

۱- منحنی به معادله $(x-1)(x^2 - ax + a) = 0$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می کند، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

- (۱) $-4 < a < 0$ (۲) $0 < a < 2$ (۳) $0 < a < 4$ (۴) $a > 4$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $x^2 - ax + a = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^{2k} = I, A^{2k+1} = A \Rightarrow A^7 - A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳- در یک تصاعد عددی با جمله اول a اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود آنگاه به مجموع 20 جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S_1 = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow S_1 = 10(2a_1 + 19d) \rightarrow S_2 = 10(2a_1 + 19(d+1))$$

$$S_2 = 190 + S_1$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴- جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه مقادیر i

کدام است؟

- (۱) $\{7, 9\}$ (۲) $\{1, 3, 5\}$ (۳) $\{1, 4, 7\}$ (۴) $\{1, 5, 9\}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(2k\pi + \frac{i\pi}{3}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{i\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos\frac{i\pi}{3} = \sin\frac{i\pi}{6}$$

با بررسی کردن اعداد $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ مشخص می شود که $\{1, 5, 9\}$ جواب است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۵- اگر $f(x) = x^2 - 1$ نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ با محور x ها کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) یک نقطه تلافی - دو نقطه تماس
 (۲) دو نقطه تلافی - یک نقطه تماس
 (۳) سه نقطه تلافی - فاقد نقطه تماس
 (۴) فاقد نقطه تلافی - دو نقطه تماس

$$y = x^2 - 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 1 = \pm 1 \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x^2 = 2 & x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = 0 & x = 0 \end{cases} \text{ مضاعف}$$

یک ریشه مضاعف و دو ریشه فرینه دارد.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۶- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه: باید $k+3 < 0$ باشد تا Max داشته باشد.

$$f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k = 0 \rightarrow \Delta' = 4 - k(k+3) = 0$$

$$-k^2 - 3k + 4 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۷- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right); x \in \mathbb{R}$

(۱) $\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right); x \in \mathbb{R}$

(۴) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x \right); x > 0$

(۳) $\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right); x > 0$

$$y - x = \sqrt{x^2 + 1} \quad y > 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$$

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۸- اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - b \right)$ کدام است؟

(۴) $\cos^2 2a$

(۳) $\sin^2 2a$

(۲) $\cos 4a$

(۱) $\sin 4a$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\cos a \cos b \sin a \sin b = 2(\sin a \sin b \cos a \cos b) = 2(\sin 2a \sin 2b) =$$

$$2 \sin 2a \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = 2 \sin 2a \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2a \right) = \sin 4a$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} - \left| \frac{x}{x+1} \right| \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\infty$ (۳) ۲ (۴) $-\infty$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

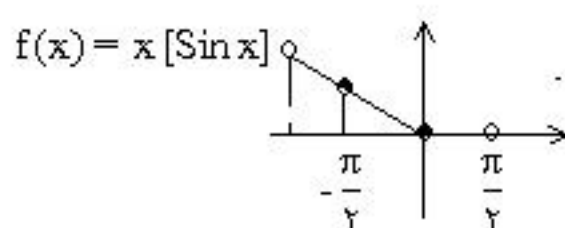
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x}{x+1} \right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{2x + x^2 - x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۰- تابع با ضابطه $f(x) = x [\sin x]$ روی بازه $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) پیوسته - مشتق پذیر (۲) ناپیوسته - مشتق پذیر (۳) پیوسته - مشتق ناپذیر (۴) ناپیوسته - مشتق ناپذیر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روی $(-\pi, \frac{\pi}{2})$ پیوسته و در صفر مشتق ناپذیر است.



سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۱- مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{20}$ (۴) $\frac{5}{16}$

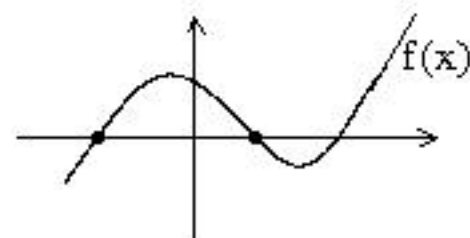
$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} = \frac{1}{16}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۲- ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 - 2x + 1 = 0$ چگونه‌اند؟

- (۱) ریشه مضاعف مثبت - یک ریشه منفی (۲) ریشه مضاعف منفی - یک ریشه مثبت
 (۳) یک ریشه مثبت - دو ریشه منفی (۴) دو ریشه مثبت - یک ریشه منفی



سراسری - ریاضی - ۸۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت

۱۳- اگر T دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ باشد این منحنی روی بازه $(\pi, \pi + T)$ چند نقطه عطف دارد؟

سوالات کنکور ۸۳ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال
هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) فافد عطف

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\Gamma = 2\pi$ پس بازه‌ی مورد نظر $(\pi, 3\pi)$ است تابع $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ را روی $(\pi, 3\pi)$ در نظر می‌گیریم تابع فوق در $x_0 = 2\pi$ دارای نقطه عطف است.

$$y = \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x} = \frac{2 \operatorname{Sin} \frac{x}{2} \operatorname{Cos} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{Cos}^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

یادآوری:

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۴- اگر دنباله a_n واگرا و تمام جملات آن در یک همسایگی صفر به شعاع ۴ فرار گیرند و سری $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{a_n \cdot b_n\}$ چگونه است؟

۱) واگرا (۲) یکنوا (۳) همگرا به ۴ (۴) همگرا به صفر

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $\sum b_n$ همگرا است پس $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ هم که کران‌دار است. لذا دنباله $\{a_n b_n\}$ همگرا به صفر است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۵- اگر دنباله $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ و تابع $f(x) = (x+1)[x]$ مفروض باشند، آنگاه دنباله $f(a_n)$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۴)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 3$
همگرا به ۲ و کوچکتر از ۲

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۶- تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x]^2 - [x]$ روی بازه $(-1, 2)$ کدام است؟

۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نقاط صحیح باید بررسی کنیم که در بازه داده شده نقاط $x = 0$ و $x = 1$ هستند که تابع در نقطه‌ی به طول ۱ $x = 0$ پیوسته است و در نقطه به طول ۱ $x = 1$ ناپیوسته است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۷- طول اکسترم تابع $f(x) = \frac{\operatorname{Sin} x}{2 + \operatorname{Cos} x}$ در فاصله $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} \rightarrow y' = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۸- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sin x & x \geq 0 \\ ax^n & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ مشتق مرتبه سوم دارد a کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'''(0^+) = f'''(0^-) \Rightarrow 1 = n(n-1)(n-2)a \Rightarrow n = 3 \text{ و } a = \frac{1}{6}$$

دقت کنید اگر $n > 3$ یا $n < 3$ باشد، $f'''(0^-)$ وجود ندارد یا صفر است که با $f'''(0^+)$ فرق می‌کند.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۱۹- تابع f روی بازه $[a, b]$ تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

(۱) هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی است.

(۲) هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است.

(۳) در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است.

(۴) در هر نقطه اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است عکس آن صحیح نیست.

سراسری - ریاضی - ۸۳

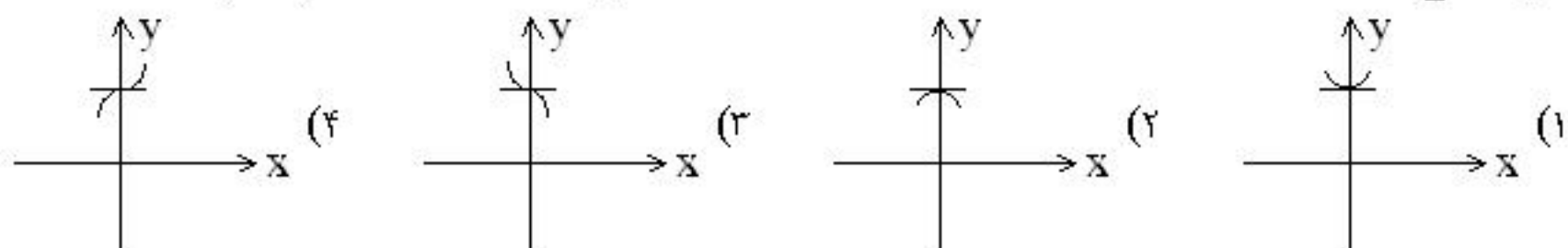
۲۰- کدام یک از خطوط زیر مجانب منحنی $y = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x}$ نیست؟

