

سؤالات موضوعی نهایی

((ریاضیات گسسته))

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

آخرین نسخه: شهریور ۹۹

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

((فصل اوّل : آشنایی با نظریه‌ی اعداد))



درس ۱: استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

۰/۲۵ نمره	دی ۹۷	<p>۱ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.</p>
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	<p>۲ اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.</p>
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>۳ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب: برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</p>
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	<p>۴ گزاره‌ی درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف: مجمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب: اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.</p>
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>۵ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ب: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ پ: اگر $a, b \in R$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ت: حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p>

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها (روش اشباع)

			۱
			۲

اثبات غیر مستقیم

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید، اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

۱ نمره	دی ۹۷	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$
۱ نمره	خرداد ۹۸	ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.
۰/۷۵ نمره	تیر ۹۸	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید. برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$
۱ نمره	دی ۹۸	به روش بازگشتی، ثابت کنید، اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$
۱ نمره	خرداد ۹۹	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عادکردن و ویژگی های آن

۱ نمره	دی ۹۷	اگر $a > 1$ و $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $4k + 1 5$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6 25$
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 b^3$ آنگاه $a b$
۱ نمره	دی ۹۸	اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $4k + 9 a$ و $6k + 14 a$ صدق کند، مقدار a را بیابید.
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	اگر باقی مانده ی تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $3a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.
۱ نمره	خرداد ۹۹	اگر $n \in N$ و $n 9k + 7$ و $n 7k + 6$ ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	اگر $2 - 5m a$ و $1 + 3m a$ ، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $3n + 4 a$ و $2n + 3 a$. نشان دهید: $a = 1$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

۰/۲۵ نمره	دی ۹۷	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند.
۰/۵ نمره	تیر ۹۸	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[12, (6, 8)]$ برابر خواهد شد.

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۳	خرداد ۹۸ خ	۰/۲۵ نمره	حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه های زیر است؟ $([m^2, m], m^5) = \dots$ الف) m ب) m^0 ج) m^5 د) m^2
۴	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره	جای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. و $\forall m > 0$ ۲) $a c$ و $b c$ ۱)
۵	دی ۹۸	۰/۲۵ نمره	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a b$ ، آنگاه $[a, b] = b $
۶	دی ۹۸	۱ نمره	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.
۷	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم، $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b دو عدد هستند. ب: اگر $a b$ ، مقدار $[a, b]$ برابر با است.
۸	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره	بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $4k$ و $16k^2 - 1$ را بیابید.

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

۱	دی ۹۷	۱/۲۵ نمره	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر عددی صحیح و فرد باشد و $2 + a b$ در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $3 + a^2 + b^2$ را بر ۸ بیابید.
۲	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره	اگر باقی مانده‌ی تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.
۳	خرداد ۹۸ خ	۰/۵ نمره	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد $127 - 15$ بر ۱۵ باقیمانده برابر و خارج قسمت است.

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

شهریور ۹۸	شماره ۱/۵	اگر باقی مانده ی تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده ی تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۴
خرداد ۹۹	شماره ۱/۲۵	اگر باقی مانده ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده ی $۲a - ۱$ تقسیم بر ۳۱ را به دست آورید.	۵
شهریور ۹۹	شماره ۱/۵	ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد؛ آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ ($k \in W$) نوشته می شود.	۶
شهریور ۹۹	شماره ۱/۲۵	اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده ی تقسیم عدد $۲m - ۵n$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۷

افراز مجموعه ی اعداد صحیح

تیر ۹۸	شماره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $۸k - ۱$ نوشت. ($k \in Z$)	۱
			۲

درس ۳ : بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهستی و ویژگی های آن

دی ۹۷	شماره ۱	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقی مانده ی تقسیم عدد $۱۰ + ۱۲ \times (۱۰۰۰)^۳$ بر ۷ را به دست آورید.	۱
خرداد ۹۸	شماره ۱	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهستی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۲
خرداد ۹۸	شماره ۰/۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a \equiv b$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b$ ب : باقیمانده تقسیم عدد $A = ۴۹۸۵۳۲۷$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است .	۳

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۴	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال است.	۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ
۵	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵ نمره	شهریور ۹۸
۶	باقی مانده‌ی تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.	۱ نمره	دی ۹۸
۷	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه‌ی هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر آنگاه $ac \equiv bc \pmod{m}$	۱ نمره	دی ۹۸
۸	باقی مانده‌ی تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵ نمره	خرداد ۹۹
۹	رقم یکان عدد $7 + 2^{11}$ را به دست آورید.	۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹
۱۰	فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ، اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت کنید $a^n \equiv b^n \pmod{m}$	۱ نمره	شهریور ۹۹

معادله‌ی هم‌نهشتی

۱	معادله‌ی هم‌نهشتی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱ نمره	دی ۹۷
۲	جواب عمومی معادله‌ی $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را به دست آورید.	۱ نمره	تیر ۹۸
۳	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a, b) m$	۰/۲۵ نمره	دی ۹۸
۴	معادله‌ی هم نهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹

۱/۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	معادله ی سیاله ی $4x + 3y = 19$ را در نظر بگیرید. الف : نشان دهید معادله ی سیاله دارای جواب است. ب : جواب عمومی معادله ی سیاله ی داده شده را بیابید.	۵
-------------	------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

معادله ی سیاله

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	با تبدیل معادله ی سیاله ی خطی $5x + 2y = 18$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	جواب های عمومی معادله ی سیاله ی خطی $7x + 5y = 11$ را بدست آورید.	۲
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	با تبدیل معادله ی سیاله ی خطی $2000x + 5000y = 29000$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن ، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۳
۱/۵ نمره	دی ۹۸	جواب های عمومی معادله ی سیاله ی خطی $9x + 13y = 7$ را بدست آورید.	۴
۱ نمره	شهریور ۹۹	معادله ی سیاله ی $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۵

تهیه کننده : جابر عامری

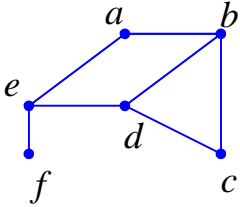
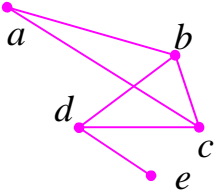
عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

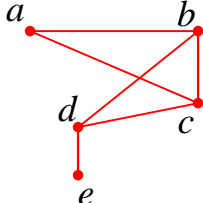
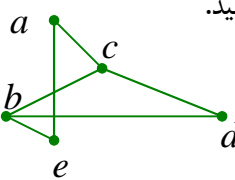
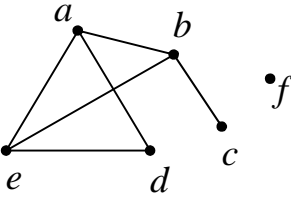
((فصل دوم : گراف و مدل سازی))

درس ۱ : معرفی گراف

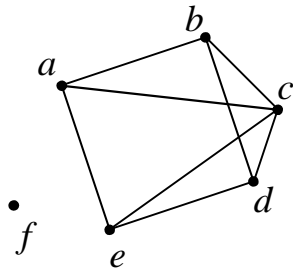
تعاریف و اثبات ها

۰/۵ نمره	دی ۹۷	<p>۱ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف : گراف حاصل از مدل سازی پل کونیکسبرگ یک گراف ساده است. ب : گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.</p>
۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>۲ با توجه به گراف شکل مقابل (گراف G) به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>الف : یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ : درجه ی رأس a در گراف G را تعیین کنید. ت : آیا گراف G همبند است؟ چرا؟ ث : یک زیر گراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>۳ ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>۴ گراف G با مجموعه ی رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه ی یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. با توجه به این گراف به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف : مجموعه ی همسایگی های باز رأس d را بنویسید. ب : اندازه ی گراف را مشخص کنید. ج : مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>۵ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف و مقادیر $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را تعیین کنید.</p>

۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>یک گراف کامل ۸ رأسی ، یال دارد.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۷ شکل مقابل نمودار گراف G می باشد.</p> <p>الف: مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید.</p> <p>ب : مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید.</p> <p>ج : مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \overline{G} را مشخص کنید.</p> 
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۸ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\overline{G})$ برابر است.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۹ گراف G را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.</p> <p>الف) مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌ها را بنویسید.</p> <p>ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ج) درجه‌ی رأس e را در گراف \overline{G} مشخص کنید.</p> 
۰/۲۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p>
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۱۱ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.</p>
۲ نمره	شهریور ۹۸	<p>۱۲ گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه‌ی یال‌های زیر را در نظر بگیرید.</p> $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ <p>الف : نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>ب : $N_G[b]$ را مشخص کنید.</p> <p>ج : یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.</p>

شهریور ۹۸	شماره ۱	<p>در هر مورد یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k - منتظم رسم کنید، به طوری که:</p> <p>الف: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p>	۱۳
دی ۹۸	شماره ۰/۲۵	<p>درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>تعداد رأس های زوج هر گراف، عددی فرد است.</p>	۱۴
دی ۹۸	شماره ۱/۲۵	<p>گراف G به صورت مقابل است را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p>  <p>الف: $\delta(G)$ را مشخص کنید.</p> <p>ب: اندازه ی گراف را تعیین کنید.</p> <p>پ: مجموعه ی همسایگی بسته رأس b را بنویسید.</p> <p>ت: اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد. کدام رأس است x؟</p>	۱۵
دی ۹۸	شماره ۱	<p>هر یک از موارد زیر را پاسخ دهید.</p> <p>الف: گراف k - منتظم از مرتبه ی n را تعریف کنید.</p> <p>ب: آیا گراف ۳- منتظم از مرتبه ی ۵ وجود دارد؟ دلیل خود را بنویسید.</p>	۱۶
دی ۹۸	شماره ۱	<p>اگر G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p>  <p>الف: دوری به طول ۵ مشخص کنید.</p> <p>ب: مکمل گراف G را رسم کنید.</p>	۱۷
خرداد ۹۹	شماره ۰/۵	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف: مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است.</p> <p>ب: در یک گراف k - منتظم، ماگزیمم درجه ی رأس برابر با است.</p>	۱۸
خرداد ۹۹	شماره ۱/۲۵	<p>گراف G را در نظر گرفته و به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p>  <p>الف: $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.</p> <p>ب: یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.</p> <p>پ: یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.</p>	۱۹
شماره ۱	شماره ۹۹	<p>در گراف G، درجه رأس v برابر ۹ است و درجه رأس v در گراف \overline{G} برابر ۱۲ است. مرتبه ی گراف G را مشخص کنید.</p>	۲۰

۲۱	گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. الف : اندازه ی گراف G را بیابید. ب : نمودار گراف G را رسم کنید.	انمره ۱	خرداد ۹۹
۲۲	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	انمره ۱	خرداد ۹۹
۲۳	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف : تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب : گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ است. ت : گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	انمره ۱	خرداد ۹۹ خ
۲۴	گراف G در شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : دوری به طول ۴ برای b بنویسید. پ : مکمل گراف G را رسم کنید. ت : $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید.	انمره ۲	خرداد ۹۹ خ
۲۵	در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه ی p رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان پذیر نبود، دلیل را ارائه کنید. الف : $p = 5$ و $r = 2$ ب : $p = 7$ و $r = 3$	انمره ۱	خرداد ۹۹ خ
۲۶	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سئوالات زیر را پاسخ دهید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : سه دور به طول ۳ بنویسید. پ : ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت : $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث : آیا گراف G همبند است.	انمره ۲/۵	شهریور ۹۹

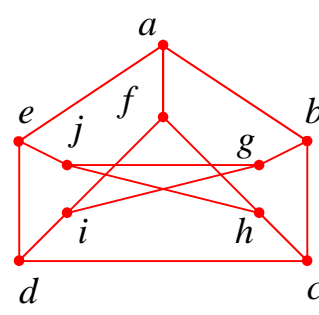


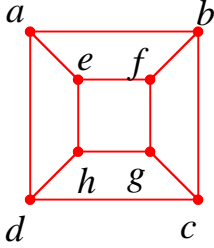
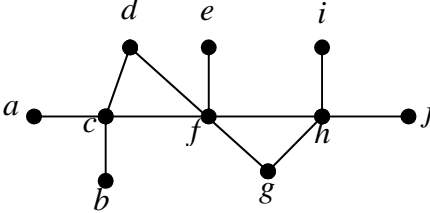
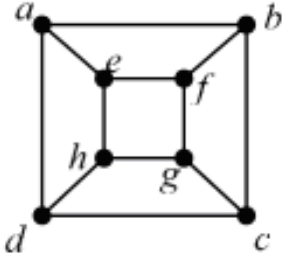
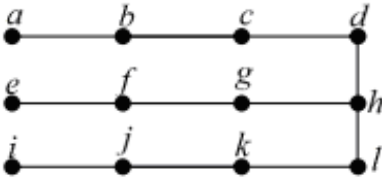
شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید. سپس گراف را رسم کنید.	۲۷
شهریور ۹۹	شماره ۱	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۲۸
شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۲۹

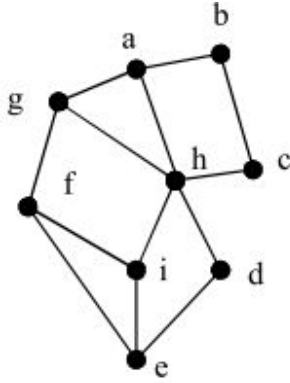
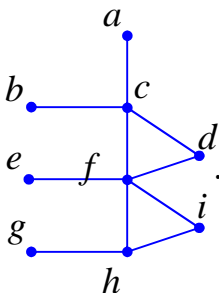
درس ۲: مدل سازی با گراف

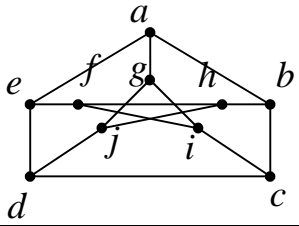
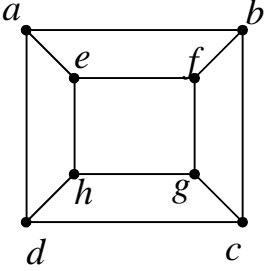
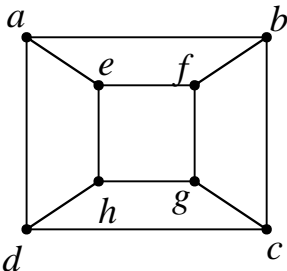
احاطه گری

دی ۹۷	شماره ۱	<p>گراف P_{12} در شکل مقابل رسم شده است. الف: یک γ - مجموعه از این گراف مشخص کنید. ب: یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱
خرداد ۹۸	شماره ۱	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف: در یک گراف از مرتبه‌ی ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است. ب: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p داشته باشیم، $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.</p>	۲
خرداد ۹۸	شماره ۱/۵	<p>گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: یک مجموعه‌ی احاطه گر ۴ عضوی بنویسید. ب: عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید. ج: دو مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.</p>	۳

۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>الف: ثابت کنید هر مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه‌ی احاطه گر می‌نیمال تبدیل کرد.</p> <p>ب: در گراف روبرو یک مجموعه‌ی احاطه گر می‌نیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.</p> 	۴
۱ نمره	۹۸ خرداد	<p>الف: یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب: یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>	۵
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.</p> <p>عدد احاطه گری گراف C_n برابر می‌باشد.</p>	۶
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف: یک $\gamma -$ مجموعه در گراف P_5، دارای ۲ عضو است.</p> <p>ب: تعداد کمتر از $\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ رأس نمی‌توانند تمام n رأس گراف را احاطه کنند.</p>	۷
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.</p> <p>الف) یک گراف ۲ منتظم از مرتبه‌ی ۸ که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p> <p>ب) یک گراف ۵ رأسی که $\gamma -$ مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد.</p> <p>ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>	۸
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>اگر عدد احاطه گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد، در این صورت $V(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یالهایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد را مشخص کنید.</p>	۹

۱ نمره	تیر ۹۸	 <p>در گراف شکل مقابل :</p> <p>الف) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمم مشخص کنید.</p> <p>ب) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p>	۱۰
۱ نمره	خرداد ۹۸	<p>الف) مجموعه ی احاطه گر</p> <p>ب) عدد احاطه گری</p>	۱۱
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	 <p>در گراف شکل مقابل :</p> <p>الف) یک مجموعه ی احاطه گر بنویسید.</p> <p>ب) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال بنویسید.</p> <p>پ) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمم بنویسید.</p>	۱۲
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	<p>عدد احاطه گری گراف های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک γ-مجموعه بنویسید .</p> <p>الف)</p>  <p>ب)</p> 	۱۳
۱ نمره	خرداد ۹۸ خارج ک	<p>الف) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن یک باشد .</p> <p>ب) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ بوده و مجموعه ی احاطه گری مینیمم آن یکتا باشد.</p>	۱۴
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>الف : گراف P_8 را رسم کنید.</p> <p>ب : یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید.</p> <p>ج : یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱۵

<p>شهریور ۹۸ انمره ۱</p>		<p>۱۶ در گراف شکل زیر یک مجموعه ی احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از رأس ها ، آن را به یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.</p> 	<p>۱۶</p>
<p>دی ۹۸ نمره ۱/۲۵</p>		<p>۱۷ برای گراف روبرو :</p>  <p>الف : یک مجموعه ی احاطه گر با ۴ عضو مشخص کنید. ب : مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر مینیمال باشد.</p>	<p>۱۷</p>
<p>دی ۹۸ نمره ۱/۲۵</p>		<p>۱۸ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه ی گراف باشد.</p> <p>الف : گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ است.</p> <p>ب : گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گری بزرگتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ باشد.</p>	<p>۱۸</p>
<p>خرداد ۹۹ نمره ۰/۵</p>		<p>۱۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف : در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه ی احاطه گر گراف G می نامیم.</p> <p>ب : یک مجموعه ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.</p>	<p>۱۹</p>
<p>خرداد ۹۹ انمره ۱</p>		<p>۲۰ گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که :</p> <p>الف : مجموعه ی احاطه گر یکتا با اندازه ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب : بیش از یک مجموعه ی احاطه گر با اندازه ی ۲ داشته باشد.</p>	<p>۲۰</p>

<p>نمبره ۱/۲۵</p>	<p>خرداد ۹۹</p>	<p>عدد احاطه گری گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.</p> 	<p>۲۱</p>
<p>نمبره ۱/۲۵</p>	<p>خرداد ۹۹ خ</p>	<p>عدد احاطه گری گراف زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p> 	<p>۲۲</p>
<p>نمبره ۰/۷۵</p>	<p>خرداد ۹۹ خ</p>	<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال را تعریف کنید.</p>	<p>۲۳</p>
<p>نمبره ۱/۵</p>	<p>شهریور ۹۹</p>	<p>عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص کنید.</p> 	<p>۲۴</p>

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

((فصل سوّم : ترکیبیات (شمارش)))



درس ۱ : مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

۱ نمره	دی ۹۷	<p>۱ اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متمایز) از A و سه رقم (متمایز) از B باشد؟</p>
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	<p>۲ ۶ دانش آموز پایه ی دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه ی یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند؟ به طوری که :</p> <p>الف : به صورت یک در میان قرار بگیرند.</p> <p>ب : همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند.</p> <p>ج : یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.</p>
۱ نمره	تیر ۹۸	<p>۳ می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد.</p>
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که :</p> <p>الف : همواره کتابهای فیزیک کنار هم باشند.</p> <p>ب : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.</p> <p>ج : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک همواره کنار هم باشند.</p>
۱/۲۵ نمره	دی ۹۸	<p>۵ ۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان در کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری که :</p> <p>الف : کتاب ها یکی در میان قرار گیرند؟</p> <p>ب : کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های فیزیک نیز کنار هم باشند؟</p>
۱ نمره	خرداد ۹۹	<p>۶ ۴ دانش آموز پایه ی دهم و ۳ دانش آموز پایه ی یازدهم، به چند طریق می توانند در یک ردیف قرار گیرند. به طوری که :</p> <p>الف : هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند.</p> <p>ب : همواره دانش آموزان پایه ی دهم کنار هم باشند.</p>

معادلات حسابی

۱ نمره	دی ۹۷	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟
۱ نمره	خرداد ۹۸	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0$ و $i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را بدست آورید. $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 12$ $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$
۲ نمره	خرداد ۹۸ خ	الف) به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟ ب) اگر از هر ۴ نوع گل حداقل یکی انتخاب شود، به چند طریق می توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد؟
۱ نمره	شهریور ۹۸	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4$ و $x_2 > 4$ را محاسبه کنید.
۱ نمره	دی ۹۸	معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب های صحیح و نامنفی به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ دارد؟ چرا؟
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد. اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.
۱/۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ چند جواب صحیح و مثبت دارد، به شرط آن که $x_2 > 2$ و $x_5 \geq 4$ باشند.
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 2$ باشند؟

جایگشت های با تکرار

۱ نمره	خرداد ۹۸	با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟
-----------	----------	-------------------------------------------------------------------------

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

۱ نمره	تیر ۹۸	۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره ، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند.
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید. تعداد رمزهای چهار رقمی که با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۲ می توان ساخت برابر است.
۱ نمره	دی ۹۸	با حروف کلمه ی « می سی سی پی » چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می توان نوشت؟
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	با ارقام عدد ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	با ارقام عدد ۱۱۳۲۸۱۱۳۳ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت. (ساده کردن پاسخی نهایی الزامی نیست.)
۰/۷۵ نمره	شهریور ۹۹	هشت نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

مربع های لاتین

۱/۵ نمره	دی ۹۷	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. مجموع درایه های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، بنویسید که چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟
۰/۲۵ نمره	تیر ۹۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی n وجود ندارد.

۱/۵ نمره	تیر ۹۸	۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ بنویسید.																																				
۱ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	۶ برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است؟ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱																				
۴	۲	۱	۳																																			
۳	۱	۲	۴																																			
۱	۴	۳	۲																																			
۲	۳	۴	۱																																			
۱ نمره	شهریور ۹۸	۷ قرار است چهار مدرس T_1 و T_2 و T_3 و T_4 در چهار جلسه‌ی متوالی در چهار کلاس C_1 و C_2 و C_3 و C_4 تدریس کنند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.																																				
۰/۷۵ نمره	دی ۹۸	۸ بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین روبرو متعامدند؟ چرا؟ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲																		
۱	۲	۳																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۱	۲	۳																																				
۲	۳	۱																																				
۳	۱	۲																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹	۹ مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴ و ۳ و ۲ و ۱ یک مربع لاتین به دست آورید. <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> </table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴																				
۲	۱	۴	۳																																			
۴	۳	۲	۱																																			
۳	۴	۱	۲																																			
۱	۲	۳	۴																																			
۱ نمره	خرداد ۹۹	۱۰ در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین را بررسی کنید. الف : <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> ب : <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۳	۲	۱																																				
۱	۳	۲																																				
۲	۱	۳																																				
۱	۲	۳																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۳	۱	۲																																				
۲	۳	۱																																				
۱	۲	۳																																				
۲	۱	۳																																				
۱	۳	۲																																				
۳	۲	۱																																				
۱ نمره	خرداد ۹۹	۱۱ قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریزی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه ریزی کنید.																																				

۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	یک مربع لاتین 4×4 چرخشی رسم کنید.	۱۲																		
۱ نمره	شهریور ۹۹	متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید. <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> </table>	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۱۳
۱	۲	۳	۱	۲	۳																
۳	۱	۲	۲	۳	۱																
۲	۳	۱	۳	۱	۲																
۰/۵ نمره	شهریور ۹۹	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۱۴																		

درس ۲: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۲ نمره	دی ۹۷	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود).	۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟ راه حل خود را بنویسید.	۲
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند و بر ۴ بخش پذیر نباشند).	۳
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟	۴
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ ($1 \leq n \leq 400$) چند عدد وجود دارد که : الف) بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟ ب) فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟	۵
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟	۶
۰/۲۵ نمره	دی ۹۸	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ی ۲ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی برابر ۶ است.	۷

سئالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه ی دوازدهم رشته ی ریاضی

۱۱۷۵ نمره	دی ۹۸	با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی را به دست آورید.	۸
۱ نمره	خرداد ۹۹	به چند طریق می توان ۴ خودکار را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)	۹
۱ نمره	خرداد ۹۹	در بین اعداد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	۱۰
۱۱۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۷ بخش پذیر نباشند؟	۱۱
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	الف : چند تابع پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی می توان تعریف کرد؟ ب : چند تابع یک به یک از یک مجموعه ی ۴ عضوی به یک مجموعه ی ۶ عضوی وجود دارد؟	۱۲
۱ نمره	شهریور ۹۹	۸ نفر را برای یک برنامه ی تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرئه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است. (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود.)	۱۳
۱ نمره	شهریور ۹۹	تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ی ۳ عضوی به یک مجموعه ی ۶ عضوی چند تا است؟(با ذکر دلیل)	۱۴
۱ نمره	شهریور ۹۹	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.	۱۵

اصل لانه کبوتری

۱۱۵ نمره	دی ۹۷	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کیسه در نظر بگیرید.)	۱
-------------	-------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

۱/۲۵ نمره	۹۸ خرداد	۲ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.
۱/۲۵ نمره	۹۸ تیر	۳ تعیین کنید که در یک اردوی دانش آموزش چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟
۱/۵ نمره	۹۸ خارج کشور خرداد	۴ یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.
۱/۵ نمره	۹۸ شهریور	۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله ی آنها از هم ، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.
۱ نمره	۹۸ دی	۶ مجموعه ی اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ی ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.
۱ نمره	۹۹ خرداد	۷ در یک اردوی دانش آموزی، حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن ها ماه تولد یکسانی دارند؟
۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	۸ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای کشتی باشند تا مطمئن باشیم، لااقل ۲۰ نفر آنها روز تولدشان در هفته یکسان است؟
۱ نمره	۹۹ شهریور	۹ نشان دهید در یک خانواده ی ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل اول ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

۱	درست
۲	با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می گیریم هر دو عدد a و b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد n و m ، می توان در نظر گرفت $a = 2n - 1$ و $b = 2m - 1$. بنابراین: $a^2 + b^2 = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1$ $= 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad k \in Z$ یعنی $a^2 + b^2$ یک عدد زوج است.
۳	الف: درست ب: نادرست
۴	الف: نادرست ب: درست $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^c \rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^c$ $(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$
۵	الف: نادرست ب: درست پ: نادرست ت: نادرست

اثبات با در نظر گرفتن همه ی حالت ها

۱
۲

اثبات غیر مستقیم

۱	<p>اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. در نتیجه :</p> $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ <p>اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.</p>
۲	<p>فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $r + x$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r + x - r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می گردد.</p>
۳	<p>فرض کنید که $\frac{1}{x}$ عدد گنگ نباشد. پس گویا است یعنی $(\frac{1}{x} \in Q)$ و لذا معکوس آن یعنی x باید گویا باشد و این مخلف فرض مسئله می باشد. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.</p>

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

۱	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>
---	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$</p> <p>$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$.</p> <p>همواره درست</p> <p>حال چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>	۲
<p>$a + \frac{1}{a} \geq 2 \leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$.</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۳
<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> <p>$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$</p> <p>$\leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$</p> <p>$\leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ همیشه درست</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۴
<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> <p>$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$</p> <p>$\leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) \geq 0$</p> <p>$\leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$ همیشه درست</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>	۵
<p>رجوع شود به پاسخ سؤال ۳</p>	۶
<p>$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times xy} x^2 + y^2 \geq 2xy \rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \rightarrow (x-y)^2 \geq 0$ بدیهی است.</p> <p>و چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>	۷

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \xrightarrow{\times 2} a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$ $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ <p>نابرابری آخر برای دو عدد حقیقی نامنفی a و b همیشه درست است. اکنون چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند نتیجه می شود که حکم برقرار است.</p>	۸
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عادکردن و ویژگی های آن

$\left. \begin{array}{l} a \mid 9k + 4 \\ a \mid 5k + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \mid 5(9k + 4) \\ a \mid 9(5k + 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \mid 45k + 20 \\ a \mid 45k + 27 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid (45k + 20) - (45k + 27)$ $\rightarrow a \mid 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7$	۱
$5 \mid 4k + 1 \rightarrow (5)^2 \mid (4k + 1)^2 \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \quad (1)$ $5 \mid 4k + 1 \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 20k + 5 \quad (2)$ $\xrightarrow{(1), (2)} 25 \mid (16k^2 + 8k + 1) + (20k + 5) \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 28k + 6$	۲
نادرست	۳
$\left. \begin{array}{l} a \mid 4k + 9 \\ a \mid 6k + 14 \end{array} \right\} \rightarrow a \mid -6(4k + 9) + 4(6k + 14) \rightarrow a \mid 2 \xrightarrow{a > 1} a = 2$	۴
$a = 4q + 3 \rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$	۵
$\left\{ \begin{array}{l} n \mid 9k + 7 \\ n \mid 7k + 6 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \times (-7) \\ \times 9 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} n \mid -63k - 49 \\ n \mid 63k + 54 \end{array} \right. \rightarrow n \mid (-63k - 49) + (63k + 54)$ $\rightarrow n \mid 5 \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ or \\ n = 5 \end{cases}$	۶

$\begin{cases} a \mid 3m + 1 \xrightarrow{\times 5} a \mid 15m + 5 \\ a \mid 5m - 2 \xrightarrow{\times 3} a \mid 15m - 6 \end{cases} \rightarrow a \mid (15m + 5) - (15m - 6)$ $\rightarrow a \mid 11 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 11 \end{cases}$ <p>لذا برای a دو جواب طبیعی وجود دارد.</p>	۷
$\begin{cases} a \mid 3n + 4 \\ a \mid 2n + 3 \end{cases} \rightarrow a \mid -2(3n + 4) + 3(2n + 3) \rightarrow a \mid 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = \pm 1$	۸

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

درست	۱
	۲
گزینه‌ی د یعنی m^2 درست است.	۳
$\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$	۴
درست	۵
$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2$ و $B = 35a^3 = 5 \times 7 \times a^3 \rightarrow [A, B] = 105a^3$	۶
الف : متباین (نسبت به هم اول) ب : $ b $	۷
فرض می کنیم $d = (4k, 16k^2 - 1)$ در این صورت :	۸
$\left. \begin{matrix} d \mid 4k \\ d \mid 16k^2 - 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} d \mid 16k^2 \\ d \mid 16k^2 - 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow d \mid (16k^2) - (16k^2 - 1) \rightarrow d \mid 1$	

