

۱- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله $y = \left(\frac{1}{2}x + a\right)(x^2 - 4)$ بر محور x ها در یک نقطه مماس است؟

- (۱) \emptyset (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) $\{-2, 2\}$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

برای اینکه منحنی تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ بر محور x ها مماس باشد باید معادله‌ی $f(x) = 0$ ریشه‌ی مضاعف داشته‌باشد. بنابراین ریشه‌های $x^2 - 4 = 0$ در معادله‌ی $\frac{1}{2}x + a = 0$ باید صدق کند.

$$x = 2 \rightarrow \frac{1}{2}(2) + a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$x = -2 \rightarrow \frac{1}{2}(-2) + a = 0 \rightarrow a = 1$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲- از معادله‌ی $\text{Log}_2(x+3) = \text{Log}_2(2x-1) + \text{Log}_2 x$ مقدار $\text{Log}_2 x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_A A = 1, \text{Log} A + \text{Log} B = \text{Log} A \cdot B, \text{Log}_{B^m} A^n = \frac{n}{m} \text{Log}_B A,$$

$$\text{Log} A - \text{Log} B = \text{Log} \frac{A}{B}$$

با توجه به فرمولهای فوق داریم:

$$\text{Log}(2x-1)(x+3) = \text{Log} \frac{2x}{2} \Rightarrow (2x-1)(x+3) = 15 \Rightarrow x = 2 \text{ است جواب معادله}$$

$$\text{Log}_2 x = \text{Log}_2 2 = \text{Log}_{2^{\frac{1}{3}}} 2 = \frac{1}{3} \text{Log}_2 2 = \frac{1}{3} \text{ بنابراین:}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳- اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: شرط این که سه عدد a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی باشند باید $d = b - a = c - b$ باشد. بنابراین:

$$p + 1 = 2p - 5 \Rightarrow p = 6$$

$$d = (3p + 4) - (2p + 3) = p + 1 = 6 + 1 = 7$$

روش دوم: شرط این که سه عدد a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی باشند باید:

$$2(3p + 4) = (2p + 3) + (5p - 1) \Rightarrow p = 6 \Rightarrow 15, 22, 29 \Rightarrow d = 7 \text{ بنابراین:}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴- به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{m}$ واسطه‌ی عددی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $a, b, c \Rightarrow 2b = a + c$

ریشه‌های معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم داریم:

$$\alpha + \beta = 2x \Rightarrow s = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{-3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm 4$$

که $m = -4$ مورد قبول است. زیرا اگر $m = 4$ باشد معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۵- عبارت $\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

(۱) $2\sin 4x \sin \frac{x}{2}$

(۲) $-2\sin 4x \sin \frac{x}{2}$

(۳) $4\sin 4x \sin \frac{x}{2}$

(۴) $-4\sin 4x \sin \frac{x}{2}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \text{و} \quad 1 - \cos x = 2\sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$$\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x = 2\sin 4x \cdot \cos x - 2\sin 4x$$

$$= 2\sin 4x (\cos x - 1) = 2\sin 4x \left(-2\sin \frac{x}{2}\right) = -4\sin 4x \cdot \sin \frac{x}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۶- تابع $f(x) = [2\sin x]$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ ([] تابع جزء صحیح است.)

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول: چون تابع $g(x) = 2\sin x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ دارای Max است بنابراین تابع

$f(x) = [2\sin x]$ در $x = \frac{\pi}{4}$ هیچ نوع پیوستگی ندارد.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = [2(1^-)] = 1 \Rightarrow \text{هیچ نوع پیوستگی ندارد}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{2}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[m]{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots} \approx \sqrt[m]{a} \left(x + \frac{b}{m \cdot a} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} \approx \sqrt[3]{8} \left(x + \frac{2}{24} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + \frac{1}{6} - 2x = \frac{1}{6}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۸- حد عبارت $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{3x-4}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4 - (x+1)(3x-4)}{x(x+1)(x-2)}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2x^2 + x}{x(x+1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۹- اگر $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$ تابع $f \circ g$ در کدام مجموعه نقاط مشتق پذیر نیست؟

- (۱) $\{4, -3\}$ (۲) $\left\{4, \frac{5}{2}\right\}$ (۳) $\left\{4, -3, \frac{5}{2}\right\}$ (۴) $\{4, -3, -6\}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{4\}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{4\} \mid \frac{x+2}{x-4} \in \mathbb{R} - \{-3\} \right\}$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ 4, \frac{5}{2} \right\}$$

پس تابع $f \circ g$ در $x = 4$ و $x = \frac{5}{2}$ مشتق پذیر نیست.

