

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی هفدهم فروردین هزار و چهارصد

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **مرور فصل سوم، ترکیبات، اصل لانه کبوتری و مربع لاتین - دوازدهم ریاضی 1 دبیرستان خورسندیان شیراز**

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر زبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر سال نو مبارک

در صدد :

مرور فصل سوم (ترکیبات)

این بنیاد گتتت آردوم ریاضی

دیر ستن حور سندن سیم از

سے ستنے هعد همد فروردین هعد آردوم ریاضی

حربن حبیبی

بیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر زبان حبیبی

یادآوری: تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

اعداد به ترتیب معمولاً جایگذاری:

ب) ترتیب مهم نباشد. (بنیم، گروه، باجمع، ...)

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

مبانی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



یادآوری: اصل ضرب: انجام دو کار با هم که یکی m طریق و دیگری به n طریق امکان پذیر است: $m \times n$

اصل جمع: انجام یکی از دو کار: $m + n$

مزبان حبیبی

جزوه‌های آموزشی، ریاضیات کسسته، دوازدهم ریاضی، دکترزبان حبیبی



مثال: فرض کنید میخواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ز» و ارقام 4، 3، 2 و 5 یک رمز شامل هفت کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:
الف) تعداد کل رمزهایی که میتوان تشکیل داد

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند

دکترزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکترزبان حمیدی



مثال: 5 دانشآموز پایه دوازدهم و 4 دانشآموز پایه یازدهم به چند طریق میتوانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم الف) همواره دانشآموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یکدرمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانشآموز هم پایه کنار هم نباشند)

پ) اگر دانشآموزان پایه یازدهم نیز 5 نفر باشند، به چند طریق میتوان آنها را به صورت یکدرمیان قرار داد؟

حمیدی



یادآوری: جایگه ها به تکرار:

از n شیء را در n ردیف مرتب می کنیم. n شیء آن شبیه است، آنفا

$$\frac{n!}{r!} : \text{تعداد حالت}$$

مثال محاسبه کنید با ارقام 1, 1, 1, 2 و 1 چند رمز چهار رقمی میتوان نوشت؟

$$\frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} 2111 \\ 1211 \\ 1121 \\ 1112 \end{array} \right\}$$

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعمیم جابجایی - با تکرار:

از نخبه های ۱۱ نیز در دنباله حجم قرار دهیم و داریم: $n!$ و $2n!$ و $3n!$ و ...

$$\frac{n!}{2! \times 3! \times \dots}$$

آنچه = تعداد حالتها

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{9!}{1! \times 2! \times 3!}$$

مزبان حبیبی



مثال: 9 نفر به چند طریق میتوانند در سه اتاق 2 نفره، 3 نفره و 4 نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

مزبان حبیبی



یا دوری: x_1, x_2, \dots, x_r اعداد صحیح نامنفی باشند که تعداد تعداد
جوابها عبارتند از $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ برابر با:

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

مثال: عدد $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ در مجموع اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

مزبان حبیبی



توجه: اگر برای x_i هر شرطی داشته $x_i \geq a$ ، به شرطی $x_i - a \geq 0$ را در نظر
تبدیل کرد. ($x_i \geq a \Rightarrow x_i - a \geq 0$)

توجه: اگر شرط $x_i > a$ آنگاه:

$$x_i > a \Rightarrow x_i \geq a+1 \Rightarrow x_i - (a+1) \geq 0$$

$$x_i > 5 \Rightarrow x_i \geq 6 \Rightarrow x_i - 6 \geq 0$$

تبدیلی



مثال: $x_i > i$: $x_1 + x_2 + x_3 = 15$

$$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0$$

$$x_2 > 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 - 3 \geq 0$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow x_3 - 4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow (x_1 - 2) + (x_2 - 3) + (x_3 - 4) = 15 - 9$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 6 \Rightarrow \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

