

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی هفدهم فروردین هزار و چهارصد

مدرس: **مزبان حمیبی**

موضوع: **مرور فصل سوم، ترکیبات - دوازدهم ریاضی 2 دبیرستان خورشیدیان شیراز**

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سال نو مبارک

سهام، وقت بخیر

ریاضیات گسسته دوازدهم این صفحه دو

دبیرستان خورشیدیان به از

رشته هفدهم فروردین هزار و سیصد و

موضوع:

مرور فصل سهام (تربیتی)

مزبان حبیبی

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال ۱: اصل ضرب:

آر بجایم دو کار را با هم انجام دهیم نه کاری به  $m$  روش و روش به  $n$  روش  
قابل انجام، به آنگاه تعداد حالت ها برابر است با  $m \times n$

اصل جمع:

آر بجایم یکی از کار دو کار را انجام دهیم :  $m + n$

مزبان حبیبی



یادآوری: آردنخواهم  $r$  شیها از بین  $n$  شی انتخاب کنیم بزرگ و کوچک جانگیزداری  
الحریتبانتیاب مهم،  $r$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

الحریتب محمد بن بر (تیم، گروه، رسته، مهم، ...)

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مکتب



مثال: چند حالتی می توانیم یک تیم ۴ نفری از بین ۹ دانش آموزان برگزینیم؟

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 126$$

مثال: با توجه به جمله بندی چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟  
بدون تکرار.

الف) چندتا از این می باشد، چون نقطه لایحه رعایت می شود؟

$$\frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} = 120$$

ب) چندتا از این می باشد که هیچ حرف نقطه ندارد؟

حرف اول =  $1 \times 5 \times 4 = 20$   
حرف دوم =  $5 \times 4 \times 3 = 60$

$$20 + 60 = 80$$



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دینامیک ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



میانگین: معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$  (در مجموعه اعداد صحیح نامنفی  $(x_i \geq 0)$ )  
 دارای  $\binom{n+r-1}{r-1}$  جواب است.

مثال ۱:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

$$\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{1 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

مثال ۲:  $x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

مزبان حبیبی



تذکر: ممکن است برای اینها شرط لازم است شود:

$$1) x_i \geq a \implies x_i - a \geq 0$$

$$2) x_i > a \implies x_i \geq a+1 \implies x_i - (a+1) \geq 0$$

$$\text{مثال} \quad x_5 > 3 \implies x_5 - 4 > 0$$

$$x_2 > 4 \implies x_2 \geq 5 \implies x_2 - 5 \geq 0$$

بزرگ





سؤال: به سطره  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ ، فرض  $x_i > 1$  ضد جواب دارد؟

$$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0$$

$$x_2 > 1 \Rightarrow x_2 \geq 2 \Rightarrow x_2 - 2 > 0$$

$$x_3 > 1 \Rightarrow x_3 \geq 2 \Rightarrow x_3 - 2 > 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \Rightarrow (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) = 11 - 6$$

$$y_1 \rightarrow y_2 + y_3 = 5 \quad (y_i > 0) \quad \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

مکتب







تغییر متغیر:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ ،  $x_1 > 0$ ،  $x_2 \geq 4$

چند جواب دارد؟

$$x_1 > 0 \Rightarrow x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 - 1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 4 \Rightarrow x_2 - 4 \geq 0$$

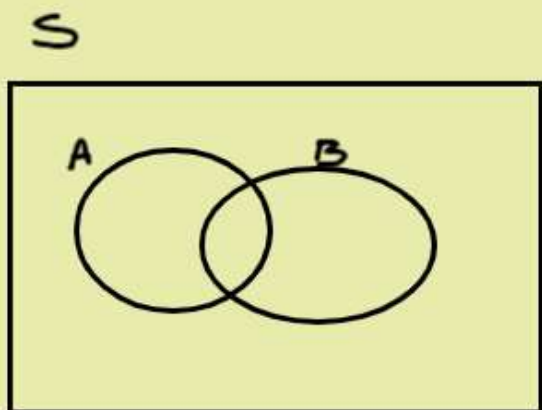
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Rightarrow \underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 - 4)}_{y_2} + x_3 + x_4 = 10 - 1 - 4 = 5$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5 \quad (y_i \geq 0) \quad \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6 \times 1 \times 1} = 56$$