* تذکر: اگر ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ را پیدا کنیم به همین نتیجه می‌رسیم.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۰- به ازای کدام مقدار k بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه‌ی $[1, 3]$ فریندی یکدیگرند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقادیر Max و Min مطلق تابع f را در بازه‌ی $[1, 3]$ بدست می‌آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غیر قابل قبول} \\ x = 2 \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی در بازه $[1, 3]$ می‌شوند $x \in \{1, 2, 3\}$
 $f(1) = k - 2$

$$f(3) = k \text{ Max} \Rightarrow k - 4 = -k \Rightarrow k = 2$$

$$f(2) = k - 4 \text{ Min}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۱- تابع یا ضابطه‌ی $y = ax + b + \frac{2x^2}{x+1}$ تابع هموگرافیکی است که محور x ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

$$y = \frac{(ax + b)(x + 1) + 2x^2}{x + 1} \Rightarrow y = \frac{ax^2 + ax + bx + b + 2x^2}{x + 1}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{(a + 2)x^2 + (a + b)x + b}{x + 1}$$

اولاً باید $a + 2 = 0$ باشد یعنی $a = -2$

ثانیاً نقطه‌ی $A|_1$ در معادله‌ی تابع صدق می‌کند. $b = 1 \Rightarrow -2 + 2b = 0 \Rightarrow b = 1$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۲- کدام دنباله واگرا است؟

$$\left\{ (n^2)^{(-1)^{2n-1}} \right\} \quad (2)$$

$$\left\{ \frac{n + \sin n}{n - \sin n} \right\} \quad (1)$$

$$\left\{ \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\} \quad (4)$$

$$\left\{ \sin \left(4n + 1 \right) \frac{\pi}{2} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin n}{n - \sin n} = 1$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2)^{(-1)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2)^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(4n + 1 \right) \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$n \rightarrow +\infty$

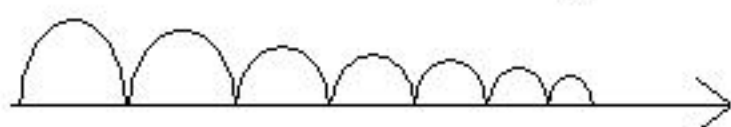
$n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ 1 & n \text{ فرد} \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله‌ی مذکور واگرا است.}$$

$n \rightarrow +\infty$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۳- موجی بر روی نیم‌دایره‌هایی بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه‌ی ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود، اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی دنباله‌ی از اعداد حقیقی است، مجموع



این دنباله کدام است؟

- (۱) 2π
 (۲) 3π
 (۳) $\frac{3}{2}\pi$
 (۴) $\frac{5}{2}\pi$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به صورت تست داریم:

$$\text{محیط نیم دایره} = \frac{1}{2} \times \text{قطر} \times \pi$$

$$\text{محیط نیم دایره اول} = \frac{1}{2} \times 1 \times \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\text{محیط نیم دایره ی } n \text{ ام}}{\text{محیط نیم دایره ی } (n-1) \text{ ام}} = \frac{\frac{\pi}{2} D_n}{\frac{\pi}{2} D_{n-1}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{25}, \dots$$

$$a = \frac{\pi}{2}, \quad q = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۴- اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۱
 (۳) $+\infty$
 (۴) $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = 2^{-\infty} = 0$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

۱۵- تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته
 (۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
 (۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته
 (۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع $f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ همواره برای $n \geq 1$ در $x = 0$ پیوسته است.

بنابراین تابع داده شده در $x = 0$ پیوسته می باشد.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۶- تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1| & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر است، a کدام است؟

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

روش اول: چون این تابع در $x = 1$ مشتق پذیر است لذا در $x = 1$ پیوسته است در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 0$$

روش دوم:

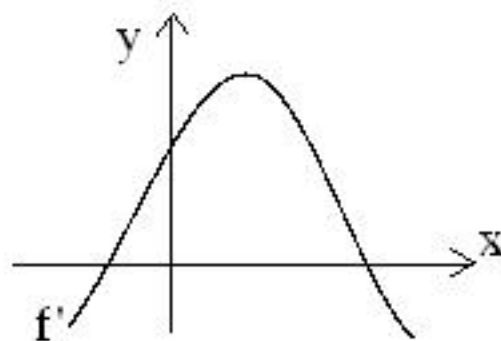
نکته: تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)^n |x-1| & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$ برای هر عدد طبیعی n ، در $x = 1$ مشتق پذیر است و $f'(x) = 0$ بنابراین با توجه به نکته ی فوق $a = 0$ است.

