سلام

وقت بخیر

جزوه های کلاس های مجازی سیزدهم بهمن نودونه

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: تبدیل در صفحه- هندسه دو یازدهم ریاضی دبیرستان شاهد 12 شیراز

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

هندسه دوم یازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ شیراز

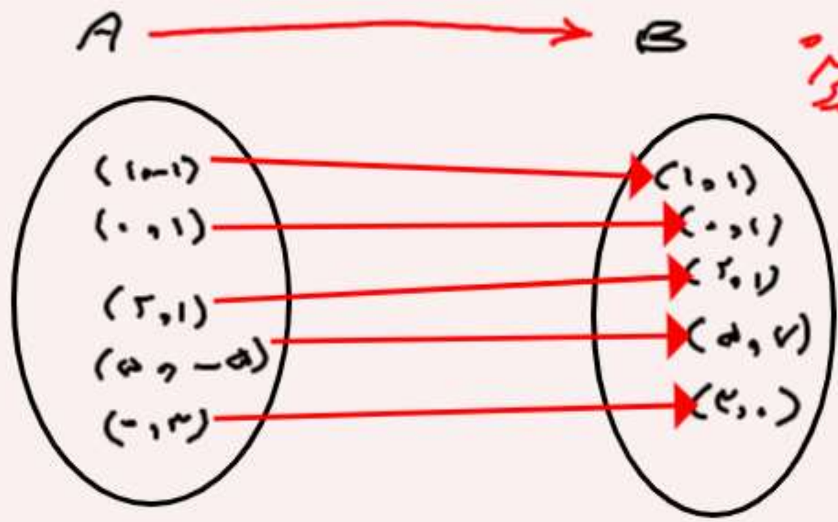
دوشنبه ششم بهمن نود و نه

موضوع:

تبدیل در صفحه

مزبان حبیبی

تبدیل :



تناظر :
هر نقطه از A دقیقاً به یک نقطه B تصویر شده

و :
هر نقطه B دقیقاً تصویر یک نقطه از A است .

تعریف :

هر تبدیل در صفحه P، تابعی است که هر نقطه از صفحه P را دقیقاً به یک نقطه از همان صفحه تصویر کند و برعکس، هر نقطه از صفحه دقیقاً تصویر یک نقطه از همان صفحه باشد.

یا: هر تبدیل یک تابع یک به یک است از صفحه به خودش.

قرارداد: اگر T یک تبدیل روی صفحه P باشد می‌نویسیم:

$$T: P \longrightarrow P$$

و اگر T نقطه A را به نقطه B تصویر کند می‌نویسیم:

$$T(A)=B$$

یا: $T^{-1}(B)=A$

یادآوری:
$f(2)=5 \Rightarrow f^{-1}(5)=2$

مثال: تبدیل $T: P \longrightarrow P$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$T(x,y)=(x+1,\ y-2)$$

1) $T(5,1)=(5+1,\ 1-2)=(6,-1)$

$T^{-1}(6,-1)=(5,1)$

2) $T^{-1}(2,7)=(a,b) \Longrightarrow T(a,b)=(2,7)$

$\Longrightarrow (a+1,\ b-2)=(2,7) \Longrightarrow \begin{cases} a+1=2 \Longrightarrow a=1 \\ b-2=7 \Longrightarrow b=9 \end{cases}$

$T^{-1}(2,7)=(1,9)$

یادآوری :

