

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی بیست و یکم بهمن نودون

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **گراف ساده، همبندی گرافها- دوازدهم ریاضی 1 دبیرستان خورشیدیان شیراز**

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی

بهیرستان حوزه سندیان

به کتب هفتم بجهن نود و نه ساعت ... ۱۴

مدرسین
مدرسین

مرکز حسابی

مربی



سؤال: مجموعه $V = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه (و خنوی) دارد؟

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \checkmark$$

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

$$\{b, b\} = \{b\}$$

تمام زیرمجموعه چهارده خنوی V را بنویسید.

$$M = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\} \}$$

مجموعه



توجه: اگر $\sqrt{2}$ بیخ گسسته باشد آنگاه 10 زیر مجموع دو گسسته دارد.

سوال: $\sqrt{2}$ ر قبیل M چند زیر مجموع دارد؟

$$2^{10} = 1024$$

مبانی



$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

شکل:

$$M = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}$$

$$\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

$$|M| = 10 \quad \text{و} \quad \text{تعداد زیر مجموعه ها} = 2^{|V|} = 1024$$

این زیر مجموعه ها از M بنویسید.

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{b, d\}\}$$

مزبان حبیبی



تذکره:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$
$$E = \{ \underbrace{\{a, b\}}, \underbrace{\{a, c\}} \}$$

$x \in E \Rightarrow x \subseteq V$ و $|x| = 2$

پس: هر عضو E یک زیر مجموعه دو عضوی V است.

در مورد زوج مرتب (V, E) چه می توان گفت؟

Left side (Incorrect statements):

$$V \subseteq E \quad \times$$
$$E \subseteq V \quad \times$$
$$E \in V \quad \times$$
$$V \in E \quad \times$$
$$\{a, b\} \in V \quad \times$$
$$\{a, b\} \subseteq V \quad \checkmark$$



$$\binom{4}{2} = 6$$

$$V = \{a, b, c, d\}$$

نتیجه:

$$M = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

$$M = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$$

$$ab = \{a, b\}$$

$$E \subseteq M, E = \{ab, ac, cd, bc\}$$

$$ab = ba$$

هر عضو E یک زیر مجموعه (و عضوی) V است.
 رتبه مرتب (V, E) به خصوصیتی دارد؟

$$P = 4$$

$$q = 4$$



تعریف: فرض کنید Γ مجموعه ای دلتا (غیر تهی) باشد، زوج مرتب

$$G = (\Gamma, E) \text{ را یک گراف ساده گویند، اگر:}$$

هر دو رأس α و β از Γ به یک

مزبان حبیبی



سؤال: با مجموعه $S = \{a, b, c, d, e\}$ چند حرف S می توان

نوشت؟

دو تایی
تعداد زیر مجموعه ها $S = \binom{5}{2} = 10$

جواب:

$$\text{تعداد همه آنها} = 2^5 = 1024$$

مبانی

مسئله: گراف $G = (V, E)$ بصورت زیر مشخص است.

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{ab, ac, ad, bd\}$$

.

مزبان حبیبی





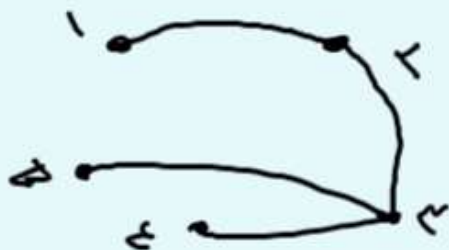
مثال:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{12, 23, 34, 45\}$$

$$G = (V, E)$$

$$p = 5$$
$$q = 4$$



مزبان حبیبی



قرارداد: فرض کنید (\mathbb{Z}_n) یک گراف ساده است.

(۱) عضوهای \mathbb{Z}_7 را a می‌گوئیم و تعداد رایج ها را سرتبه گراف می‌نویسیم. (۲)

(۲) عضوهای \mathbb{Z}_5 را a می‌گوئیم و تعداد رایج ها را اندازه گراف می‌نویسیم. (۳)

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی



تمرین: گزات G با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و مجموعه یالهای

$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ معروض است.

الف: نمودار گراف را رسم کنید.