روش دوم: چون این تابع در $x = 1$ مشتق پذیر است لذا در $x = 1$ پیوسته است در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 0$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۷- نمودار f' مشتق تابع f به صورت شکل مقابل است تابع f از نظر نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و نقطه ی عطف چگونه است؟



- (۱) فقط یک ماکسیمم در سمت راست محور y ها
- (۲) یک ماکسیمم و یک مینیمم و یک عطف در سمت راست محور y ها
- (۳) یک مینیمم در سمت چپ محور y ها، یک ماکسیمم و یک نقطه ی عطف در سمت راست محور y ها
- (۴) یک ماکسیمم در سمت چپ محور y ها، یک مینیمم و یک نقطه ی عطف در سمت راست محور y ها

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. نکته ی (۱) نقاط برخورد f' با محور x ها طول های اکسترم نسبی تابع f است.

نکته ی (۲) و نقاط اکسترم f' (وفتی f' پیوسته است) طول نقطه ی عطف تابع f است.

با توجه به نکات فوق و شکل داده شده نمودار f دارای دو اکسترم و یک عطف می باشد و طول نقطه ی عطف و طول

Max مثبت است یعنی سمت راست محور y ها و طول نقطه ی min منفی است یعنی سمت چپ محور y ها.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۸- در فضیه ی مقدار میانگین در مورد مشتق برای تابع با ضابطه ی $y = x^3 - x + 1$ ، بر بازه ی $[1, b]$ مقدار c برابر $\sqrt{7}$ است، b کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -۵

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = f'(c) \Rightarrow \frac{(b^3 - b + 1) - (1 - 1 + 1)}{b - 1} = 3c^2 - 1$$

$$\frac{b^3 - b}{b - 1} = 3(\sqrt{7})^2 - 1 \Rightarrow b(b + 1) = 20 \Rightarrow b = 4$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۱۹- تفرع نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = x^2 |x - 1|$ در بازه ی (a, b) رو به پائین است بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

سوالات کنکور ۸۴ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۴ سوال
هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

(۱) ∞ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1) & x \geq 1 \\ -x^2(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & x > 1 \\ - & x = 1 \\ -3x^2 + 2x & x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & x > 1 \\ - & x = 1 \\ -6x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

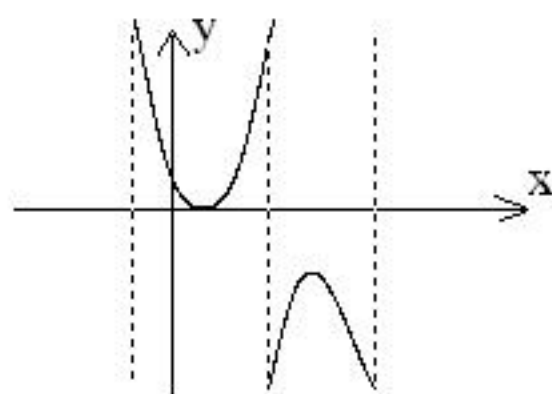
اگر $x > 1$ یا $x < \frac{1}{3}$ باشد $f''(x) > 0$ پس تقعر نمودار f رو به بالا است.

اگر $\frac{1}{3} < x < 1$ باشد $f''(x) < 0$ پس تقعر نمودار f رو به پایین است در نتیجه $(a, b) = (\frac{1}{3}, 1)$ بنابراین

$b - a = \frac{2}{3}$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲- شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{1 + a \sin x}{1 + b \sin x}$ در بازه ی $[\frac{-\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ است، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



- (۱) (۱, ۲)
- (۲) (-۱, ۲)
- (۳) (۲, -۱)
- (۴) (-۲, ۱)

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع f ، $x = -\frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ مجانب های قائم می باشد. پس:

$x = -\frac{\pi}{6}$ یا $x = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow 1 + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 2$

و ضمناً نمودار تابع f بر محور x ها مماس است بنابراین معادله ی $1 + a \sin x = 0$ دارای ریشه ی مضاعف است بنابراین $a = \pm 1$ می باشد که در این نمودار طول نقطه ی تماس مثبت است لذا $a = -1$ مورد قبول است. توجه کنید: اولاً معادله ی $1 \pm \sin x = 0$ همیشه دارای ریشه ی مضاعف است.

ثانیاً) $1 + a \sin x = 0$ نتیجه می گیریم $\sin x = -\frac{1}{a}$ و باید $-\frac{1}{a}$ بزرگتر از صفر باشد یعنی $a < 0$ است.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۱- حاصل $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x) dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
- (۲) $\frac{1}{16}$
- (۳) $\frac{1}{8}\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{1}{16}\sqrt{2}$

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x \cdot \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x dx = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \sin 4x dx$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 4x \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{16} (0 - 1) = \frac{1}{16}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

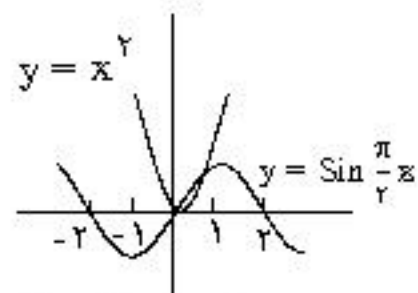
۲۲- مساحت محدود به نمودار دو تابع با ضابطه ی $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ و $y = x^2$ کدام است؟

$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (۱) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (۴)

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. نمودار هر دو تابع را رسم می کنیم.

