

جزوه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **حد در بینهایت و حد های نامتناهی - دوازدهم ریاضی و تجربی خورسندیان**

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی

بچه های من

خوش آمدید

دوازدهم تجربی ریاضی

حد، بی‌نهایت و حد‌های نامتناهی



بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



یادآوری:

برای $f(x)$ قبل از معکوس کردن، مقدار $x \rightarrow a$

به $f(a)$ را جایگزین کنید.

$f(a) \equiv$ به جای x ، مقدار $f(a)$ را جایگزین کنید.

تذکره: $f(x)$ ممکن است هیچ ارتباطی با حد نداشته باشد.

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



حد $\equiv \lim$

تذکره: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و f و g حد صفر ای باشند

باین صورت وخرج را تجربه کرد و صفاً $(x-a)$ ظا حرمی شود

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 4}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x+1} = \frac{-3}{2}$$

$$x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1) \cdot (x-4)$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 12} = \frac{0}{0}$$

$x \rightarrow 2$
($x \neq 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+4} = \frac{5}{6}$$

$$\text{فرد: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$



بی نهایت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ - x^2 - x^2 \\ \hline x^2 + x - 2 \\ - x^2 - x \\ \hline x - 2 \\ x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{x-1}{x^2 + x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حللوان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



پ : $(x-1) \equiv x^2 - 1$ کجریه

$$x^2 + x - 2 = x^2 - 1 + x - 1$$

$$= \underbrace{(x-1)(x^2 + x + 1)}_{x^2 - 1} + (x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 + 1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 2)$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1) = \sqrt{x^2-1^2} = x-1$$

حد دراد کفالی :

$$\sqrt{a^2} = a \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

مربوع =: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2 \times 2} = 1/4$$



مگرین =

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 + 2x - 4}{x^2 - 16} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} =$$



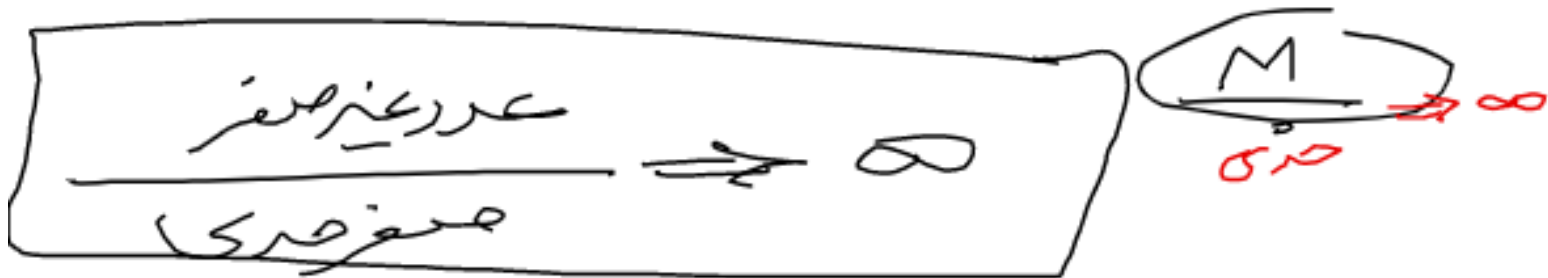
بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



نکته: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = M$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$	$g(x) \rightarrow +, M > -$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$	$g(x) \rightarrow -, M > -$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$	$g(x) \rightarrow +, M < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$	$g(x) \rightarrow -, M < 0$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \frac{+}{0^+} = +\infty$



بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$x \rightarrow \sigma^+ : \begin{cases} x - a = \sigma^+ \\ a - x = \sigma^- \end{cases}$$

$$x > a$$

توجه

$$x \rightarrow \sigma^- : \begin{cases} x - a = \sigma^- \\ a - x = \sigma^+ \end{cases}$$

$$x < a$$

توجه

$$\sigma^- < a < \sigma^+$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی

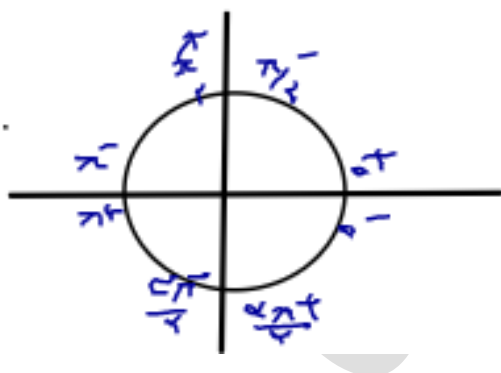


$\dot{c} =$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\dot{c} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}}$$



$$= \frac{1}{0^-} = -\infty$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حاملان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



