سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی دوم اسفند ماه نودونه

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: محاسبه نسبتهای مثلثاتی مجموع و تفاضل- یازدهم ریاضی یک دبیرستان خورسندیان- شیراز

دکتر مزبان حبیبی

1 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام ، وقت بخیر

حسابان یک - دوازدهم ریاضی یک

دبیرستان غیر دولتی سمپاد شیراز

شنبه دوم اسفند نود و دو ساعت ۸:..

موضوع :

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

ن حبیبی

2 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

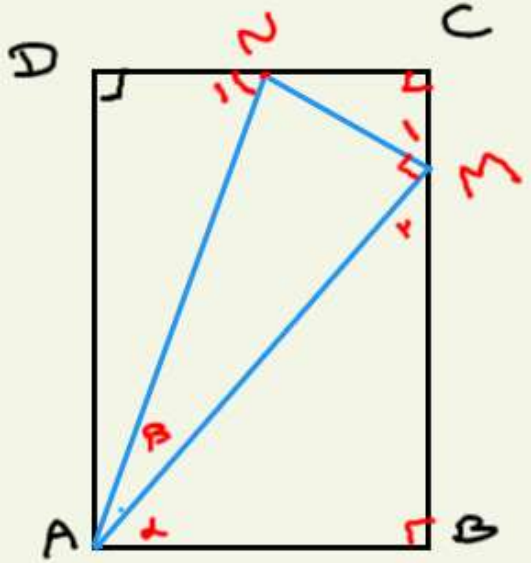
3 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

مجموعه جواب نامعادله مثلثاتی $(\alpha+\beta)$:

مرضی کنید $0 < \alpha+\beta < 90$ و شد.

مستطیل ABCD را در نظر بگیرید.

حل اول:



$$\left.\begin{aligned}\hat{M}_1+\hat{M}_2 &= 90\\ \hat{M}_2+\alpha &= 90\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_2=\hat{M}_2+\alpha$$