ب: مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

$$p=5 \text{ و } q=7$$



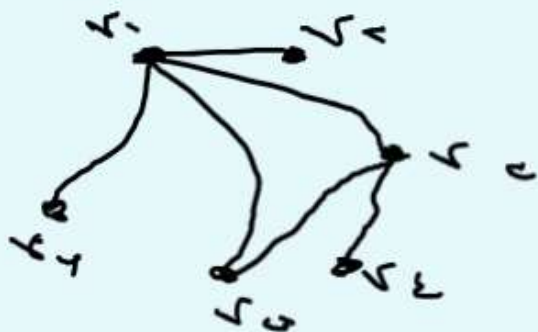
زبان حبیبی



تمرین: بخودار ذات (E, γ) به صورت زیر است .

الف) مجموعه رئوس و مجموعه یالها را بنویسید .

ب) 4 و 4 را بنویسید .



تکلیف

مزبان حبیبی

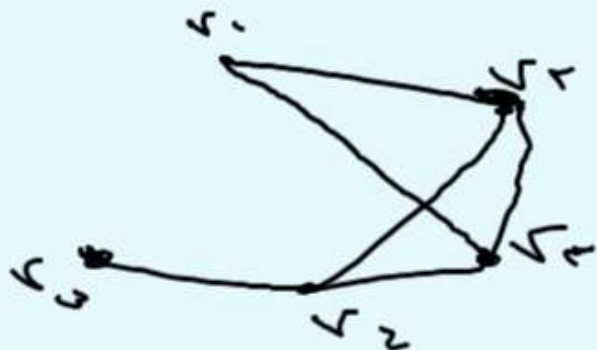
جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعریف درجه راس:

مجموعه نیمی (۵، ۶) = مجموعه حروف صدادار، تعداد راس متصل به
راس ۵ را درجه ۵ نسبت به راس (۵) و علامت آن می‌دانیم.

مزبان حبیبی



مثال: $\text{degree} = \text{deg}$

$$\text{deg}(v_1) = 4$$

$$\text{deg}(v_2) = 4$$

$$\text{deg}(v_3) = 4$$

$$\text{deg}(v_4) = 4$$

$$\text{deg}(v_5) = 2$$

$$V: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$$

$$p = 6$$

$$q = 10$$

$$\sum \text{deg}(v_i) = 20$$

حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسین حبیبی

۱۳۹۰

مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی ۲

دبیرستان خوارساز

شنبه ۱۶ شهریور ماه ۱۳۹۸

موضوع:

رده حبابی از گویان

نویسنده

مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و ازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعریف:

دوراس مجاور:

به دوراس گفته می شود که دو سبک یا ل باشند.

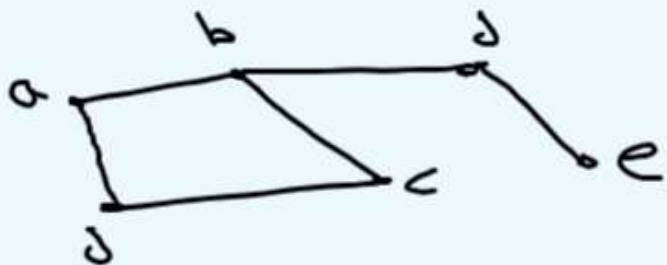
دو یال مجاور:

به دو یالی گفته می شود که به یک راس متصل باشند.

جدیدی



مثال:



حورا a و b مجاور هستند.

دورا a و c مجاور نیستند.

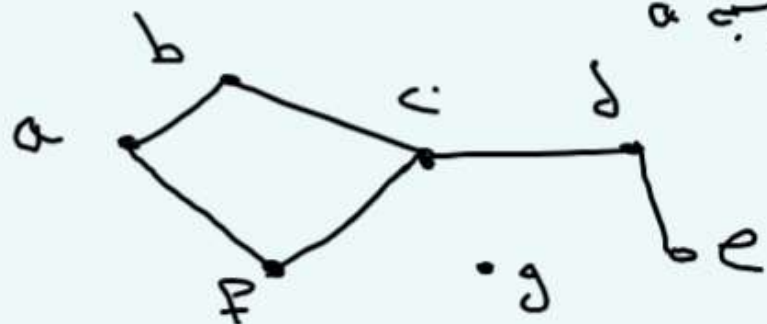
مثال: دو a و b مجاورند

دو a و c مجاور نیستند.

