سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی چهاردهم فروردین هزار چهارصد

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: قضیه های حد- یازدهم ریاضی دو دبیرستان خورسندیان- شیراز

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

سال نو مبارک

حسابان یک یازدهم ریاضی ۲

دبیرستان خوزستانیان شیراز

شنبه چهاردهم فروردین هزار و چهارصد و یک 11:00

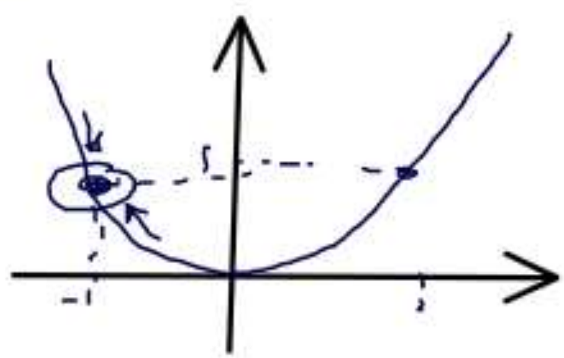
موضوع: قضایای حد

میزبان حبیبی

یادآوری :

اگر تابع f در همسایگی $x=a$ تعریف شده و حدهای راست و چپ برابر داشته باشد آنگاه می‌گوییم تابع f در $x=a$ حد دارد.

مثال : $f(x)=x^2$ ، $x=-1$



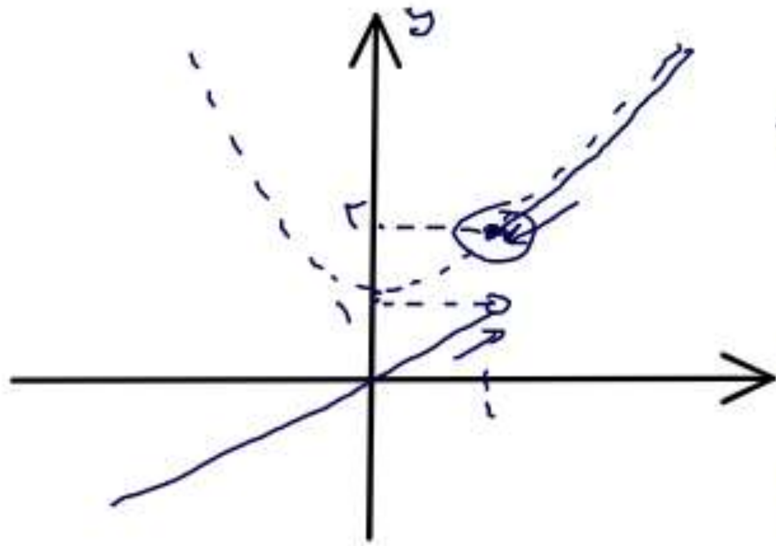
$$\lim_{x\to(-1)^+} x^2=1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to(-1)} x^2=1$$

مثال ۲: با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ x & x<1 \end{cases}$.

سپس از $\lim_{x\to 1} f(x)$ را در صورت وجود تعیین کنید.



$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$

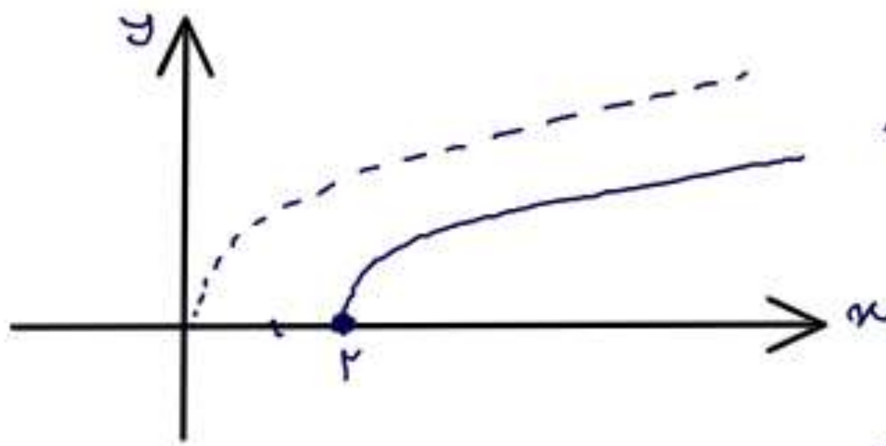
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)=$ وجود ندارد

یادآوری :

اگر تابع f در همسایگی چپ یا همسایگی راست $x=a$ تعریف نشده باشد آنگاه در $x=a$ حد ندارد.

مثال: حد $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ را در صورت وجود بیابید.



$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$

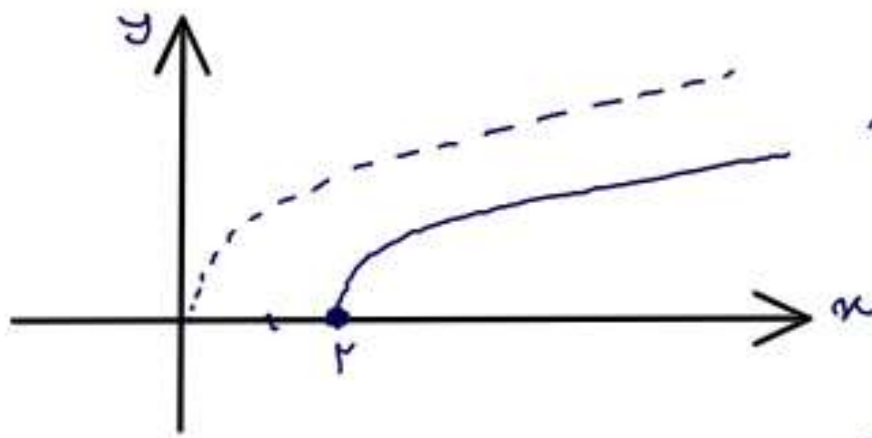
$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=$ وجود ندارد

یادآوری :

اگر تابع f در همسایگی چپ یا همسایگی راست $x=a$ تعریف نشده باشد آنگاه در $x=a$ حد ندارد.

مثال: حد $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ را در صورت وجود بیابید.



$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}=$ وجود ندارد

قضیه :

۱) تابع ثابت $f(x)=c$ در همه نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد و:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

مثال:

$$\lim_{x\to \pi}\sqrt{3}=\sqrt{3} \quad , \quad \lim_{x\to 2} 5 = 5$$

۲) تابع همانی $f(x)=x$ در تمام $\mathbb{R}$ حد دارد و

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} x = 2 \quad , \quad \lim_{x\to \pi} x = \pi$$

قضیه: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ آنگاه

۱) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$

۲) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-M$

۳) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\cdot M$

۴) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$ ($M\neq 0$ و $g(x)$ در همسایگی a صفر نشود)

مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}(۳x+۱) = ۳\times\lim_{x\to ۲}x + ۱ = ۳\times ۲+۱ = ۷$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۵}x^{۲} = \lim_{x\to ۵}x\times x = \lim_{x\to ۵}x\times\lim_{x\to ۵}x = ۲۵$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۵}\frac{۳x-۱}{x^{۲}+۱} = \frac{\lim_{x\to ۵}(۳x-۱)}{\lim_{x\to ۵}(x^{۲}+۱)} = \frac{۱۴}{۲۶}$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۳}x^{۲}\cdot(x^{۲}+۱) = \lim_{x\to ۳}x^{۲}\times\lim_{x\to ۳}(x^{۲}+۱) = ۹\times ۱۰ = ۹۰$$

تذکر:

۱- اگر $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

۲) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt{L} \quad ; \quad L>0$$

(اگر $f(x)\geq 0$ آنگاه از رابطه ۲ می‌توان استفاده کرد)

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+x+۱}{x^۲-x-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲+x+۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-x-۱)}=\frac{۱۳}{۵}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱}\sqrt{۳x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x+۱)}=\sqrt{۴}=۲$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۵}(x^۳+۲x-۱)=۵^۳+۲(۵)-۱=۱۲۵+۱۰-۱=۱۳۴$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}=\frac{۳^۲+۱}{۳^۲-۱}=\frac{۱۰}{۸}$$

تذکر: با توجه به قضایای قبل:

$$1)\ \lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x) \quad , \quad k\in \mathbb{R}$$

$$2)\ \lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n \quad , \quad n\in \mathbb{N}$$

$$3)\ \lim_{x\to a} \left(-f(x)\right) = -\lim_{x\to a} f(x)$$

$$4)\ \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$$

($f(x)$ در همسایگی a ناصفر و حد آن صفر نباشد)

مثال :

$$1)\ \lim_{x\to 3} x^4 = \left(\lim_{x\to 3} x\right)^4 = 3^4 = 81$$

$$2)\ \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)} = \frac{1}{5}$$

$$3)\ \lim_{x\to \pi} \frac{x-[x]}{x+[x]} = \frac{\lim\limits_{x\to \pi}(x-[x])}{\lim\limits_{x\to \pi}(x+[x])} = \frac{\pi-3}{\pi+3}$$

$$3 < \pi < 4 \Longrightarrow [\pi] = 3$$

تذکر: برای استفاده از قضیه جمع، وجود حد برای f و g الزامی است.

تمرین: دو تابع f و g مثال بزنید که $f+g$ در $x=1$ حد داشته باشد ولی f و g خیر.

جواب:

توابع $g(x)=2-[x]$ و $f(x)=[x]$

در $x=1$ حد ندارند. اما

$$(f+g)(x)=[x]+2-[x]=2$$

تابع ثابت است و در $x=1$ حد دارد.

قضیه: (حد توابع مثلثاتی)

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی R حد دارند

1) $\lim_{x\to a}\sin(x)=\sin a$

2) $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$

مثال:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+1}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\sin^3 x=\sin^3\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

[illegible] $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

۲) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2\sin x+1}=\frac{\sin\pi}{2\sin\pi+1}=\frac{0}{0+1}=\frac{0}{1}=0$

۳) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin^2 x-\cos^3 x)=\sin^2\frac{\pi}{3}-\cos^3\frac{\pi}{3}$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

تمرینات کتاب حسابان یک صفحه ۱۳۹ حل شود

حتی حاشیه

[illegible]

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرین   صفحه ۱۳۹ حسابان یک

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = (\sqrt{9}-9)^3 = -216$

ب) $\lim_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = 6-4+5 = 7$

پ) $\lim_{x\to -\frac{5}{3}} \frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^2+1)} = \frac{(-\frac{5}{3}+\pi)(3(-\frac{5}{3})+5)}{(3(-\frac{5}{3})+6)((-\frac{5}{3})^2+1)} = 0$

ت) $\lim_{x\to \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi} = 0$

چ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{0}{0+1} = 0$

ث) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})+6(\frac{1}{2})} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

آمار و احتمال   مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com   09176193511

بسم الله الرحمن الرحیم

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x^2-1}=4$.

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{3}=4 \Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x)=12$$

ثابت: $g(x)=12$

غ ث: $g(x)=3x^2$

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-L\right)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x)-L\right)=0$$

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

پایان