(۱) $x = 2$ (۲) $x = 0$ (۳) $y = 1$ (۴) $y = 1 + x$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 0$ و $x = 2$ مجانب‌های فانمانند، $y = 1$ مجانب افقی است. تابع مجانب مایل ندارد.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2 + \sin x - x \cos x$ در همسایگی نقطه $x = 0$ به کدام شکل است؟

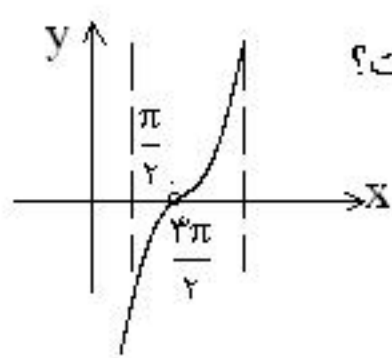


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $y' = \cos x - \cos x + x \sin x \rightarrow y'(0) = 0$

$y'(0^+) > 0, y'(0^-) > 0 \Rightarrow$ در اطراف صفر هم علامتند $\sin x$ و x

$y' = 0$ ریشه مضاعف دارد پس باید عطف داشته باشد. در ضمن $f(x)$ در اطراف صفر صعودی است.

سراسری - ریاضی - ۸۳



۲۲- شکل مقابل فسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + a \sin x}{b + \cos x}$ است، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{3}$
 (۲) $2 - \sqrt{3}$
 (۳) $1 + \sqrt{3}$
 (۴) $2 + \sqrt{3}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع در نقطه $\frac{3\pi}{2}$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد. $b + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} f(x) = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$x \rightarrow \frac{2\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$ کدام است؟

$$x \rightarrow \frac{1}{2}^+$$

- (۱) $-\pi$
 (۲) $-\frac{\pi}{2}$
 (۳) π
 (۴) 2π

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حد را با فاعده‌ی هوییتال حل می‌کنیم.
 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2x}} = \frac{\pi \sin \pi x}{-\frac{1}{\sqrt{2x}}} = -\pi$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۴- اگر $f(x) = \text{ArcSin}(2x - 1) - 2 \text{ArcSin} \sqrt{x}$ حاصل $f'(x) - f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{2}$
 (۲) 0
 (۳) $\frac{\pi}{2}$
 (۴) π

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} - 2 \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} \right)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} = 0 \Rightarrow f(x) \text{ در فواصل پیوسته تابعی ثابت است.}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x) - f(x) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۵- مجموع ریمان تابع $f(x) = \text{Log} \frac{4x + 1}{4x}$ روی بازه $\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{8}\right]$ برای $n = 4$ وفتی C_i در وسط هر زیر بازه‌های

افراز شده است و Δx ها برابرند کدام است؟

سوالات کنکور ۸۳ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال
 هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

$\frac{1}{4} \text{Log } 3$ (۴) $\frac{1}{4} \text{Log } 3$ (۳) $\frac{1}{4} \text{Log } 2$ (۲) $\frac{1}{4} \text{Log } 2$ (۱)

$C_n(f) = \sum_{i=1}^4 f(c_i) \Delta x$ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$C_n(f) = ? \quad \Delta x = \frac{15 - 7}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow C_n(f) = \frac{1}{4} \left(f(1) + f\left(\frac{11}{4}\right) + f\left(\frac{12}{4}\right) + f\left(\frac{14}{4}\right) \right)$

$f(x) = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{4x} \right) \rightarrow f(1) = \text{Log} \frac{5}{4}$

$f\left(\frac{11}{4}\right) = \text{Log} \left(\frac{6}{5} \right) \rightarrow f\left(\frac{12}{4}\right) = \text{Log} \left(\frac{7}{6} \right)$

$f\left(\frac{14}{4}\right) = \text{Log} \left(\frac{8}{7} \right) \rightarrow C_n(f) = \frac{1}{4} \left(\text{Log} \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \right) = \frac{1}{4} \text{Log } 2$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۶- حاصل $\int_{-1}^1 x \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) dx$ برابر کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۱)

