

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی بیست و پنجم آبان نودون

مدرس: **مزبان حبیبی**

موضوع: **معادله، همبستگی - دوازدهم ریاضی یک دبیرستان بوعلی شیراز**

بزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

در ریاضیات گسسته دوازدهم، رویه‌های ۱

در صنوع:
معالیه حقیقی

بیرتبه‌های زوجی - شیم از

کتابخانه ۲۵ - ۱، ۹۹ عت ۱۴:۲۵

مدرس: مزبان حبیبی

حبیبی





یادآوری :

آر a و b در تقسیم به m ، هم باقی نماندند

$$a \equiv b \pmod{m}$$

گفته شد :

نویسند :

$$a - b = mk \quad \Leftrightarrow \quad m \mid a - b$$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



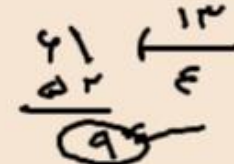
$$21 \equiv_{\equiv 9} 3 \text{ - ناله}$$

$$25 \equiv_{\equiv 7} 4$$

$$18 \equiv_{\equiv 9} 27$$

$$14 \equiv_{\equiv 7} 21$$

ناله: $61 \equiv_{\equiv 12} ? = 9, 22, 35, 48$



مزبان حبیبی



تکرار:

$$a \equiv b \pmod{m} \implies \begin{cases} a + c \equiv b + c \\ a - c \equiv b - c \\ a \cdot c \equiv bc \\ a^3 \equiv b^3 \\ a \equiv b + m \cdot k \end{cases}$$

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$a \equiv b, c \equiv d \implies \begin{cases} a+c \equiv b+d \\ a-c \equiv b-d \\ a \cdot c \equiv b \cdot d \end{cases}$$

نظریه

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات کسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: بافتابنده تقسیم $1 + 29$ را بر 16 بنویسید.

$$1 \equiv 1 \pmod{16} \rightarrow 2 \equiv 2 \pmod{16} \rightarrow 3 \equiv 3 \pmod{16} \rightarrow 4 \equiv 4 \pmod{16} \rightarrow 5 \equiv 5 \pmod{16} \rightarrow 6 \equiv 6 \pmod{16} \rightarrow 7 \equiv 7 \pmod{16} \rightarrow 8 \equiv 8 \pmod{16} \rightarrow 9 \equiv 9 \pmod{16} \rightarrow 10 \equiv 10 \pmod{16} \rightarrow 11 \equiv 11 \pmod{16} \rightarrow 12 \equiv 12 \pmod{16} \rightarrow 13 \equiv 13 \pmod{16} \rightarrow 14 \equiv 14 \pmod{16} \rightarrow 15 \equiv 15 \pmod{16} \rightarrow 16 \equiv 0 \pmod{16}$$

$17 \equiv 1 \pmod{16}$
 $18 \equiv 2 \pmod{16}$
 $19 \equiv 3 \pmod{16}$
 $20 \equiv 4 \pmod{16}$
 $21 \equiv 5 \pmod{16}$
 $22 \equiv 6 \pmod{16}$
 $23 \equiv 7 \pmod{16}$
 $24 \equiv 8 \pmod{16}$
 $25 \equiv 9 \pmod{16}$
 $26 \equiv 10 \pmod{16}$
 $27 \equiv 11 \pmod{16}$
 $28 \equiv 12 \pmod{16}$
 $29 \equiv 13 \pmod{16}$
 $30 \equiv 14 \pmod{16}$
 $31 \equiv 15 \pmod{16}$
 $32 \equiv 0 \pmod{16}$

$1 + 29 \equiv 1 + 13 \pmod{16} \equiv 14 \pmod{16}$
 $14 \div 16 = 0 \text{ remainder } 14$
 $\rightarrow r = 14$



بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بررسی نمود

$$\begin{aligned} 4 \equiv 2 \pmod{14} &\rightarrow 4 \equiv 2 \pmod{14} \Rightarrow 4 \equiv 2 \pmod{14} \\ &\Rightarrow 4 \equiv 2 \pmod{14} \Rightarrow 4 \equiv 2 \pmod{14} \\ &\Rightarrow r = 4 \end{aligned}$$

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: باقیمانده تقسیم

۳۱۳۹۹ بر ۷ را بنویسید.

$$3^k \equiv 27 \pmod{7} \Rightarrow 3^k \equiv 27 - 28 \pmod{7} \Rightarrow 3^k \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow (3^k)^{444} \equiv (-1)^{444} \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 3^{1498} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3 \times 3^{1498} \equiv 3 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 3^{1499} \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow \boxed{V=3}$$

$3^n: 3, 9, 27, 81, \dots$
 $7k: 7, 14, 21, 28, \dots$

$3^3 \equiv 27 \pmod{7}$
 $3^4 \equiv 28 \pmod{7}$

$3 \overline{) 1399}$
 $\underline{9}$
 499
 $\underline{42}$
 79
 $\underline{70}$
 99
 $\underline{91}$
 89



معادله همگونی :

$$۷ \equiv ۲x \pmod{۵} \quad \text{علاقه}$$

$$x = ?$$

$$۷ \equiv ۲x \pmod{۵} \Rightarrow ۲x = ۱۲ \pmod{۵}$$

$$۲ \equiv ۲ \pmod{۵}$$

یعنی $x = ۴$ جواب معادله همگونی

$$۷ \equiv ۲x \pmod{۵}$$

۹ = x
۲
۱۱
۱۳
۱۵
۱۷
۱۹
۲۱
۲۳
۲۵
۲۷
۲۹
۳۱
۳۳
۳۵
۳۷
۳۹
۴۱
۴۳
۴۵
۴۷
۴۹
۵۱
۵۳
۵۵
۵۷
۵۹
۶۱
۶۳
۶۵
۶۷
۶۹
۷۱
۷۳
۷۵
۷۷
۷۹
۸۱
۸۳
۸۵
۸۷
۸۹
۹۱
۹۳
۹۵
۹۷
۹۹

حبیبی



نشانده: $2x \equiv 13 \pmod{9}$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 9 = 54 \\ 13 \cdot 9 = 117 \end{array}$$

$$2x \equiv 13 \pmod{9} \checkmark$$

$$9 \mid 2x - 13 \implies 2x - 13 = 9k$$

$$\implies 2x - 9k = 13$$

عضو ۲

غیر ممکن \implies عضو ۳

حبیبی



قضیه :
معادله همگونی $ax \equiv b \pmod{m}$ در \mathbb{Z} جواب دارد
اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: $30x \equiv 24 \pmod{150}$

معادله در حالت صحیح به این صورت است: $(30, 24) = 6 \mid 150 \Rightarrow$

مثال: $18x \equiv 64 \pmod{64}$

معادله در حالت صحیح به این صورت است: $(18, 64) = 2 \nmid 64 \Rightarrow$

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$a \equiv_m b \text{ , } (m, c) = d \Rightarrow a \equiv_{\left(\frac{m}{d}\right)} b$$

نظریه ۱

مزبان حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: $2 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 2 \equiv 7 \pmod{5}$

$(21, 28) = 7$

مثال: $18 \equiv 2 \pmod{16} \Rightarrow 18 \equiv 18 \pmod{16}$

$(2, 18) = 2$

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مکزی: معادله هم معنی $50 \equiv 15 \pmod{30}$ را حل کنید.

معادله جواب ندارد $\Rightarrow 50 \not\equiv 15 \pmod{30}$

حبیبی



گسترش: جواب ندارد $\Rightarrow 75 \nmid 6 = (18, 30)$ (تلف)

$$2 \cdot x \equiv 75 \pmod{18}$$

$$\therefore 2 \nmid x \equiv 6 \pmod{18}$$

$$\begin{array}{r} 2x \equiv 75 \\ - 36 \\ \hline 39 \end{array}$$

جواب دارد $\Rightarrow 40 \mid 4 = (4, 24)$

$$2 \nmid x \equiv 6 \pmod{18} \xrightarrow{\div 2} 2x \equiv 6 \pmod{9} \Rightarrow 2x \equiv 6 \pmod{9} \xrightarrow{\div 2} x \equiv 3 \pmod{9} \quad (2, 9) = 1$$

$$\Rightarrow 3 \mid x - 6 \Rightarrow x - 6 = 3k \Rightarrow x = 3k + 6$$

حبیبی



تمرین : سوال زیر را حل کنید.

$$19x \equiv 6 \pmod{12}$$

سه جواب دارد $\Rightarrow (19, 6) = 1 \mid 12$

$$19x \equiv 6 \pmod{12} \xrightarrow[\substack{\cdot 5 \\ (5, 12)=1}}{19 \cdot 5} 2x \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow 2x \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow 2x \equiv 0 \pmod{12} \\ \xrightarrow[\substack{\cdot 6 \\ (6, 12)=6}}{2 \cdot 6} x \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow x = 6k + 0$$

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۱: معادله همبستگی $\rho = \frac{27}{189x}$ را حل کنید.

تکلیف شد

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین ۲: مدار به هم نچسب ز در را حل کنید.

$$۱۲۹۰ \equiv_{18} ۶۰$$

تکلیف ۳ د

حبیبی

بزه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



کمترین عدد a بر $\sqrt{12}$ بخش پذیر است. کمترین عدد از دنباله $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

۵/۴ ۴(۳) ۳(۲)√ ۲(۱)

$$\sqrt{12} \equiv 4a \equiv 3 \Rightarrow (\sqrt{12})^2 \equiv 22 \Rightarrow 2\sqrt{12} \equiv 4 \Rightarrow \sqrt{12} \equiv 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{12} \equiv 12 \Rightarrow \sqrt{12} \times \sqrt{12} \equiv 12 \Rightarrow \sqrt{12} \equiv 2$$

نتیجه نهایی
۱۴۵

$$\Rightarrow \sqrt{12} + a \equiv 2 + a \Rightarrow \text{Min}(a > 0) = 2$$

حبیبی

بزوہ ہای آموزش، ریاضیات کستہ دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسہ بن سید

یاد

حبیبی