نکته: $[n^+] = n$ و $[n^-] = n-1$ و $m \in \mathbb{Z}$ و $1 \leq n$ باشد

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{\lfloor x \rfloor} = \frac{2}{\lfloor 2^+ \rfloor} = \frac{2}{2} = +\infty$$

$$x \rightarrow 2 \begin{cases} x \rightarrow 2^+ : x - 2 = 0^+ \\ x \rightarrow 2^- : x - 2 = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\lfloor x \rfloor - 2}{x - 2} = \frac{\lfloor 2^- \rfloor - 2}{2^- - 2} = \frac{1 - 2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lfloor x \rfloor - 2}{x - 2} = \frac{\lfloor 2^+ \rfloor - 2}{2^+ - 2} = \frac{2 - 2}{2^+ - 2} = \frac{0}{0^+} \Rightarrow \text{مطلوب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{\lfloor x \rfloor - 2} = \frac{2^- - 2}{\lfloor 2^- \rfloor - 2} = \frac{1}{2 - 2} = \frac{1}{0^-} \Rightarrow \text{مطلوب و صورت نامعین}$$



یازدهم ری

حد در بینهایت :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ و } -\infty} f(x)$$

توجه : $(+\infty)^n = +\infty$

$$n \in \mathcal{N}$$

$$(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (+\infty) \times (-\infty) &= -\infty \\ (-\infty) \times (-\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

$$a \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad a \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ +\infty & a < 0 \end{cases}$$



$$a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

∴ نقیضاً

$$\frac{x}{\infty} \Rightarrow 0$$



$$\text{نکته } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2 + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{x}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1\sqrt{x}}{x} = 0$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حلبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 + \alpha x - 1}{\sqrt{x^2 - \beta x + \gamma}} = x^2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \alpha x - 1}{\sqrt{x^2 - \beta x + \gamma}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \alpha x - 1}{\sqrt{x^2 - \beta x + \gamma}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{1}$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حللن یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$\text{سأه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - vx + 1}{rx^2 + ax^2 + v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{rx^2} = \frac{a}{r}$$

روش فاکتورگیری

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(a - \frac{v}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(r + \frac{a}{x} + \frac{v}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{r + \frac{a}{x} + \frac{v}{x^2}}$$

~~$\frac{a}{r}$~~

$$\text{سأه: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - vx + 1}{x^4 - rx^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: با صد درصد در احوال کنید (دو درس)

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{5x-2} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 2x + 1}}{3x^5 - \sqrt{x^4 + 2x} - 5} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^5 + 1} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} =$$



$$\therefore \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = (\infty) \xrightarrow{\text{برعکس وادار}} \infty$$

$$\infty \times \text{عدد صفر} \Rightarrow \infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{(-\infty)^2} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حلبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$\text{سؤال: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - 1}{x^5 + 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{سؤال: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{-2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{x^2} \right) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|} = 0$$



گند

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) = 9 + \frac{\sqrt{x}}{-\infty} = 9 + 0 = 9$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} x^2 + \sqrt{x^2} - 4 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} x^2 \right)$$

$$= \frac{1}{x} \times x^2 = x \rightarrow \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x^5}}{\frac{x}{2} - 0} = \frac{x^2 + \frac{1}{+\infty}}{\frac{x}{2} - 0} = \frac{+\infty + 0}{0 - 0} = -\frac{x}{0}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{r^n} = \frac{r}{r}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$



عجائب :

حالت

اخط $x = a$ را جانب تخت و تابع $f(x)$ می تویر از

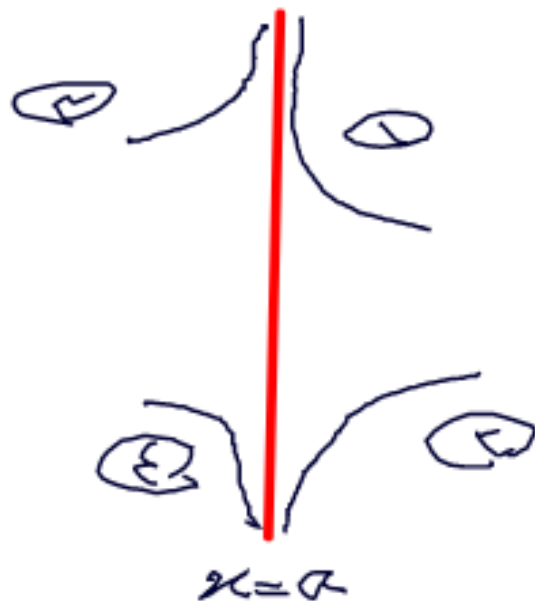
صداقت هه از شرايط زیر برقرار شه :