مبانی



اصل شمول و عدم شمول:



$$۱) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۲) n(A^c) = n(S) - n(A)$$

$$۳) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

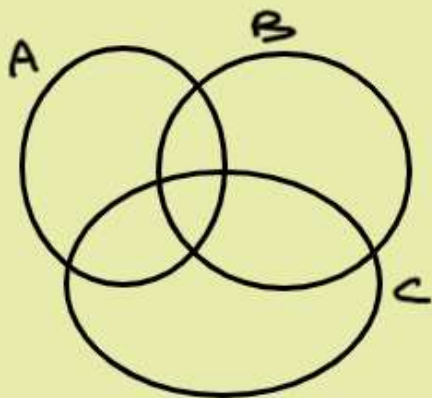
توضیح:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B \vee x \in A \cap B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

مکتب

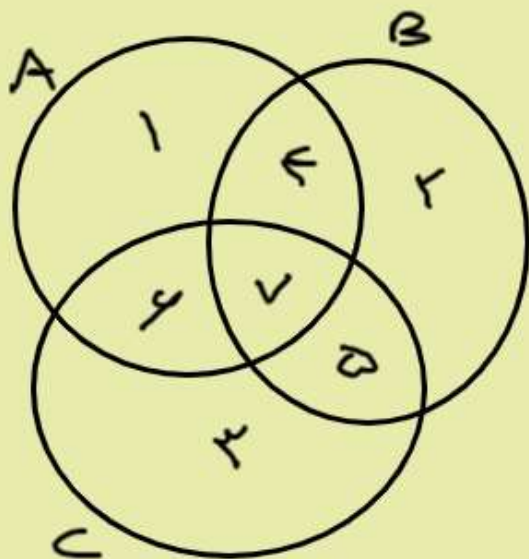


درجات سه مجموعه :



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

مزبان حبیبی



$$1 \equiv A - (B \cup C)$$

$$2 \equiv B - (A \cup C)$$

$$3 \equiv C - (A \cup B)$$

$$4 \equiv (A \cap B) - C$$

$$5 \equiv (B \cap C) - A$$

$$6 \equiv (A \cap C) - B$$

$$7 \equiv A \cap B \cap C$$

تعداد:



بهترین: صید عدد طبیعی از ۱ تا ۲۰۰ وجود دارد که :

$$S = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 200\}$$

الف) مضرب ۲ یا ۳ هستند؟  
 $A = \{x : x \in S, 2|x\} =$  مضرب ۲

$B = \{x : x \in S, 3|x\} =$  مضرب ۳

$$|A| = \left[ \frac{200}{2} \right] = 100 \quad |B| = \left[ \frac{200}{3} \right] = 66 \quad |A \cap B| = \left[ \frac{200}{6} \right] = 33$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 66 - 33 = 133$$

ب) نه مضرب ۲، نه مضرب ۳؟

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 200 - 133 = 67$$

مزبان حبیبی



ج) مفر - ۲، ۴، ۶ و ۸ مفر - ۳ نباشد؟

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 100 - 33 = 67$$

د) مفر - ۳، ۶، ۹ و ۱۲ مفر - ۲ نباشد؟

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 66 - 33 = 33$$

ه) دقیقاً مفر - ۱ پس از دو عدد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

$$|A - B| + |B - A| = 67 + 33 = 100$$

مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: از بین اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۲۰۰، چند عدد وجود دارد که:

الف) مضرب ۴ یا ۶ باشد؟

ب) مضرب ۴ باشد ولی مضرب ۶ نباشد؟

ج) نه مضرب ۴ باشد و نه مضرب ۶؟

کتابخانه

کتابخانه



پس: صندبج پون از مجموع  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و مجموع  $N = \{5, 2, 7\}$  وجود دارد؟

$$S = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ نیت بجه}\} \quad |S| = 2^5 = 32$$

$$A = \{f \in S : 0 \notin R_f\}$$

$$B = \{f \in S : 2 \notin R_f\}$$

$$C = \{f \in S : \forall x \in R_f\}$$

$$|A| = |B| = |C| = 2^5 = 32$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1^5 = 1$$

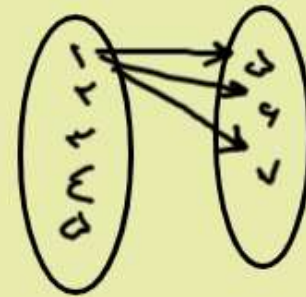
$$|A \cap B \cap C| = 0^5 = 0$$

مقدار تابع غیرنیت

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0 = 93$$

$$\text{مقدار پون} = |(A \cup B \cup C)'| = |S| - |A \cup B \cup C| = 32 - 93 = 10$$



مزبان حبیبی



اصل لانه کبوتری :

آر  $m+1$  کبوتر را در  $m$  لانه جای دهیم ، آنگاه لانه ای هست که بیش از یک کبوتر در آن است.

تعمیم اصل لانه کبوتری :

آر  $m k+1$  کبوتر را در  $m$  لانه جای دهیم آنگاه لانه ای هست که بیش از  $k$  کبوتر در آن است.

نقل: سیزده نفر از یک مهمانی حاضرند. ثابت کنید حداقل دو نفر ماه تولد یکسانی دارند.

آر مهمانان را کبوتر (۱۳ کبوتر) و ماه خورشید را لانه فرض کنیم (۱۲ لانه) چون  $13 > 12$  پس

طبق اصل لانه کبوتری ، لانه ای هست که حداقل کبوتر را که با آن یعنی حداقل ۲ نفر از مهمانان ماه تولد یکسان دارند.

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نهمین : ۷۳ نفر در بین مهمانی حضور پذیرند. ثابت کنید حداقل ۷ نفر ماه کولدگی دارند.  
آدمها را با کامپیوتر (۳۳ کامپیوتر) و ماهها را با لانه میزنند (۱۳ لانه)  
چون  $1 + 4 \times 12 = 49 > 43$ ، طبق تعمیم اصل لانه کامیوتری، لانه اجتناب ناپذیر از  
۴ کامیوتر، لانه حداقل ۷ کامیوتر در آن قرار دارد.  
پس حداقل ۷ مهمان را با کولدگی است.

مزبان حبیبی

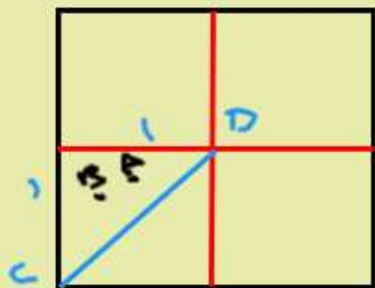




مهمترین: پنج نقطه از یک مربع به ضلع  $\sqrt{2}$  و مراکز آن مربع گرفته ایم. ثابت کنید حداقل

۲ نقطه از این نقاط، فاصله ای کم از  $\sqrt{2}$  دارند.

اگر نقاط را با اضلاع مربع را به هم وصل کنیم، مربع کوچکتر به ضلع  $\sqrt{2}$  و مراکز آن مربع را به هم وصل کنیم، فاصله ای کم از  $\sqrt{2}$  دارند.