نقاط برخورد: $x = 0, x = 1$
 $x^2 = \frac{\sin \pi}{2} x$

$$s = \left| \int_0^1 \left(x^2 - \sin \frac{\pi}{2} x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi} \right| = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$



سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۳- اگر $\int \sqrt{\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4} dx = \frac{f(x)}{3x} + c$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

$x^4 - 3$ (۱) $x^3 - 4$ (۲) $x^3 + 4$ (۳) $x^4 + 3$ (۴)

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\int \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 4} dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + -\frac{1}{x} + c = \frac{x^4 - 3}{3x} + c \Rightarrow f(x) = x^4 - 3$$

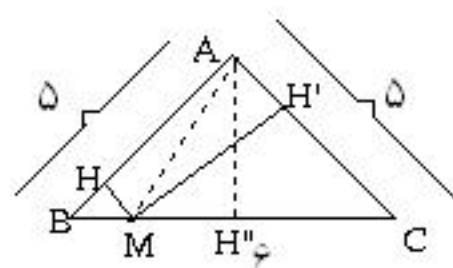
سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۴- در مثلثی به اضلاع ۵ و ۵ و ۶ واحد نقطه ی M ضلع بزرگتر را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کرده است، مجموع فواصل M از دو ساق این مثلث کدام است؟

$\frac{3}{6}$ (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{8}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: مجموع فواصل نقطه‌ی M روی فاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از ۲ ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.
 مثلث ΔABC متساوی‌الساقین است پس ارتفاع AH'' میانه نیز هست.



$$AH''^2 = AC^2 - CH''^2 \Rightarrow AH'' = 4$$

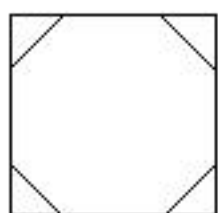
$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MAC} = S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{1}{2} MH \cdot AB + \frac{1}{2} MH' \cdot AC = \frac{1}{2} AH'' \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (MH + MH') \cdot AC = S_{\Delta ABC} \Rightarrow MH + MH' = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{24}{5}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

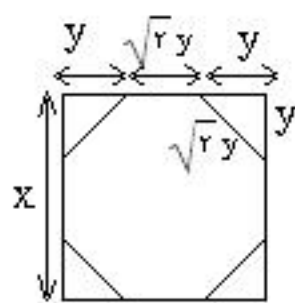
۲۵- در شکل مقابل مساحت مربع دو واحد است. مساحت هشت ضلعی منتظم کدام است؟



$$(1) \quad 4(\sqrt{2}-1) \quad (2) \quad 4(2-\sqrt{2})$$

$$(3) \quad 2(\sqrt{2}-1) \quad (4) \quad 2(2-\sqrt{2})$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$x = 2y + \sqrt{2}y \Rightarrow x = (2 + \sqrt{2})y$$

بنا بر فرض مساحت مربع ۲ واحد است یعنی $x^2 = 2$ پس داریم:

$$2 = (2 + \sqrt{2})^2 y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{6 + 4\sqrt{2}}$$

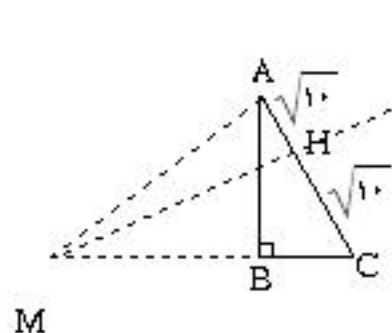
$$S_{\text{ضلعی ۸}} = S_{\text{مربع}} - 4S_{\text{مثلث قائم الزاویه}} \Rightarrow \text{مساحت هشت ضلعی} = 2 - 2y^2 = 2(1 - y^2)$$

$$= 2 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \right) = 4(\sqrt{2} - 1)$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۶- اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است، عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از نزدیکترین رأس این مثلث چند واحد است؟

$$(1) \quad \frac{7}{5} \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad \sqrt{10} \quad (4) \quad \frac{25}{3}$$



$$AB = 6, \quad BC = 2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{10}$$

فرار می‌دهیم $MC = z$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2} MH \cdot AC$$

$$6z = \sqrt{z^2 - 10} \times 2\sqrt{10} \Rightarrow 3z = \sqrt{10z^2 - 100}$$

$$9z^2 = 10z^2 - 100 \Rightarrow z^2 = 100 \Rightarrow z = 10$$

$$MB = MC - BC \Rightarrow MB = ۸$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۷- حجم یک کره به شعاع a با حجم یک مخروط به شعاع فاعده \sqrt{a} برابر است. طول ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) a (۲) \sqrt{a} (۳) $\frac{1}{3}\sqrt{a}$ (۴) $\frac{1}{3}a$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}(\pi(\sqrt{a})^2 \cdot h)$$

