِيقُ

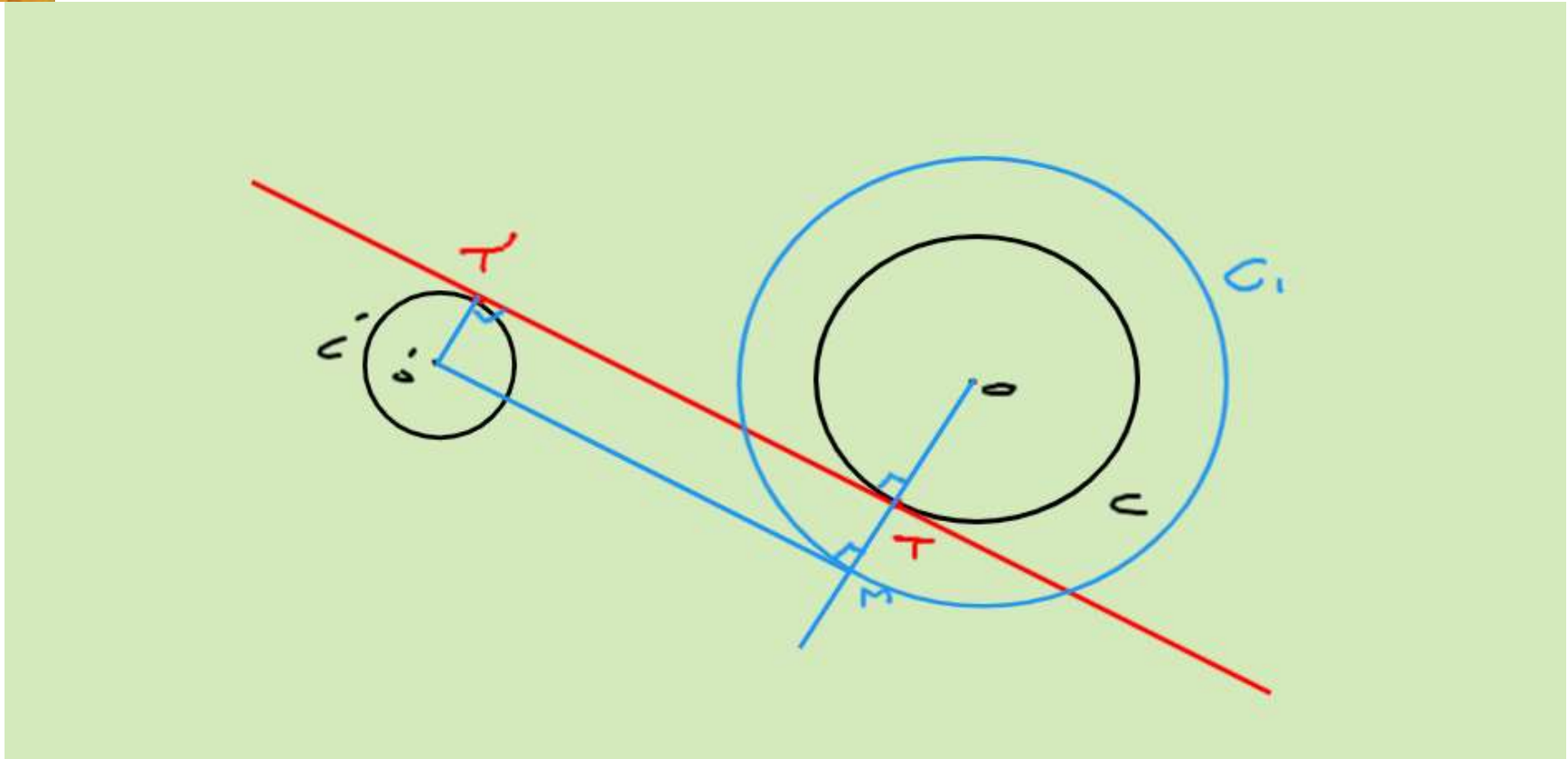
بزرگوار

بزوه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال ۳: دو دایره (O_1, R_1) و (O_2, R_2) هم‌مرکز هستند. اولش رسم
مسکرتک داخل آنرا توضیح دهید.
حل: هم‌مرکز نیستند پس هر دو دایره خط l
مسکرتک دو دایره l .

