

جزوه های آموزشی، حبلان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حمیدی



سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی چهاردهم فروردین هزار چهارصد

مدرس: **مزبان حمیدی**

موضوع: **قضیه های حد- یازدهم ریاضی یک دبیرستان خورسندیان- شیراز**

بزوه ٻي آموزشي، حسابان يک يازدهم رياضي، دڪتر مزبان حبيبي

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

سلام وقت بخير

سال نوصبارت

حسابان يک - يازدهم، رياضيات

ديپارٽمنٽ ڪوئيتا

شعبه ٻي، رڱم فرودين هزار چوٿون، ٨٠٠٠

موضوع: فنديا يک





یادآوری:

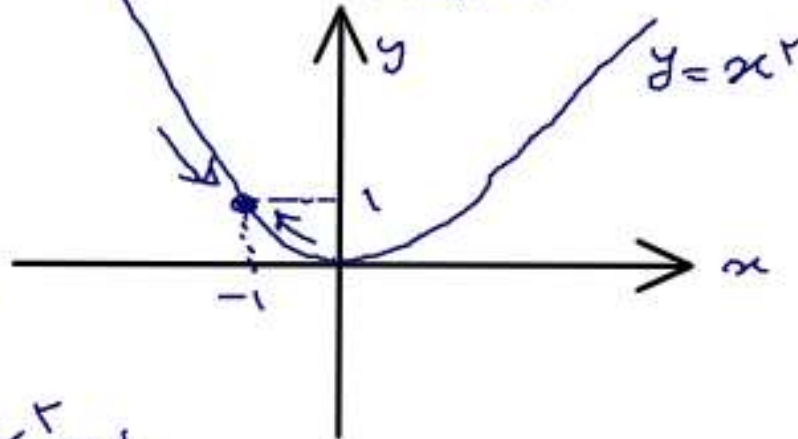
در تابع f در هر نقطه $x=a$ حد راست و حد چپ برابر است و
 آنگاه می‌گوییم در این نقطه حد دارد.

مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2)$ را بیابید و وجود آن را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 = 1$$

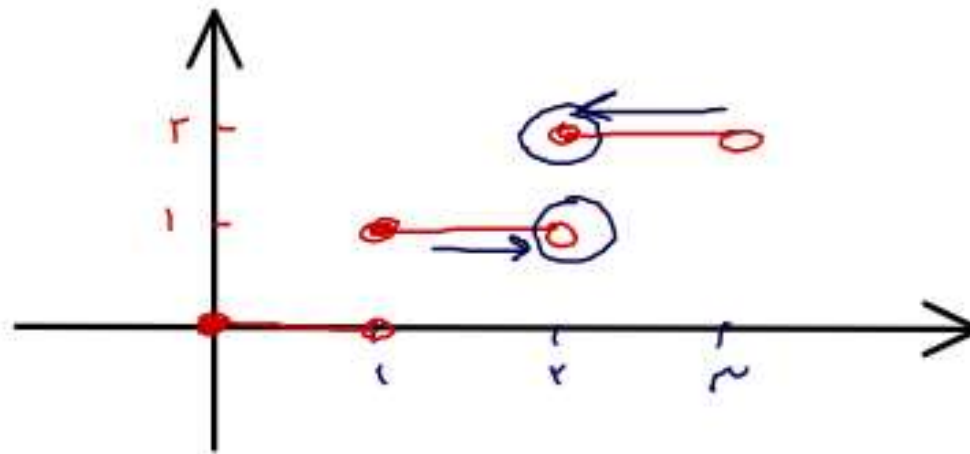
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$





مثال: حد $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ را در صورت وجود بیابید.



$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ 2 \leq x < 3 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$$

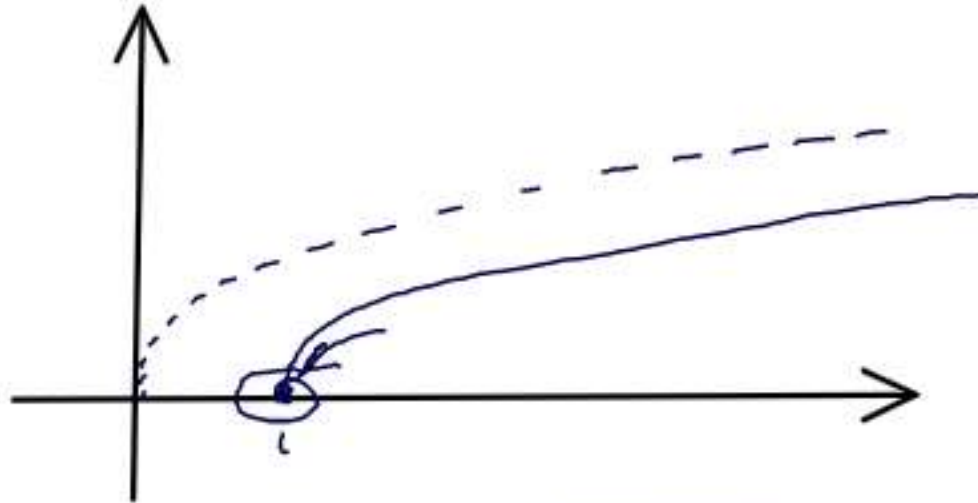
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x] = \text{وجود ندارد}$$

بزه های آموزشی، حبلان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1}$ را در صورت وجود تعیین کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \text{وجود ندارد}$$



قضیه :

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C \quad \text{اگر } C \in \mathbb{R} \text{ و } a \text{ عددی باشد}$$

یعنی: در تابع ثابت، هر کجا عدد لایحه است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{x} = \sqrt{\pi}$$

ب) حد تابع هم‌نام: اگر $f(x) = x$ یک تابع هم‌نامی روی

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{عدد حقیقی. اگر } a \text{ عددی باشد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} x = \sqrt{5}$$



قضیه: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آنگاه

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M+L$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M-L$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \cdot L$

د) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{M}{L} \quad (L \neq 0 \text{ و } g(x) \neq 0)$



نتیجه:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} r x^r = \lim_{x \rightarrow a} r \times \lim_{x \rightarrow a} x^r = r \times r a = r a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{r x + 1}{x^r + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (r x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^r + 1)} = \frac{r}{r}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r}{x^r + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow r} x^r}{\lim_{x \rightarrow r} (x^r + 1)} = \frac{r}{r}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow r} (x - x^r) = \lim_{x \rightarrow r} x - \lim_{x \rightarrow r} x^r = r - r = -r$$



نکته:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} r x^r = \lim_{x \rightarrow a} r \times \lim_{x \rightarrow a} x^r = r \times r a = r^2 a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{r x + 1}{x^r + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (r x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^r + 1)} = \frac{r}{r}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r}{x^r + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow r} x^r}{\lim_{x \rightarrow r} (x^r + 1)} = \frac{r}{r+1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow r} (x - x^r) = \lim_{x \rightarrow r} x - \lim_{x \rightarrow r} x^r = r - r = 0$$



تذکره: اگر $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ باشد یعنی بعضی از

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مثال:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 1) = 3^2 + 2(3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 2(1)^2 - 3(1) + 1 = -4$$

بزه های آموزشی، سلمان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

$$\text{تذکره ۲: اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ آنگاه}$$

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad (L > 0)$$

(توجه: اگر $L = 0$ و $f(x) \geq 0$ رابطه بالا برقرار است.)

$$۳) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{L} \quad (L \neq 0)$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -L$$





مثال :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)^5 = \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) \right)^5 = 2^5 = 32$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x-1)} = \frac{1}{5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x-1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1)} = \sqrt{3} = 3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (-\sqrt{2x}) = - \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x} = -\sqrt{2}$$



حد کوابع سینا و کسینا :

نقشه :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

$$a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$a \neq k\pi$$



مثال :

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{r \sin x + 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{r \sin \frac{\pi}{4} + 1} = \frac{1}{r}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} r \sin x = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \right)^r = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) &= \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} r \sin^2 x - \sin x + 1 &= r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ &= \frac{r}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

بزوه های آموزشی، حبلان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



تعمیرات و عملیات صفحه ۱۳۹ را اصلاح کنید

حساب نایب

۱۳۹

بزه های آموزشی، سلمان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

صفحه ۱۳۹ ص ۱۰۰

تصویر

۱ مقدار حدهای زیر را بیاید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = (\sqrt{9} - 9)^3 = -216$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} (-6x^2 - 4x^3 + 5) = 6 - 4 + 5 = 7$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^2 + 1)} = \frac{(-\frac{5}{2} + \pi)(2(-\frac{5}{2}) + 5)}{(2(-\frac{5}{2}) + 6)((-\frac{5}{2})^2 + 1)} = 0$

ن) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{1 - 2}{2 - 4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 1} = 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2} - \pi} = 0$

ن) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})^2 + 6(\frac{1}{4})} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

آدرس: تهران مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزه های آموزشی، حبلان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



بسم الله الرحمن الرحيم

۲ فرض کنید f یک تابع باشد. به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

ضد

۳ تابع g را به گونه ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{3} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12 \quad \left| \begin{array}{l} g(x) = 12 \\ g(x) = 3x^2 \end{array} \right.$$

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$$

آر و اتال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

بزوه های آموزشی، سلمان یک یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی



پاپان

دکتر مزبان حبیبی

18 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511