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



تابع:
$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

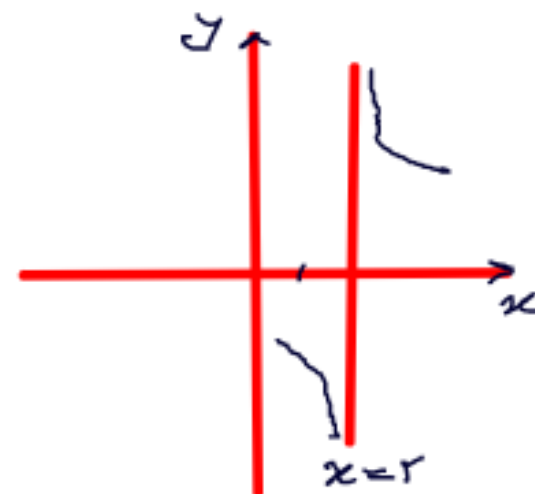
$$\begin{aligned} 2^+ - 2 &= 0^+ \\ 2^- - 2 &= 0^- \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$





میان افقی:

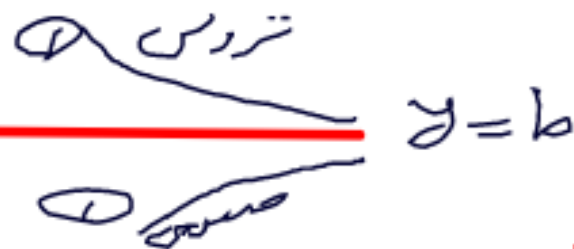
محل

خط $y = b$ را می بیند افقی، با توجه به نوع آخر می آید:

شکل زیر برقرار است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$





گرفتن: صحیح، نتیجه ربع $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ را بیابید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{0}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 2$$

صفت: صفت: نامشخص

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow y = 2$$

صفت: صفت: یکتا

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حسابان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$\therefore \text{نقطه } F(x) = \frac{x+0}{x+1}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x = (-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} F(x) = \frac{x}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{میبند است } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 \text{ میبند است}$$

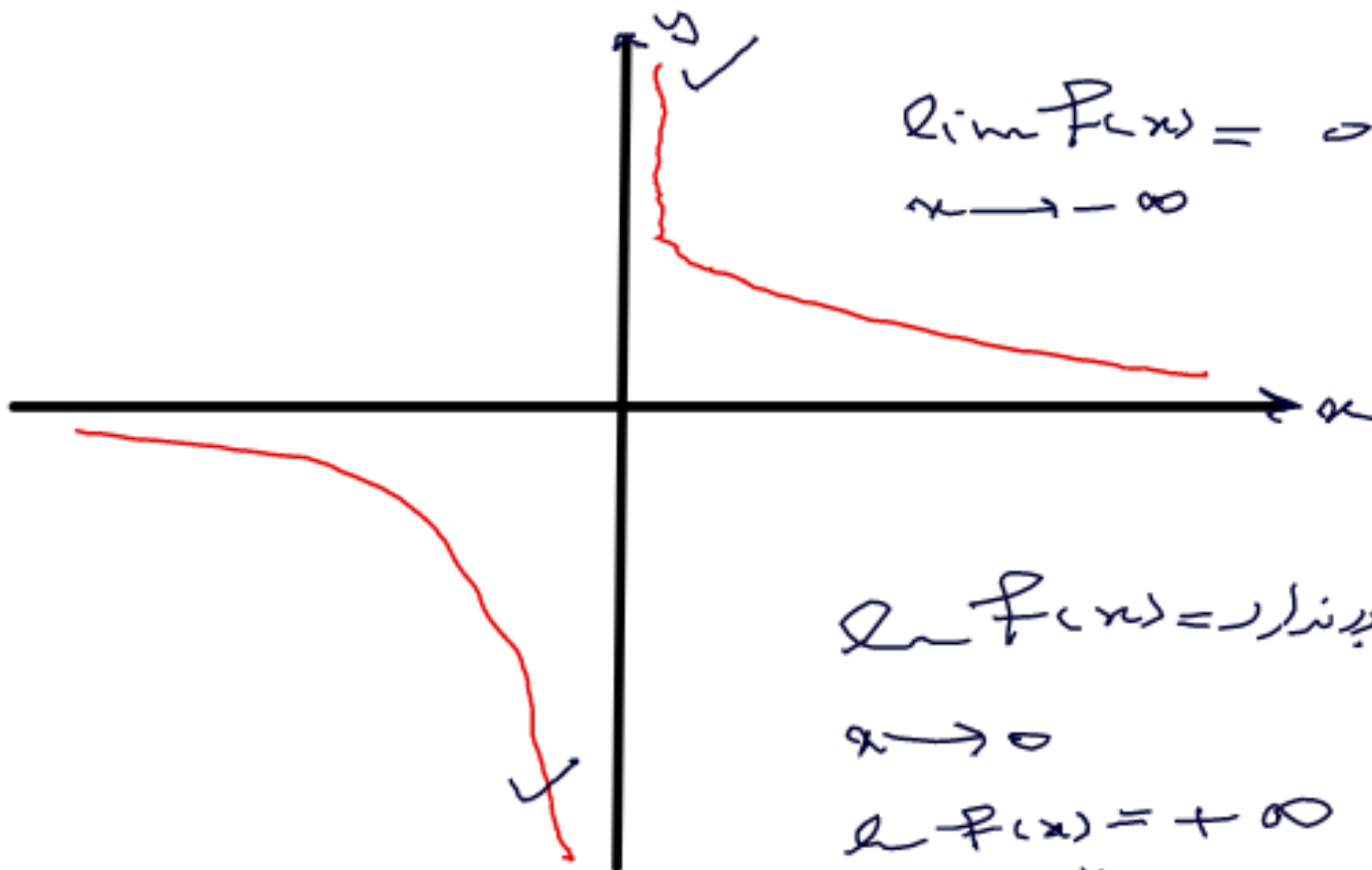
بزه های آموزشی، ریاضی سه و حسابان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{و غیرنندار}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