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

<p>عدد a عددی فرد است. بنابراین $a + 2$ عددی فرد است و $b \mid a + 2$. بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. می دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ بعلاوه یک است. پس :</p> $a^2 + b^2 + 3 = (\lambda m + 1) + (\lambda n + 1) + 3 = \lambda(m + n) + 5 \rightarrow r = 5$	۱
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

$\begin{cases} m = 13q_1 + 2 \\ n = 13q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ \Delta n = 13(\Delta q_2) + 45 \end{cases} \rightarrow \Delta n - 3m = 13q' + 39$ $\rightarrow \Delta n - 3m = 13q' + 3(13) \rightarrow \Delta n - 3m = 0 \rightarrow r = 0$	۲
باقیمانده ۸ و خارج قسمت ۹- است.	۳
$\begin{cases} a = 5q_1 + 2 \\ a = 6q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a = 30q_1 + 12 \\ 5a = 30q_2 + 45 \end{cases} \rightarrow a = 30q - 3 \rightarrow a = 30r + 27$	۴
$a = 31q + 19 \xrightarrow{\times 2} 2a = 31(2q) + 38 \xrightarrow{-1} 2a - 1 = 31(2q) + 37$ $\rightarrow 2a - 1 = 31(2q) + 31 + 6 \rightarrow 2a - 1 = 31(2q + 1) + 6 \rightarrow 2a - 1 = 31k + 6$ $\rightarrow r = 6$	۵
<p>هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:</p> $p = 6k \quad (۱)$ $p = 6k + 1 \quad (۲)$ $p = 6k + 2 = 2(3k + 1) \quad (۳)$ $p = 6k + 3 = 3(2k + 1) \quad (۴)$ $p = 6k + 4 = 2(3k + 2) \quad (۵)$ $p = 6k + 5 \quad (۶)$ <p>در حالات ۱ و ۳ و ۵ نشان می دهد که p زوج است و در حالات ۲ بر ۳ بخش پذیر است. که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ و ۴ می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود.</p>	۶
$\begin{cases} m = 17q + 5 \\ n = 17q' + 3 \end{cases} \rightarrow 2m - \Delta n = 2(17q + 5) - 5(17q' + 3) = 17(2q - 5q') - 5$ $\rightarrow 2m - \Delta n = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \rightarrow r = 12$	۷

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح

نادرست	۱
	۲

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهستی و ویژگی های آن

$1 \dots \equiv 6 \xrightarrow{6 \equiv -1} 1 \dots \equiv -1 \rightarrow (1 \dots)^{13} \equiv (-1)^{13} \rightarrow (1 \dots)^{13} \equiv -1$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 \equiv -1 \times 12 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 \equiv -12$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 + 7 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \rightarrow r = 5$	۱														
<p>روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم. ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله‌ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است. که روی هم ۱۳۱ روز می شوند. حال باقی مانده‌ی تقسیم ۱۳۱ بر ۷ را تعیین می کنیم که برابر ۵ است. لذا ۱۲ بهمن متناظر با روز پنجشنبه است.</p> <table border="1" data-bbox="352 994 1198 1144"> <thead> <tr> <th>شنبه</th> <th>یک شنبه</th> <th>دوشنبه</th> <th>سه شنبه</th> <th>چهارشنبه</th> <th>پنجشنبه</th> <th>جمعه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </tbody> </table>	شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۲
شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه									
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶									
<p>الف : درست ب : درست</p>	۳														
<p>چهارشنبه</p>	۴														
$27 \equiv 1 \rightarrow (27)^{13} \equiv (1)^{13} \rightarrow (27)^{13} + 19 \equiv 1 + 19 \rightarrow (27)^{13} + 19 \equiv 20 \rightarrow (27)^{13} + 19 \equiv 7$	۵														
$13 \equiv -4 \rightarrow (13)^2 \equiv (-4)^2 \rightarrow (13)^2 \equiv 16 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^2 \equiv -1$ $\rightarrow (13^2)^{11} \equiv (-1)^{11} \rightarrow (13)^{22} \equiv -1 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^{22} \equiv -1 + 17 \rightarrow (13)^{22} \equiv 16$ $\rightarrow r = 16$	۶														
$a \equiv b \rightarrow m a - b \rightarrow m c(a - b) \rightarrow m ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$	۷														

$49 \equiv 4 \rightarrow 7^2 \equiv 4 \rightarrow (7^2)^2 \equiv (4)^2 \rightarrow 7^4 \equiv 16 \rightarrow 7^4 \equiv 1 \rightarrow (7^4)^7 \equiv (1)^7 \rightarrow 7^{28} \equiv 1$ $\frac{7^2 \equiv 4}{7^2 \equiv 4} \rightarrow 7^{28} \times 7^2 \equiv 1 \times 4 \rightarrow 7^{30} \equiv 4$	۸
<p>رقم یکان هر عدد طبیعی برابر باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است. می دانیم که $32 \equiv 2$ پس :</p> $25^{10} \equiv 2 \rightarrow (25^5)^2 \equiv (2)^2 \rightarrow 2^{10} \equiv 4 \rightarrow 2^{10} \times 2 \equiv 4 \times 2 \rightarrow 2^{11} \equiv 8$ $\rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 8 + 7 \rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \xrightarrow{15 \equiv 5} 2^{11} + 7 \equiv 5$ <p>لذا رقم یکان برابر ۵ است.</p>	۹
$a \equiv b \rightarrow m a - b \rightarrow m (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ $\rightarrow m a^n - b^n$	۱۰

معادله‌ی همبهنهستی

$3x \equiv 13 \rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \rightarrow x = 7k + 2$	۱
$4x \equiv 17 \rightarrow 4x \equiv 15 + 2 \rightarrow 4x \equiv 2 \rightarrow 4x \equiv 2 + 10 \rightarrow 4x \equiv 12$ $\xrightarrow{(4,5)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = 5k + 3$	۲
<p>نادرست</p>	۳
$2 \equiv 35 \xrightarrow{5x \equiv 2} 5x \equiv 35 \xrightarrow{(5,11)=1} x \equiv 7 \rightarrow x = 11k + 7$	۴

الف :	۵
معادله دارای جواب است. $\rightarrow 1 19, (4, 3) = 1$	
ب :	
$4x + 3y = 19 \rightarrow 4x \equiv 19, 19 \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \rightarrow 4x \equiv 4$ $\rightarrow x \equiv 1 \rightarrow x = 3k + 1 \quad k \in Z$ $4x + 3y = 19 \xrightarrow{x=3k+1} 4(3k+1) + 3y = 19 \rightarrow 3y = -12k + 15$ $\xrightarrow{\div 3} y = -4k + 5$	

معادله‌ی سیاله

$\Delta x + 2y = 18 \rightarrow 2y \equiv 18 \xrightarrow{(2, \Delta)=1} y \equiv 9 \rightarrow y \equiv 5 + 4 \rightarrow y \equiv 4 \xrightarrow{k \in Z} y = \Delta k + 4$ $\Delta x + 2y = 18 \xrightarrow{y=\Delta k+4} \Delta x + 2(\Delta k + 4) = 18 \rightarrow x = -2k + 2$	۱
$7x \equiv 11 \rightarrow 7x \equiv 11 + 2 \times 5 \rightarrow 7x \equiv 21 \xrightarrow{(7, \Delta)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = \Delta k + 3 \quad k \in Z$ $7x + 5y = 11 \xrightarrow{x=\Delta k+3} 7(\Delta k + 3) + 5y = 11 \rightarrow y = -7k - 2 \quad k \in Z$	۲
$2x + 5y = 29 \rightarrow 2x \equiv 29 \rightarrow 2x \equiv 4 \rightarrow x = \Delta k + 2 \rightarrow y = \Delta k + 2$	۳
$13y \equiv 7 \xrightarrow{13 \equiv 4, 7 \equiv 16} 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4, 9)=1} y \equiv 4$ $\rightarrow y = 9k + 4, \quad x = -13k - 5$	۴
$2x \equiv 19 \xrightarrow{19 \equiv 4} 2x \equiv 4 \xrightarrow{(2, \Delta)=1} x \equiv 2 \rightarrow x = \Delta k + 2 \rightarrow y = -2k + 3$	۵