حبیبی



تعریف: فرض کنید G یک گراف باشد.
 ۱) مجموعه رئوس مجاور a را همسایگی باز a می گویند و با $N_G(a)$ نشان می دهیم.
 ۲) $N_G[a] = N_G(a) \cup \{a\}$ همسایگی بسته a است.



$$N_G(c) = \{b, d, f\}$$

$$N_G[c] = \{c, b, d, f\}$$

$$N_G(a) = \{b, f\}$$

$$N_G[a] = \{a, b, f\}$$

$$N_G(g) = \{\}$$

$$N_G[g] = \{g\}$$

مزبان حبیبی



تذکره:

۱- اگر همایی باز یک راس، محض باشد آنگاه درجه آن راس صفر است.

۲- اگر همایی بسته یک راس، یک عضو باشد آنگاه درجه آن راس صفر است.

$$(۳) : \deg(a) = 0 \iff N_G(a) = \{a\} \iff N_G[a] = \{a\}$$

(۴) تعداد عضوهای همایی باز راس a برابر درجه راس a است.

(۵) همایی بسته یک راس، هرگز تهی نیست.

مبانی



بیشترین و کمترین درجه راس:

معرضه کنید $G = (V, E)$ که n راس دارد.

$$\Delta(G) \equiv \Delta \quad \text{بیشترین درجه در بین رئوس}$$

$$\delta(G) \equiv \delta \quad \text{کمترین درجه در بین رئوس}$$

$$0 \leq \delta \leq \deg(v_i) \leq \Delta \leq n-1$$

میزبانی



گنجه: هر $5 = 5$ آنگاه درجه هر رئوس با هم برابر است.

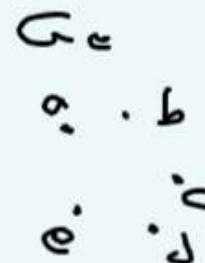
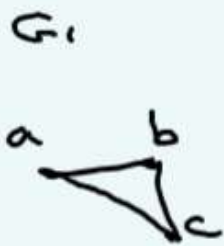
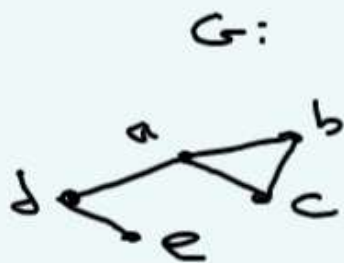
مثال: اگر $5 = 5 = 5$ یعنی درجه هر رأس پنج است.

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی



زیرگراف: اگر $(V, E) = G$ یک گراف باشد و (V', E') یک گراف به حلقه یا حلقه های
 گراف G باشد که $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ باشد و (V', E') نیز یک گراف باشد.
 آنرا زیرگراف G میگویند. یا به عبارتی دیگر آنرا زیرگراف G میگویند.
 مثال: اگر G_1 و G_2 و G_3 زیرگراف G هستند.

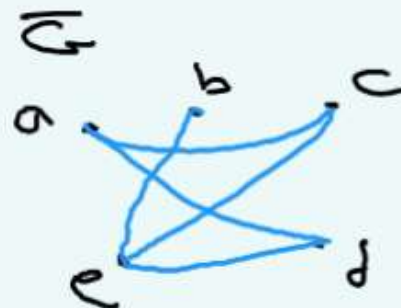
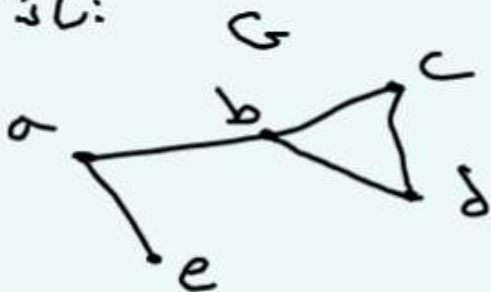


مکتب



گراف مکمل: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده به همراه نقطه (V, E') \bar{G}
را مکمل گرافی گویند به شرط آنکه: اگر دو رأس در G مجاور باشند آنوقت
در \bar{G} مجاور نباشند و برعکس.