مزبان حبیبی



سؤال: ۹ تخته کُل را به چند طریق می توان بین ۴ نفر تقسیم کرد؟
 تعداد تخته های کُل نفرها $x_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$

$$\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$$

سؤال: ۹ تخته کُل را به چند طریق می توان بین ۴ نفر تقسیم کرد به جوری که هر نفر حداقل یک تخته بگیرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \quad (x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0)$$

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 9 - 4 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$$





مربع دیتین :

مربع $n \times n$ است که در هر سطر و هر ستون آن n عدد از یک تا n نوشته می شود و هیچ عدد تکراری در هیچ سطر یا ستونی وجود ندارد.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲



۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

مثال :

مربع دیتین



توجه: هر یک از اعداد n در مربع لائین، یک مربع لائین جدید ایجاد می‌کند.

توجه ۲: از طریق هر مربع لائین، مربع لائین جدید ایجاد می‌شود.

توجه ۳: از طریق هر مربع لائین، یک مربع لائین جدید ایجاد می‌شود.

مزبان حبیبی



مجموعه حاصل لاین متناسب:

A و B متناسبند.

A:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

B:

۲	۳	۱
۱	۲	۲
۳	۱	۲

AB:

۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳
۳۲	۱۱	۲۲

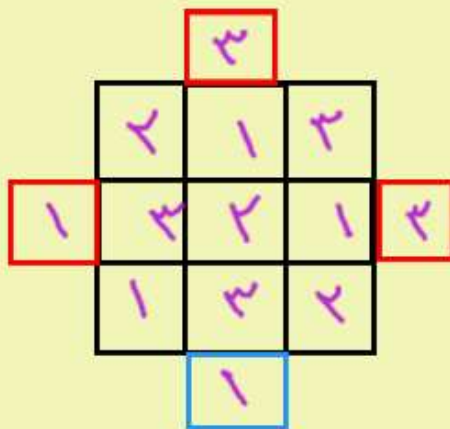
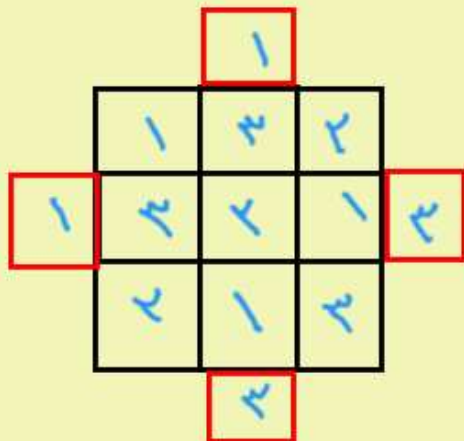
مجموعه حاصل

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حمیدی



سختن مربع هر لایه معصوم:

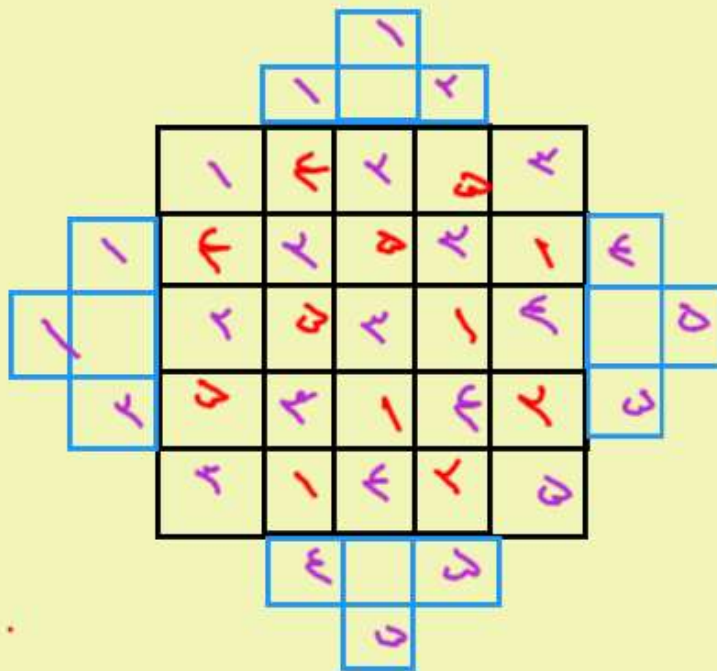
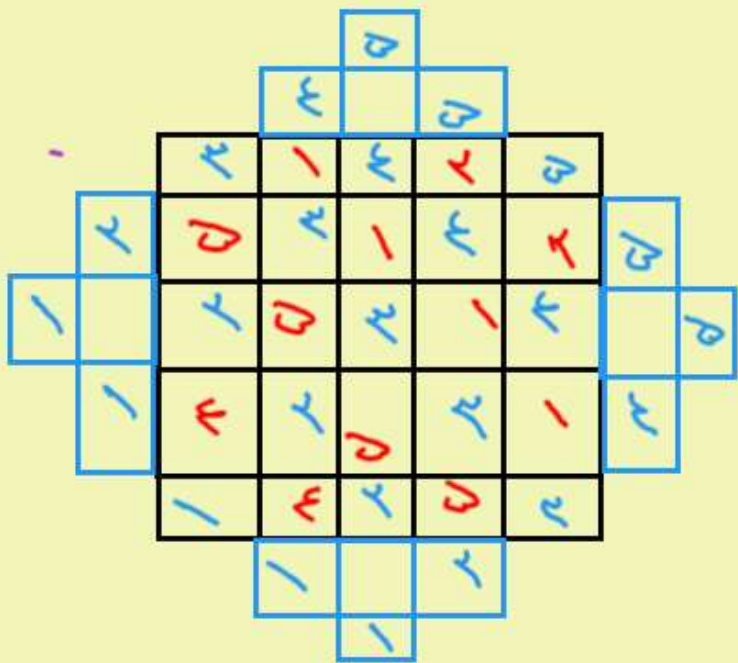
۳×۳



۱۲	۴۱	۲۳
۲۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۴	۳۲

میزبان

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکترزبان حبیبی

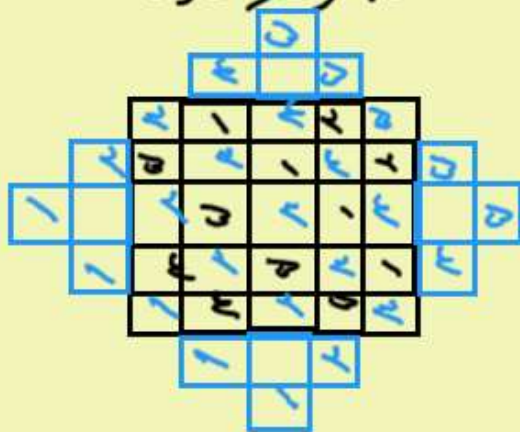


میزبان حبیبی



تمرین: پنج کارگزار پنج نواز ستوانی ادبی و پنج دستگاه نخ در میس تفاوت کاچی گفته

بگفته ان بنویسید که هیچ کارگری هیچ دستگاه دوبار کار نکنند.



	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
K_1	۳	۱	۴	۲	۵
K_2	۵	۴	۱	۴	۲
K_3	۲	۵	۲	۱	۴
K_4	۳	۲	۵	۴	۱
K_5	۱	۳	۲	۵	۴

اینگونه
از کارگاه
در روزها
 $K_i =$ کارگاهها
 $D_i =$ روزها

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



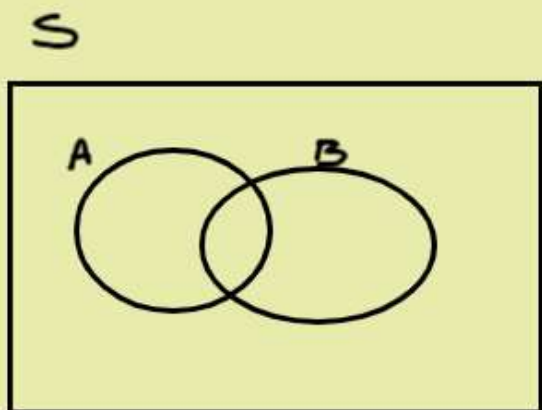
سوال: اگر بین کارهای پنج نفر متوالی با یکدیگر نقطه تقاطع هیچ نوع شیخ متفلسف
کار کنند، آن نقطه بر پایه این بنویسید. هیچ کاری با آن نقطه در شیخ تکلیفی کار نکنند.

