

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی بیستم آبان نودون

مدرس: **مزبان حبیبی**

موضوع: **همه شتی - دوازدهم ریاضی 2 دبیرستان خورسندیان شیراز**

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر
ریاضیات گسسته - دوازدهم ریاضی ۲ - موضوع: **مجموع حسابی**

دبیرستان خوارزمی نازی

پسندیده ۲۰، ۸، ۹۹ ساعت ۱۴:۰۰

مدرس: مزبان حبیبی

مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سوال:

$$\frac{17}{12} \div \frac{6}{2}$$

$$\frac{35}{20} \div \frac{2}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 18 - 17 = 1 \\ 6 \mid 18 \end{array} \right\}$$

پسند

بینی: ۳۵ و ۱۷ در نسبت به ۶، هم یابیم بینه اند.

۳۵ و ۱۷ به بیکی نه ۶، هم کف استند

مزبان حبیبی



$$a, b \in \mathbb{Z} \text{ و } m \in \mathbb{Z}$$

تعریف:

دو عدد صحیح a و b را به هم می‌زنیم عدد طبیعی m هم بخش می‌کنیم

$$\text{اگر } m/a - b = \dots$$

$$a \equiv b \pmod{m}$$

در این حالت می‌نویسیم:

میزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



حالت: $15 \equiv 3 \pmod{12}$

حالت: $16 \equiv 4 \pmod{12}$

$18 \equiv 6 \pmod{12}$

$12 \equiv 0 \pmod{12}$
 $15 - 12 = 3$

$16 - 12 = 4$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته «دوازدهم ریاضی»، دکتر مزبان حبیبی



$$141 = \frac{11}{3} \cdot \text{?} \quad \text{ناله}$$

$$141 \quad 1$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ 11 \overline{)141} \\ \underline{11} \\ 30 \\ \underline{33} \\ 30 \\ \underline{33} \\ 3 \end{array}$$

$$\text{ناله}$$

$$141 = \frac{5}{3} \cdot \text{?}$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ 5 \overline{)141} \\ \underline{10} \\ 41 \\ \underline{40} \\ 1 \end{array}$$

189 و 33 و 44 و 3 و 9 و 14 و 9 و 3 و 3 و 9

مزبان حبیبی



معنی :

$$\underline{a \equiv b} \iff \underline{m \mid a - b}$$
$$\iff \underline{a - b = m \cdot q}$$

a و b مترادف نسبت به m حاصل باقی مانده اند

کتاب جزوه مستر جزوه به چه حضار



۱) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید $a+c \equiv b+c \pmod{m}$.

$$\begin{aligned} \text{پس: } a \equiv b \pmod{m} &\implies m \mid a-b \implies m \mid a-b+c-c \\ &\implies m \mid a+c-b-c \implies m \mid (a+c)-(b+c) \\ &\implies a+c \equiv b+c \pmod{m} \quad \square \end{aligned}$$

پس:

$$a \equiv b \pmod{m}, c \in \mathbb{Z} \implies a-c \equiv b-c \pmod{m}$$

مزبان



(۲) اثر $a \equiv b$ ، $c \in \mathbb{Z}$: سه آنگاه ثابت کنید $ac \equiv bc$.

بسیار: $a \equiv b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a - b) \times c$

$\Rightarrow m | \underline{ac} - \underline{bc} \Rightarrow ac \equiv bc$.

مثال: $17 \equiv 12 \pmod{5} \xrightarrow{\times 2} 34 \equiv 24 \pmod{5}$
 $5 | 34 - 24 = 10$

$$\begin{array}{r} 34 \pmod{5} \\ 24 \pmod{5} \end{array}$$

مربی



۳) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد آنگاه ثابت کنید $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

پیدا : $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow a-b = m \cdot q \Rightarrow a = b + m \cdot q$

$$\Rightarrow a^n = (b + m \cdot q)^n \Rightarrow a^n = b^n + \underbrace{\binom{n}{1} b^{n-1} \cdot (mq) + \binom{n}{2} b^{n-2} \cdot (mq)^2 + \dots + (mq)^n}_{m \cdot k}$$

$$\Rightarrow a^n = b^n + m \cdot k \Rightarrow a^n - b^n = m \cdot k$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

مزبان حبیبی



۴ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \equiv d \pmod{m}$ آنگاه ثابت کنید:

الف) $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ ب) $a-c \equiv b-d \pmod{m}$ ز.) $ac \equiv bd \pmod{m}$

ب. ابتدا:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m \mid c-d \end{array} \right\} \Rightarrow m \mid (a-b) - (c-d)$$
$$\Rightarrow m \mid a-b-c+d \Rightarrow m \mid a-c - \underline{b+d} \Rightarrow m \mid \underline{(a-c)} - \underline{(b-d)}$$
$$\Rightarrow a-c \equiv b-d \pmod{m} \quad \blacksquare$$

مزبان حبیبی



(۵) اگر $a \equiv b$ و $b \equiv c$ ، آنگاه $a \equiv c$.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \Rightarrow m | a - b \\ b \equiv c \Rightarrow m | b - c \end{array} \right\} \Rightarrow m | (a - \cancel{b}) + (\cancel{b} - c)$$

$$\Rightarrow m | a - c \Rightarrow a \equiv c .$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$\frac{a}{m \cdot q + r}$$

$$\frac{m}{q}$$

$$\Rightarrow a = m \cdot q + r \Rightarrow a - r = m \cdot q$$

$$\Rightarrow m \mid a - r \Rightarrow a \equiv r \pmod{m}$$

شکر:

یعنی: (۶) در هر تقسیم، ستون و باقی مانده یکسانند. به این معنی که مجموع اعداد در هر ستون یکسان است.

مزبان حبیبی



مثال ۱:

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 205} \\ \underline{82} \\ 123 \\ \underline{123} \\ 0 \end{array}$$

$$41 = 4 \times 10 + 1 \Rightarrow 41 \equiv 1 \pmod{10}$$

مثال ۲:

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 205} \\ \underline{94} \\ 111 \\ \underline{94} \\ 17 \end{array}$$

$$\Rightarrow 47 = 4 \times 10 + 7 \Rightarrow 47 \equiv 7 \pmod{10}$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

تمرین: با صیغه نزینتسیم $1399^{17} + 19$ را بر $\sqrt{1399}$ بباید.

Handwritten mathematical solution for the problem:

$$1399 \equiv 4 \pmod{\sqrt{1399}} \Rightarrow 1399^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \pmod{\sqrt{1399}}$$

$$\Rightarrow 1399^2 \equiv 1 \pmod{\sqrt{1399}} \Rightarrow (1399^2)^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{\sqrt{1399}}$$

$$\Rightarrow 1399^{16} \equiv 1 \pmod{\sqrt{1399}}$$

$$\Rightarrow 1399^{16} + 19 \equiv 1 + 19 \equiv 20 \pmod{\sqrt{1399}}$$

$$\Rightarrow 1399^{16} + 19 \equiv 4 \pmod{\sqrt{1399}} \Rightarrow \sqrt{1399} \mid 1399^{16} + 19$$

Additional calculations on the left side of the page:

$$\begin{array}{r} 1399 \\ \sqrt{1399} \overline{) 1399} \\ \underline{1399} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1399 \\ \sqrt{1399} \overline{) 1399} \\ \underline{1399} \\ 0 \end{array}$$

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر زبان حبیبی



مگرین: باقیه نزدیکتیم عدد $131 + 7^{13}$ را بر 5 بناباید.

تکلیف شد

بیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسنة بنی کیم

بیاد تدریس

مزبان حبیبی