بیبی



بزه های آموزشی

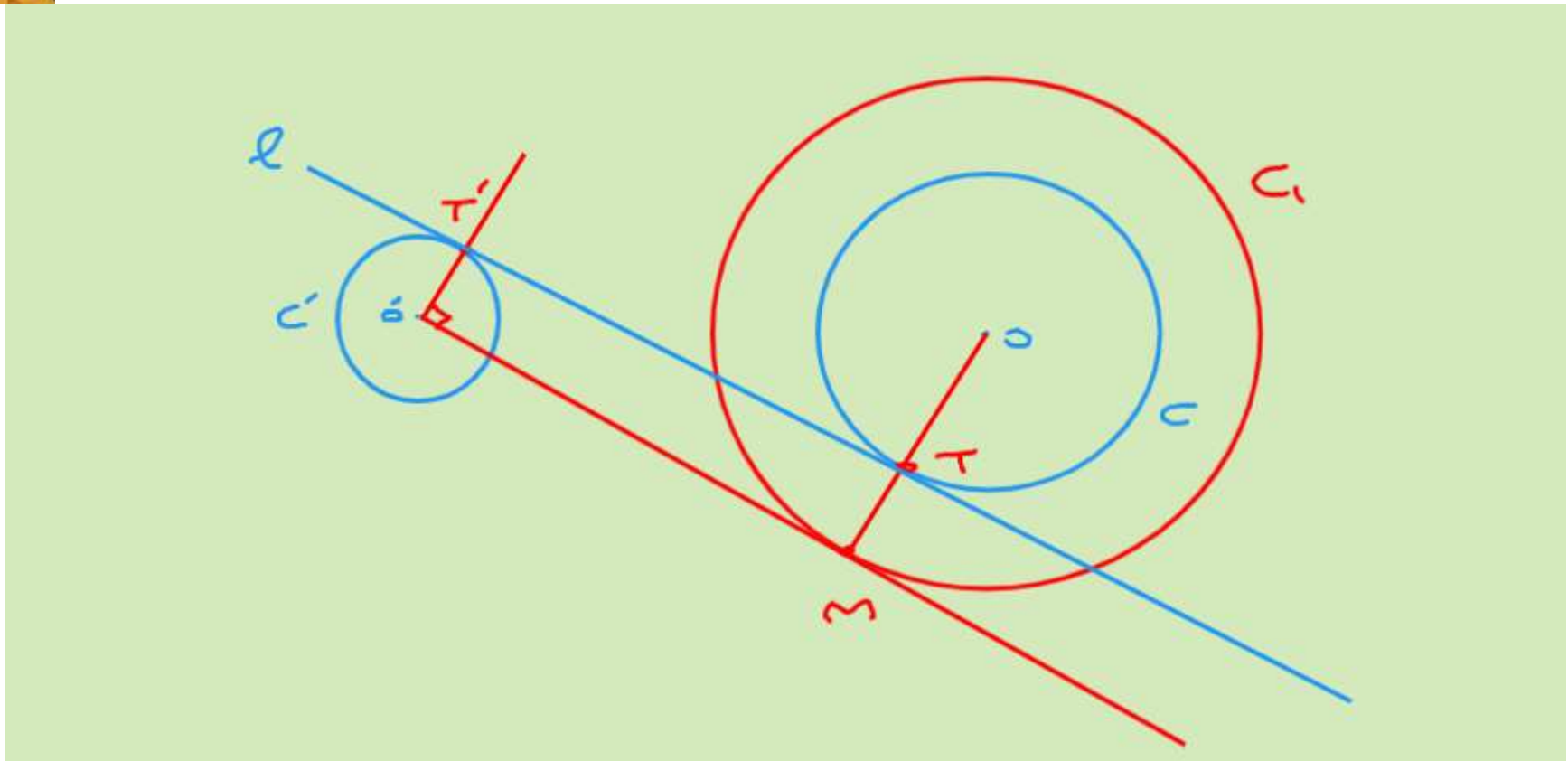
بزرگواران، آموزشی، مهندس دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



۱- چرا MTT' مستقیم است؟

۲- چرا M' بر C مماس است؟

مزبان حبیبی



مزبان حبیبی

۱- دایره $C_1 (O, R+R')$ را رسم کنید.