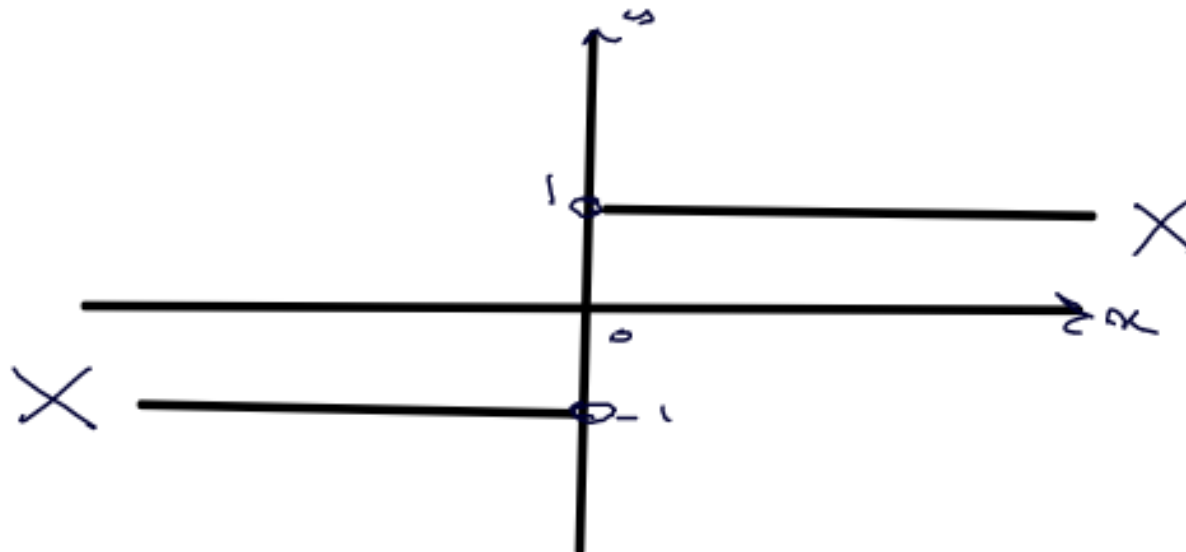
$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



دکتر مزبان حبیبی

31 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی

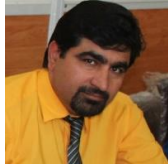


دکتر مزبان حبیبی
مبانی
پ

32 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی، ریاضی سه و حبلان یک دوازدهم ریاضی و تجربی، دکتر مزبان حبیبی



دکتر مزبان حبیبی

33 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511