جواب: مربع حاصل لاین دو صحنه صیل

مزبان حبیبی



اصل شمول و عدم شمول:



$$۱) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۲) n(A^c) = n(S) - n(A)$$

$$۳) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

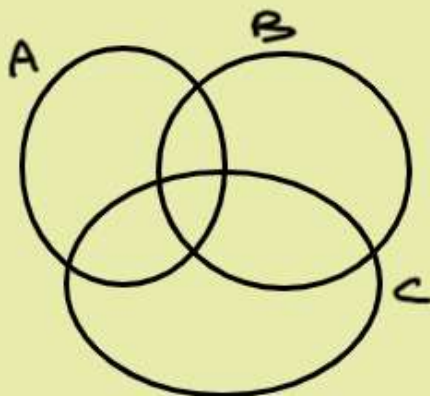
تعریف:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B \vee x \in A \cap B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

مکتب

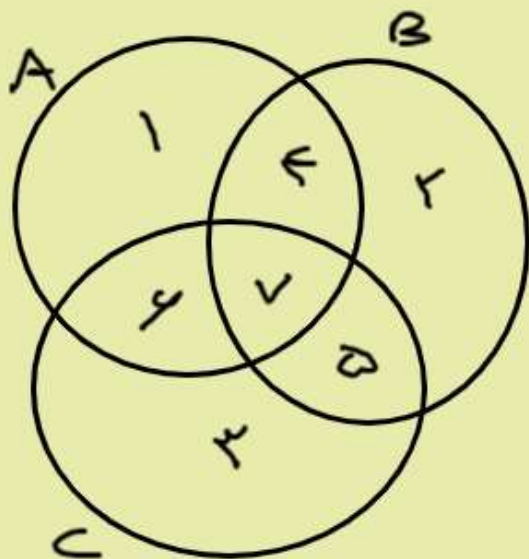


درجات سه مجموعه :



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

مزبان حبیبی



$$1 \equiv A - (B \cup C)$$

$$2 \equiv B - (A \cup C)$$

$$3 \equiv C - (A \cup B)$$

$$4 \equiv (A \cap B) - C$$

$$5 \equiv (B \cap C) - A$$

$$6 \equiv (A \cap C) - B$$

$$7 \equiv A \cap B \cap C$$

تعداد:



بهترین: صید عدد طبیعی از ۱ تا ۲۰۰ وجود دارد که :

$$S = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 200\}$$

الف) مضرب ۲ یا ۳ هستند؟
 $A = \{x : x \in S, 2|x\} =$ مضرب ۲

$B = \{x : x \in S, 3|x\} =$ مضرب ۳

$$|A| = \left[\frac{200}{2} \right] = 100 \quad |B| = \left[\frac{200}{3} \right] = 66 \quad |A \cap B| = \left[\frac{200}{6} \right] = 33$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 66 - 33 = 133$$

ب) نه مضرب ۲، نه مضرب ۳؟

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 200 - 133 = 67$$

مزبان حبیبی



ج) ضرب ۲، ۴، ۶ و ۸ ضرب ۳ نباشد؟

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 100 - 33 = 67$$

د) ضرب ۳، ۶، ۹ و ۱۲ ضرب ۲ نباشد؟

$$|B - A| = |B| - |A \cap B| = 66 - 33 = 33$$

ه) دقیقاً ضرب کس از دو عدد ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲؟

$$|A - B| + |B - A| = 67 + 33 = 100$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تمرین: از بین اعداد طبیعی کوچکتر یا برابری ۲۰۰، چند عدد وجود دارد که:

الف) مضرب ۴ یا ۶ باشد؟

ب) مضرب ۴ باشد و مضرب ۶ نباشد؟

ج) نه مضرب ۴ باشد و نه مضرب ۶؟

کتابخانه

کتابخانه



پس: صندبج پون از مجموع $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و مجموع $N = \{5, 2, 7\}$ وجود دارد؟

$$S = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ نیت بجه}\} \quad |S| = 2^5 = 32$$

$$A = \{f \in S : 0 \notin R_f\}$$

$$B = \{f \in S : 2 \notin R_f\}$$

$$C = \{f \in S : \forall x \in R_f\}$$

$$|A| = |B| = |C| = 2^5 = 32$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1^5 = 1$$

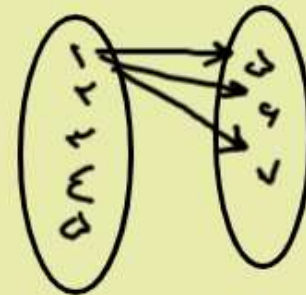
$$|A \cap B \cap C| = 0^5 = 0$$

مقدار تابع غیرنیت

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0 = 93$$

$$\text{مقدار پون} = |(A \cup B \cup C)^c| = |S| - |A \cup B \cup C| = 32 - 93 = 10$$



زبان حبیبی



اصل لانه کبوتری :

آر $m+1$ کبوتر را در m لانه های حجم n نگاه لانه ای است پس ازید کبوتر در آن است.

تعمیم اصل لانه کبوتری :

آر $m k+1$ کبوتر را در m لانه های حجم n نگاه لانه ای است پس از k کبوتر در آن است.

نقل: سیزده نفر از یک مهمانی حاضرند. شش کینه صد اهل دو نفر ماه کولر سیدل دارند.

آر صد نفر را کبوتر (۱۳۱ کبوتر) و ماه خارج را لانه فرض کنیم (۱۳ لانه) چون $13 > 13$ پس

طبق اصل لانه کبوتری، لانه ای است که صد اهل کبوتر را که با شش کینه صد اهل ۲ نفر از مهمانی ماه کولر سیدل دارند.

کبوتری

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر زبان حبیبی



نهمین : ۷۳ نفر در بین مهمانی حضورند. نائب رئیس صداقت ۷ نفر ماه کولدریک ن دارند.
آدمها ن را کیوتر (۳ کیوتر) و ماه سال را لانه میزنند (۱۳ لانه)
چون $1 + 4 \times 12 = 49$ ، چون تقسیم اصل لانه کیوتری، لانه اجس - کیوتر از
۴ کیوتر لانه صداقت ۷ کیوتر لانه سال مکرر دارد.
سه صداقت ۷ مهمان دارند، کولدریک نه.

مبانی



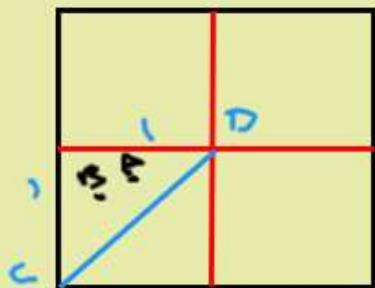
مهمترین: پنج نقطه از یک مربع به ضلع $\sqrt{2}$ که در آنجا یک مربع کوچک تر قرار دارد. تا یک مربع واحد

۲ نقطه از این نقاط، نامیده می شود که از $\sqrt{2}$ دارند.

از نقاط در یک اضلاع مربع را به هم وصل کنید، یک مربع کوچک تر به ضلع یک واحد ساخته می شود.

نقاط را از یکدیگر و از یکدیگر را لانه عرض کنید. (یک کبوتر و یک لانه)

عکس اصل لانه کبوتری، لانه ارس است که حداقل ۲ نقطه در آن باشد. $AB \times CD = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



کبوتری



سوال: چند نفر در یک سر میز نشسته اند، مطمئن شویم که $\frac{n}{2}$ نفر از آنها می توانند با هم دست بدهند
دو هفته یک بار، چه؟
 n کیوتر \Rightarrow کیوتر \Rightarrow دست دادن
 r لانه \Rightarrow از هر هفته r لانه

$$k=9: n \geq m k + 1 \Rightarrow n \geq 9 \times 7 + 1 \Rightarrow n \geq 64$$

$$\text{Min}(n) = 64$$

مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پایان

دکتر مزبان حبیبی