۲- از O یک مسک کنید.

۳- O' را به M وصل کنید. در نقطه T دایره C را قطع کنید.

۴- از O یک مسک به M' بکشید. دایره C' را در T' قطع کنید.

مهربان



بزوه های آموزشی، هنده دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

۱-۳ 'MTT' ستیلا ؟

۲-۳ لیر د'د' ساک ا ؟

مزبان حبیبی



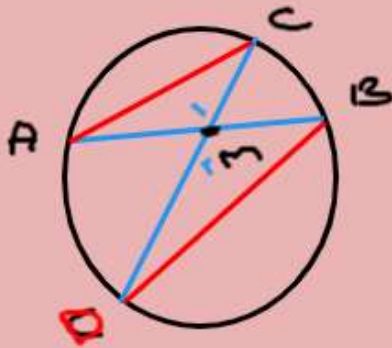


مسئله ۱: اگر دو وتر AB ، CD در نقطه M متقاطع باشند،

آنگاه ثابت کنید:

$$MA \times MB = MC \times MD$$

ابتدا C و A را به B و D وصل کنید



مزبان حبیبی



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = \frac{BC}{r} \\ \hat{C} = \hat{B} = \frac{AD}{r} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MBD$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 \\ A = D \\ C = B \end{array} \right. \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

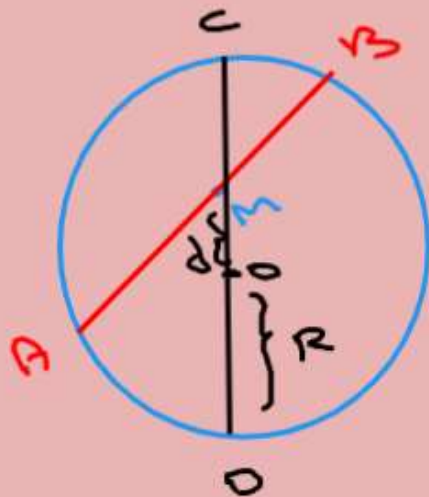
مزبان حبیبی



نتیجه: نقطه M را در طول دایره انتخاب کنید "نزدازد" MAX MB را بنویسید

MAX MB = ?

$d = OM$
 $R =$ شعاع

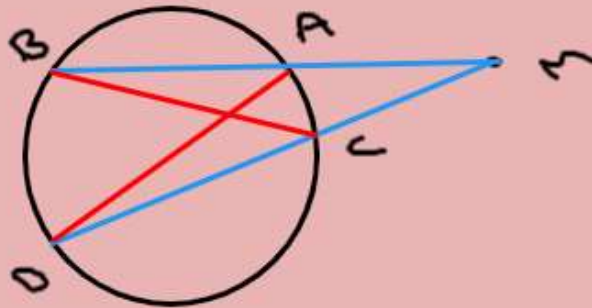


$$\begin{aligned} \text{MAX MB} &= MC \times MD \\ &= (R-d) \times (R+d) \\ &= R^2 - d^2 = \text{Constant} \end{aligned}$$

مزبان حبیبی



مسئله ۲: اگر دو نقطه M خارج از دایره دو قاطع بسنجیم، داریم مثلثی که
استقامت ثابت کنید $MA \times MB = MC \times MD$