مثال:



مکمل گرافی



تذکره:
اگر $d_G(a)$ و $d_H(a)$ به ترتیب درجه راس a در گراف G و H باشد آنگاه
 $d_G(a) + d_H(a) = p - 1 =$
کمی از تعداد اشیاء کمتر

مکتب

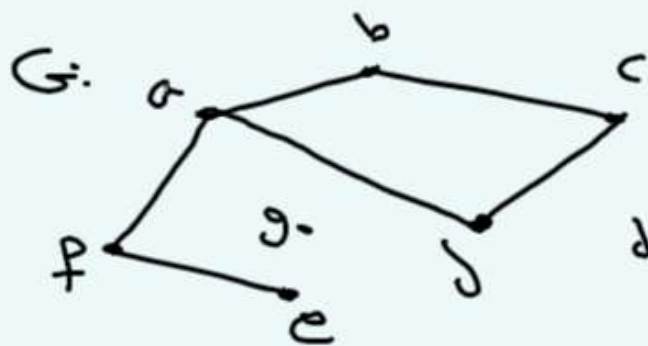
سؤال: تعداد پیکربندی‌های P راسی، حداکثر چند می‌تواند باشد؟

$$q_{\max} = \binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$$

حداکثر q ، زمانی اتفاق می‌افتد که همه راسها مجاور باشند.

مزبان حبیبی





سؤال: $p = 7$
 $q = 4 \leftarrow \sum \deg(v_i) = 12$

$\deg(a) = 4, \deg(b) = 2, \deg(c) = 2$

$\deg(e) = 1, \deg(d) = 2, \deg(f) = 2$

$\deg(g) = 0$

$\Delta(G) = 4, \delta(G) = 0$

$N_G(a) = \{a, b, d, f\}$

$N_G(a) = \{b, d, f\}$

مزبان حبیبی



حقیقه: در گراف $G = (V, E)$ از مرتبه P و اندازه ۲۹ داریم:

$$\sum \deg(v_i) = ۲۹$$

اثبات: می دانیم هر یال دقیقاً به دو رأس متصل است پس برای هر یال e مجموع
درج رأس‌های آن برابر ۲ است. لذا $\sum \deg(v_i) = ۲|E|$.

مکتب



$$\left. \begin{array}{l} p = \text{تعداد راسها} \\ q = \text{تعداد یالها} \\ 2q = \text{مجموع درجات} \end{array} \right\}$$

$$\frac{2q}{p} = \text{میانگین درجه ها}$$

$$\Delta = \text{بیشترین درجه}$$

$$\delta = \text{کمترین درجه}$$

نتیجه:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

مزبان حبیبی



بمکثرین: اگر یک حرف P بعداً ۱۹ بار، حداقل درجه هر راس ≥ 3 می باشد.

این گراف حداکثر چند راس دارد؟

$$P = ?$$

$$g = 19$$

$$s = 3$$

$$s \leq \frac{2g}{P} \leq 5 \Rightarrow 2 \leq \frac{2 \cdot 19}{P} \leq 5$$

$$\Rightarrow 2P \leq 38 \Rightarrow * P \leq \frac{38}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq 19 \Rightarrow P_{\max} = 19$$

مزبان حبیبی



تمرین: در یک گراف با ۳۱ یال، درجه هر رأس حداکثر ۵ می باشد.
این گراف حداقل چند رأس دارد؟

گتلف

$$\text{توجه: } 5 \leq \frac{29}{p} \leq 8$$

مزبان حبیبی

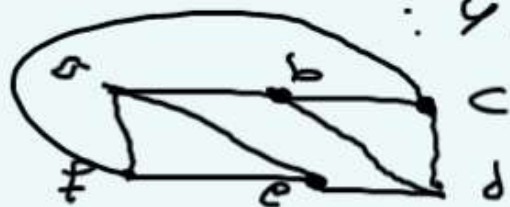


گراف k -منتظم:

گراف k راسی که در هر راس آن k باشد.

یا: گراف k راسی که در آن $k = \delta = \Delta$.

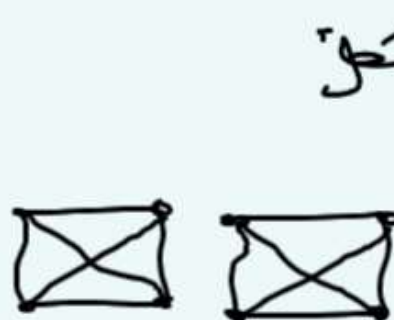
مثال: گراف 3 -منتظم از رتبه 4 :



مزبان حبیبی



مثال: n گویا n مستطیج از مرتبه ۸ :





قضیه: اگر K - معنظم از مرتبه P و اندازه q داریم

$$q = \frac{k \cdot P}{r}$$

اثبات: $rq = \sum \deg(v_i) = \deg(v_1) + \dots + \deg(v_p)$

$$= \underbrace{k + \dots + k}_{r \cdot P} = kP$$

$$rq = k \cdot P \Rightarrow q = \frac{k \cdot P}{r}$$

مزبان حبیبی



نمودار: سه کسب و کار - منتظم از مرتبه ۲ و اندازه ۹۰ داریم: $q = P + 4$.