نقاط را در یک مربع و مربع کوچکتر را لایه عرضی کنید. (حکایت و کلمات)

حکایت اصل لایه کیوبی، لایه عرضی که حداقل ۲ نقطه در آن باشند.  $AB \leq CD = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

مبانی



سوال: چند نفر در یک سر میز نشسته اند، مطمئن شویم که  $\frac{n}{2}$  نفر از آنها هم از توالت  $\frac{n}{2}$  دفعه تکیه کرده اند؟  
 $n$  کیوتر  $\Rightarrow$  کیوتر  $\Rightarrow$  داتر آنرا  
 $r$  لانه  $\Rightarrow$  از هر هفتگی  $r$  لانه

$$k=9: n \geq m^{k+1} \Rightarrow n \geq 9 \times 7 + 1 \Rightarrow n \geq 64$$

$$\text{Min}(n) = 64$$

مزبان حبیبی





مربع دیتین :

مربع  $n \times n$  است که در هر سطر و هر ستون آن  $n$  عدد از یک تا  $n$  نوشته می شود و هیچ عدد تکراری در هیچ سطر یا ستونی وجود ندارد.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲



۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

مثال :

مزبان حبیبی



توجه: هر یک از اعداد  $n$  در مربع لاین، یک مربع لاین جدید ایجاد می شود.

توجه ۲: از طریق هر مربع لاین، مربع لاین جدید ایجاد می شود.

توجه ۳: از طریق هر مربع لاین، یک مربع لاین جدید ایجاد می شود.

مزبان حبیبی



مجموعه حاصل لاین متناسب:

A و B متناسبند.

A:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

B:

۲	۳	۱
۱	۲	۲
۳	۱	۲

AB:

۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳
۳۲	۱۱	۲۲

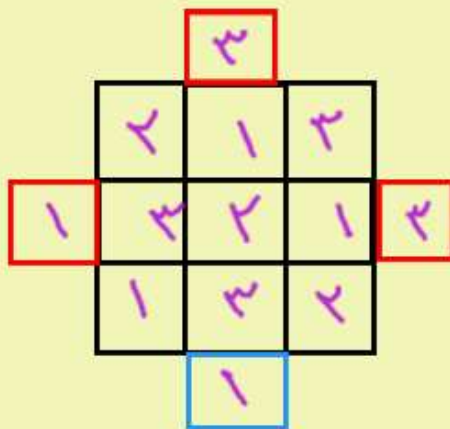
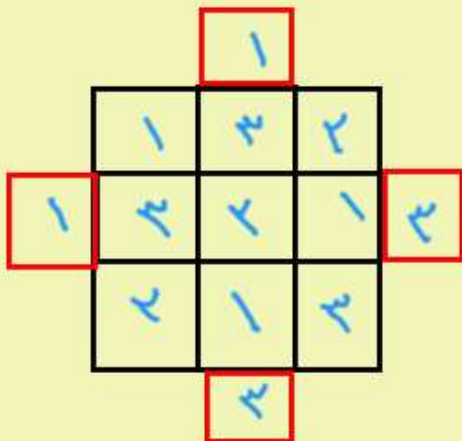
مجموعه

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکترزبان حمیدی



سختن مربع هر لایه معصوم:

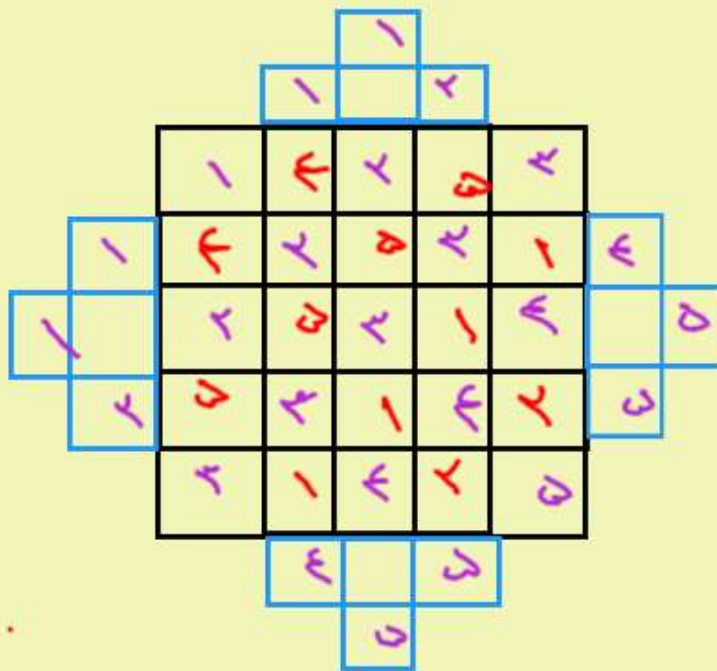
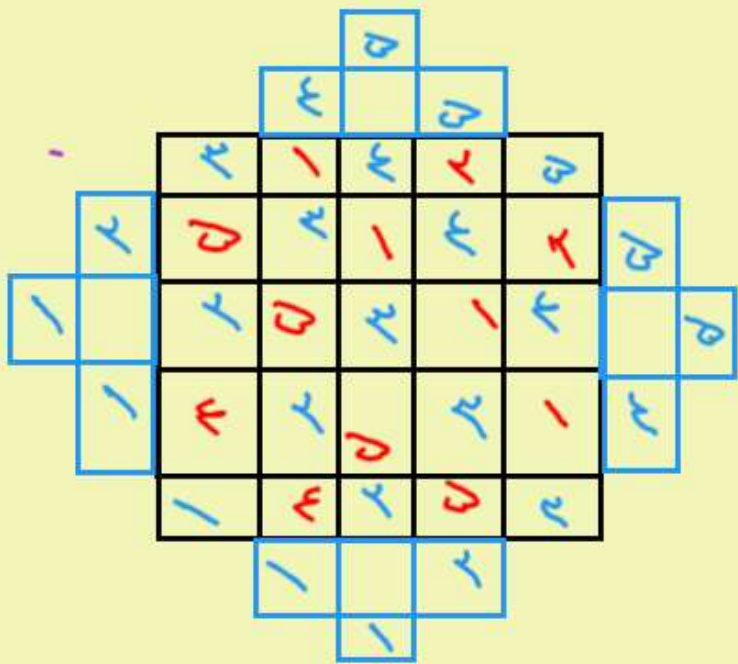
۳×۳



۱۲	۴۱	۲۳
۲۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۴	۳۲

میزبان

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکترزبان حبیبی

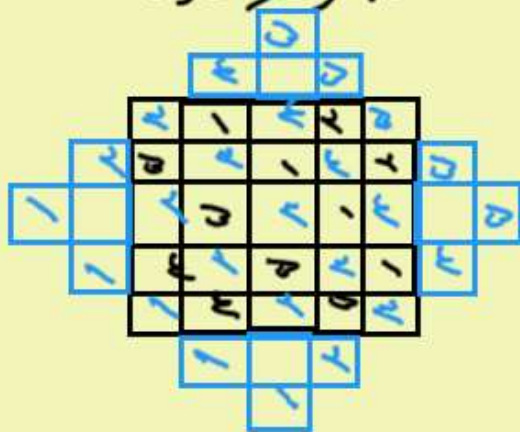


میزبان حبیبی



تمرین: پنج کارگزار پنج نواز ستوانی ادبی و پنج دستفروش در یک ستفانوت کاچی کتبه

بگفته اند بنویسید که هیچ کارگری هیچ دستفروش دوبار کار نکنند.



	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$
$E_1$	۳	۱	۴	۲	۵
$E_2$	۵	۴	۱	۳	۲
$E_3$	۲	۵	۳	۱	۴
$E_4$	۴	۲	۵	۳	۱
$E_5$	۱	۳	۲	۵	۴

اینگونه است که  
 $E_i =$  کارگزار  
 $D_i =$  روزها



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



سوال: اگر بین  $n$  عدد صحیح زوج متوالی با  $n$  عدد صحیح فرد متوالی نوعی مجموع حاصل شود  
کارگزاران آنکه برهان این بیغیرسیما جمع کاربری با  $n$  عدد صحیح زوج کارکنند.

جواب: مربع حاصل لاین دو صنفی مثل

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پایان

دکتر مزبان حبیبی

28 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511

+989166161828 [www.mezbanhabibi.ir](http://www.mezbanhabibi.ir) +989176193511