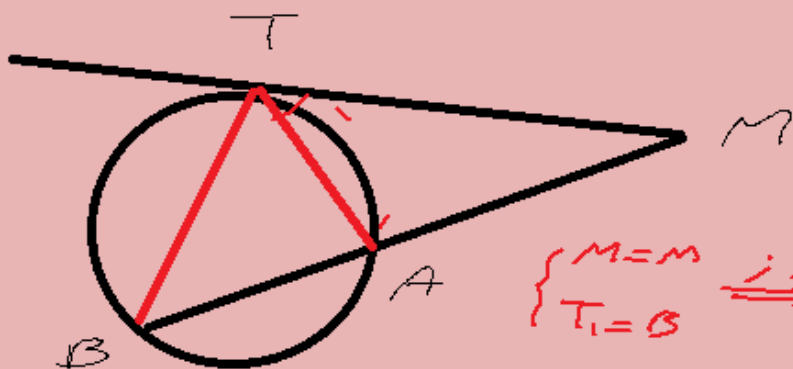


مهربان



۳. فرض کنید MT بر لایه ساکن و MA قطع است.

نتیجه گیری: $MT^2 = MA \times MB$



اثبات:

$$\begin{cases} M = M \\ \angle T_1 = \angle B \end{cases} \Rightarrow \Delta MAT \sim \Delta MBS$$

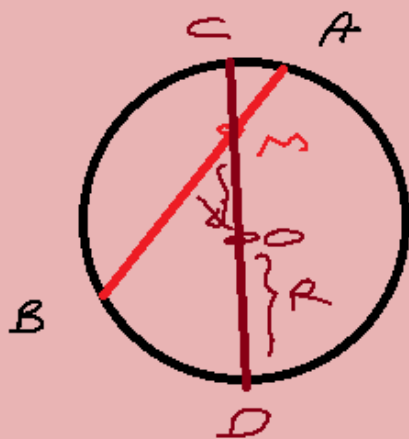
$$\begin{cases} M = M \\ \angle A_1 = \angle T \\ \angle T_1 = \angle B \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB$$

مزبان حبیبی

مکررین : آر M در سر AB ؛ سر ته بگنند

$MAX MB$ مقدار ته ب است و این مقدار ته ب را بیابید .

آیه ت : قطر ته ب را رسم می کنیم :



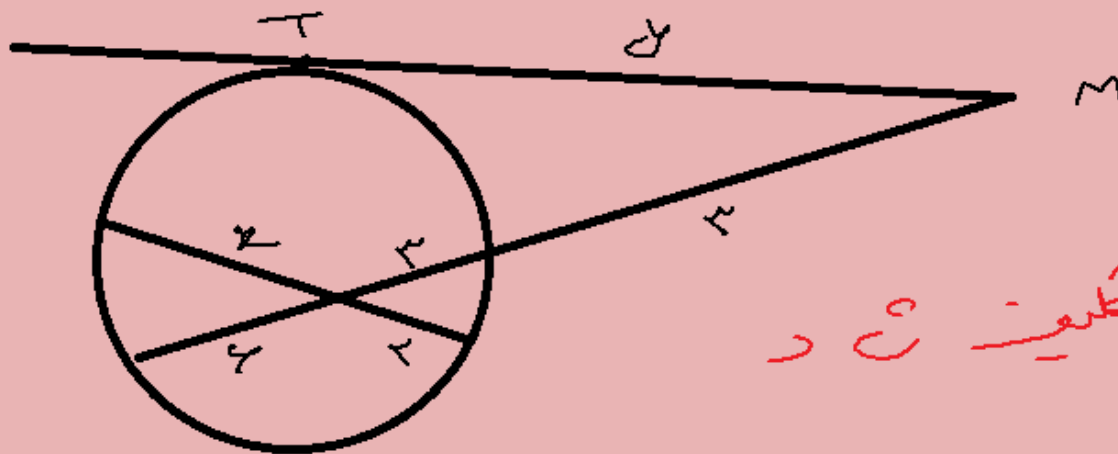
$$MAX MB = MC \times MD$$

$$= (R - d) \cdot (R + d)$$

$$= R^2 - d^2 \equiv \text{Constant}$$



تکرین : در شکل زیر MT را دایره - مسک است - MA و MB را این بسید .