$P - q$ را بیابید.

$$q = \frac{2P}{2} \Rightarrow q = \frac{2P}{2} \quad \text{منتظم}$$

$$q = P + 4 \Rightarrow \frac{2P}{2} = P + 4 \Rightarrow 2P = 2P + 8 \Rightarrow \boxed{P = 8}$$

$$q = \frac{2 \times 8}{2} = 8 \quad \text{و}$$

مکتب



سگراف کامل:

سگراف K_n را می گویند که در هر رأس آن $(n-1)$ باشد.

یا: گرافهایی که هر دو رأس آن به هم وصلند.

سگراف کامل K_n را با K_n نشان می دهیم.

K_1

.

K_2

—

K_3



K_4



مثال: K_5



مزبان حبیبی



$$q(k_p) = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{قضیه:}$$

$$\begin{aligned} 2q &= \sum \deg(v_i) = \deg(v_1) + \dots + \deg(v_p) \quad \text{اثبات:} \\ &= \underbrace{(p-1) + \dots + (p-1)}_{\text{p}} = p(p-1) \end{aligned}$$

$$2q = p(p-1) \implies q = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$q(k_v) = \frac{vkv}{2} = 21$$

$$q(k_{11}) = \frac{1 \times 9}{2} = 4.5 \quad \text{تناقذ}$$

مزبان حبیبی



مکزی: اگر تعداد کامل P راسی از گراف کامل $(P+2)$ راسی، 31 یال کمتر دارد.

$$q(k_p) = \frac{P(P-1)}{2}$$

P گره را 1 $?$

$$q(k_{P+2}) = \frac{(P+2)(P+2-1)}{2} = \frac{(P+2)(P+1)}{2}$$

$$q(k_p) = q(k_{P+2}) - 31$$

$$\frac{P(P-1)}{2} = \frac{(P+2)(P+1)}{2} - 31 \Rightarrow P(P-1) = (P+2)(P+1) - 62$$

$$\Rightarrow \cancel{P^2} - P = \cancel{P^2} + 3P + 2 - 62 \Rightarrow -4P = -60 \Rightarrow \boxed{P=15}$$

مکزی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسب بنام
۱
۱۱۱

مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

موضوع:

حجم بندی گراف

ریاضیات کسسته - دوازدهم ریاضی

دبیرستان هوراندیان شیراز

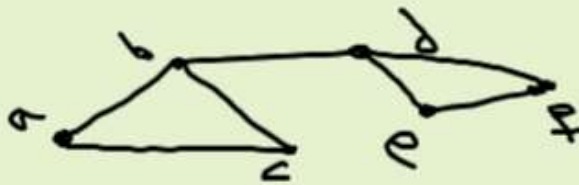
رزین جیبی

به سفارش بنام دبیران بکلیه بنفودن ۱۳۰۱۵

مزبان حبیبی



تعریف مسیر: دنباله ای از رئوسهای متمایز (مغزآبدار است) ، به این شرط که هر دو راس متوالی، در کنار یک یا دو لبه باشند.



مثال:

سیراز a به f : $a b d f$ (طول ۳)

$a c b d f$ (طول ۴)

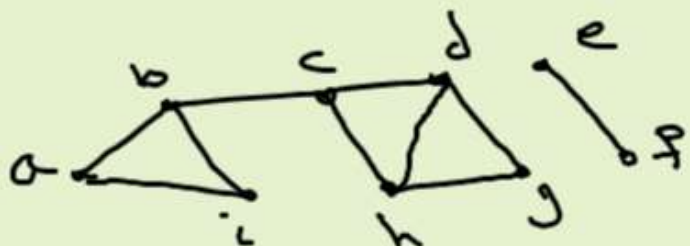
$a b d e f$

$a c b d e f$

مزبان حبیبی



مثال: گراف حالت صورت زیر است:



$$p = 9 \qquad q = 10 \qquad (1)$$

$$k = 1 \qquad \Delta = 3 \qquad (2)$$

(3) سیر از a به g :