تهیه کننده:

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

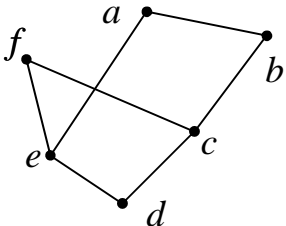
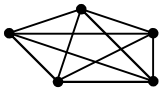
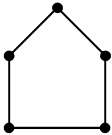
پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

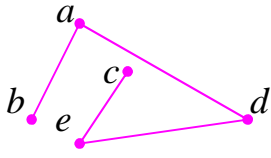
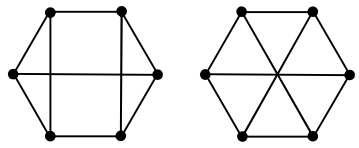
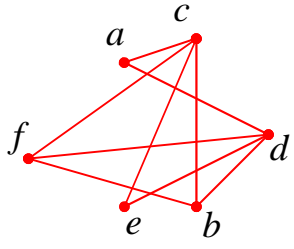
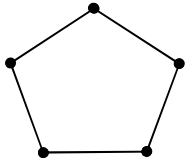
فصل دوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

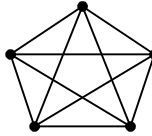
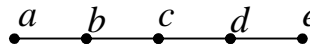
درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

۱	الف : نادرست ب : درست
۲	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : درجه‌ی رأس $\deg(a) = 5$ ت : خیر ، زیرا برای مثال از f به a مسیری وجود ندارد. ث :
۳	اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت. $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است. از طرفی عدد B نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید). در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.
۴	الف : $N_G(d) = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$
۵	$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$
۶	۲۸

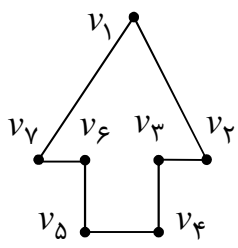
<p>الف: $p=6$ و $q=7$ ب: $N_G(b) = \{a, b, c\}$ ج: ۷</p> <p>\overline{G} تعداد یالهای گراف G + تعداد یالهای گراف $\overline{G} = \frac{p(p-1)}{2}$</p> <p>$\overline{G}$ تعداد یالهای گراف G + $7 = \frac{6(6-1)}{2} \rightarrow \overline{G}$ تعداد یالهای گراف G + $7 = 15$</p> <p>$\rightarrow \overline{G}$ تعداد یالهای گراف G = ۸</p> <p>لذا مجموع درجه های رئوس گراف \overline{G} برابر ۱۶ است.</p>	۷
<p>$\frac{n(n-1)}{2}$</p>	۸
<p>الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ ب: $abca$ یا $bcd b$ ج: درجه ی رأس c در گراف مکمل ۳ خواهد بود.</p>	۹
<p>نادرست</p>	۱۰
<p>n رأسی</p>	۱۱
<p>الف: ۱۲</p> <p>ب: $N_G[b] = \{a, b, c\}$</p> <p>ج: b, a, e, f, c, d</p> 	۱۲
<p>الف:  ب: </p>	۱۳
<p>نادرست</p>	۱۴
<p>الف: $\delta(G) = 1$ ب: $q = 6$ پ: $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$ ت: $x = c$</p>	۱۵

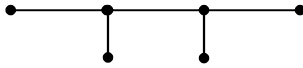
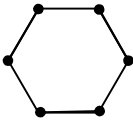
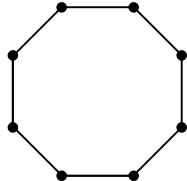
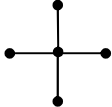
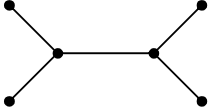
۱۶	الف : گرافی از مرتبه‌ی n که در جهی تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k ، $(0 \leq k \leq n)$ باشد. ب : وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم $5 \times 3 = 2q \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ که تناقض است.
۱۷	الف : a, c, d, b, e, a ب :
	
۱۸	الف : دو برابر ب : k
۱۹	الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ ب : دور به طول ۴ یا $(abeda)$ یا $(adeba)$ پ : مسیر به طول ۳ $(aebc)$ و مسیر به طول ۴ $(adebc)$
۲۰	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \rightarrow 9 + 12 = p - 1 \rightarrow p = 22$
۲۱	الف : $3 \times 6 = 2q \rightarrow q = 9$ ب : رسم یک گراف کافی است.
	
۲۲	به جواب سئوال ۳ رجوع کنید.
۲۳	الف : مرتبه ب : مسیر پ : $\frac{n(n-1)}{2}$ ت : دور
۲۴	الف : $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$ ب : $bafeb$ پ : ت : $N_G(e) = \{a, b, f\}$
	
۲۵	الف :
	
	ب : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد گراف باید زوج باشد.

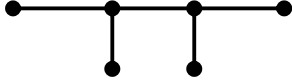
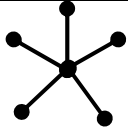
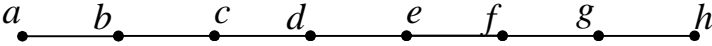
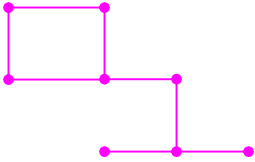
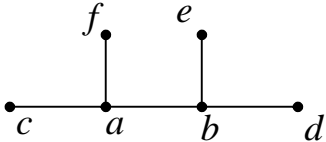
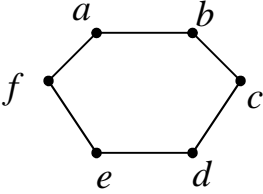
الف : $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$	ب : abc و $caec$ و $cedc$	۲۶
پ : ۵	ت : $N_G(e) = \{a, c, d\}$	ث : خیر
۲۷		$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$
۲۸	واین یعنی ۲۱ عدد زوج است که ممکن نیست. همین جا نتیجه گرفته می شود که چنین گرافی وجود ندارد.	$\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \rightarrow 3 \times 7 = 2q \rightarrow 21 = 2q$
۲۹	$abcd$ و $bcde$	

درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

الف : $\{b, e, h, k\}$	ب : $\{a, c, e, g, i, k\}$	۱
الف : ۳ رأس	ب : $p - 1$	۲
الف : $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$	ب : $\gamma(G) = 3$	۳
ج : $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$		
الف : اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم.	ب : $A = \{h, g, f, i, j\}$	۴

۵	الف : 	ب : 	
۶	۲		
۷	الف: درست	ب : درست	
۸	الف : 	ب : 	ج : 
۹	$\Delta(G) = 4$ حداکثر تعداد یالها $= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ حداقل تعداد یال ها $= n - 1 = 5 - 1 = 4$		
۱۰	الف : $\{f, d\}$	ب : $\{e, f, g, h\}$	
۱۱	الف) زیر مجموعه‌ی D از مجموع رئوس گراف G را مجموعه‌ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد. ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم گراف G را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم .		
۱۲	الف) $\{c, f, h, j\}$	ب) $\{a, b, f, h\}$	پ) $\{c, f, h\}$
۱۳	الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ از طرفی مجموعه‌ی $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. بنابراین $\gamma(G) = 2$ است و مجموعه- ی $\{a, g\}$ همان ۲- مجموعه است . ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$ از طرفی مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین $\gamma(G) = 4$ است و مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ همان ۴- مجموعه است .		

