

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

سلام

وقت بخیر

بزه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: فصل دوم، احتمال - آمار و احتمال

## فصل دوم، احتمال

برای هر پیشامد مثل  $A$ ، احتمال رخ دادن آن با  $P(A)$  نمایش داده می شود که عددی حقیقی در بازه  $[0, 1]$  است.  
اصول احتمال عبارت اند از:

$$P(S) = 1$$

برای هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  که  $A \cap B = \emptyset$ ، داریم  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .  
به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  فرض شده است، یعنی  $A \cap B = \emptyset$ ، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم زمان محال است. در غیر این صورت، می گوئیم  $A$  و  $B$  سازگارند.

۱ مبای احتمال

۲ احتمال غیر هم ناسنس

۳ احتمال شرطی

۴ پیشامدهای مستقل وابسته

آمده احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره های زیر درست است:

$$\left. \begin{array}{l} A \cap A' = \emptyset \Rightarrow P(A \cup A') = P(A) + P(A') \\ A \cup A' = S \Rightarrow P(A \cup A') = P(S) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$P(A') = 1 - P(A)$  ۱

$P(\emptyset) = 0$  ۲

$\emptyset = S' \Rightarrow P(\emptyset) = P(S') = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$

۳ اگر  $A, B, C$  پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن گاه

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \Rightarrow A \text{ و } B \cup C \text{ ناسازگارند}$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

درس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم  $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

دو مجموعه  $(A \cup B)$ ،  $A \cap B$ ،  $A - B$  و  $B - A$  را در نظر بگیرید.

$$(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B) = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A \Rightarrow (A - B) \cup (A \cap B) = A$$

$$\Rightarrow P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A) \Rightarrow P(A - B) + P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه  $A$  و  $B$  داریم:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

$$A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

$$A \cup B = A \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A) \cup (A \cap B)) = P(A) + P(B - A) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

### کار در کلاس

صفحه ۲۰۶ آمار و احتمال

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می کنید،

A : متولد ماه مهر باشد،

نام رنگار

B : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکهای که سه بار پرتاب می کنید،

A : هر سه بار مشابه بیاید،

نام رنگار

B : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا

A : خورشید در آسمان دیده شود،

نام رنگار

B : باران بیارد.

۴ تاسی را بی در بی پرتاب می کنید،

A : برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید،

نام رنگار

B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

درس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

پی

# بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

صفحه ۴۷ آمار و احتمال

تعریف



۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند.

فضای نمونه برای این بازی چیست؟  
 $\{ (سنگ، سنگ)، (سنگ، کاغذ)، (سنگ، قیچی)، (کاغذ، سنگ)، (کاغذ، کاغذ)، (کاغذ، قیچی)، (قیچی، سنگ)، (قیچی، کاغذ)، (قیچی، قیچی) \}$

فضای نمونه چند عضو دارد؟  
 $3 \times 3 = 9$

در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

$\{ (سنگ، قیچی)، (کاغذ، سنگ)، (قیچی، سنگ) \}$

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

$$۱۴! = \text{تعداد کل}$$

$$۱ = \text{اولین نفر بلند قدترین؛ پس}$$

$$\text{احتمال} = \frac{۱!}{۱۴!} = \frac{۱}{۱۴}$$

درس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم



۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک

لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

$$S = A \times B \times C \times D \times E$$

$$A = \{ \text{گرم، سرد} \}$$

$$S = A \times B \times C \times D \times E$$

$$B = \{ \text{رطوبت، خشک} \}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$C = \{ \text{باد می‌وزد، باد نمی‌وزد} \}$$

$$D = \{ \text{صاف، نیمه‌ابری، ابری} \}$$

$$E = \{ \text{بارندگی رخ داده، بارندگی رخ نداد} \}$$

مدرس: مزبان حبیبی  
تهران

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را ثابت کنید :

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$$

الف) اگر  $B \subseteq A$  داریم:  $P(A-B) = P(A) - P(B)$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

ب) اگر  $B \subseteq A$ ، آنگاه  $P(B) \leq P(A)$

$$0 \leq P(A-B) \Rightarrow 0 \leq P(A) - P(B) \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید :

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

$$A = \{2, 4, \dots, 100\} \Rightarrow n(A) = 50$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{14}{100} = \frac{49}{100}$$

$$B = \{3, 6, \dots, 99\} \Rightarrow n(B) = 33$$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

$$A \cap B = \{6, 12, 18, \dots, 96\} \Rightarrow n(A \cap B) = 16$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{34}{100}$$

ب) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100}$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## فصل دوم، احتمال غیر هم شانس

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  احتمال نابرابر داشته باشند،  $S$  را فضای نمونه ای با احتمال غیر هم شانس می گوئیم.