$abc d g$ ، $abch g$ ، $aibch g$ ، $aibcd g$

(4) سیر از a به f : وجود ندارد

مزبان حبیبی

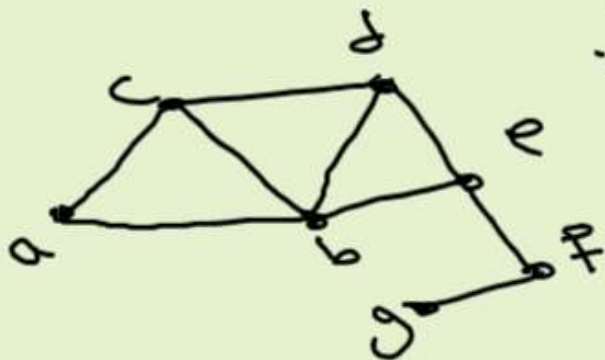


تعریف عدد:

سیری است که ابتدا و انتهایش یک هم منتهی هستند.
مثال:

$$a b c a \equiv a c b a \equiv b a c b$$

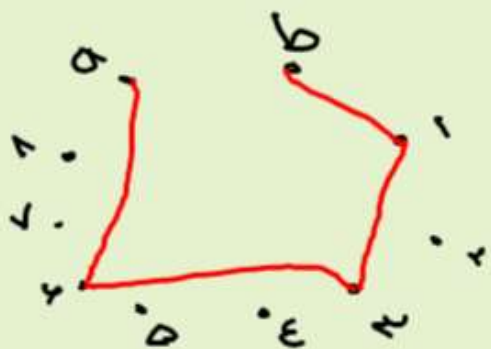
در آن که از او نگذرد: وجود ندارد



مزبان حبیبی



تمرین: دو رأس a و b در گراف K_n را در نظر بگیرید.
چند مسیر به طول k از a به b وجود دارد؟



$$P_2(a, b) = \binom{n-1}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!}$$

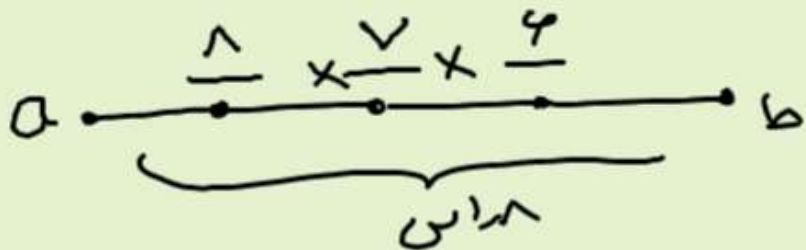
$$P_3(a, b) = 2!$$

$$P_k(a, b) = \binom{n-1}{k-1}$$

زبان حبیبی



اولی درم:



$$\text{جواب} = 1 \times 7 \times 6 = \dots$$



تجزیه : چند دور به طول k در k و مبدأ دارد که n رأس n یا بیشتر؟



$$\binom{n}{k}$$

انتخاب k رأس

$$k! \times \binom{n}{k}$$

مزبان حبیبی



تذکره ۱: تعداد سیرهای بطول m در k از رأس a به رأس b :

$$\binom{p-2}{m-1} \times (m-1)!$$

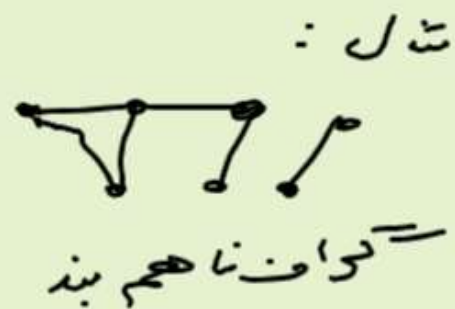
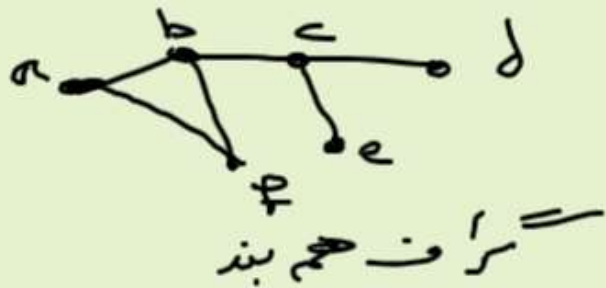
تذکره ۲: تعداد درختان بطول m در k :

$$\binom{p}{m} \times (m-1)!$$

مزبان حبیبی



قرنیه گراف هم بند: گرافی است که هر دو رأس متجاور آن،
حد اکثر یک مسیر عبور دارد.