$$\boxed{M_1=\alpha}$$

حل

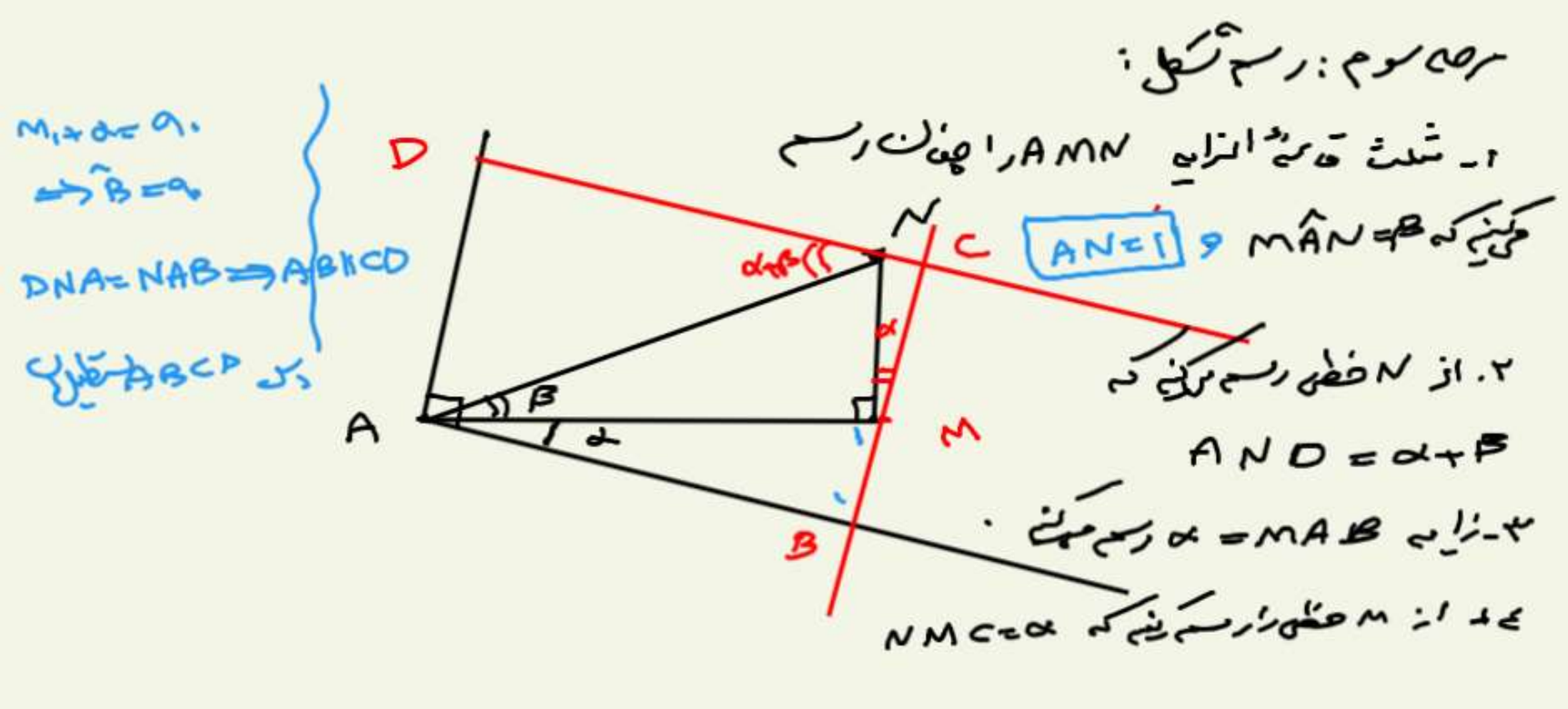
حبیبی

مرحله دوم: $N_1 = ?$

$AB \parallel CD$ } $\Longrightarrow \hat{N}_1 = \alpha + \beta$

AN خط مورب

4 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



5 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

6 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

DAND :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\hat{N}_1=\frac{AD}{AN}=AD=BM+CM \quad (1)$$

$$\sin\beta=\sin\hat{M}_1=\frac{CN}{MN}=$$

$$\cos\alpha=\cos\hat{M}_1=\frac{CM}{MN}\Rightarrow CM=\cos\alpha\cdot MN \quad (2)$$

$$\sin\beta=\frac{MN}{AN}=\frac{MN}{1}=MN \quad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{CM=\cos\alpha.\sin\beta}$$

$\triangle ABM$:

$$\sin\alpha = \frac{BM}{AM} \Rightarrow BM = \sin\alpha \cdot (AM)$$

$\triangle AMN$:

$$\cos\beta = \frac{AM}{AN} \Rightarrow AM = \cos\beta \quad (2)$$

$$BM = \sin\alpha \cdot (AM) \Rightarrow \boxed{BM = \sin\alpha \cdot \cos\beta} \quad (1)$$

7 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

اثبات :

$$\sin(\alpha+\beta) \overset{(*)}{=} BM + CM \overset{\text{قضیه تالس}}{=\!=} \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

حبیبی

8 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

اثبات :

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot(\sin+\beta)$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

9 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

تمرین: مقدار $\sin(15)$ و $\sin(75^\circ)$ را حساب کنید.

$$\sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

پس: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

10 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

حبیبی

11 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

می بینیم : $\cos(\alpha+\beta)$

در شکل * و در ربع ۴ : $\triangle AND$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos N_1=\frac{ND}{AN}=\frac{ND}{1}=ND=CD-CN$$

$$\cos(\alpha+\beta)=CD-CN \quad (2)$$

$$\triangle ABM: \cos\alpha=\frac{AB}{AM}\rightarrow AB=\cos\alpha\cdot AM$$

(3) $\Rightarrow \boxed{CD=\cos\alpha\times\cos\beta}$ (5)

12 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

در مثلث $\triangle MCN$:

$$\sin\alpha = \sin\hat{M}_1 = \frac{CN}{MN} \Rightarrow CN = \sin\alpha . MN$$

$$\xRightarrow{(2)} \boxed{CN = \sin\alpha . \sin\beta} \quad (3)$$

(4) و (5) $\Rightarrow$ (1) :

$$\cos(\alpha+\beta) = CD - CN = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta}$$ و ...

13 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

نتیجه :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

یعنی :

حبیبی

14 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

جمع بذری:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

15 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

تمرین: مقدار‌های $\cos 15^\circ$ و $\cos 75^\circ$ را حساب کنید.

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cdots$

کلیک

16 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$

تمرین: ثابت کنید.

اثبات:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}+\frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}-\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$

17 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

یعنی :

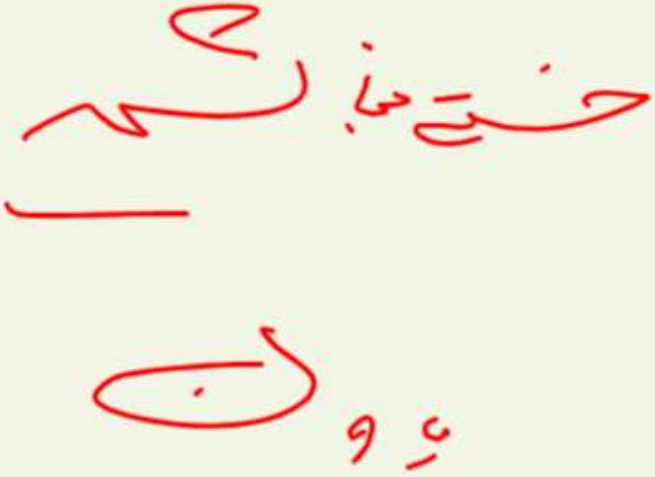
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$

نتیجه :

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$$

حبیبی

18 www.mezbanhabibi.ir +989176193511



19 www.mezbanhabibi.ir +989176193511