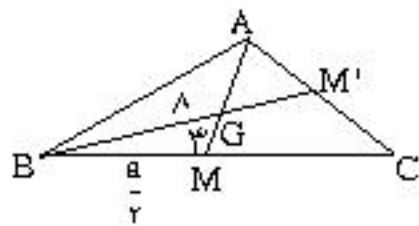
$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 h \Rightarrow h = a$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۸- مثلثی با معلوم بودن دو میانه $m_a = ۹$ و $m_b = ۱۲$ و ضلع a قابل رسم است، اندازهی ضلع a کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$GM = \frac{1}{3}AM = ۳$$

$$GM' = \frac{1}{3}BM' = ۴$$

$$BMG \text{ مثلث } : ۸ - ۳ < \frac{a}{2} < ۸ + ۳$$

$$۵ < \frac{a}{2} < ۱۱ \Rightarrow ۱۰ < a < ۲۲ \Rightarrow a = ۱۶$$

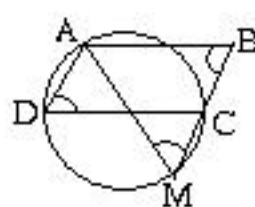
با توجه به گزینهها تنها $a = ۱۶$ در نامساوی مورد نظر صدق می کند.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۲۹- در متوازی الاضلاع ABCD دایرهی محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطهی M قطع کرده است. مثلث ABM کدام نوع است؟

- (۱) متشابه ACD (۲) متساوی الساقین (۳) متساوی الاضلاع (۴) قائم الزاویه

$$\angle D = \angle B = \angle M = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

پس مثلث ABM متساوی الساقین است.

سراسری - ریاضی - ۸۴

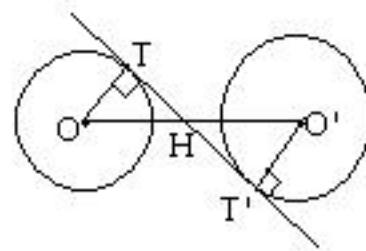
۳۰- شعاع دو دایرهی خارج هم به ترتیب $\frac{۲۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۵}$ سانتیمتر است. اگر زاویهی بین مماس داخل و خط مرکزین دو دایره ۳۰° درجه باشد. طول خط مرکزین دو دایره چند سانتیمتر است؟

- (۱) ۵۵ (۲) $\frac{۵۷}{۵}$ (۳) ۶۰ (۴) $\frac{۶۲}{۵}$

$$\widehat{OHT} = ۳۰^\circ \Rightarrow OH = ۲OT \Rightarrow OH = ۱۵$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{OHT} = ۳۰^\circ \Rightarrow OH = ۲OT' \Rightarrow OH = ۴۵$$



$$OH + O'H = ۱۵ + ۴۵ = ۶۰$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۱- کدام تبدیل ایزومتری است و شیب خط را حفظ نمی‌کند؟

- (۱) دوران (۲) تجانس (۳) انتقال (۴) بازنتاب نسبت به یک نقطه

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دوران ایزومتری است و شیب را حفظ نمی‌کند.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۲- خطی که به موازات فصل مشترک دو صفحه‌ی متمایز است

(۱) الزاماً با هر دو صفحه موازی است.

(۲) با هر خط یکی از صفحات موازی است.

(۳) می‌تواند در صفحه‌ای موازی هر دو صفحه فرار گیرد.

(۴) می‌تواند بر هر خط یکی از صفحات عمود باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شرط توازی خط و صفحه: هرگاه خط با یکی از خطوط صفحه‌ای موازی باشد با آن صفحه موازی است. بنابراین خطی

که به موازات فصل مشترک دو صفحه‌ی متمایز می‌باشد با هر دو صفحه موازی است.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۳- صفحه‌ی P وفتی بر صفحه‌ی P' عمود است که:

(۱) هر خط موازی با یکی از صفحه‌ها عمود بر صفحه‌ی دیگر باشد.

(۲) هر خط عمود بر یک صفحه، بر صفحه‌ی دیگر نیز عمود باشد.

(۳) یک خط واقع در یکی از دو صفحه عمود بر فصل مشترک دو صفحه باشد.