 <p>(ب)</p>	 <p>(الف)</p>	۱۴
	<p>الف :</p> <p>ب : $\{a, d, g\}$</p> <p>ج : $\{a, d, e, h\}$</p>	۱۵
<p>یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف رأس a از آن ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال به دست آید.</p>		
<p>الف: مجموعه‌ی احاطه گر برابر ۴ عضو مانند $\{c, f, h, g\}$</p> <p>ب : احاطه گر مینیمال مانند $\{c, f, g\}$</p>		
<p>الف : برای مثال اگر $n = 10$ ، رسم C_1 یا P_1 کافی است. در این گراف ها $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$</p> <p>ب : در گرافی مشابه گراف زیر $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2$ است ولی $\gamma(G) = 3$ می باشد.</p> 		
<p>الف : مینیمم</p> <p>ب : مینیمال</p>		
<p>الف : گراف روبرو از مرتبه‌ی ۶ و دارای تنها یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است.</p>  <p>ب : گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه گری به اندازه‌ی ۲ است که عبارتند از $\{a, d\}$ و $\{f, c\}$ و $\{e, b\}$</p> 		

۲۱ برای گراف مورد سؤال داریم:	$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)$ <p>از طرفی مجموعه‌ی $\{g, h, d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه برای گراف، لذا: $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$</p>
۲۲	$\Delta = 3 \text{ و } n = 8 \text{ و } \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2 \leq \delta(G)$ <p>مجموعه‌های $\{a, g\}$ یا $\{b, h\}$ یا $\{c, e\}$ یا $\{d, f\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر دو عضوی هستند.</p> <p>بنابراین $\delta(G) = 2$</p>
۲۳	<p>یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.</p>
۲۴	<p>با توجه به اینکه $\left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$، لذا داریم $\delta(G) \geq 2$</p> <p>پس حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. پس $\lambda(G) = 2$</p>

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۱
الف) $5! \times 6!$ ب) $5! \times 7!$ ج) $10! \times 2!$	۲
$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$	۳
الف: $4! \times 6!$ ب: $5! \times 4!$ ج: $3! \times 7!$	۴
الف: $6! \times 5!$ ب: $6! \times 5! \times 2!$	۵
الف: $4! \times 3!$ ب: $4! \times 4!$	۶

معادلات حسابی

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۱
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ $\xrightarrow{x_i \geq 1, \quad i=1,2,3,4} x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$ $\rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$ تعداد جواب های صحیح نامنفی	۲

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ $\frac{x_1 = y_1 + 3, \quad x_5 = y_5 + 4}{\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 12}$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی</p>	۳
<p style="text-align: right;">(الف)</p> $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ <p>(ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می داریم. $8 - 4 = 4$ شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم. لذا تعداد حالات برابر است با:</p> $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۴
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ $\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با:</p>	۵
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + (y_3 + 4) + x_4 + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با:</p>	۶
$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, \quad x_2 \geq 2, \quad x_5 \geq 4$ $x_2 = y_2 + 2 \quad \text{و} \quad x_5 = y_5 + 4$ $x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) = 11 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ $\text{جواب صحیح و نامنفی} \quad \binom{5+5+1}{5-1} = \binom{9}{4}$	۷

$x_1, x_3, x_4 \geq 1 \text{ و } x_2 \geq 3 \text{ و } x_5 \geq 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ $\rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 3) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 4) = 17$ $\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$.</p> <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ $x_2 > 2 \rightarrow x_2 - 2 > 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 2$ $x_5 > 3 \rightarrow x_5 - 3 > 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 3$ $\rightarrow x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 3) = 17$ $\rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 12$ <p>تعداد جواب های طبیعی $\binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$.</p>	۸
$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 1$ $y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \rightarrow x_3 = y_3 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 1) + x_2 + (y_3 + 4) + \dots + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + \dots + x_5 = 9$ <p>تعداد جوابهای صحیح و نامنفی $= \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715$</p>	۹

جایگشت های با تکرار

$p = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 3 \times 7!$	۱
-------------------------------------------------------	---

$\text{روش اول} \binom{9}{2,3,4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 126.$ $\text{روش دوم} \binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{4! \times 0!} = 36 \times 35 \times 1 = 126.$	۲	
۴	۳	
$\binom{8}{4,2} = \frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 1 \times 2} = 14.$	۴	
$\binom{7}{2,3,1,1} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 1! \times 1!} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 42.$	۵	
$\binom{10}{4,1,3,2} = \frac{10!}{4! \times 1! \times 3! \times 2!} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!}$	۶	
$\binom{8}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 280 : \text{روش دوم}$	$\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!} = 280 : \text{روش اول}$	۷

مربع های لاتین

<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> </table> \Rightarrow <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۱۲</td><td>۳۱</td><td>۲۳</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۲۲</td><td>۱۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱																					
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															
۲	۱	۳																																															
۳	۲	۱																																															
۱	۳	۲																																															
۱۲	۳۱	۲۳																																															
۳۳	۲۲	۱۱																																															
۲۱	۱۳	۳۲																																															
۱۵	۲																																																
<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> \Rightarrow <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲۳</td><td>۳۲</td><td>۱۱</td></tr> </table>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۳
	ش	ی	د																																														
A	۱	۲	۳																																														
B	۳	۱	۲																																														
C	۲	۳	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۲	۱	۳																																														
B	۱	۳	۲																																														
C	۳	۲	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۱۲	۲۱	۳۳																																														
B	۳۱	۱۳	۲۲																																														
C	۲۳	۳۲	۱۱																																														

۴	درست																																
۵	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> و <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> </div>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳														
۲	۳	۱																															
۱	۲	۳																															
۳	۱	۲																															
۱	۳	۲																															
۳	۲	۱																															
۲	۱	۳																															
۶	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table> <div style="text-align: center;"> \Rightarrow $1 \rightarrow 3$ $2 \rightarrow 2$ $3 \rightarrow 4$ $4 \rightarrow 1$ </div> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <p>در هیچ سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود ندارد، بنابراین مربع جدید، مربع لاتین می باشد.</p>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳
۴	۲	۱	۳																														
۳	۱	۲	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۲	۳	۴	۱																														
۱	۲	۳	۴																														
۴	۳	۲	۱																														
۳	۱	۴	۲																														
۲	۴	۱	۳																														
۷	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>۱</th> <th>۲</th> <th>۳</th> <th>۴</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>C_1</th> <td>T_1</td> <td>T_2</td> <td>T_3</td> <td>T_4</td> </tr> <tr> <th>C_2</th> <td>T_2</td> <td>T_1</td> <td>T_4</td> <td>T_3</td> </tr> <tr> <th>C_3</th> <td>T_3</td> <td>T_4</td> <td>T_1</td> <td>T_2</td> </tr> <tr> <th>C_4</th> <td>T_4</td> <td>T_3</td> <td>T_2</td> <td>T_1</td> </tr> </tbody> </table> <p>این جدول یکی از پاسخ های ممکن است.</p>		۱	۲	۳	۴	C_1	T_1	T_2	T_3	T_4	C_2	T_2	T_1	T_4	T_3	C_3	T_3	T_4	T_1	T_2	C_4	T_4	T_3	T_2	T_1							
	۱	۲	۳	۴																													
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4																													
C_2	T_2	T_1	T_4	T_3																													
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2																													
C_4	T_4	T_3	T_2	T_1																													
۸	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; margin-bottom: 10px;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table> <p>این دو مربع متعامدند، زیر در جدول تلفیقی شده از این دو مربع ، عدد تکراری وجود ندارد.</p>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲																							
۱۱	۲۲	۳۳																															
۳۲	۱۳	۲۱																															
۲۳	۳۱	۱۲																															
۹	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; margin-bottom: 10px;"> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table> <p>با استفاده از جایگشت مناسب مربع لاتین جدید خواهیم داشت. (مثلاً با جایگشت $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 4$ و $4 \rightarrow 1$) مربع جدید به صورت مقابل در خواهد آمد</p>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱																
۳	۲	۱	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۴	۱	۲	۳																														
۲	۳	۴	۱																														

۱۰ ابتدا در هر مورد، مربع های داده شده را تلفیق می کنیم. (برهم نهی)

الف :

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

با مشاهده ی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامدند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود ندارد.