در فضای نمونه ای منتهای با احتمال غیر هم شانس، اگر  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  فضای نمونه ای و  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  یک زیر مجموعه  $k$  عضوی  $S$  باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \color{red}{\boxed{1}}$$

$$P(S) = 1 \quad \color{red}{\boxed{2}}$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad \color{red}{\boxed{3}}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

کار در کلاس

صفحه ۳۵ - تمرین ۱

۱ در یک آزمایش تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$  و  $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$  احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} P(\{x, y\}) = \frac{2}{3} &\Rightarrow P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \\ P(S) = 1 &\Rightarrow P(x) + P(y) + P(z) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(z) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{x, z\}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) + P(z) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{12} + P(y) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

پیشامدها	x	y	z
احتمال	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۲ یک تاس به گونه ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به دست آورید.

$x$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P$	$x$	$3x$	$x$	$3x$	$x$	$3x$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$x$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$

$$P(\{2, 3\}) = P(2) + P(3):$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12}$$

اگرچه  $P(2) = P(4) = P(6) = 3x$  و  $P(1) = P(3) = P(5) = x$

$$P(\{2, 3\}) = P(2) + P(3) = \frac{3x}{12} + \frac{x}{12} = \frac{4x}{12} = \frac{4}{12}$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

صحنه ۵۱ آبی رو آبی

تعریف

۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

$$P(\text{رو}) = x \text{ و } P(\text{پشت}) = \frac{1}{4}x$$

$$P(\text{رو}) + P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4}x = 1 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\text{رو}) = \frac{4}{5} \text{ و } P(\text{پشت}) = \frac{1}{5}$$

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$x$	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$

$$P(S) = 1 \Rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = P(1) + P(2) + P(3) = x + 2x + 3x = 6x = \frac{6}{21}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۳ اگر  $S = \{a, b, c, d, e\}$  فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و  $A = \{a, b\}$ ،  $B = \{a, b, c, d\}$ ، و  $C = \{a, b, e\}$  سه پیشامد باشند به طوری که  $P(A) = \frac{2}{5}$  و  $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار  $P(C^c)$  را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} P(A) = \frac{2}{5} &\Rightarrow P(a) + P(b) = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{3}{5} &\Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(c) + P(d) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(C^c) = P(\{c, d\}) = P(c) + P(d) = \frac{1}{5}$$

۴ در یک تجربه تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه ای است. اگر  $P(x)$ ،  $P(y)$ ، و  $P(z)$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $\frac{1}{4}$  تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

برآمد	$x$	$y$	$z$
احتمال	$a$	$a + \frac{1}{4}$	$a + \frac{2}{4}$

$$\begin{aligned} P(S) = 1 &\Rightarrow P(x) + P(y) + P(z) = 1 \\ &\Rightarrow a + a + \frac{1}{4} + a + \frac{2}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3a = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

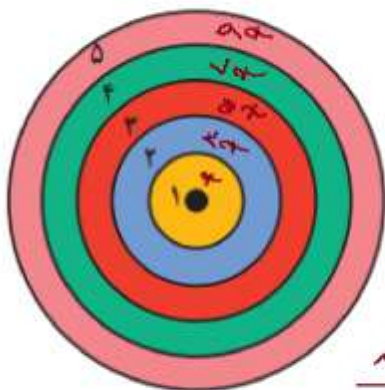
برآمد	$x$	$y$	$z$
احتمال	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511





۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل روبه رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول،  $x$  باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه  $k$  ام،  $(2k-1)x$  باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

$$P(S) = 1 \Rightarrow x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1 \Rightarrow 25x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

مرکز	۱	۲	۳	۴	۵
احتمال	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا

اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

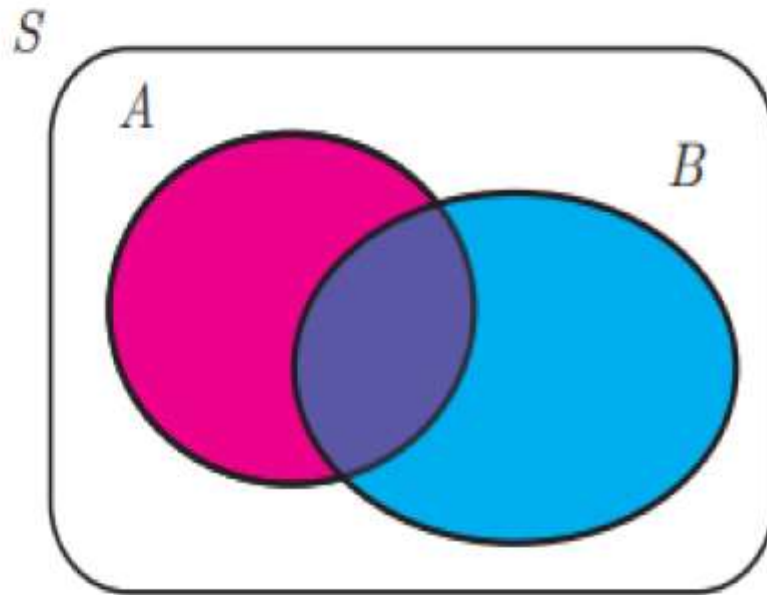
$$P(\{1, 3, 4\}) = P(1) + P(3) + P(4) = \frac{1}{25} + \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{13}{25}$$

$$P(\{2, 5\}) = P(2) + P(5) = \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{12}{25} \Rightarrow P(\{1, 3, 4\}) > P(\{2, 5\})$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (1)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (2)$$

توجه:   
 قانون ضرب احتمال

$$(1), (2) \Rightarrow P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (3)$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(B|A)} \quad (4)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \quad (5)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} \quad (6)$$

نرسودن بیند

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

درس: مزبان حبیبی   
 آمار و احتمال

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

$$S = \{11, 12, \dots, 44\} \quad n(S) = 36$$

$$A = \{تاس سبز ۶\} \quad B = \{مجموع دو تاس ۱۰\}$$

$$A = \{41, 33, 23, 44, 25, 42\} \quad B = \{44, 55, 44\} \quad A \cap B = \{44\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال: تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قدهیج دو نفری برابر نیست.  
اگر یکی از بازیکنها را به تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟  $\frac{1}{14}$

ب) بازیکن دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اول کوتاه‌تر است.  
در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

$$A \equiv \text{بازیکن اول، بلندقدترین تیم} \quad B \equiv \text{بازیکن اول، دوم بلندقدتر است}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{2}{14}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



### کار در کلاس

در فعالیت مربوط به دانش آموزان پایه یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱۱-۱، ۱۱-۲ و ۱۱-۳ به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره کامل شده اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می کنیم. پیشامد «دانش آموز کلاس ۱۱-۱ بودن» را  $B_1$  می نامیم و  $B_2$  و  $B_3$  را به طور مشابه تعریف می کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با  $A$  نمایش می دهیم.

الف) مقدار  $P(A|B_i)$  را برای  $i=1,2,3$  محاسبه کنید.

ب) مقدار  $P(B_i|A)$  را برای  $i=1,2,3$  محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده اید چیست؟

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق تر می دانید؟ برای پاسخ

دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

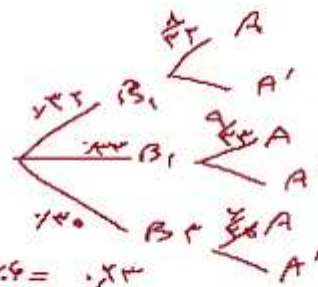
بسم الله الرحمن الرحيم

$A =$  نمره کلاس نود  $B_1 =$  کلاس ۱۱-۱  $B_2 =$  کلاس ۱۱-۲  $B_3 =$  کلاس ۱۱-۳

الف) 
$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{2}{22}}{\frac{11}{22}} = \frac{2}{11}$$

$$P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{3}{11}$$

$$P(A|B_3) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{4}{11} \quad P(A) = \frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}$$



ب) 
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)}{P(A)} \cdot P(A|B_1) = \frac{\frac{11}{22}}{\frac{9}{11}} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{9}$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)}{P(A)} \cdot P(A|B_2) = \frac{\frac{11}{22}}{\frac{9}{11}} \times \frac{3}{11} = \frac{3}{9}$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)}{P(A)} \cdot P(A|B_3) = \frac{\frac{11}{22}}{\frac{9}{11}} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{9}$$

(ب) (ج)

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال: فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگری قرمز است. کاردی را به تصادف برمی داریم و مشاهده می کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟  
حل: فرض کنید:

$A$ : کارت دو رو سبز است.

$B$ : روی مشاهده شده کارت انتخابی سبز است.

باید  $P(A \cap B)$  و  $P(B)$  را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را با احتمال های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم، پس

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

احتمال بیشامد  $A \cap B$  را به راحتی می توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

دلیل اینکه  $P(A) = \frac{1}{3}$  است، این است که از سه کارت، یکی دو رو سبز است و  $P(B|A) = 1$  چون اگر کارت انتخابی دو رو سبز باشد، روی مشاهده شده حتماً سبز است. در نتیجه:  $P(A|B) = \frac{2}{3}$ .

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## قانون احتمال کل

فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$ ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

فرض کنید  $B$  پیشامدی باشد که  $0 < P(B) < 1$ . در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$ ، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال : دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کاردی را به تصادف از این دسته انتخاب می کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می کنیم و می بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را  $A$  و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را  $B$  می نامیم. باید  $P(A)$  را حساب کنیم. با توجه به اینکه  $B$  و  $B'$  فضای نمونه را افراز می کنند داریم :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = 0/2 \times 1 + 0/8 \times 0/5 = 0/6$$

توجه کنید که پیشامد  $B'$  یعنی کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد و به همین دلیل احتمال آن  $0/8$  است.

طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0/2 \times 1}{0/6} = \frac{1}{3}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511





مثال : سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیبهای صندوق اول سبز؛ سیبهای صندوق دوم، قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همه سیب‌های صندوق سبز باشند چقدر است؟  
حل : فرض کنید پیشامد  $A$ ، یعنی سیب مشاهده شده سبز باشد و پیشامدهای  $B_1, B_2, B_3$  به ترتیب به معنای انتخاب صندوق‌های اول، دوم و سوم باشند. لذا

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

و

$$P(A|B_1) = 1, \quad P(A|B_2) = 0, \quad P(A|B_3) = \frac{2}{100} = 0.02$$

برای محاسبه  $P(B_1|A)$  ابتدا  $P(A)$  را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0.02 = 0.34$$

در نتیجه :

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{0.34} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

تمرین

صحنه مهمی از آمار و احتمال

۱ درباره خانواده ای چهار فرزندی، می دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

$$A = \text{دقیقاً ۲ پسر} \quad B = \text{دست کم یکی پسر}$$

$$A = \{PPDD, PDDP, DDDP, DDDP, DDPP, DPPD\}$$

$$B = S - \{DDDD\}$$

$$A \cap B = A$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{14}}{\frac{15}{14}} = \frac{4}{15}$$

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۲ ستاد مرکزی معاینه فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال یرکارترین سال در عرصه معاینه فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه فنی شده اند. امسال یکی از سخت ترین سال های مبارزه با آلودگی هوا بود...»  
در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شماره مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

$A \equiv$  سردر  $B_i \equiv$  مرکز  $i$

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{244}{170} \approx 1.43$$

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

$$P(A|B_5) = \frac{P(A \cap B_5)}{P(B_5)} = \frac{24}{79}$$

ب) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

$$P(B_5|A) = \frac{P(B_5)}{P(A)} = P(A|B_5) = \frac{\frac{79}{170}}{\frac{244}{170}} \times \frac{24}{79} = \frac{24}{244}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

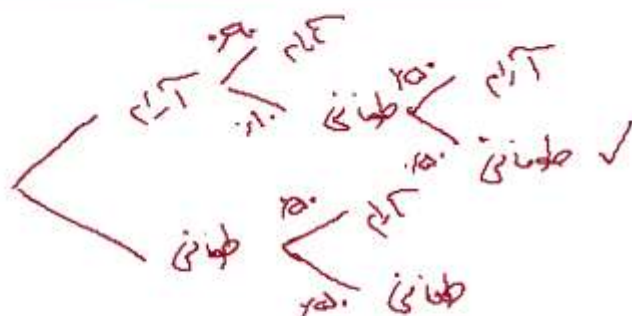
09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم



۲ بررسی های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟



عدد سوطینی  $B \equiv$  طوفانی  $A \equiv$  آرام

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= 0.9 \times 0.1 = 0.09$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید:  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) P((A_2 \cap A_3) | A_1) \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &\stackrel{۱}{=} P(A_1) P(A_3 | A_1) P(A_2 | A_1 \cap A_3) \end{aligned}$$

۵ قانون ضرب احتمال را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه احتمال اشتراک ۳ پیشامد استفاده

کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟  $n!$  (صورتی شکل)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

$$\dots \cdot (n-1) = n-1$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه تراکتور داشته باشد چقدر است؟

$E_1 \equiv \text{زن}$      $E_2 \equiv \text{مرد}$      $A = \text{گواهینامه تراکتور}$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2)$$

$$= 0.55 \times 0.70 + 0.45 \times 0.20 = 0.385 + 0.09 = 0.475$$

۷ دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

$E_1 \equiv \text{مهره اول سبز}$      $E_2 \equiv \text{مهره اول قرمز}$      $A = \text{مهره دوم سبز}$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2)$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{9} = \frac{65}{63}$$

آمادو احتمال    درس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

۸ در شهری ۶۰ درصد راننده ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۵٪ است و زن ها چنین تخلفی را به احتمال ۱٪ انجام می دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

$$E_1 \equiv \text{مرد} \quad E_2 \equiv \text{زن} \quad A = \text{توقف کند}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) \\ = 0.6 \times 0.05 + 0.4 \times 0.01 = 0.03 + 0.004 = 0.034$$

۹ در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

$$E_1 \equiv \text{لامپ از جعبه اول} \quad E_2 \equiv \text{لامپ از جعبه دوم} \quad A = \text{معیوب}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) \\ = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی دهنده های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

$$E_1 \equiv A \text{ شرکت در انتخابات} \quad E_2 \equiv B \text{ شرکت در انتخابات}$$

$$P(A) = P(E_1) = P(A|E_1) + P(A|E_2) = \frac{3}{4} \times \frac{50}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{80}{100} = \frac{23}{40}$$

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1) \times P(A|E_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{50}{100}}{\frac{23}{40}} = \frac{30}{23} < \frac{1}{2} = \frac{12}{23}$$

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

$$E_1 \equiv \text{واکسن زده} \quad E_2 \equiv \text{واکسن نزده} \quad A = \text{ابتلاب بیماری}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) = \frac{9}{10} \times \frac{2}{1000} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{118}{10000}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

۱۳ امیر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۱۲ علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال های  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  برای دیدن یک مسابقه ورزشی به ورزشگاه می روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال  $\frac{1}{8}$  به ورزشگاه می رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

$$A = \text{علی به ورزشگاه میرود} \quad B = \text{مازیار به ورزشگاه میرود}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(B|A) = \frac{1}{8}$$

$$P(B|A') + P(B|A) = 1 \Rightarrow P(B|A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{11}{12}$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

۱۵ خانمها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوانهای یک مؤسسه انتشاراتی اند که به ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه ای که به آنها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه ای نسخه خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

$$A \equiv \text{نسخه خوانی شده ولی هنوز غلط دارد} \\ E_1 \equiv \text{خانم اکبری} \quad E_2 \equiv \text{خانم برنا} \quad E_3 \equiv \text{خانم چمنی}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)P(A|E_3)$$

$$= \frac{20}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{95}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{180 + 285 + 495}{1000} = \frac{960}{1000} = 0,96$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,96 = 0,04$$

۱۶ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره های ۱ تا ۴، کارتی را به تصادف انتخاب می کنیم و سپس سکه ای را به تعداد عدد کارت برتاب می کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

$$E_i \equiv \text{کارت } i \text{ برتاب می کنیم} \quad A = \text{تعداد بار رو ۲ باشد}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + \dots + P(E_4)P(A|E_4) = \frac{1}{4} \left( 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{12}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)}{P(A)} \cdot P(A|E_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

۱۷ یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است: گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال  $0/4$  تصادف می کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال  $0/2$  است. می دانیم که  $30\%$  درصد بیمه گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید. تصادم  $A$  کم خطر  $E_1$  پرخطر  $E_2$   
 $P(A) = P(E_1) P(A|E_1) + P(E_2) P(A|E_2) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = 0,26$

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A|E_1)}{P(A)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

دو رویداد مستقل:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل اند} : P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A \text{ و } B \text{ ناسازگارند} : P(A \cap B) = 0$$

$$A, B \text{ مستقل هستند} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید  $A$  پیشامد مشاهده عدد ۳ در تاس اول و  $B$  پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی می کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه ای این آزمایش  $n(S) = 6 \times 6 = 36$  عضو دارد. اکنون پیشامدهای  $A$ ،  $B$  و  $A \cap B$  و احتمال های آنها را به دست می آوریم.

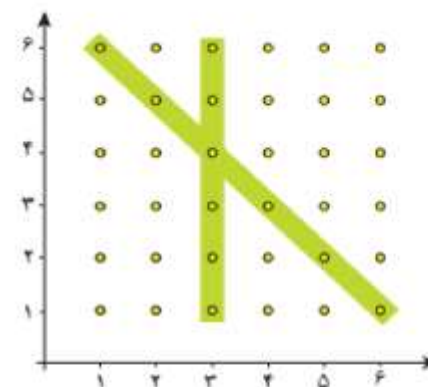
$$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$A \cap B = \{(3,4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$



پس  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ، بنابراین پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل از یکدیگرند.

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



کار در کلاس

صمیمیت ۶۹ آمار و احتمال

۱ سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر  $A$  پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و  $B$  پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید.

$$A = \{PRP, PRR, RRP, RRR\}$$

$$B = \{PRR, RPR, RRP\} \quad A \cap B = \{PRR, RRP\} \quad n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$P(A) = \frac{4}{8} \quad \text{و} \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \neq P(A \cap B) \Rightarrow \text{وابسته هستند}$$

۲ در پرتاب دو تاس،  $A$  را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و  $B$  را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید.

$$n(S) = 36 \quad A = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\} \quad \text{آیا } A \text{ و } B \text{ مستقل اند؟}$$

$$B = \{46, 55, 64\} \quad A \cap B = \emptyset \quad P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

۲ در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند،  $\frac{5}{7}$  و این احتمال برای مرتضی  $\frac{7}{10}$  است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

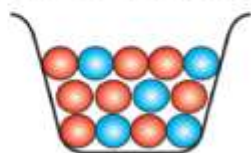
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{7} \times \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال ۳) از جعبه ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت بی دربی و بدون جای گذاری، بیرون می آوریم. اگر  $A$  پیشامد آبی بودن مهره اول و  $B$  پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد، الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟ ب) پیشامدهای  $A$  و  $B$  مستقل اند یا وابسته؟



حل) با توجه به رابطه  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  در احتمال شرطی داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{10}{39}$$

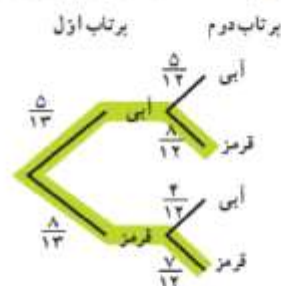
برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها،  $P(B|A)$  و  $P(B)$  را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می کنیم. برای محاسبه  $P(B)$  از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده ایم.

$$P(B) = P(\text{مهره دوم قرمز})$$

$$= P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$$

$$= \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{7}{12}$$

$$= \frac{8}{13}$$



از سوی دیگر  $P(B|A) = \frac{8}{12}$  پس  $P(B|A) \neq P(B)$ ، بنابراین  $A$  و  $B$  وابسته اند.

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

سه پیشامد  $A, B, C$  را مستقل می گوئیم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی،  $n$  پیشامد  $A_1, A_2, \dots, A_n$  را مستقل می گوئیم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر باشد.

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال ۴) خانواده ای ۴ فرزند دارد. الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟  
 ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟  
 پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید  $A$  پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم:  

$$P(A) = P(\text{دختر، دختر، دختر، دختر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

حل ب) مشابه بالا. اگر  $B$  پیشامد دختر بودن فقط فرزند اول و آخر این خانواده باشد، سپس:  

$$P(B) = P(\text{دختر، پسر، پسر، دختر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

اکنون فرض کنید  $C$  پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد.  
 یکی از حالت‌ها به صورت زیر است:

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از:  $P(C) = P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) = \frac{1}{16}$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به  $\binom{4}{2} = 6$  حالت میسر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان  $\frac{1}{16}$  است.

$$P(C) = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

بنابراین:

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال (۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سوادند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی سواد باشند را به دست می آوریم. احتمال اینکه اولین نفر بی سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای گذاری انجام نشده است، بی سواد بودن فرد دوم مستقل از بی سواد بودن فرد اول نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می شود، می توان فرض کرد که بی سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس:

$$\begin{aligned} P(\text{نفر پنجم بی سواد}) \times P(\text{نفر چهارم بی سواد}) \times P(\text{نفر سوم بی سواد}) \times P(\text{نفر دوم بی سواد}) \times P(\text{نفر اول بی سواد}) &= P(\text{هر پنج نفر بی سواد}) \\ &= (0/2)^5 \\ &= 0/00032 \end{aligned}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



تعریف

صفحه ۷۱ آمار و احتمال

۱ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه ای  $S$  باشند، آیا  $A$  و  $B$  می توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید. **صز - برکت نهانیت**  
 $A, B$  ناسازگار  $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$   
 $\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

۲ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل و  $E \subseteq A$  و  $F \subseteq B$  دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا  $E$  و  $F$  نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟ **تغییر نهان**  
 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$   
 $E = \{2\} \subseteq A$  و  $F = \{1, 3\} \subseteq B : E \cap F = \{\}$   $P(E \cap F) = \frac{1}{4} \neq P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{16}$   
 ۲ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل اند.

الف)  $A$  و  $A'$  و  $B$   
 $P(A') \cdot P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \cap B)$   
 $= P(B - A) = P(B \cap A')$

ب)  $A'$  و  $A'$  و  $B'$   
 $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$   
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B')$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ در یرتاب دو ناس به طور بی دربی، اگر  $A$  پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و  $B$  پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در ناس اول باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید. *واستقالت*

$$n(S) = 3^2 \quad A = \{13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103\} \quad B = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{5}{108}$$

$$A \cap B = \{33\} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B)$$

۵ از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  یک عضو انتخاب می کنیم. فرض کنید  $A$  پیشامد یک عدد زوج و  $B$  پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad B = \{3, 6, 9\}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

$$A \cap B = \{6\} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10} \neq P(A) \cdot P(B) \quad \text{واستقالت}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

$A =$  موفقیت در روی اول  
 $B =$  موفقیت در روی دوم

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار  $0/6$  و روی بیمار دیگر  $0/8$  است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه:  
 الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد. ب) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد.  
 ب) فقط روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد.

الف)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0/6 \times 0/8 = 0/48$

ب)  $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = (1 - 0/6) \times (1 - 0/8) = 0/4 \times 0/2 = 0/08$

ج)  $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/8 - 0/48 = 0/32$

۷ یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

$n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72$

$$P(\text{شش، شش، شش}) = P(6/1) \times P(6/2) \times P(6/3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۸ در یک امتحان پنج گزینه ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که:

- الف) به تمام سؤال ها پاسخ صحیح داده باشد.  $(\frac{1}{5})^{10}$   
 ب) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.  $(\frac{1}{5})^5 \times (\frac{4}{5})^5$   
 پ) به نیمی از سؤال ها پاسخ صحیح داده باشد.  $(\frac{1}{5})^5 \times (\frac{4}{5})^5 \times (\frac{1}{5})^5$

۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جای گذاری بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر دو مهره قرمز باشند.  $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.  $P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

پ) هر دو مهره هم رنگ باشند.  $P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{14}{30}$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



## بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۱۰ جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:  
الف) هر سه لامپ معیوب باشند.  
ب) حداقل یک لامپ معیوب باشند.

$$A = \text{هر سه لامپ معیوب} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$$P(A') = 1 - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}$$

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

$$(1 - 0.9)^{10}$$

۱۲ اگر A و B دو پدیده مستقل باشند به طوری که  $P(A \cap B) = 0.1$  و  $P(A \cap B') = 0.4$  حاصل  $P(A \cup B')$  را به دست آورید.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B')} = \frac{0.1}{0.4} \Rightarrow \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B')} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = 0.1 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B) = P(A) + (1 - P(B)) - P(A) \cdot (1 - P(B))$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{14}{25} - \frac{4}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511



بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

پایان

دکتر مزبان حبیبی

49 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511

+989166161828 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511