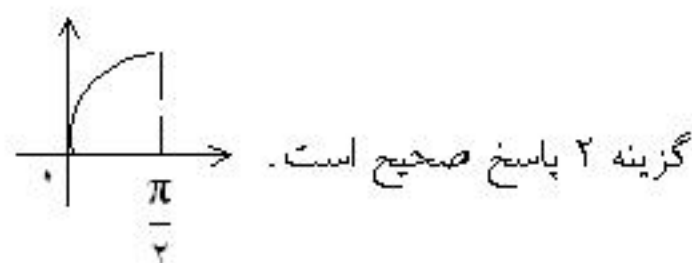
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع داده شده فرد و پیوسته است. پس: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (f پیوسته و فرد)

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۷- مساحت محصور بین منحنی تابع $y = \sin x$ با محور x ها در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۲ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۳) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$



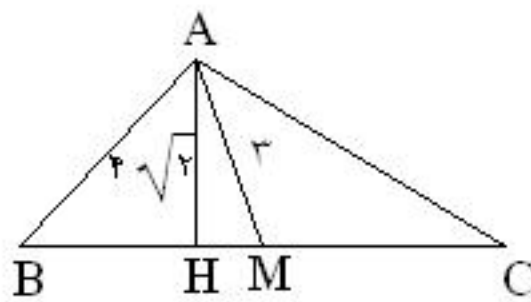
سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۸- در یک مثلث قائم الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب ۳ و $2\sqrt{2}$ است، اندازه ضلع متوسط این مثلث

کدام است؟

$3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس: $\begin{cases} BC = 6 \\ MC = 3 \end{cases}$



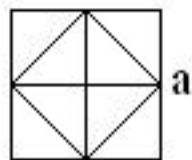
در مثل AHM با توجه به رابطه فیثاغورس $MH = 1$

پس در مثل AHC: $AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = 2\sqrt{6}$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۲۹- از به هم وصل کردن وسط ضلع‌های مربعی یک مربع جدید ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع بزرگتر به کوچکتر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۴

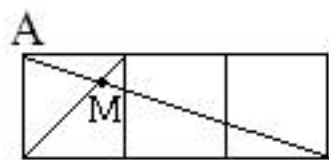


$$\frac{S}{S'} = \frac{a \times a}{\frac{a \times a}{2}} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۰- در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، فاصله MA چند برابر $\sqrt{10}$ است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{1}{5}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های AMD و MBC متشابهند زیرا $AD \parallel BC$ پس:

$$AB = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{\sqrt{10} - AM} = \frac{1}{3}$$

$$4AM = \sqrt{10} \Rightarrow AM = \frac{1}{4}\sqrt{10}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

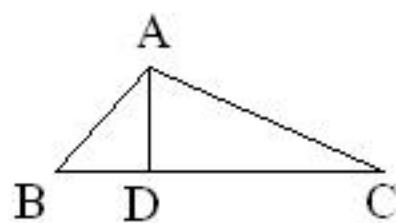
۳۱- برای محاسبه سطح کره به طور مستقیم کدام اصل به کار رفته است؟

- (۱) کواالیری در مورد منحنی
 (۲) کواالیری در مورد سطح
 (۳) کواالیری در مورد حجم
 (۴) تقسیم حجم کره به شبه‌مخروط‌های بسیار و بسیار زیاد
 گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۲- اگر فرض شود در مثلثی مجذور طول نیمساز داخلی زاویه A برابر با حاصلضرب اضلاع آن زاویه است، استنباط چگونه است؟

- (۱) $A < 90^\circ$ (۲) $A = 90^\circ$ (۳) $A > 90^\circ$ (۴) فرض نادرست است



$$\begin{cases} AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \\ AD^2 = AB \cdot AC \end{cases}$$

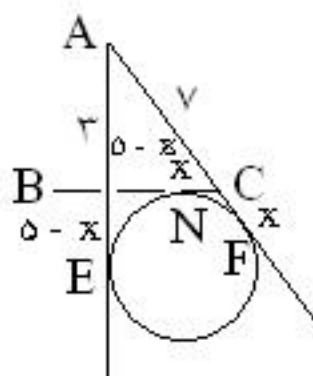
پس $BD \cdot DC = 0$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۳- در مثلثی به طول اضلاع ۷ و ۵ و ۳ واحد دایره محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، نقطه تماس ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{2}{9}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$AE = AF = \text{نصف محیط} = r/5$$

$$r + x = r/5 \Rightarrow x = 0/5$$

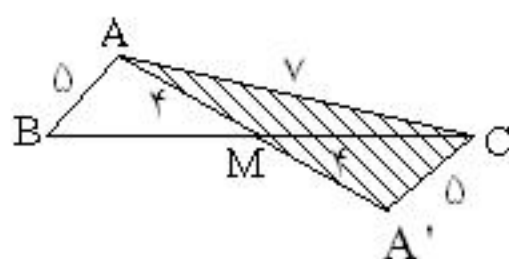
$$5 - x = 5 - 0/5 = 4/5$$

$$\frac{NC}{BN} = \frac{0/5}{4/5} = \frac{1}{9}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۴- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = 7$ و $c = 5$ و میانه $m_a = 4$ با خط کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می شود؟

- (۱) بی شمار جواب (۲) جواب منحصر به فرد (۳) دو جواب متمایز (۴) سه جواب



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مسئله را حل شده فرض کنید میانه m_a را به اندازه خودش ادامه داده مثلث AA'C با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است. بعد از رسم مثلث AA'C رأس C را به M وصل کرده به اندازه خودش ادامه می دهیم تا B بدست آید.

با دو مثلث همبند ABC را می توان ساخت پس جواب مثلث، منحصر به فرد را می پذیریم.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۵- تحت یک بازتاب نسبت به خط نقطه $(1, -2)$ روی نقطه $(5, 2)$ تصویر می شود. تصویر کدام نقطه تحت این بازتاب نقطه $(4, 3)$ است؟

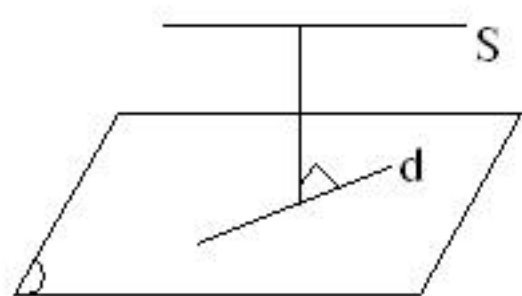
- (۱) $(1, 0)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(-1, 0)$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله عمود منصف دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(2, 5)$ را نوشته به صورت $y = -x + 3$ خواهد بود که در این صورت شیب خطی که $C(3, 4)$ و فرینه آن روی آن فرار دارد باید یک باشد با آزمون گزینه ها، گزینه ی ۴ صادق است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۶- صفحه P و خط d واقع بر آن و خط δ موازی صفحه P است. اگر فقط یک پاره خط متکی بر دو خط d و δ و عمود بر آن دو موجود باشد، وضع آن دو خط نسبت به هم چگونه است؟

- (۱) موازی (۲) متقاطع (۳) متناظر (۴) عمود بر هم اند.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. S و d متناظرند. چون عمود مشترک آنها منحصر به فرد است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۷- اگر $|a| = 2\sqrt{6}$ و $|b| = 5$ و $|a \cdot b| = 0$ اندازه بردار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $|a - b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b} = \sqrt{24 + 25} = 7$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۸- نقطه $A(a, b, 4)$ بر روی خط گذرنده بر دو نقطه $(1, -1, 0)$ و $(0, 1, 2)$ واقع است، دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, 3)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
 $\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow \frac{a-1}{a} = \frac{b+1}{b-1} = \frac{4}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۳۹- معادله صفحه گذرنده بر دو نقطه $(2, 3, -1)$ و $(0, 1, 1)$ موازی محور X ها کدام است؟

- (۱) $x + z = 1$ (۲) $y + z = 2$ (۳) $-x + y = 1$ (۴) $2x - y + z = 0$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در معادله صفحه موازی محور X ها حرف X وجود ندارد.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۰- دسته خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ فطرهای یک دایره‌اند اگر این دایره از نقطه $(2, 5)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای m ، عددگذاری میکنیم تا دو خط به دست آید. محل برخورد آنها، مرکز دایره است.

$$\left. \begin{matrix} m = -2 \Rightarrow x = +1 \\ m = -1 \Rightarrow y = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{مرکز: } C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow CM = R = 5$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۱- سهمی با کانون $F(1, 1)$ و خط هادی به معادله $x = 3$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، فاصله AB چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

$$x = \alpha - a = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
 $F \begin{vmatrix} \alpha + a = 1 \\ \beta = 1 \\ a = -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{معادله سهمی}} (y-1)^2 = -4(x-2)$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2} \quad A \begin{vmatrix} 1 + 2\sqrt{2} \\ 1 - 2\sqrt{2} \end{vmatrix} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۲- فاصله دو کانون مقطع مخروطی به معادله $xy + \sqrt{2}x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک دوران محورهای مقطع مخروطی داده شده را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

$$\frac{(x'^2 - y'^2)}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') = 1$$

$$x'^2 - y'^2 + 2x' - 2y' = 2 \Rightarrow \begin{cases} (x'+1)^2 - (y'+1)^2 = 2 \\ \frac{(x'+1)^2}{2} - \frac{(y'+1)^2}{2} = 1 \Rightarrow (I) \end{cases}$$

$$(I) : \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow FF' = 2c = 4$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۳- اگر $abc \neq 0$ باشد، از معادله $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام نتیجه گیری صحیح است؟

(۱) $a + b + c = 0$ (۲) $a - b + c = 0$ (۳) $a + b - c = 0$ (۴) $-a + b + c = 0$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{جمع } a \text{ برابر سطر اول با}} \begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ 0 & a(a+1) & a(b+1)+c \\ 0 & b(a+1)-c & b(b+1) \end{vmatrix} = 0$$

بسط بر حسب سطر اول

$$\rightarrow ab(a+1)(b+1) - [(b(a+1)-c)(a(b+1)+c)] = 0 \Rightarrow$$

$$ab(a+1)(b+1) - ab(a+1)(b+1) - bc(a+1) + ac(b+1) + c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$c(-ab - b + ab + a + c) = 0 \Rightarrow c(a - b + c) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۴- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی یا مجموعه جهانی U باشند، مجموعه $A' \Delta B'$ برابر کدام است؟

(۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) $A \Delta B$ (۴) U

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $A' \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۵- در یک کلاس ۵۴ نفری، دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی ایست در بدترین حالت، در هر ماه، ۱ نفر فرار دهیم که اگر ۴ بار این عمل را انجام دهیم، ۶ نفر می ماند که آنها را نیز در لانهها پخش می کنیم که حداقل ۵ نفر در یک لانه خواهیم داشت.

$$\left\lfloor \frac{54}{12} \right\rfloor + 1 = 5 \text{ (اصل لانه کیوتری)}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۶- اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \cap B = \{2, 3\}$ و مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۶ عضو است.

تعداد عضوهای مجموعه B کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|(A - B) \times (B - A)| = 6 \Rightarrow \begin{cases} n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 5 - 2 = 3 \\ |A - B| \times |B - A| = 6 \Rightarrow |B - A| = 2 \end{cases}$$

سوالات کنکور ۸۳ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال
هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 2 = n(B) - 2 \Rightarrow n(B) = 4$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۷- نقطه $M(x, y)$ درون مثلثی با سه رأس $(0, 0)$ و $(4, 0)$ و $(3, 3)$ به تصادف انتخاب می‌شود، با کدام احتمال این نقطه روی یکی از میانه‌های مثلث فرار می‌گیرد؟

(۱) $\frac{1}{144}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{4}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $P = \frac{\text{مساحت طول میانه‌ها}}{\text{مساحت مثلث}} = \frac{\text{مساحت فضای پیشامد}}{\text{مساحت فضای نمونه}}$

واحد اندازه‌گیری پیشامد از یک فضای یک بعدی و واحد اندازه‌گیری فضای نمونه‌ای ۲ بعدی است پس احتمال صفر است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۸- از مجموعه اعداد $\{100, 101, 102, \dots, 600\}$ عددی به تصادف انتخاب شده است با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ می‌تواند باشد؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{13}{36}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$= \text{اعداد ۱ تا ۹۹ مضرب ۴ یا ۹} - \text{اعداد ۱ تا ۶۰۰ مضرب ۴ یا ۹}$$

$$= \left(\left[\frac{600}{4} \right] + \left[\frac{600}{9} \right] - \left[\frac{600}{4 \times 9} \right] \right) - \left(\left[\frac{99}{4} \right] + \left[\frac{99}{9} \right] - \left[\frac{99}{36} \right] \right) =$$

$$(150 + 66 - 16) - (24 + 11 - 2) = 200 - 33 = 167$$

$$P(A) = \frac{167}{501} = \frac{1}{3}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۴۹- بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \text{کل اعداد سه رقمی} &= \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} = 60 \\ \text{نعداد جایگشت} &= \binom{2}{2} \times \binom{3}{1} \times 3! = 18 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{دو رقم فرد بین سه رقم} = \text{انتخاب یکی از بقیه} \times \text{انتخاب ۲ نفر} = \binom{2}{2} \times \binom{3}{1} \times 3! = 18$$

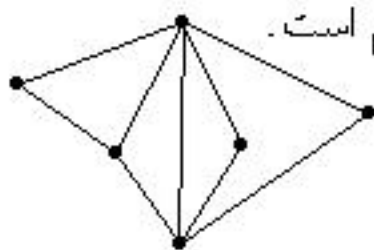
$$\Rightarrow P(A) = \frac{18}{60} = \frac{1}{3}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۵۰- درجه راس‌های گراف همبند G به صورت ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و b و a است. کمترین عدد $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید $a, b \geq 1$ ولی با $a = 1$ و $b = 1$ شکل غیر قابل رسم است.
گزینه ۱ و $a = 1$ و $b = 2$ تعداد رئوس درجه فرد فرد می شود غیر ممکن است.
پس $a = 2$ و $b = 2$ می نیمم درجه رئوس است. $a + b = 4$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۵۱- عدد شش رقمی $\overline{a63b29}$ بر عدد ۹۹ بخش پذیر است، رقم a کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{mk}$

$$\begin{cases} \overline{a63b29} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 9 - 2 + b - 3 + 6 - a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b - a \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow b - a = 1 \\ \overline{a63b29} \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a + 6 + 3 + b + 2 + 9 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a + b + 2 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a + b = 7 \text{ یا } 16 \end{cases}$$

$a = 3$ و $b = 4$ قابل قبول است.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۵۲- دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته هم ارزی به پیمانه m همبسته شده اند. اگر $(m, 7) = 1$ ، باقیمانده عدد m^m بر ۷ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$185 \equiv 24 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 185 - 24 \Rightarrow m \mid 161 \Rightarrow m \mid 7 \times 23 \xrightarrow{(m, 7) = 1} m \mid 23 \Rightarrow m = 23$$

$$\Rightarrow m^m = 23^{23} \equiv 2^{23} \equiv (2^3)^7 \times 2^2 \equiv 1 \times 4 = 4$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

۵۳- اگر $a^p = 10k + 7$ آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه: $a^{4k+r} \equiv a^r \pmod{10} \quad (1 \leq r \leq 4)$

$$a^p \equiv a^{p+4} \equiv 7 \pmod{10}$$

پس تمام توان هایی که فرم $4k+r$ دارند (در یک تصاعد هستند) یکان برابر دارند.

سراسری - ریاضی - ۸۳

۵۴- هفت کیوتر به چند طریق می توانند در سه لانه متمایز فرار گیرند به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد کیوتر در لانه i ام با x_i نمایش داده:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_i \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعداد جواب طبیعی}} \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

سراسری - ریاضی - ۸۳

سوالات کنکور ۸۳ رشته ریاضی مرکز پیش دانشگاهی امام خمینی (ره) ناحیه ۱ شیراز
 تنظیم کننده سوالات و پاسخنامه مزبان حبیبی اسفند ۸۷ تعداد سوالات ۵۵ سوال
 هرگونه کپی برداری بدون کسب اجازه ممنوع است ۰۹۱۷۶۱۹۳۵۱۱

۵۵- در پرتاب دو تاس یا هم می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است، با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرداند؟

- (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $|S| = \binom{6}{2} = 15$

$S' = \{(6, 6), (5, 6), (6, 5), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$: مجموع بزرگتر یا مساوی ۱۰ باشد

$$|S| = 36 - 6 = 30 \quad |A| = |\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}| - |\{5, 5\}| = 8$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

سراسری - ریاضی - ۸۳