تکلیف ۱۰ د

مزبان حبیبی

بزرگواران، آموزشی، هندسه دو یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

موضوع:

چند ضلع های محلی و محال

مزبان حبیبی

سلام، وقت بخیر

هدف دو - یازدهم ریاضی

دیرینه ن سنا هدا - سیراز

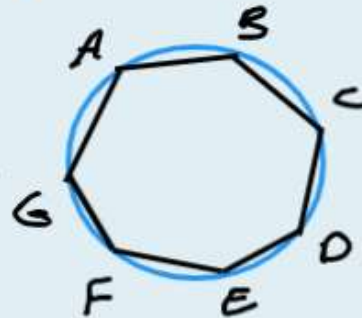
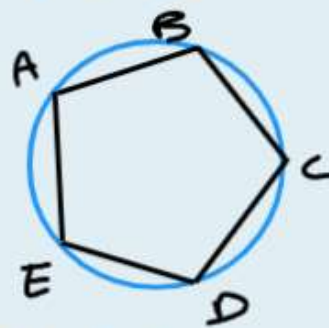
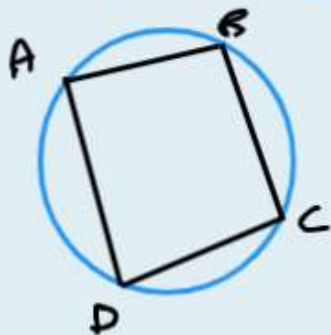
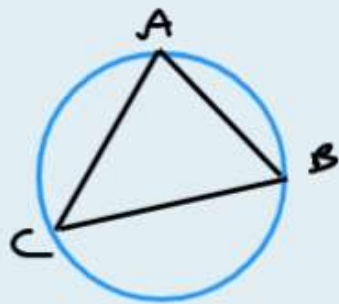
ده شعبه ۳، ۹۹۹۷۷۷... ۹۰

مزبان حبیبی





تعریف: اگر تمام رئوسهای یک چندضلعی داخلی را به یک دایره بکشیم آنرا چندضلعی
را حاطی و دایره را محیط چندضلعی می گویند.

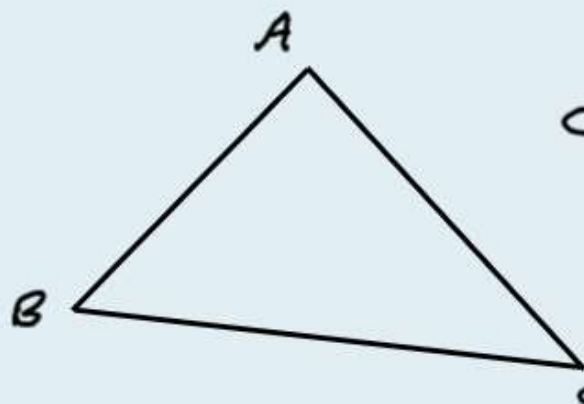


توجه

یا: چندضلعی را حاطی گویند از دایره ای وجود دارد به شرطی که آن دایره را

مزبان حبیبی

تمرین: ثابت کنید هر مثلث یک دایره منحصراً دارد.



اثبات: در رأس هر یک از رئوس A ، B و C یک دایره منحصراً می‌کشیم.

$$\odot A = \odot B = \odot C$$

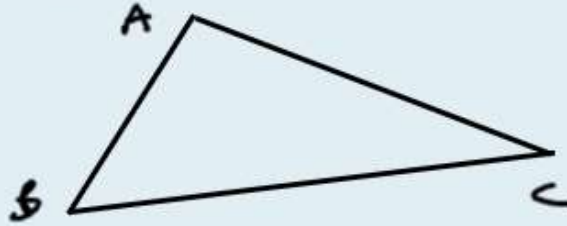
یعنی دایره به مرکز O در شعاع OA از A ، B و C می‌گذرد.

بزه های آموزشی، مهندس دوازدهم ریاضی، دکتر مهران حبیبی



تمرین: مثلث دجمن ABC را رسم کنید.

