

جزوه های آموزشی، ریاضی دوازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی سوم اسفندماه نودون

مدرس: **مزبان حبیبی**

موضوع: **محاسبه و قضایای حد- ریاضی دوازدهم تجربی دودیرستان خورسندیان- شیراز**

بزوه های آموزشی، ریاضی دو یازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سدام ، وقت بخیر

ریاضی دو ، یازدهم تجربی دو

دبیرستان خوارسند هین کس از

کیتنجه سدم کهن لودون رای

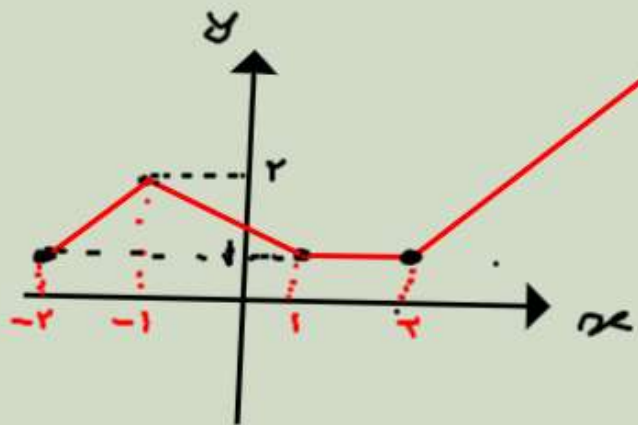
مرصنوع:

می سب حدتایع

مزبان حبیبی

مزبان حبیبی





یادداشت درس: مثال: نمودار تابع f بصورت زیر است

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

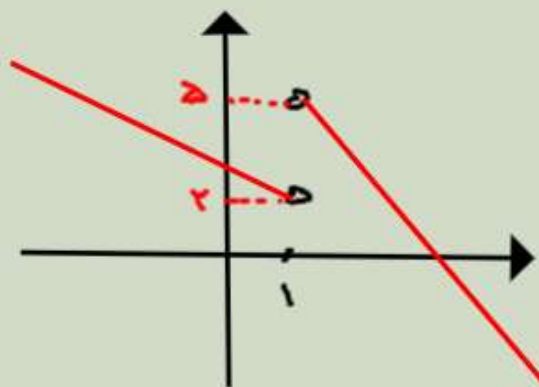
و $f(2) = 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \text{وجود ندارد} \rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

مزبان حبیبی



سؤال :



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

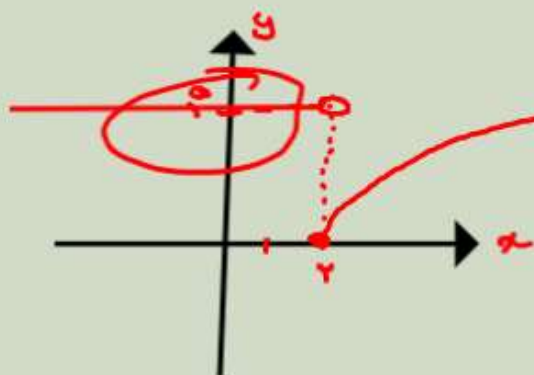
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

تذکره: اگر حد راست و چپ برابر نباشند، آنگاه تابع در آن نقطه حد ندارد.

مزبان حبیبی



نگین: بر رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$ وجود یا عدم وجود حدّ تابع

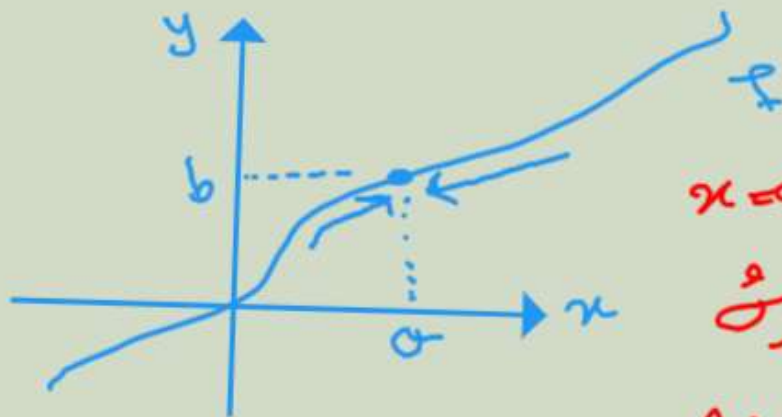


f را در $x=2$ و $x=0$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

مزبان حبیبی



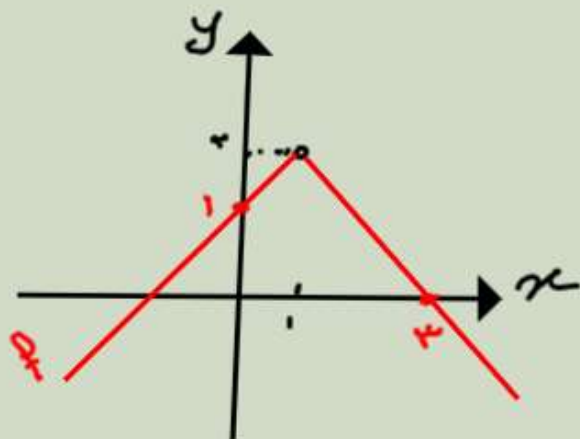
تذکره رسمی:

اگر نموداری تابع f در نقطه $x = a$

از چپ در راست به سمت نقطه a در x

داریم، پس $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$

مزبان حبیبی



مثال:

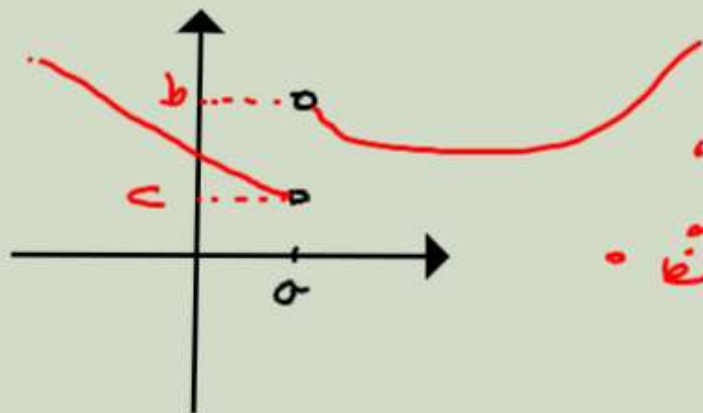
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$



نقطه غیر رگمی :



اگر نمودار تابع f درست را به دو جیب $x=5$ ،
به سمت دو نقطه مختلف حرکت کند، آنجا
تابع f در $x=5$ حد ندارد .

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = c, \quad b \neq c$$

مزبان حبیبی



قضیه ۱: اگر $f(x) = c$ یک تابع ثابت باشد آنگاه f در هر نقطه از \mathbb{R}

محور x اعداد حقیقی حد دارد و:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

قضیه ۲: آید $f(x) = x$ یک تابع همانی باشد آنگاه f در هر

نقطه از \mathbb{R} دارای حد است و:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

مزبان حبیبی



مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \omega = \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{4}}} \pi = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{0}} x = \frac{5}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

مزبان حبیبی

قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آنگاه

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$$

مزبان حبیبی





(\rightarrow) اگر $M \neq 0$ و معداً $f(x)$ و وقتی $x \rightarrow a$ ، L صفر باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

هر اگر $k \in \mathbb{R}$ و L آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$

(\rightarrow) اگر $n \in \mathbb{N}$ و L آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$

مزبان حبیبی



سؤال: حد هر زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (2x) + \lim_{x \rightarrow 2} 7 \\ &= 3(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 7 \\ &= 12 - 10 + 7 = 9 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x} - \lim_{x \rightarrow 1} x = \sqrt{1} - 1 = 0$$

مزبان حبیبی



نکته: اگر f تابع چندجمله‌ای، $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{نکته}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow (-1)} (x^3 - 2x + 1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = 0$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x + 2) = 2^3 + 2 + 2 = 12$$

مزبان حبیبی



$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (3x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-2)} = \frac{1}{-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)} = \frac{2}{0} \Rightarrow \text{فنکشن چیرک غیر توان نیست (وجود ندارد)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-1)} = \frac{0}{0} \text{ (فنکشن چیرک غیر توان است)}$$

مزبان حبیبی



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{صفر بر صفر}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

توجه:

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 0 \quad \text{کارهای مهم (x-1)}$$

مزبان حبیبی



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{2^2 - 4}{2^2 + 2 - 6} = \frac{0}{0}$$

شکل
بسیار

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow x - 2 \neq 0$$

مزبان حبیبی



تذکر: $a \in \mathbb{R}$ ، شرط: $0 \neq$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\frac{\pi}{4} \neq 90^\circ$$

مثال:
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + 5}{\cos x - 2} = \frac{x \sin(\frac{\pi}{4}) + 5}{\cos \frac{\pi}{4} - 2} = \frac{x(1) + 5}{0 - 2} = \frac{6}{-2}$$

مزبان حبیبی



$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$(a^2 + b^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

مثال: حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 125}{x^2 - 25} = \frac{5^2 - 125}{5^2 - 25} = \frac{0}{0} \quad \text{صفر}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 125}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (x^2 + 5x + 25)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 5x + 25}{x+5}$$
$$= \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$x \rightarrow 5 \Rightarrow x \neq 5 \Rightarrow x - 5 \neq 0$$

مزبان حبیبی

بزوه های آموزشی، ریاضی دو یازدهم تجربی، دکتر مزبان حبیبی



حسین بابایی

مربی زبان

سنه ۱۳۳۰

۱۳۳۰

مزبان حبیبی