ب :

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

با مشاهده ی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامد نیستند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود دارد.

۱۱ برای برنامه ریزی این مسئله کافی است، دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کننده ی لیاف است.

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 \Rightarrow

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۳	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 \Rightarrow

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۳	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع تلفیقی، عدد سمت چپ هر درایه نشان دهنده ی ماشین و عدد سمت راست آن نشان دهنده ی نوع لیاف است.

<table border="1"> <tbody> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </tbody> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۲
۱	۲	۳	۴														
۴	۱	۲	۳														
۳	۴	۱	۲														
۲	۳	۴	۱														
<p>در مربع تلفیقی مقابل ، اعداد دو رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع داده شده متعامد هستند.</p> <table border="1"> <tbody> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </tbody> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱۳							
۱۱	۲۲	۳۳															
۳۲	۱۳	۲۱															
۲۳	۳۱	۱۲															
<table border="1"> <tbody> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </tbody> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۴
۱	۲	۳	۴														
۴	۱	۲	۳														
۳	۴	۱	۲														
۲	۳	۴	۱														

درس ۲: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند B</p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_i, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ $ S = B ^{ A } = 3^4 = 81$ $ A_1 = A_2 = A_3 = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} $ $= S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16) + (3 \times 3) - 0 = 36$	۱
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

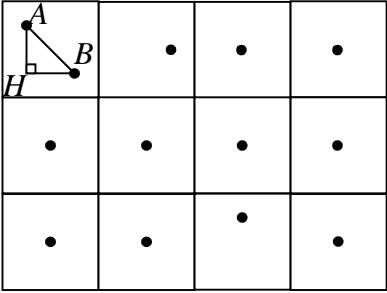
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{90}{2} \right] + \left[\frac{90}{3} \right] - \left[\frac{90}{6} \right]$ $= 45 + 30 - 15 = 60$	۲
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{3} \right] - \left[\frac{200}{12} \right]$ $= 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$	۳
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابع همه اعضای B باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از A نسبت داده شود).</p> <p>پس جواب این مسئله می شود:</p> $ A = 4 \text{ و } B = 3$ $3^m - 3(3^m - 1) = 3^4 - 3(3^4 - 1) = 81 - 3(81 - 1) = 81 - 243 + 3 = -159$	۴
<p>مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۴ را A و مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۷ را B می نامیم. بنابراین:</p> $n(A) = \left[\frac{400}{4} \right] = 100 \text{ و } n(B) = \left[\frac{400}{7} \right] = 57 \text{ و } n(A \cap B) = \left[\frac{400}{4 \times 7} \right] = 14$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 14 = 86$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B \cap A)$ $= 100 - 14 + 57 - 14 = 129$	۵

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{350}{4} \right] + \left[\frac{350}{6} \right] - \left[\frac{350}{12} \right]$ $= 87 + 58 - 29 = 116$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 350 - 116 = 234$	۶
درست	۷
<p>$1 \leq j \leq 3$, $A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}$</p> <p>$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$</p> <p>$S = 3^4$ و $A_1 = A_2 = A_3 = 2^4$ و $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1^4$</p> <p>و $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0^4 = 0$.</p> <p>$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_3 - A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45$</p> <p>$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - 45 = 36$</p> <p style="text-align: right;">روش دوم :</p> <p>$A = 4$ و $B = 3$</p> <p>$3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$</p>	۸
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ی ۴ عضوی مجموعه ای ۸ عضوی</p> $({}_8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$	۹

$A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \rightarrow A = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$ $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \rightarrow B = \left[\frac{100}{10} \right] = 10$ $A \cap B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \rightarrow A \cap B = \left[\frac{100}{30} \right] = 3$ $ A \cup B = A + B - A \cap B = 16 + 10 - 3 = 23$	۱۰
$ S = 200 \text{ و } A = \left[\frac{200}{2} \right] = 100 \text{ و } B = \left[\frac{200}{7} \right] = 28 \text{ و } A \cap B = \left[\frac{200}{14} \right] = 14$ $ A \cup B = A + B - A \cap B = 100 + 28 - 14 = 114$ $ \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = S - A \cup B = 200 - 114 = 86$	۱۱
$\text{الف: } 3^4 - 3(3^4 - 1) = 81 - 45 = 36$ $\text{ب: } \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$	۱۲
<p>حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع ممکن از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی است که برابر با 8^2 است.</p>	۱۳
$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120$	۱۴
$ F \cup V = S - F \cap V = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$	۱۵

اصل لانه کبوتری

$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ $\begin{array}{r} 6 \quad \quad 4 \\ \hline 4 \quad \quad 1 \\ \hline 2 \\ 1+1=2 \end{array}$	<p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد. ($n = 365$)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با $kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$</p>	۱
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

۲	<p>تعداد کبوتر ها : ۵۰۵ دانش آموز</p> <p>تعداد لانه ها : $7 \times 12 = 84$</p> $\begin{array}{r} 505 \\ 84 \overline{) 505} \\ \underline{504} \\ 1 \end{array}$ <p>$6+1=7$</p> <p>طبق اصل لانه کبوتر لاقل ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p>
۳	<p>در این مسئله $k+1=7$ یعنی $k=6$ است و تعداد لانه ها همان تعداد ماه های سال یعنی $n=12$ است. طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوتر ها یا معادل آن تعداد دانش آموزان، حداقل باید برابر $kn+1=(6 \times 12)+1=73$ باشد.</p>
۴	<p>مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع (با ضلع هایی به طول ۱ واحد) تقسیم می کنیم.</p> <p>حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد، فاصله ی بین دو نقطه ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است.</p>
۵	<p>تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر</p> <p>تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه</p>  <p>طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می گیرند. پس :</p> $\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \rightarrow AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$
۶	<p>تعداد کبوتر ها برابر ۴۳ و تعداد لانه ها برابر ۴۲ می باشد و می توان لانه ها را به صورت زیر در نظر گرفت:</p> <p>نقطه ، ، $\underbrace{\quad\quad\quad}$ ، $\underbrace{\quad\quad\quad}$ ، $\underbrace{\quad\quad\quad}$ ، $\underbrace{\quad\quad\quad}$</p> <p>۱،۸۴ ۲،۸۳ ۳،۸۲ ۴۲،۴۳</p> <p>چنانچه قرار باشد، کبوترها، لانه ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعشان ۸۵ است.</p>
۷	<p>در این مسئله $k+1=7$ پس $k=6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn+1=(6)(12)+1=73$ باشد.</p>

<p>$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ و $n = 7$ تعداد لانه ها</p> <p>تعداد کبوترها $nk + 1 = (7)(19) + 1 = 133 + 1 = 134$</p> <p>بنابراین حداقل ۱۳۴ نفر باید در سالن باشند.</p>	۸
<p>هر فصل تولد را لانه فرض می کنیم که برابر ۴ است. همچنین هر فرد خانواده را معادل کبوتر قرار می دهیم که برابر ۵ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می گیرند. به عبارتی دیگر در یک فصل به دنیا آمده اند.</p>	۹

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان