

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیبی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی چهاردهم بهمن نودونه

مدرس: **مزبان حمیبی**

موضوع: **معرفی گراف ساده - دوازدهم ریاضی 2 دبیرستان خورشیدیان شیراز**

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی ۲

سیرت ن خورشید ن سیرت

سیرت ن خورشید ن سیرت ۱۶:۰۰

سیرت ن خورشید ن سیرت

سیرت ن خورشید ن سیرت

میزی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

مثال: مجموعه $\mathcal{V} = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید.

سوال ۱: مجموعه \mathcal{V} چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 1$$

سوال ۲: همه زیرمجموعه های دو عضوی \mathcal{V} را بنویسید.

$$M = \left\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\} \right\}$$

میزبان





سؤال: مجموعه M درسته ایتمیل چند زیر مجموعه دارد.

$$|M| = 10$$

$$\text{تعداد زیر مجموعه ها} = 2^{10} = 1024$$

یک زیر مجموعه از M را بنویسید.

$$E = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\} \}$$

بیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



$$V = \{a, b, c, d, e\} \quad \text{یعنی:}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$$

چه رابطه ای بین V و E وجود دارد؟

$$V \subseteq E \times X \quad V \in E \times X$$

$$E \subseteq V \times X \quad E \in V \times X$$

- ۱- هر عنصر E یک زیر مجموعه V است. $\{a, b\} \in E$
- ۲- عناصر E ، مجموعه رو عناصر V هستند.

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



نتیجه: $V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{ab, ac, bc, bd, cd\}$

و: در رتبه مرتبه (V, E)

$a-b = \{a, b\}$

$ab = ba$

~~aa~~

حرف صنف E یک زیر مجموعه دو عضو V

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آزمون ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعریف: عرض کنید \mathcal{V} مجموعه دلخواه (ناخالی) باشد.

زوج مرتب $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ را یک گراف ساده

می گویند، اگر:

هر عضو x یک زیر مجموعه در مجموعه \mathcal{V} باشد.

یعنی:

$$x \in \mathcal{E} \Rightarrow x \subseteq \mathcal{V} \text{ و } |x| = 2$$

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

مثال ۱: $V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{ab, ac, ad, cd\}$

گراف ساده $G = (V, E)$

مثال ۲: $V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{a\underline{b}, ac, ad, \underline{b}\}$

گراف ساده نیست $G = (V, E)$

مزبان



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر زبان حبیبی

$$V = \{a, b, c, d\} \quad \text{تال ۳:}$$

$$E = \{ \}$$

$$G = (V, E) \quad \text{گراف ساده است}$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \quad \text{تال ۴:}$$

$$E = \{v_1 v_2, v_2 v_4, v_5 v_6\}$$

$$G = (V, E) \quad \text{گراف ساده است}$$

مبانی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



عَراداد: فرض کنید $(E, \mathcal{C}) = \mathcal{C}$ یک گراف ساده است.

(۱) هر حلقه \mathcal{C} را یک \mathcal{C} می گویند و تعداد را \mathcal{C}

مرتبه گراف می نامیم. (۲)

(۳) هر حلقه \mathcal{C} را یک \mathcal{C} می گویند و تعداد را \mathcal{C}

اندازه گراف می نامیم. (۴)

$\mathcal{C} \equiv$ تعداد \mathcal{C}

$\mathcal{C} \equiv$ تعداد \mathcal{C}

پیدی

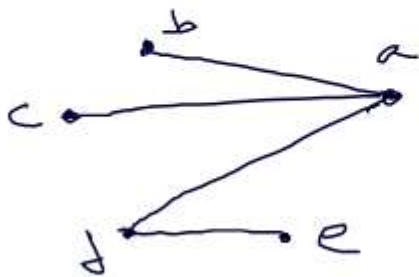
جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر زبان حبیبی

$$V = \{a, b, c, d, e\} \quad = \text{مات}$$

$$E = \{ab, ac, ad, de\}$$

$$p = 5$$

$$q = 4$$



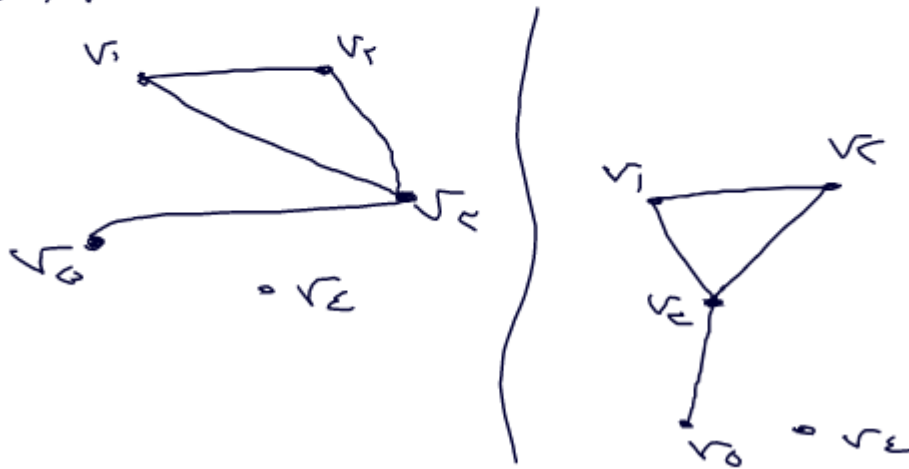
بیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: آر (V, E) و $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و
 $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_5\}$ و
 (الف) خود رسم گراف G را رسم کنید. (ب) مرتبه و اندازه گراف
 $p = 5, q = 4$



میزبان

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



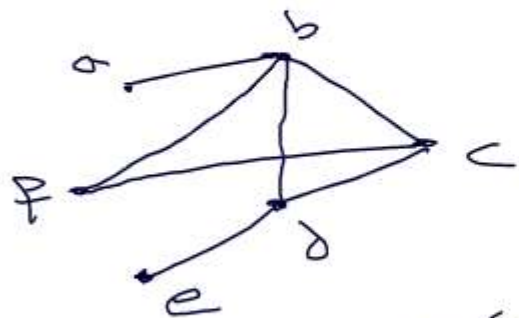
مثال: محله گراف $G=(V, E)$ بصورت زیر است.

الف) محله رئوس و محله یالها را بنویسید.

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, bc, bd, bf,$$

$$cd, cf, de\}$$



ب) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

$$p = 6, \quad q = 7$$

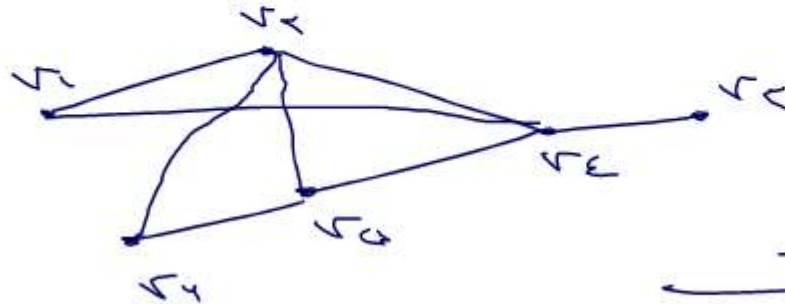
مزبان حبیبی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

تمرین: نمودار گراف (G, E) را به رسم آورید.

الف) محدد کم رئوس و محدد کم لبه را بنویسید.

ب) مرتبه و اندازه گراف را تعیین کنید.



تکلیف

مزبان حبیبی



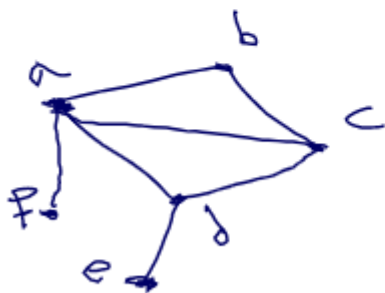


تعریف درجه راس:

نقطه ارتباطی متصل به راس v_i را درجه آن نقطه

و با $deg(v_i)$ نشان می دهیم.

مثال:



$$deg(a) = 4$$

$$deg(b) = 2$$

$$deg(c) = 3$$

$$deg(d) = 3$$

$$deg(e) = 1$$

$$deg(f) = 1$$

$$S = \{4, 2, 3, 2, 1, 1\}$$

$$P = 2 \quad Q = 7$$

میزبان

جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حساب بنابر

نوع

پی



جزوه های آموزشی، ریاضیات کسسته، دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام، وقت بخیر

ریاضیات کسسته دوازدهم ریاضی ۲

دبیرستان خورشید

شعبه ریاضی، دوازدهم ریاضی ۲ ... ۱۶

موضوع:

رده حسابی از گویان

مزبان حبیبی

مزبان حبیبی



جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و ازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعریف:

دوراس مجاور:

به دوراس گفته می شود که دو سبک یا ل باشند.

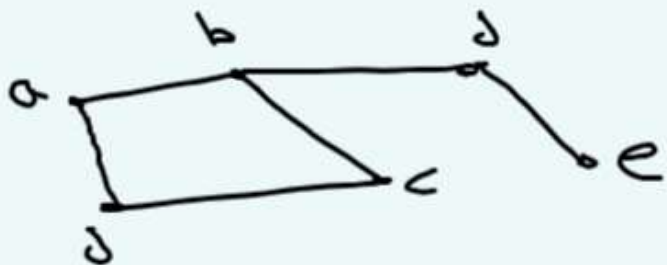
دو یال مجاور:

به دو یالی گفته می شود که به یک راس متصل باشند.

جدیدی



مثال:



حورا a و b مجاور هستند.

دورا a و c مجاور نیستند.

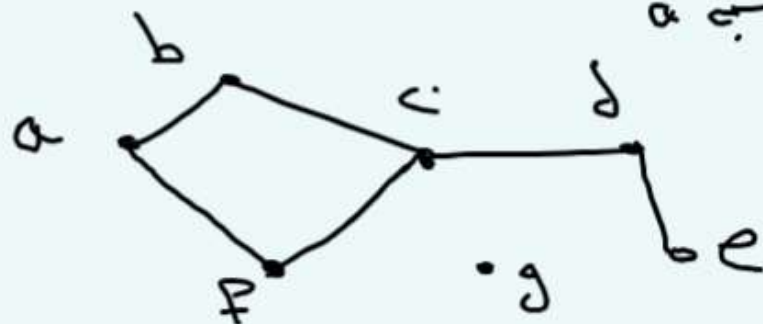
مثال: دو a و b مجاورند

دو a و c مجاور نیستند.

حبیبی



تعریف: فرض کنید v یک رأس از گراف G باشد.
 ۱) مجموعه رأسها مجاور v را همسایگی باز v می گویند و با $N_G(v)$ نشان می دهیم.
 ۲) $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ همسایگی بسته v است.



$$N_G(c) = \{b, d, f\}$$

$$N_G[c] = \{c, b, d, f\}$$

$$N_G(a) = \{b, f\}$$

$$N_G[a] = \{a, b, f\}$$

$$N_G(g) = \{\}$$

$$N_G[g] = \{g\}$$

مزبان حبیبی



تذکره:

۱- اگر همایی باز یک راس، محض باشد آنگاه درجه آن راس صفر است.

۲- اگر همایی بسته یک راس، یک عضو باشد آنگاه درجه آن راس صفر است.

$$(۳) : \deg(a) = 0 \iff N_G(a) = \{a\} \iff N_G[a] = \{a\}$$

(۴) تعداد عضوهای همایی باز راس a برابر درجه راس a است.

(۵) همایی بسته یک راس، هرگز تهی نیست.

مبانی



بیشترین و کمترین درجه راس:

معرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده است.

$$\Delta(G) \equiv \Delta \equiv \text{بیشترین درجه در بین رئوس}$$

$$\delta(G) \equiv \delta \equiv \text{کمترین درجه در بین رئوس}$$

$$0 \leq \delta \leq \deg(v_i) \leq \Delta \leq p-1$$

میزبانی



گنجه: هر $5 = 5$ آنگاه درجه هر رئوس با هم برابر است.

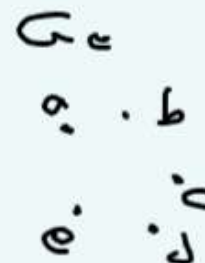
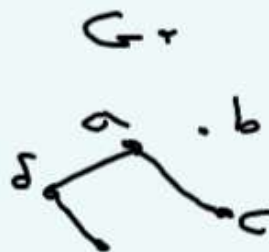
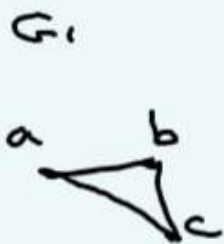
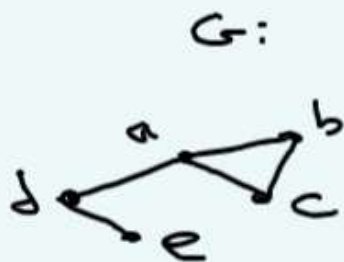
مثال: اگر $5 = 5 = 5$ یعنی درجه هر رأس پنج است.

مبانی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و دوازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



زیرگراف: اگر $(V, E) = G$ یک گراف باشد آنگاه به حذف یا اضافه کردن
 گراف های G یک گراف H ایجاد می شود که آنرا زیرگراف H می گویند.
 تذکر: اگر H را حذف کنیم باید یا به همان شکل یا آن را جمع حذف کرد.
 تذکر: G_1 و G_2 و G_3 زیرگراف G هستند.

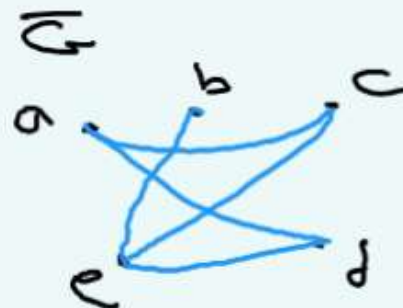
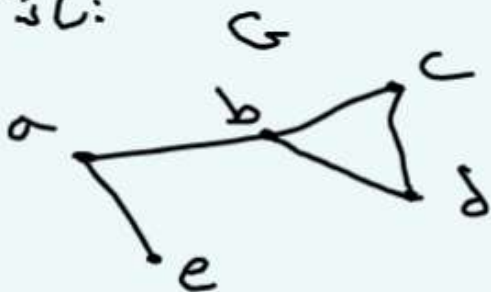


مزبان حبیبی



گراف مکمل: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده به $G = (V, E')$ باشد
را ممکن است گوییم به شرط آنکه: اگر دو رأس در G مجاور باشند آنوقت
در G' مجاور نباشند و برعکس.

مثال:



میزبان حبیبی



تذکره:
اگر $d_G(a)$ و $d_H(a)$ به ترتیب درجه رأس a در گراف G و H
باشد آنگاه
تیمه از تعداد اشیاء کمتر
$$d_G(a) + d_H(a) = p - 1 =$$

مزبان حبیبی

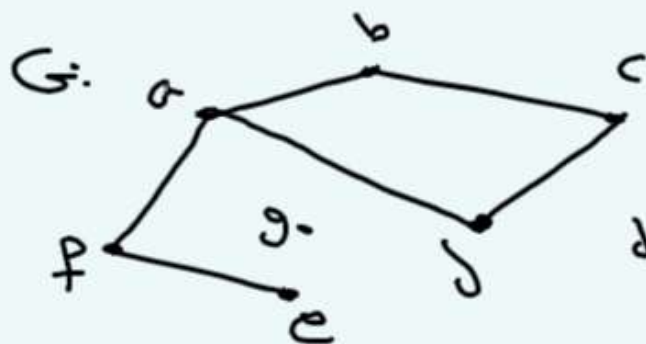


سؤال: تعداد پیکربندی‌های P راسی، حداکثر چند می‌تواند باشد؟

$$q_{\max} = \binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$$

حداکثر q ، زمانی اتفاق می‌افتد که همه راسها به هم وصل شوند.

مزبان حبیبی



سؤال :
 $p = 7$
 $q = 4$ ← $\sum \deg(v_i) = 12$

$$\deg(a) = 4, \deg(b) = 2, \deg(c) = 2$$

$$\deg(e) = 1, \deg(d) = 2, \deg(f) = 2$$

$$\deg(g) = 0$$

$$\Delta(G) = 4, \delta(G) = 0$$

$$N_G(a) = \{a, b, d, f\}$$

$$N_G(a) = \{b, d, f\}$$

مزبان حبیبی



حقیقه: در گراف $G = (V, E)$ از مرتبه P و اندازه ۲۹ داریم:

$$\sum \deg(v_i) = ۲۹$$

اثبات: می دانیم هر یال دقیقاً به دو رأس متصل است پس برای هر یال e مجموع
درج ۲ هر یال را دوبار شمرده ایم و لذا $\sum \deg(v_i) = ۲۹$.

مکتب



$$\left. \begin{aligned} p &= \text{تعداد راسها} \\ q &= \text{تعداد یالها} \\ 2q &= \text{مجموع درجات} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{2q}{p} = \text{میانگین درجه ها}$$

$$\Delta = \text{بیشترین درجه}$$

$$\delta = \text{کمترین درجه}$$

نتیجه:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

مزبان حبیبی



بمکثرین: اگر یک حرف با ۱۹ یال، حداقل درجه هر رأس ≥ 3 می باشد.

این گراف حداکثر چند رأس دارد؟

$$P = ?$$

$$g = 19$$

$$\delta = 3$$

$$\delta \leq \frac{2g}{P} \leq \Delta \Rightarrow 3 \leq \frac{38}{P} \leq \Delta$$

$$\Rightarrow 3P \leq 38 \Rightarrow * P \leq \frac{38}{3}$$

$$\Rightarrow P \leq 12.6 \Rightarrow P_{\max} = 12$$

مزبان حبیبی



تمرین: در یک گراف با ۳۱ یال، درجه هر رأس حداکثر ۵ می باشد.
این گراف حداکثر چند رأس دارد؟

گتلف

$$\text{توجه: } \Delta \leq \frac{2e}{p} \leq 5$$

مزبان حبیبی

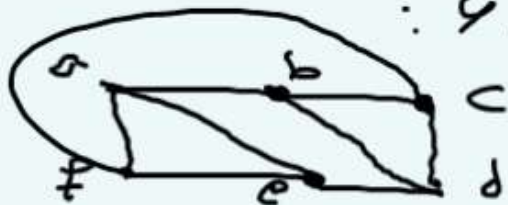


گراف k -منتظم:

گراف k راسی که در هر رأس آن k باشد.

یا: گراف k راسی که در آن $k = \delta = \Delta$.

مثال: گراف 3 -منتظم از مرتبه 4 :



مزبان حبیبی



مثال: 8 گویا به صورت 8 : $2 \times 2 \times 2$

مثال



مثال



مزبان حبیبی



قضیه: اگر گراف K - منظم از مرتبه P و اندازه q داریم

$$q = \frac{k \cdot P}{2}$$

اثبات: $2q = \sum \deg(v_i) = \deg(v_1) + \dots + \deg(v_p)$

$$= \underbrace{k + \dots + k}_{p} = kP$$

$$2q = k \cdot P \Rightarrow q = \frac{k \cdot P}{2}$$

مزبان حبیبی



نمودار: سه کسب مختلف ۳ - منتظم از مرتبه ۲ و اندازه ۴ داریم: $q = p + 4$.

$p - q$ را بیابید.

$$q = \frac{2p}{2} \Rightarrow q = p \quad \text{منتظم}$$

$$q = p + 4 \Rightarrow \frac{2p}{2} = p + 4 \Rightarrow 2p = 2p + 8 \Rightarrow \boxed{p = 8}$$

$$q = \frac{2 \times 8}{2} = 8 \quad \text{و}$$

مکتب



سگراف کامل:

سگراف K_n را می گویند که در هر رأس آن $(n-1)$ رأس دیگر

یا: گرافهای که هر دو رأس آن به هم وصلند.

سگراف کامل K_n را با K_n نشان می دهیم.

K_1

.

K_2

—

K_3



K_4



مثال: K_5



مزبان حبیبی



$$q(k_p) = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{قضیه:}$$

$$\begin{aligned} 2q &= \sum \deg(v_i) = \deg(v_1) + \dots + \deg(v_p) \quad \text{اثبات:} \\ &= \underbrace{(p-1) + \dots + (p-1)}_{p} = p(p-1) \end{aligned}$$

$$2q = p(p-1) \implies q = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$q(k_v) = \frac{vkv}{2} = 21$$

$$q(k_{11}) = \frac{1 \times 9}{2} = 4.5 \quad \text{تناقذ}$$

مزبان حبیبی



مکزی: اگر تعداد کامل P راسی از گراف کامل $(P+2)$ راسی، 31 یال کمتر دارد.

$$q(k_p) = \frac{P(P-1)}{2}$$

P کد را ا ب ؟

$$q(k_{p+2}) = \frac{(P+2)(P+2-1)}{2} = \frac{(P+2)(P+1)}{2}$$

$$q(k_p) = q(k_{p+2}) - 31$$

$$\frac{P(P-1)}{2} = \frac{(P+2)(P+1)}{2} - 31 \Rightarrow P(P-1) = (P+2)(P+1) - 62$$

$$\Rightarrow \cancel{P^2} - P = \cancel{P^2} + 3P + 2 - 62 \Rightarrow -4P = -60 \Rightarrow \boxed{P=15}$$

مکزی

جزوه های آموزشی، ریاضیات گسسته و آردوم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

حسب بنام
۱
۱۱

مزبان حبیبی