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$$

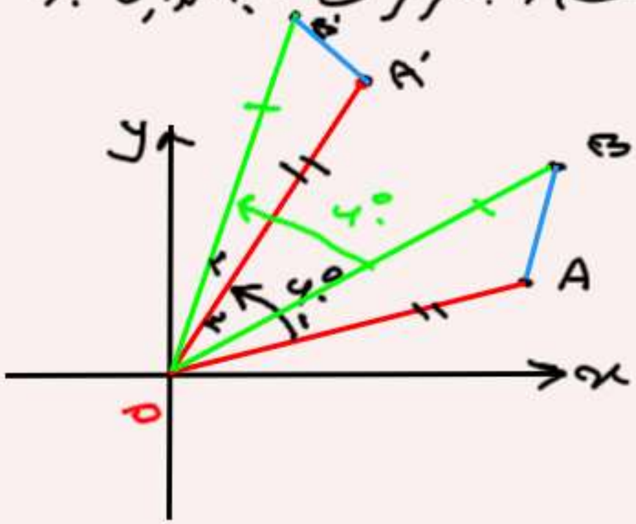
$$f(25)=\frac{3(25)-1}{25+2}=\frac{74}{27}$$

$$f(25)=\frac{74}{27}\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{74}{27}\right)=25$$

$$f(3)=\frac{3(3)-1}{3+2}=8/5\longrightarrow f^{-1}(8/5)=3$$

$$f(2)=\frac{5}{4}\Longrightarrow f^{-1}(5/4)=2$$

مثال: فرض کنید T یک تبدیل در صفحه باشد که هر نقطه را به مرکز O به اندازه 60° دوران می دهد.



$$T(A) = A'$$

$$(OA = OA' \,,\ \widehat{AOA'} = 60^\circ)$$

$$T(B) = B'$$

$$(OB = OB' \ \text{و}\ \widehat{BOB'} = 60^\circ)$$

تمرین: درستی تساوی را ثابت کنید $AB = A'B'$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 90^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ O_1 = O_2 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

تبدیل ایزومتری: (طولپا)

تبدیلی است که طول پاره خط (فاصله بین دو نقطه) را حفظ می کند

یا: تبدیل T را ایزومتری می گویند، هرگاه: اگر $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ آنگاه

$$AB = A'B'$$

یعنی: فاصله بین دو نقطه با فاصله بین تصویرهایشان برابر باشد.

تمرین: ثابت کنید در تبدیل ایزومتری، اندازه زاویه حفظ می‌شود.

اثبات: فرض کنید $\hat{A'}$ تصویر زاویه $\hat{A}$ تحت T باشد.

دو نقطه B و C را روی اضلاع A انتخاب می‌کنیم.

$T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$

چون T ایزومتری است $\Longrightarrow$ $AB=A'B'$ و $AC=A'C'$ و $BC=B'C'$ $\Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

پس $\hat{A}=\hat{A'}$.

نتیجه : در تبدیل ایزومتری ، مساحت حفظ می‌شود .

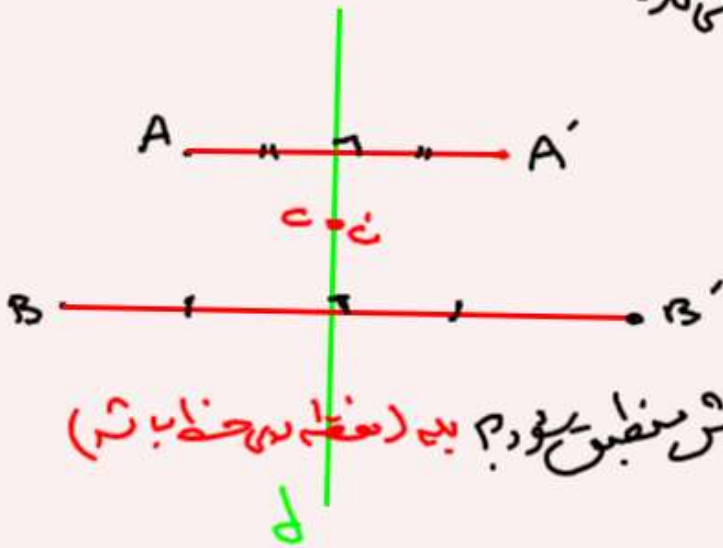
یعنی : مساحت هر شکل در تبدیل ایزومتری، با مساحت تصویرش برابر است.

تذکر: تصویر هر شکل تحت تبدیل ایزومتری، با خودش هم نهشت است .

مثال: خط d ثابت را در صفحه بگیرید.

فرض کنید T، هر نقطه را نسبت به خط d قرینه می‌کند.

$T(A) \equiv$ قرینه‌ی A نسبت به خط d



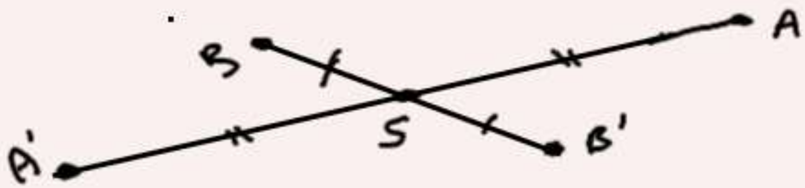
سؤال ۱: آیا این تبدیل ایزومتری است؟ بله

سؤال ۲: آیا نقطه‌ای هست که تصویرش بر خودش منطبق شود؟ بله (نقطه‌ی روی خط باشد)

تعریف: اگر $T(A)=A$ آنگاه نقطه A را یک نقطه ثابت T می‌گویند.

مثال: در تقارن نسبت به خط d، نقطه‌های روی خط d، نقطه ثابت هستند.

مثال: در تقارن نسبت به نقطه S، نقطه S نقطه ثابت است.



خسته نباشید

پایان

بسم الله الرحمن الرحیم

سلام، وقت بخیر

هندسه دو یازدهم ریاضی

دبیرستان شاهد ۱۲ شیراز

دوشنبه سیزدهم بهمن نود و نه ساعت ۹:۰۰

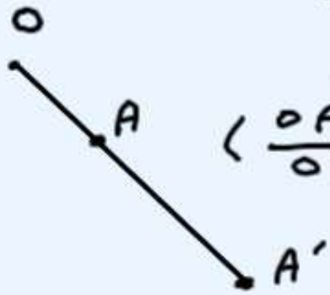
موضوع :

تبدیل‌ها در صفحه

مزبان حبیبی

تجانس (تشابه): نقطه ثابت O و عدد حقیقی k را در نظر بگیرید. $(k \neq 0)$

تجانس به مرکز O و نسبت k، تبدیلی است که برای هر نقطه A و تصویر آن A'، دو شرط زیر برقرار است.



۱) O و A و A' روی یک خط هستند.

۲) $OA' = k \cdot OA \quad \left(\frac{OA'}{OA} = k\right)$

توجه:

$|k| > 1 \Rightarrow OA' > OA$

$|k| < 1 \Rightarrow OA' < OA$

انواع تجانس:

انبساط ⇐ تصویر هر شکل از خودش بزرگتر است ← $|k|>1$

انقباض ⇐ تصویر هر شکل، از خودش کوچکتر است ← $|k|<1$

$k>0 \Rightarrow$ تجانس را مستقیم

$k<0 \Rightarrow$ تجانس را غیرمستقیم (معکوس)

$k=1 \Rightarrow$ تجانس در واقع همان تبدیل همانی است

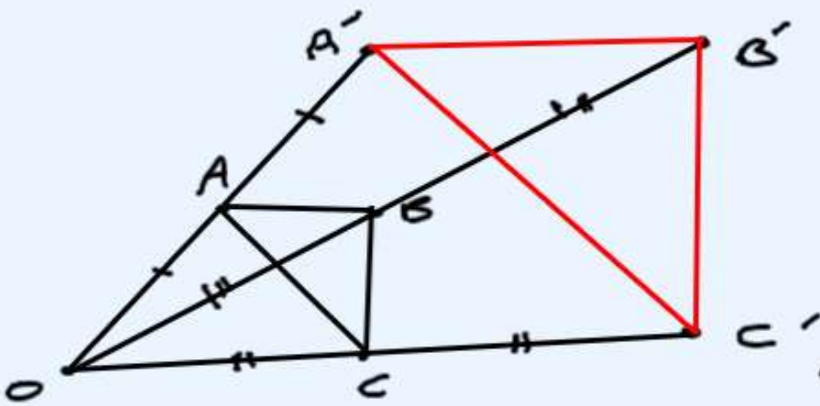
$k=-1 \Rightarrow$ تجانس در حقیقت یک بازتاب نسبت به O است