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

تذکره ۳: اگر k حاصل kP حجم بندها -

تذکره ۴: اگر k هم بند P راسی، صد اقل $(P-1)$ یال دارد.

و ج: عکس این تذکره، محوری ندارد

تذکره ۵: اگر k دارای راسی از P به P باشد، آنگاه حجم بندها -

مزبان حبیبی

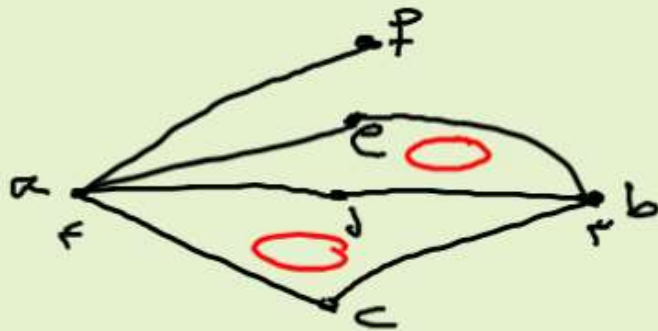




تمرین: دنباله درجه‌ها به صورت $S: 4, 3, 2, 2, 2, 1$

چه تعداد دوری به این شکل، مجاورت است. این گراف چند دور با طول کمتر دارد؟

درجه‌ها:



$acbd a, a e b d a, a c b e$

تعداد دورها به طول کمتر: **صفر**

مزبان حبیبی



فرضیه: تعداد راس‌های مزد در هر گراف مسان، عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم x و n به ترتیب مجموع درجات راس‌های مزد و مجموع درجات راس‌های زوج باشد.

$x \equiv$ مجموع درجات راس‌های مزد

$n \equiv$ مجموع درجات راس‌های زوج

$$x + n = \sum \deg(v) = 2q$$

مبانی



دک :

$$x + y = 24 \Rightarrow x = 24 - y$$

از آنجا که y مجموع تعدادی عدد زوج است پس y زوج است و لذا:

$$x \text{ زوج است} \Rightarrow x = 24 - y \Rightarrow 24 - y \text{ زوج است و } y \text{ زوج است}$$

چون x جمع تعدادی عدد فرد است پس تعداد آنها باید زوج باشد.

مبانی



تمرین: چندگراف ۱۳۹۹ - منتظم از رتبه ۲۰۲۱ می توان رسم کرد؟

پاسخ اول: چنین گرافی وجود ندارد چون در صورت رسم تعداد رأس درجه ۱۳۹۹ (مزد) باید عددی فرد باشد و غیر ممکن است.

پاسخ دوم: غیر ممکن است \Rightarrow مزد = زوج $\Rightarrow 1399 \times 2021 = 2800$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نکته ۱: در ۲ و ۳ مرتبه رند است.

گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۲ وجود ندارد.

نکته ۲: گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۱۹ وجود ندارد.

مزبان حبیبی



تمرین: گویا ناتهی حاکم گویا ۲- منظم از رتبه ۷ می: نه

چند عدد از رتبه ۷ برای ۷ وجود دارد؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{ناتهی} \Rightarrow 0 < 7 \\ \text{رتبه 7} \Rightarrow 7 < 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < 7 < 7 \xrightarrow[\text{عدد از رتبه 7}]{P=7 \text{ فردا}} \boxed{7 = 2, 4, 6}$$

مزبان حبیبی



مکسین: در یک مهمانی ۱۷ نفر حضور دارند، به چند طریق می‌توان آن‌ها را
از صحنه کن، دقیقاً با ۵ نفر دیگر دعوت باشد؟

جواب: به خواص تناظر، این سؤال (صحنه کن را سه دوستی یا با بشر)
کمی گراف G - منتظم از مرتبه ۱۷ خواهد بود که وجود ندارد.
هسته اینکار امکان پذیر نیست.

مکتب

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسب نیاز
باید

مزبان حبیبی