دایره ای رسم کنید که از A و B و C می گذرد. (دایره محیطی مثلث)

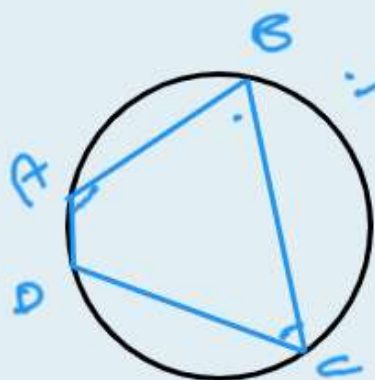


تکلیف شد

مهربانی



تمرین: اگر چه، منتهی $ABCD$ داخلی باشد، آنگاه ثابت کنید که
زادیه های مقابل آن، مکمل یکدیگرند.



ابتدا: زاویه های منتهی در دایره. زاویه های منتهی:

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

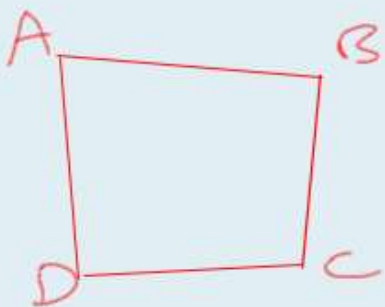
$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{ADC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{ABC}}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

مزبان حبیبی



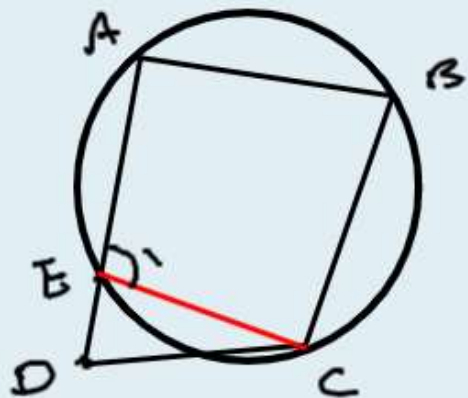
تمرین: (عکس متقابل) اگر زاویه های مقابل در یک چهارضلع منتهی به یک خط باشند، آن چهارضلع یک متوازی الاضلاع است.

اثبات: در چهارضلعی ABCD فرض کنیم $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ و $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.



دایره رسم می کنیم که از سه رأس C, B, A می گذرد.
(دایره قاطع شده ABC)

مزبان حبیبی



ادغام کنیم راس D نیز روی این دایره قرار دارد.

بر حسب گفته: اگر روی این دایره بنشینیم

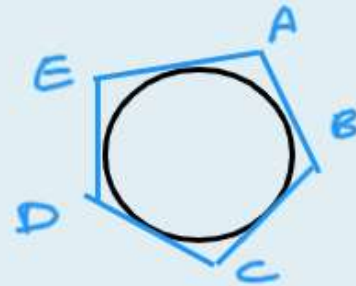
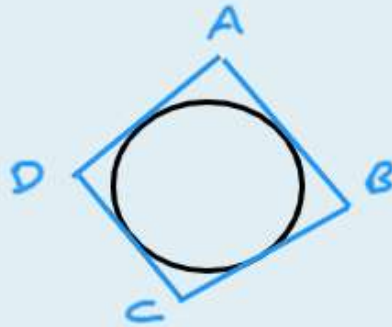
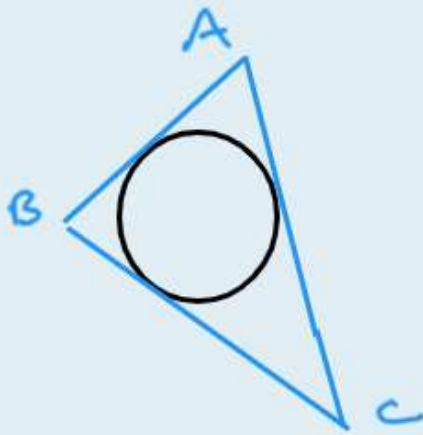
آنچه نقطه تقاطع AD (یعنی CD) با دایره را E بنامیم.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} + \widehat{E} &= 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E} \quad \times$$

چون E روی ضلع CDE است پس $\widehat{E} > \widehat{D}$.