تذکر:

اگر $k=0$ آنگاه تجانس به مرکز O و نسبت تجانس صفر، همه نقاط را به O تصویر می‌کند و در واقع یک تبدیل ثابت است. (سیاهچاله)

تمرین: در شکل زیر مثلث ABC و نقطه ثابت O داده شده است.

الف) مجانس مثلث ABC را تحت تجانس به مرکز O و نسبت $k=2$ رسم کنید



ب) چرا $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ؟

چون $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=2$

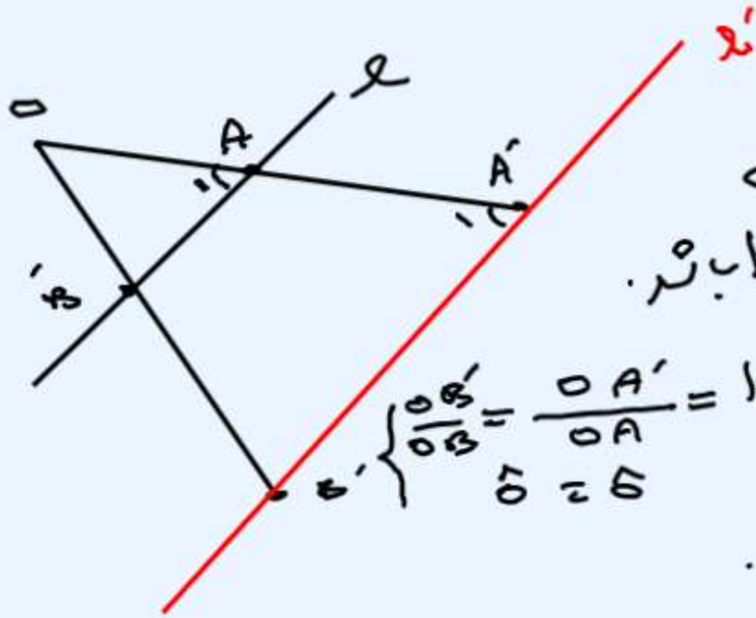
ج) نسبت مساحت های دو مثلث چقدر است؟

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2=2^2=4$$

تمرین: ثابت کنید، تجانس شیب خط را حفظ می کند.

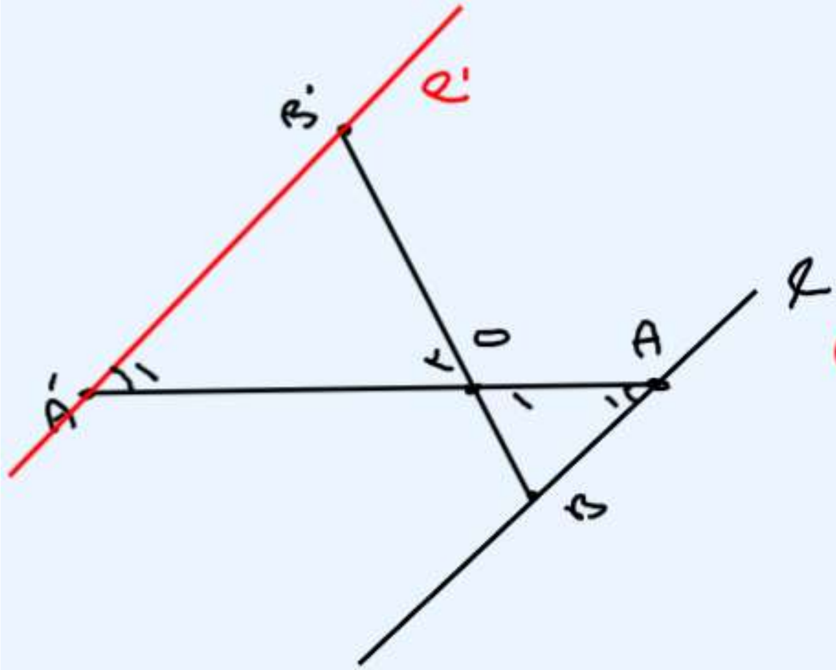
اثبات: تجانس مستقیم:

فرض کنیم خط l' تصویر خط l تحت تجانس به مرکز O و با نسبت تجانس k باشد.



$$\begin{cases} \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OA'}{OA} = k \\ \hat{O} = \hat{O} \end{cases} \Longrightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B'$$

پس $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ در نتیجه $l' \parallel l$.



تجانس معکوس:

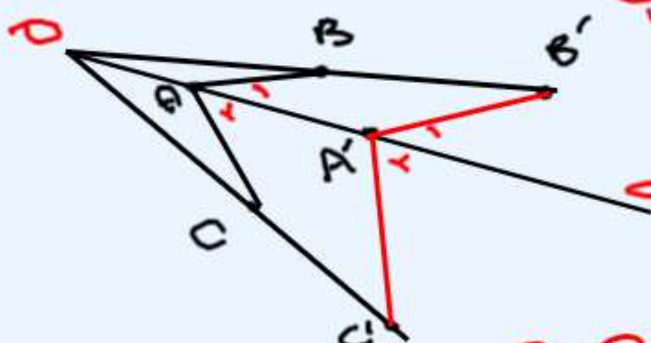
فرض کنیم ℓ' تصویر خط ℓ تحت تجانس معکوس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد $(k<0)$

$$\begin{cases} \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = |k| \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B'$$

که $\hat{A}_1 = \hat{A'}_1$ در نتیجه $\ell \parallel \ell'$.

تمرین: ثابت کنید، تبدیل تجانس، اندازه زاویه را حفظ می کند.

اثبات: فرض کنید $\hat{A'}$ مجانس زاویه $\hat{A}$ در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد.



AB مجانس $A'B'$ است $\Longrightarrow AB \parallel A'B'$

$\xrightarrow{\text{مورب } AA'} \hat{A}_1 = \hat{A'}_1$ (1)

AC مجانس $A'C'$ است $\Longrightarrow AC \parallel A'C'$

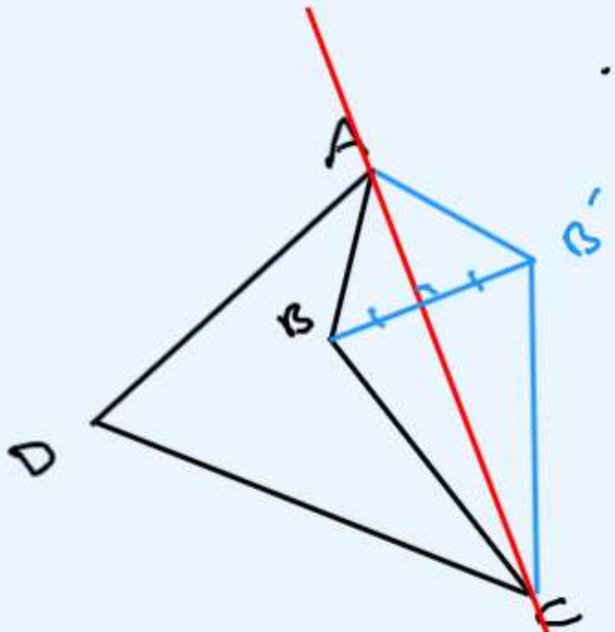
$\Longrightarrow \hat{A}_2 = \hat{A'}_2$ (2)