(۴) یک خط واقع در صفحه‌ی P بر دو خط واقع در صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دو صفحه برهم عموداند هرگاه یک خط واقع در یکی از صفحات بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد و هرگاه خط بر ۲ خط

مقاطع واقع در صفحه‌ای عمود باشد بر آن صفحه عمود است.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۴- اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

- (۱) $a \cdot (c \times b)$ (۲) $a \cdot (b \times c)$ (۳) $b \cdot (a \times c)$ (۴) $(a \times c) \cdot b$

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

بنابر خواص دترمینان هرگاه جای دو سطر عوض شود دترمینان فرینه می‌شود پس:

$$a \cdot (c \times b) = b \cdot (a \times c) = (a \times c) \cdot b = -a \cdot (b \times c)$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۵- دو بردار a و b به طولهای ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازند مساحت مثلثی که بر روی دو بردار

$a - 2b$ و $3a + 2b$ تولید شود کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{2} |(a - 2b) \times (3a + 2b)| = \frac{1}{2} |2a \times b - 6b \times a| = 4|a \times b|$$

$$= 4|a||b| \sin \theta = 4 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 24$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۶- طول قطعه‌ی مماسی که از نقطه‌ی $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ رسم شود برابر کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) $2\sqrt{3}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. $MT = \sqrt{16 + 1 - 8 + 4 + 3} = 4$

* نکته: اگر معادله‌ی دایره $C(x, y) = 0$ باشد و $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای از صفحه‌ی آنگاه طول مماس رسم شده بر

دایره از نقطه A برابر است با: $MT = \sqrt{C(x_0, y_0)}$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۷- معادله‌ی یک بیضی پس از دوران محورهای آن حول مبدأ به اندازه‌ی 45° در جهت مثلثاتی به صورت

$x'^2 + 4y'^2 = 4$ است. معادله‌ی این بیضی قبل از دوران کدام است؟

(۱) $3x^2 + 3y^2 + 6xy = 4$ (۲) $3x^2 + 3y^2 - 6xy = 8$

(۳) $5x^2 + 5y^2 - 4xy = 4$ (۴) $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی دلخواهی بر بیضی $x'^2 + 4y'^2 = 4$ اختیار می‌کنیم، مانند $(1, 0)$ این نقطه را به اندازه‌ی 45° دوران می‌دهیم تا مختصات آن در دستگاه قبل از دوران معلوم شود، با فرار دادن این نقطه در گزینه‌ها، گزینه درست مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

از طرفی باید مبین مقطع مخروطی $\Delta = b^2 - 4ac$ منفی باشد تا فرم بیضی پیدا کند که گزینه‌های ۳ و ۴ را فقط

بررسی می‌کنیم: که نقطه $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ در گزینه‌ی ۴ صادق است.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۸- اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ با دترمینان ماتریس وارن A برابر باشد m کدام است؟

(۱) $-1, 1$ (۲) $2, 0$ (۳) $-2, 0$ (۴) $-2, 2$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. همواره داریم:

بنابر فرض $|A^{-1}| = |A|$ پس $|A| = \pm 1$

$|A| = 1 - m \Rightarrow 1 - m = \pm 1 \Rightarrow m = 0$ یا $m = 2$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۹- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ دو تایی (α, β) کدام است؟

- (۱) (۱۱, ۲) (۲) (۲, ۱۳) (۳) (۴, ۱۱) (۴) (۴, ۱۳)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در معادله $A^2 - (a+d)A + |A|I_2 = 0$ صادق

است. $A^2 = \alpha A + \beta I_2 \Rightarrow A^2 - \alpha A - \beta I_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha = a + d = 2$

$\beta = -|A| = 13$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۰- در روش گاوس - جردن ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ درآمده است.

$a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حل مسائل کفایت دستگاه را ایجاد کنیم و سپس از مقایسه یا جاگذاری مجهولات استفاده کنیم:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ -x + 4y + 5z = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } x} \begin{cases} 6y + 2z = 4 \\ 9y + 13z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20z = -20 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \Rightarrow a + b + c = x + y + z = 2$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۱- اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $((-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (-1, 2) \rightarrow \{0, 1\} \in A_1 \\ A_2 &= (2, 4) \rightarrow \{3\} \in A_2 \\ A_3 &= (-3, 6) \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \in A_3 \\ A_4 &= (4, 8) \rightarrow \{5, 6, 7\} \in A_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

که ۱۰ عدد صحیح به این بازه تعلق دارد.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۲- مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به سه مجموعه‌ی A و B و C افراز کرده ایم اگر $A = \{n: n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{n: n = 6k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ ، کدام عدد طبیعی به مجموعه‌ی C تعلق دارد؟

سوالات کنکور ۸۴ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۴ سوال
هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

۱۱ (۱) ۴۳ (۲) ۴۴ (۳) ۳۷ (۴)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقیمانده‌ی عدد مورد نظر بر عدد ۶ باید مخالف ۱ و ۵ باشد که تنها عدد ۴۴ این شرط را داراست.