تعریف: چند ضلعی را محیطی می گویند هرگاه تمام اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند.
(دایره را محاط در چند ضلعی می گویند.)



مزبان حبیبی



تذکرات:

آر ضلع منتهی محیط بر دایره (O, R) باشد آنگاه

نقطه S زه داخلی ضلع منتهی در تقاطع OS قرار گیرد.



مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، مهندس دویازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تذکره:

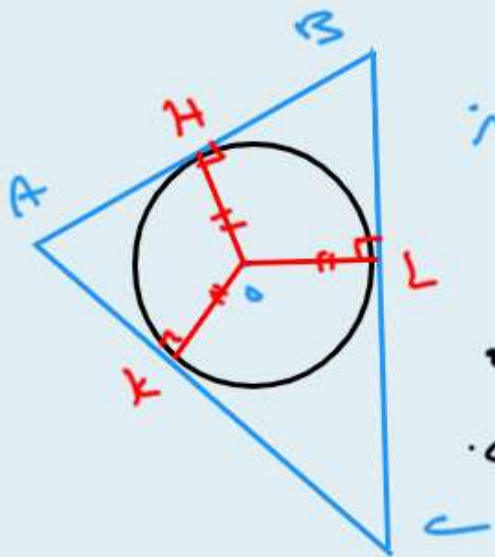
چند ضلعی محاطی از اردت‌ها را بیند بارهای
ز لویه های دافعی آن چند ضلعی هم‌رسم باشند

مزبان حبیبی



تمرین: ثابت کنید هر ششگونی ضمیمه محیطی است.

اثبات: می دانیم بین هر دو زاویه هارد گونی همگونی
آر ۰ نقطه مرکزی بین هر دو زاویه است.

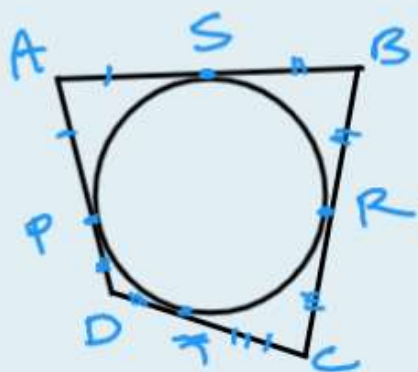


ما از ضمیمه ششگونی به اینها است و $OH = OK = OL$

یعنی ششگونی را به مرکز و OH محیطی است.



عربی: ثابت کنید که چنانچه یک دایره در یک مثلث متساوی الساقین،
با جمع دو ضلع دیگر برابر است.



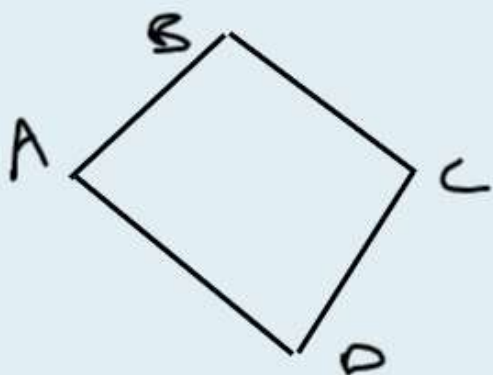
اثبات: اندازه مساحت را سه باره بر لایه از نقطه خروج
از دایره، با هم برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} AS = AP \\ BS = BR \\ CT = CR \\ DT = DP \end{array} \right\} \Rightarrow AS + BS + CT + DT = AP + BR + CR + DP$$
$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$$



تمرین: اگر مجموع دو ضلع مقابل در ضلعی ABCD با جمع دو ضلع دیگر برابر باشد

آنگاه آن ضلع را متوازی الاضلاع میگویند.



$$\text{فرضی: } AB + CD = AD + BC$$

حکم: ABCD ضلعی متوازی الاضلاع است.