$(1)+(2) \Longrightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A'}_1 + \hat{A'}_2 \Longrightarrow B\hat{A}C = B'\hat{A'}C'$

تمرینات کتاب صفحه ۵۰ و صفحه ۵۱

تکلیف

مسأله ۱ : زمینی به شکل زیر را حصارکشی کرده ایم.
اگر بخواهیم با همین حصارکشی و همین محیط،
زمینی بزرگتر که را حصارکشی کنیم. آیا امکان پذیر است؟

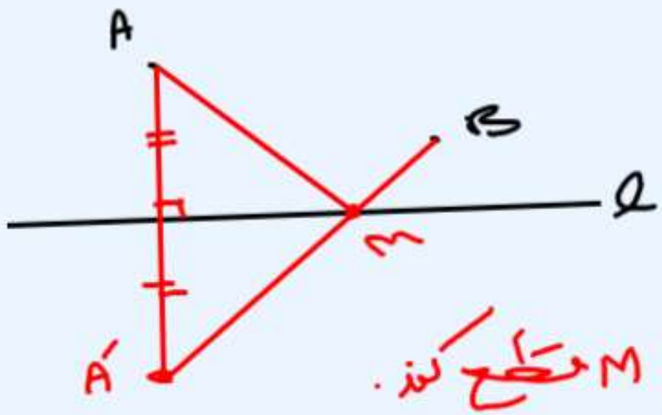


جواب: بازتاب B نسبت به خط AC را B' بنامیم.

چون بازتاب ایزومتری است:
$AB = A'B'$
$CB = CB'$

در نتیجه:
محیط $ABCD$ = محیط $AB'CD$ و $S_{AB'CD} > S_{ABCD}$.

مسئله: دو نقطه A و B و خط l را در نظر بگیرید.
نقطه M روی خط l را چنان بیابید که
$MA+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.

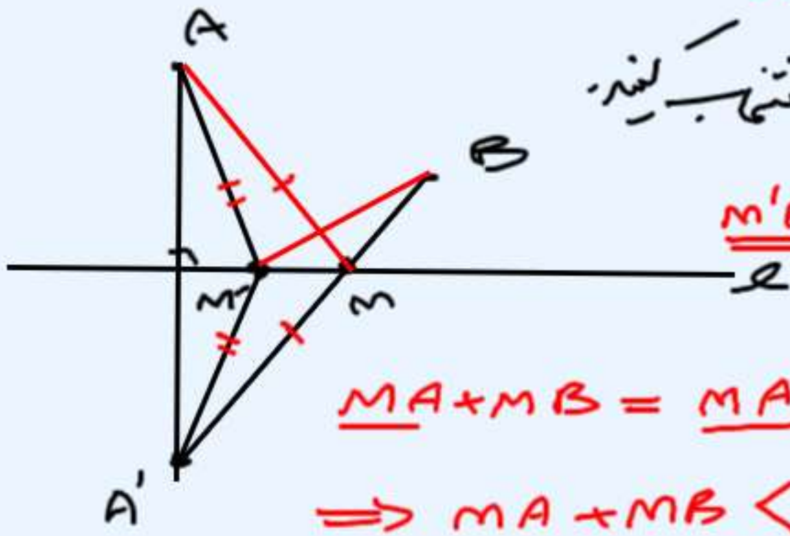


حل:

یافتن M: قرینه A نسبت به l را A' بنامید
B را به A' وصل کنید تا l را در M قطع کند.

اثبات کمترین مقدار بودن : $MA+MB$

نقطه‌ای دلخواه مانند M' که غیر از M است روی l انتخاب کنید.



l عمود منصف AA' است پس $M'A=M'A'$

$$MA+MB = MA'+MB = A'B < M'B+M'A'$$

$$\Rightarrow MA+MB < M'B+M'A \quad \checkmark$$

خسته نباشید

پایان