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۳- تعداد نقاطی از صفحه‌ی مختصات، که درون دایره‌ی به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 16$ فرار داشته و هر دو مختص آن نقاط عددی صحیح باشد، کدام است؟

۴۱ (۱) ۴۲ (۲) ۴۴ (۳) ۴۵ (۴)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموعه‌ی نقاط داخل دایره $x^2 + y^2 < 16$

$x = 0 \Rightarrow y = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \rightarrow$ نقطه ۷

$x = \pm 1 \Rightarrow y = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \rightarrow$ نقطه ۱۴

$x = \pm 2 \Rightarrow y = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\} \rightarrow$ نقطه ۱۴

$x = \pm 3 \Rightarrow y = \{0, \pm 1, \pm 2\} \rightarrow$ نقطه ۱۰
نقطه ۴۵

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۴- تاس سالمی را ۱۰ بار می‌ریزیم، احتمال اینکه ۶ بار برآمد تاس، عددی بزرگتر از ۳ باشد، کدام است؟

$\frac{63}{256}$ (۱) $\frac{75}{256}$ (۲) $\frac{75}{512}$ (۳) $\frac{105}{512}$ (۴)

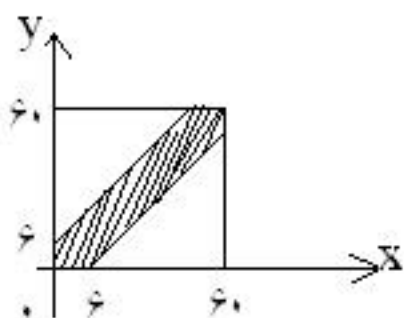
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $\binom{10}{6} \times \binom{1}{2}^6 \times \binom{1}{2}^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{2^9} = \frac{105}{512}$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۵- دو نفر فرار گذاشتند که بین ساعت ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند هر کدام زودتر رسید فقط ۶ دقیقه منتظر دیگری باشد وگرنه کار خود را شروع کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

$1/18$ (۱) $1/19$ (۲) $1/21$ (۳) $1/24$ (۴)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

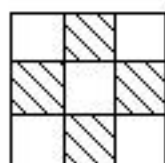


$$|x - y| < 6 \quad 0 \leq x, y \leq 6$$

$$p(A) = \frac{S_{\text{هاشور}}}{S_{\text{کل}}} : p(A) = \frac{60 \times 60 - 54 \times 54}{60 \times 60} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 1/19$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۶- یک سکه به شعاع $1/5$ سانتیمتر را بر روی صفحه‌ی شطرنجی شکل مقابل که هر ضلع آن ۶ سانتیمتر است پرتاب نموده‌ایم. احتمال اینکه سکه درون مربع‌های سفید فرار گیرد کدام است؟



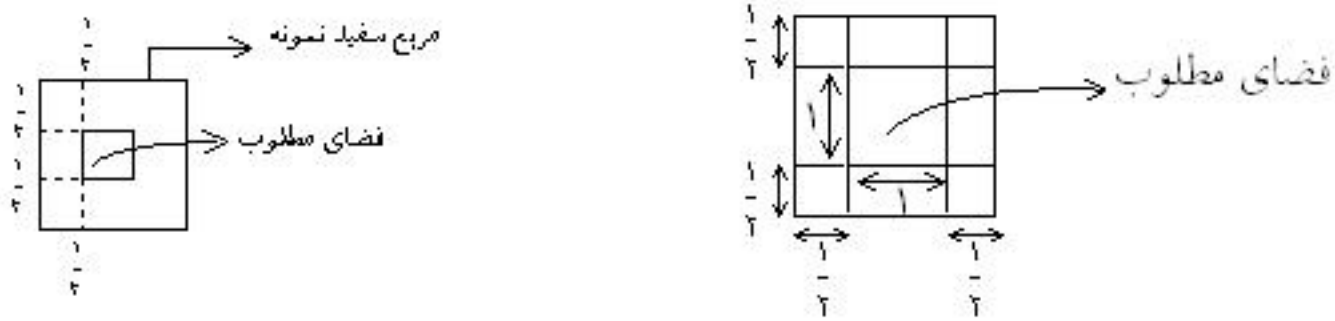
$1/5$ (۱) $1/6$ (۲)

$4/25$ (۳) $5/36$ (۴)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

یکی از مربع‌های سفید را در نظر می‌گیریم و احتمال آن که سکه درون این مربع فرار گیرد را محاسبه می‌کنیم، سپس

این احتمال را ۵ برابر می‌کنیم.



$$P(A) = 5 \times \frac{(S \text{ فضای مطلوب})}{(S \text{ صفحه ی شطرنجی})} = 5 \times \frac{1 \times 1}{6 \times 6} = \frac{5}{36}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۷- چند نوع گراف ساده، همبند و نامنتظم که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۰ باشد، وجود دارند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. برای این که گراف همبند باشد باید حداقل $q \geq p - 1$ باشد که

$$\begin{cases} p = 5, q = 5 & \text{ق ق} \\ p = 4, q = 6 & \text{غ ق} \\ p = 3, q = 7 & \text{غ ق} \end{cases} \rightarrow \text{در این حالت گراف کامل و منتظم است.}$$

پس تنها یک حالت $p = q = 5$ قابل قبول است



که شکل های آن به صورت زیر است:

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ متناظر با کدام گراف است؟



گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

مجموع عناصر هر سطر ماتریس مجاورت برابر درجه ی رأس است پس دنباله ی درجات به ترتیب مجموع عناصر

سطرهاست ۱ و ۲ و ۲ و ۳

سراسری - ریاضی - ۸۴

۴۹- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقیمانده ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است، بزرگترین مقدار a مضرب کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

$$a = 37q + (q^2 - 2)$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$0 \leq q^2 - 2 < 37$$

$$2 \leq q^2 < 39$$

$$\sqrt{2} \leq q < \sqrt{39} \Rightarrow q_{\text{Max}} = 6$$

سوالات کنکور ۸۴ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۴ سوال
 هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

$$\Rightarrow a_{\text{Max}} = 37 \times 6 + 36 - 2 = 256 \Rightarrow 16 \mid 256$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۵۱- در نمایش عدد طبیعی ۶۷ در مبنای ۳ رقم صفر چند مرتبه تکرار شده است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد رقم صفر

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 67 \overline{) 201} \\ \underline{18} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$67 = (2111)_3$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۵۱- باقیمانده ی تقسیم عدد $2^{42} - 3^{42}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. * نکته: $a^n - b^n$ بر $a + b$ بخش پذیر است هرگاه n زوج باشد.
 باقیمانده ی $2^{42} - 3^{42}$ را بر ۷ محاسبه می کنیم.

$$7 \mid 2^{42} - 3^{42} \xrightarrow{\text{فرما}} 2^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{42} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 3^{42} - 2^{42} \equiv 0 \pmod{7}$$

$$7 \mid 3^{42} - 2^{42} \xrightarrow{\text{فرما}} 3^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3^{42} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$35 \mid 3^{42} - 2^{42} \text{ نتیجه می شود } (5, 7) = 1,$$

$$\text{پس: } 7 \mid 3^{42} - 2^{42}, 5 \mid 3^{42} - 2^{42}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۵۲- دو ظرف داریم، در اولی ۵ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه، در دومی ۷ مهره ی سفید و ۱۰ مهره ی سیاه است، از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رویت در ظرف دوم فرار می دهیم آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) $\frac{11}{27}$ (۳) $\frac{34}{81}$ (۴) $\frac{41}{81}$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: مهره دوم سفید: C مهره اول سیاه: B مهره اول سفید: A

$$p(C) = p(A) \cdot p(C|A) + p(B) \cdot p(C|B)$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{1}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{68}{9 \times 18} = \frac{34}{81}$$

$$\text{روش دوم: } \frac{\text{تعداد سفیدها}}{\text{تعداد کل}} = \text{احتمال سفید بودن مهره ی دوم} \rightarrow \frac{5}{9} = \text{احتمال سفید بودن مهره ی اول}$$

$$= \frac{7 + \frac{5}{9}}{7 + 10 + 1} = \frac{\frac{68}{9}}{18} = \frac{34}{81}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۵۳- با کدام مقدار a و با کدام حوزه مقادیر x تابع $p(\bar{x} = i) = a \left(\frac{1}{3}\right)^i$ یک تابع احتمال اولین موفقیت در امتحان i ام

است؟

هر گونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

(۱) $a = ۱$ ، ناشمارا نامتناهی

(۲) $a = ۱$ ، ناشمارا متناهی

(۳) $a = ۲$ ، شمارا نامتناهی

(۴) $a = ۲$ ، شمارا متناهی

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. حوزه‌ی مقادیر X می‌تواند ... و ۳ و ۲ و ۱ باشد.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(X=i) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a \left(\frac{1}{3}\right)^i = 1 \Rightarrow a \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow a = 2$$

سراسری - ریاضی - ۸۴

۵۴- در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم، احتمال این که دو مهره هم‌رنگ نیاشند کدام است؟

$\frac{۳۷}{۶۶}$ (۴)

$\frac{۳۵}{۶۶}$ (۳)

$\frac{۱۹}{۳۳}$ (۲)

$\frac{۶}{۱۱}$ (۱)

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(\text{هر دو هم‌رنگ نباشند}) = \frac{\binom{5}{1} \binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{66}$$

سراسری - ریاضی - ۸۴